

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

SALAH HORCHANI

## **Sur un nouveau groupe de symétrie de la mécanique quantique relativiste**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 15, n° 4 (1971), p. 321-349

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1971\\_\\_15\\_4\\_321\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__15_4_321_0)

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur un nouveau groupe de symétrie de la mécanique quantique relativiste

par

Salah HORCHANI

Laboratoire de Physique Mathématique, Département de Mathématique,  
Faculté des Sciences, 6, boulevard Gabriel, 21-Dijon (France).

---

**SOMMAIRE.** — On propose un nouveau groupe de symétrie de la mécanique quantique relativiste noté  $P_2$ , tel que (dans les représentations physiques qu'on précisera) :

a) Parmi les observables, choisies dans les représentants des éléments de son algèbre de Lie, apparaisse un quadri-opérateur position  $\underline{Q} = (Q^\alpha)$  local et covariant, donnant naissance à une observable temps propre qui, comme l'observable masse, ne soit pas un invariant.

b) Les composantes du vecteur impulsion-énergie et les composantes de  $\underline{Q}$  vérifient des relations de Heisenberg généralisées.

c)  $P_2$  soit le groupe minimal ayant ces propriétés.

**ABSTRACT.** — We use a new symmetry group of relativistic quantum mechanics, which we call  $P_2$ . This group is such that (in the representations which we consider):

a) Within the observables chosen among representants of its Lie algebra, there appears a four-vector position operator  $\underline{Q} = (Q^\alpha)$  local and covariant. From this quadri-operator, one obtains an observable proper-time, which, such as the mass observable, is not an invariant.

b) The components of the energy-momentum vector, and the components of  $\underline{Q}$  verify generalized Heisenberg relations.

c)  $P_2$  is the minimal group which has these properties.

## I. — INTRODUCTION

La description d'un système quantique peut être effectuée soit par la donnée de son hamiltonien, soit alors par la donnée d'un certain groupe de symétrie. L'emploi de cette seconde approche s'est révélée féconde en fournissant des résultats assez satisfaisants pour un grand nombre de systèmes quantiques dont le plus populaire, et qui fut d'ailleurs le premier à être étudié, est l'exemple de l'atome d'hydrogène [1]. Depuis, l'intérêt de tels groupes ne fait que croître à cause de leurs applications dans le domaine des particules élémentaires [2], d'autant plus que dans ce domaine, la dynamique nous est totalement inconnue.

Dans la théorie des particules, le mouvement externe est supposé invariant sous le groupe de Poincaré (ou plutôt son recouvrement universel pour avoir les spins demi-entiers) qui permet de définir le concept de particules élémentaires et en donne une première classification via les degrés de liberté externes, à savoir la masse, le spin et la parité. D'un autre côté, les groupes de symétrie interne permettent de classer les particules en multiplets qui, eux-mêmes, sont assemblés en supermultiplets. Les deux symétries ont été traitées, dans un premier temps, indépendamment l'une de l'autre; ce qui amena les nombres quantiques du groupe de symétrie interne  $SU(3)$ , par exemple (plus précisément le spin isotopique  $I$ , sa projection  $I_3$  et l'hypercharge  $Y$ ) à n'avoir aucune connexion avec les nombres quantiques externes. Autrement dit, tous les membres d'un même supermultiplet  $SU(3)$  devraient avoir la même masse, spin et parité. Or, dans la réalité, on observe des différences de masse supérieures à 100 MeV, phénomène connu parmi les physiciens sous le nom de « dégénérescence de masse ». Il se pose alors la question de savoir quelle peut être la connexion entre les deux symétries. Formulé mathématiquement, le problème apparaît ainsi : étant donné un groupe externe  $G$  (qui doit contenir le groupe de Poincaré, ou ayant une « limite » contenant ce dernier) et un groupe interne  $S$  (qu'on suppose semi-simple), trouver un groupe de symétrie global  $H$  qui les contient tous les deux d'une manière « économique » (pour éviter les observables superflues) et les connecte de façon à avoir des résultats compatibles avec l'expérience. Les premières tentatives n'ont donné que des résultats négatifs se rapportant essentiellement aux problèmes structurels [3]. Une solution satisfaisante a été proposée par Flato et Sternheimer [4] qui, après avoir éliminé la connexion par extension en prouvant que toute extension de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{F}$  du groupe de Poincaré par une algèbre de Lie semi-simple est triviale, donc physiquement inacceptable, ont introduit la notion d'uni-

fication d'algèbres de Lie, notion qui fait jouer à  $G$  et à  $S$  des rôles symétriques et qui élimine de prime abord, les symétries internes compactes telles que  $SU(3)$ .

On s'est intéressé jusqu'ici essentiellement aux problèmes de structure. Aussi, si on veut obtenir des résultats sur les masses des particules par exemple, ou décrire simplement le spectre de certains opérateurs, on doit considérer également le problème du spectre de certains éléments dans une représentation donnée, problème que nous reprendrons dans le cadre du spectre de masse.

Nous allons traiter dans cet article un formalisme externe basé sur un groupe qui, pour conserver les principes fondamentaux de la relativité restreinte, contient le groupe de Poincaré. Les générateurs supplémentaires seront interprétés comme étant le quadrivecteur position, ce qui nous permettra de quantifier l'espace temps. Étant donné que les observables temps propre et masse ne seront pas des invariants, nous allons retrouver le même problème spectral que celui qui se pose pour le spectre de ce dernier dans l'unification des symétries externes et internes.

Le concept d'observable position, comme d'ailleurs celui de spin intrinsèque, a été considéré, en physique quantique non relativiste ou relativiste, sous divers aspects. En effet, si on considère que la position d'une particule individuelle comme étant une observable, il est nécessaire, d'après les principes de la mécanique quantique, de la réaliser comme un opérateur self-adjoint sur l'espace de Hilbert des états physiques. La construction d'un tel opérateur a été l'un des problèmes principaux de la mécanique quantique non relativiste. On sait maintenant, d'après Heisenberg, qu'une réponse satisfaisante est donnée par l'opérateur conjugué de l'opérateur impulsion. Sa construction, dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, a reçu une grande variété de développements, souvent contradictoires comme on peut le juger à travers les différents travaux qui sont apparus sur la question. On trouvera les différents points de vue dans [5]-[15]. La difficulté provient essentiellement de l'existence d'un conflit entre la localité et la covariance (\*), conflit dû principalement au spin de la particule et au moment angulaire intrinsèque des systèmes fermés, comme l'a fait remarquer Fleming [9]. Aussi, l'existence de particules de masse nulle et de spin non nul, telles que le photon, pose des difficultés, comme il ressort de l'article de Newton-Wigner [6] où ils introduisent la localisation. Cette

---

(\*) Un quadri-opérateur  $A = (A^\alpha)$  est dit local si ses composantes commutent et covariant si elles se transforment comme celles d'un quadri-vecteur sous l'effet des transformations de Lorentz.

dernière notion a été reformulée par la suite par Wightman [7] en l'adaptant à celle de système d'imprimitivité [16]. Si on représente par  $(\vec{a}, R)$  l'élément générique du groupe euclidien à 3 dimensions,  $\mathcal{H}_t$  l'espace de Hilbert des états d'un système quantique à l'instant  $t$ ,  $U_t(\vec{a}, R)\varphi_t$  l'état transformé de  $\varphi_t \in \mathcal{H}_t$  par action de la transformation  $(\vec{a}, R)$ . les postulats de sa localisation sont les suivants :

a) A tout couple  $(t, \Delta)$ , où  $\Delta$  est un borélien de  $R^3$ , est associé un projecteur  $E_{\Delta,t}$  dans  $\mathcal{H}_t$  qui correspond à la proposition « Le système est localisé dans  $\Delta$  à l'instant  $t$  », tel que

$$E_{R^3,t} = I$$

b) Si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont disjoints, alors  $E_{\Delta_1,t}$  et  $E_{\Delta_2,t}$  projettent sur deux sous-espaces orthogonaux.

$$c) E_{\Delta_1 \cap \Delta_2,t} = E_{\Delta_1,t} E_{\Delta_2,t}$$

$$d) E_{R\Delta + \vec{a},t} = U_t(\vec{a}, R) E_{\Delta,t} U_t(\vec{a}, R)^{-1}$$

e) Si  $U_t(T)$  est l'opérateur représentant l'inversion du temps dans  $\mathcal{H}_t$  :  $E_{\Delta,t} U_t(T) = U_t(T) E_{\Delta,t}$  pour tout borélien  $\Delta$ .

On prouve alors que les particules massives sont localisées en ce sens. Malheureusement, il n'est pas de même pour les particules de masse nulle; pour résoudre cette difficulté, Jauch et Piron [10] ont introduit la notion de « localisation faible » en substituant au postulat c), qui implique en particulier la commutativité des  $E_{\Delta,t}$ , le suivant

$$c') E_{\Delta_1 \cap \Delta_2,t} = E_{\Delta_1,t} \cap E_{\Delta_2,t}$$

où le second membre de cette égalité représente le projecteur sur le sous-espace  $E_{\Delta_1,t}(\mathcal{H}_t) \cap E_{\Delta_2,t}(\mathcal{H}_t)$ .

Remarquons enfin que le concept de localisation implique certaines restrictions sur les représentations physiques du groupe de symétrie considéré. Ainsi, dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste, les représentations projectives triviales du groupe de Galilée sont incompatibles avec la localisation [17].

## II. — DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DU GROUPE $P_2$

La première condition qu'on va exiger du groupe de symétrie cherché est qu'il admette quatre générateurs infinitésimaux ( $Q^a$ ) qui puissent être interprétés comme étant le quadrivecteur position local et covariant. Autre-

ment dit, on doit avoir les relations de commutation suivantes (\*) :

$$\begin{aligned} [Q^\alpha, Q^\beta] &= 0 \\ [M^{\alpha\beta}, Q^\gamma] &= g^{\beta\gamma}Q^\alpha - g^{\alpha\gamma}Q^\beta \end{aligned} \tag{1}$$

En outre, il doit contenir le groupe de Poincaré.

Le groupe minimal simplement connexe possédant ces propriétés est le groupe (\*\*)

$$P_2 = SL(2, C) \cdot (T_4 \oplus T'_4)$$

où :

— Les symboles  $\cdot$  et  $\oplus$  désignent respectivement le produit semi-direct et le produit direct.

—  $T_4$  et  $T'_4$  sont les deux groupes abéliens à 4 dimensions engendrés respectivement par les  $(P^\alpha)$  et les  $(Q^\beta)$ .

Son algèbre de Lie  $\mathfrak{P}_2$  est donnée par les relations (1) et (A-4). Aussi  $P_2$  est une inhomogénéisation [19] de  $SL(2, C)$  relativement à la représentation

$$D(1/2, 1/2) \oplus D(1/2, 1/2).$$

Si on représente l'élément générique  $g$  de  $P_2$  par le triplet

$$g = (\underline{a}, \underline{b}, A)$$

où

$$\underline{a}, \underline{b} \in R^4 \quad \text{et} \quad A \in SL(2, C)$$

La loi de groupe va s'écrire :

$$(\underline{a}_1, \underline{b}_1, A_1)(\underline{a}_2, \underline{b}_2, A_2) = (\underline{a}_1 + \Lambda(A_1)\underline{a}_2, \underline{b}_1 + \Lambda(A_1)\underline{b}_2, A_1A_2) \tag{2}$$

L'élément neutre est donné par :

$$e = (0, 0, I) \tag{3}$$

et l'inverse par :

$$(\underline{a}, \underline{b}, A)^{-1} = (-\Lambda(A)^{-1}\underline{a}, -\Lambda(A)^{-1}\underline{b}, A^{-1}) \tag{4}$$

$P_2$  est le groupe de recouvrement universel du groupe  $SO_0(3, 1) \cdot (T_4 \oplus T'_4)$  dont les éléments seront notés

$$(\underline{a}, \underline{b}, \Lambda) \quad \text{où} \quad \underline{a}, \underline{b} \in R^4 \quad \text{et} \quad \Lambda \in SO_0(3, 1)$$

(\*) Pour les notations, voir Appendice. Pour d'autres propriétés du groupe de Poincaré, voir [18].

(\*\*) Sauf mention du contraire, les lettres majuscules d'imprimerie désigneront les groupes, les lettres anglaises correspondantes, leur algèbre de Lie.

c'est un revêtement d'ordre 2 :  $(a, b, \pm A)$  déterminent le même élément  $(a, b, \Lambda(A))$ .

Les relations de commutation entre les  $(P^\alpha)$  et les  $(Q^\beta)$  sont données par

$$[P^\alpha, Q^\beta] = 0 \quad (5)$$

Afin de pouvoir considérer le groupe  $P_2$  comme un groupe de symétrie, nous devons étudier ses représentations projectives. Mais auparavant, nous allons rappeler les principaux résultats, aussi bien physiques que mathématiques, de cette théorie qui est due principalement à Wigner [20] et à Bargmann [21].

L'état d'un système quantique est décrit par un rayon  $\vec{f}$  qui, par définition, est l'ensemble de tous les éléments de la forme  $\tau f_0$  où  $f_0$  est un vecteur unitaire d'un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  et  $\tau$  un nombre complexe de module l'unité. La probabilité de transition d'un état  $\vec{f}$  à un état  $\vec{g}$  est donnée par  $|\langle f, g \rangle|^2$  où  $f$  et  $g$  sont deux représentants quelconques des classes  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$ . A chaque transformation  $g$  du groupe de symétrie du système va correspondre une application biunivoque de l'ensemble des états physiques du système sur lui-même : chaque rayon  $\vec{f}$  est appliqué sur un rayon  $\vec{f}'$ ; cette application  $\vec{f} \mapsto \vec{f}'$  doit conserver évidemment les probabilités de transition. Un résultat dû à Wigner [22] affirme que la correspondance entre rayons ainsi définie peut toujours être réalisée par une correspondance entre vecteurs de l'espace de Hilbert au moyen d'un opérateur unitaire ou anti-unitaire  $U_g$ . L'opérateur  $U_g$  pourrait être remplacé par  $\tau U_g$ , où  $\tau$  est un nombre complexe quelconque de module l'unité, sans changer en rien la correspondance entre rayons. On peut donc considérer  $U_g$  comme étant le représentant d'un opérateur rayon  $\vec{U}_g$  (ensemble de tous les opérateurs de la forme  $\tau U_g$ ) qu'on pourra choisir d'une façon commode. Si  $g$  et  $g'$  sont deux éléments du groupe de symétrie  $G$  du système, on associe à chacun d'eux un opérateur représentatif  $U_g$  et  $U_{g'}$ . Les considérations ci-dessus conduisent à la relation

$$U_g U_{g'} = \omega(g, g') U_{gg'} \quad (6)$$

où  $\omega(g, g')$  est un nombre complexe de module l'unité appelé facteur local. Si  $G$  est connexe, on en déduit que  $U_g$  est unitaire.

Plus généralement, on appelle représentation projective d'un groupe  $G$  une application de  $G$  dans l'ensemble des opérateurs inversibles d'un espace de Hilbert qui envoie  $g$  sur  $U_g$  et vérifiant (6). Deux représentations projectives  $U_g$  et  $V_g$  sont dites équivalentes si  $U_g = \varphi(g) V_g$  pour tout  $g$ , où

$|\varphi(g)| = 1$ ; dans ces conditions, les facteurs locaux, correspondant respectivement à  $U_g$  et  $V_g$ , sont dits également équivalents.

Si on veut déterminer tous les systèmes quantiques qui admettent  $G$  pour groupe de Symétrie, on doit déterminer toutes les représentations projectives unitaires ou antiunitaires du groupe  $G$ .

Dans l'analyse de Bargmann, un rôle fondamental est joué par l'exposant infinitésimal  $X$ . Il est défini pour chaque couple d'éléments de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  du groupe de Lie par la relation

$$X(A, B) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} [\xi((\tau a)(\tau b), (\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}) + \xi(\tau a, \tau b) + \xi(-\tau a, -\tau b)] \quad (7)$$

au voisinage de l'unité, où  $\xi$  est l'exposant local défini par

$$\varphi(g, g') = e^{i\xi(g, g')} \quad (8)$$

ce dernier vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(g_1, g_2) + \xi(g_1 g_2, g_3) = \xi(g_1, g_2 g_3) + \xi(g_2, g_3) \quad \text{et} \quad \xi(e, e) = 0 \quad (9)$$

On trouve que  $X$  est une forme bilinéaire antisymétrique réelle sur  $\mathfrak{G}$  qui vérifie la relation

$$dX(A, B, C) = X([A, B], C) + X([B, C], A) + X([C, A], B) = 0 \quad (10)$$

Inversement, toute forme bilinéaire réelle antisymétrique sur une algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  vérifiant (10) est appelée exposant infinitésimal de l'algèbre de Lie ou du groupe de Lie correspondant.

Deux exposants locaux  $\xi$  et  $\xi'$  sont dits équivalents s'il existe une fonction  $\zeta(g)$  définie et continue sur un voisinage de l'unité telle que

$$\xi(g, g') = \xi'(g, g') + \Delta_{g, g'}[\zeta] \quad (11)$$

avec

$$\Delta_{g, g'}[\zeta] = \zeta(g) + \zeta(g') - \zeta(gg') \quad (12)$$

De même, deux exposants infinitésimaux  $X$  et  $X'$  sont dits équivalents s'il existe une forme linéaire réelle  $\Sigma$  sur  $\mathfrak{G}$  telle que

$$X(A, B) - X'(A, B) = \Sigma([A, B]) \quad (13)$$

Ces relations d'équivalence sont telles qu'à deux facteurs (respectivement exposants) locaux équivalents, correspondent deux exposants locaux (respectivement infinitésimaux) équivalents et réciproquement. Donc, pour déterminer tous les facteurs locaux, il suffit de déterminer tous les exposants infinitésimaux.



Soient  $P$  et  $P'$  les deux sous-groupes de  $P_2$  engendrés respectivement par  $(M^{\alpha\beta}, P^\gamma)$  et  $(M^{\alpha\beta}, Q^\gamma)$ , on a alors le

LEMME 1. — *Tout exposant infinitésimal  $X$  de  $\mathfrak{F}_2$  est équivalent à un exposant infinitésimal  $Y$  tel que :*

$$Y(A, B) = 0 \quad \text{pour tout couple } (A, B) \in \mathfrak{F} \text{ ou } \mathfrak{F}' \quad (14)$$

*Démonstration.* — Les deux sous-groupes  $P$  et  $P'$  sont isomorphes au groupe de Poincaré qui ne possède, d'après Bargmann que des représentations projectives triviales (\*), c'est-à-dire  $\omega(g, g') = 1$ . Aussi, si  $X$  est un exposant infinitésimal de  $P_2$ , il existe deux formes linéaires réelles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  respectivement sur les deux algèbres de Lie  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{F}'$  telles que

$$X(M^{\alpha\beta}, M^{\alpha\delta}) = \Sigma_1([M^{\alpha\beta}, M^{\alpha\delta}]) \quad (15 a)$$

$$X(M^{\alpha\beta}, P^\alpha) = \Sigma_1([M^{\alpha\beta}, P^\alpha]) \quad (15 b)$$

$$X(M^{\alpha\beta}, M^{\alpha\delta}) = \Sigma_2([M^{\alpha\beta}, M^{\alpha\delta}]) \quad (15 c)$$

$$X(M^{\alpha\beta}, Q^\alpha) = \Sigma_2([M^{\alpha\beta}, Q^\alpha]) \quad (15 d)$$

ce qui donne, à partir des relations (A-4 a), (15 a) et (15 c)

$$g_{\alpha\alpha}\Sigma_1(M^{\beta\delta}) = -g_{\alpha\alpha}\Sigma_2(M^{\beta\delta})$$

d'où

$$\Sigma_1(M^{\beta\delta}) = \Sigma_2(M^{\beta\delta})$$

considérons alors la forme linéaire réelle  $\Sigma$  définie sur  $\mathfrak{F}_2$  par :

$$\Sigma(M^{\beta\delta}) = \Sigma_1(M^{\beta\delta}) = \Sigma_2(M^{\beta\delta}) \quad , \quad \Sigma(P^\alpha) = \Sigma_1(P^\alpha) \quad , \quad \Sigma(Q^\alpha) = \Sigma_2(Q^\alpha) \quad (16)$$

et l'application bilinéaire antisymétrique réelle  $Y$  définie sur  $\mathfrak{F}_2$  par

$$Y(P^\alpha, Q^\beta) = X(P^\alpha, Q^\beta) \quad (17)$$

$Y = 0$  pour tous les autres couples,

$Y$  vérifie la relation (10), en effet :

a)  $dY(A, B, C) = 0$  pour tout triplet appartenant ou bien à  $\mathfrak{F}$  ou bien à  $\mathfrak{F}'$  puisque les restrictions de  $Y$  à ces deux algèbres de Lie sont nulles.

b)  $dY(A, B, C) = 0$  pour tout triplet ne faisant intervenir que des  $P^\alpha$  et des  $Q^\beta$ , d'après les relations de commutation de  $\mathfrak{F}_2$  et la bilinéarité de  $Y$ .

---

(\*) Nous devons être plus précis ici : si on considère, non pas  $P$ , mais le groupe  $SO_0(3,1).T_4$ ,  $\omega(g, g') = \pm 1$ , d'après les résultats de Wigner-Bargmann; ambiguïté de signe qui se manifeste par l'apparition de spins demi-entiers et qui est due au fait que ce groupe est doublement connexe.

c) Il reste donc à vérifier que

$$dY(M^{\alpha\beta}, P^\gamma, Q^\delta) = 0$$

on obtient, à partir de la relation (5)

$$\begin{aligned} dY(M^{\alpha\beta}, P^\gamma, Q^\delta) &= Y([M^{\alpha\beta}, P^\gamma], Q^\delta) + Y([Q^\delta, M^{\alpha\beta}], P^\gamma) \\ &= X([M^{\alpha\beta}, P^\gamma], Q^\delta) + X([Q^\delta, M^{\alpha\beta}], P^\gamma) \\ &= dX(M^{\alpha\beta}, P^\gamma, Q^\delta) = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que Y est un exposant infinitésimal de P<sub>2</sub>.

Les relations (5), (15), (16) et (17) permettent d'écrire :

$$X(A, B) - Y(A, B) = \Sigma([A, B]) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}_2$$

donc les deux exposants infinitésimaux X et Y sont équivalents.

LEMME 2. — Pour qu'une forme bilinéaire antisymétrique réelle Y définie sur  $\mathcal{F}_2$  et vérifiant (14) soit un exposant infinitésimal, il faut et il suffit que l'on ait

$$Y(P^\alpha, Q^\beta) = g^{\alpha\beta} r \tag{18}$$

où r est un nombre réel.

Démonstration. — Soit Y un tel exposant infinitésimal; il vérifie alors la relation (10), ce qui implique en particulier

a)  $dY(M^{\alpha\beta}, P^\alpha, Q^\delta) = Y([M^{\alpha\beta}, P^\alpha], Q^\delta) + Y([Q^\delta, M^{\alpha\beta}], P^\alpha) = 0$   
 si l'on prend  $\delta \neq \alpha$  et  $\delta \neq \beta$ , il vient

$$Y([M^{\alpha\beta}, P^\alpha], Q^\delta) = -g^{\alpha\alpha} Y(P^\beta, Q^\delta) = 0$$

d'où

$$Y(P^\beta, Q^\delta) = 0 \quad \text{pour} \quad \beta \neq \delta$$

b)  $dY(M^{\alpha\beta}, P^\beta, Q^\alpha) = Y([M^{\alpha\beta}, P^\beta], Q^\alpha) + Y([Q^\alpha, M^{\alpha\beta}], P^\beta) = 0$  d'où

$$g^{\beta\beta} Y(P^\alpha, Q^\alpha) + g^{\alpha\alpha} Y(Q^\beta, P^\beta) = 0$$

si  $\beta = 0, \alpha = i = 1, 2, 3$ , on obtient

$$Y(P^i, Q^i) - Y(Q^0, P^0) = 0$$

ce qui donne

$$Y(P^0, Q^0) = -Y(P^i, Q^i) = r$$

où r est un nombre réel.

Inversement, soit Y une forme bilinéaire antisymétrique réelle vérifiant

les relations (14) et (18). Pour démontrer que c'est un exposant infinitésimal, il suffit de prouver qu'elle vérifie (10). Il ressort du raisonnement employé dans la démonstration du lemme 1 qu'il suffit de démontrer que

$$dY(M^{\alpha\beta}, P^\gamma, Q^\delta) = 0 \quad (19)$$

c'est-à-dire

$$dY(M^{\alpha\beta}, P^\gamma, Q^\delta) = Y([M^{\alpha\beta}, P^\gamma], Q^\delta) + Y([Q^\delta, M^{\alpha\beta}], P^\gamma) = 0 \quad (20)$$

à partir des relations de commutation de  $\mathfrak{F}_2$ , on peut obtenir

$$\begin{aligned} dY(M^{\alpha\beta}, P^\gamma, Q^\delta) &= Y(g^{\beta\gamma}P^\alpha - g^{\alpha\gamma}P^\beta, Q^\delta) + Y(g^{\alpha\delta}Q^\beta - g^{\beta\delta}Q^\alpha, P^\gamma) \\ &= g^{\beta\gamma}Y(P^\alpha, Q^\delta) - g^{\alpha\gamma}Y(P^\beta, Q^\delta) + g^{\alpha\delta}Y(Q^\beta, P^\gamma) - g^{\beta\delta}Y(Q^\alpha, P^\gamma) \end{aligned}$$

L'antisymétrie de  $Y$  et la relation (18) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} dY(M^{\alpha\beta}, P^\gamma, Q^\delta) &= (g^{\beta\gamma}g^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\gamma\beta} + g^{\beta\delta}g^{\gamma\alpha})r \\ &= 0 \end{aligned}$$

**LEMME 3.** — *Si  $\dot{Y}$  est une classe d'équivalence d'exposants infinitésimaux de  $P_2$ , elle admet un représentant  $Y$  et un seul vérifiant les relations (14) et (18).*

*Démonstration.* — L'existence de  $Y$  découle des lemmes 1 et 2.

Supposons qu'il existe un autre représentant  $Y'$ , associé au nombre réel  $r'$  et vérifiant la propriété, on a alors :

$$Y(P^0, Q^0) - Y'(P^0, Q^0) = r - r' \quad (21)$$

comme  $Y$  et  $Y'$  sont supposés équivalents, il existe une forme réelle  $\Sigma$  sur  $\mathfrak{F}_2$  telle que l'on a

$$Y(P^0, Q^0) - Y'(P^0, Q^0) = \Sigma([P^0, Q^0])$$

or  $[P^0, Q^0] = 0$ , donc  $r = r'$ .

En particulier un tel  $Y$  est équivalent à zéro si et seulement si  $r = 0$ .

**THÉORÈME 1.** — *La dimension de l'espace vectoriel des classes d'équivalence des exposants infinitésimaux du groupe  $P_2$  est égale à l'unité.*

*Démonstration.* — Soit  $\dot{Y}_0$  une classe d'équivalence non nulle d'exposants infinitésimaux. D'après le lemme 3, elle admet un représentant et un seul  $Y_0$  défini par  $r_0$ , également différent de zéro. Si  $\dot{Y}$  est une classe d'équivalence définie par  $r$ , on peut écrire, d'après le lemme 2,  $\dot{Y} = \frac{r}{r_0} \dot{Y}_0$ , cette décomposition étant unique.

COROLLAIRE. — *La dimension de l'espace vectoriel des classes d'équivalence des exposants locaux du groupe  $P_2$  est égale à l'unité.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du théorème 4.1 de Bargmann [21]. Aussi, il nous suffit de déterminer un exposant local non trivial pour les connaître tous.

THÉORÈME 2. — *L'application  $\xi_0 = P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par*

$$\xi_0(g_1, g_2) = \underline{a_1} \cdot \Lambda(A_1) \underline{b_2} \tag{22}$$

[où  $g_i = (\underline{a_i}, \underline{b_i}, A_i)$ ] est un exposant local non trivial de  $P_2$ .

*Démonstration :*

$$\xi_0(g_1, g_2) + \xi_0(g_1 g_2, g_3) = \underline{a_1} \cdot \Lambda(A_1) \underline{b_2} + (\underline{a_1} + \Lambda(A_1) \underline{a_2}) \cdot \Lambda(A_1) \Lambda(A_2) \underline{b_3}$$

$$\xi_0(g_2, g_3) + \xi_0(g_1, g_2 g_3) = \underline{a_2} \cdot \Lambda(A_2) \underline{b_3} + \underline{a_1} \cdot \Lambda(A_1) (\underline{b_2} + \Lambda(A_2) \underline{b_3})$$

$$\xi_0(e, e) = 0$$

montrent que  $\xi_0$  est un exposant local.

Soient les deux éléments de  $P_2$  suivants

$$g_1 = (\underline{a_1}, 0, 1) \quad , \quad g_2 = (0, \underline{b_2}, 1)$$

on obtient

$$g_1 g_2 = g_2 g_1 = (\underline{a_1}, \underline{b_2}, 1) \quad , \quad \xi_0(g_1, g_2) = \underline{a_1} \cdot \underline{b_2} \quad , \quad \xi_0(g_2, g_1) = 0$$

Donc si  $\underline{a_1}$  et  $\underline{b_2}$  ne sont pas orthogonaux

$$\xi_0(g_1, g_2) \neq \xi_0(g_2, g_1) \quad \text{bien que} \quad g_1 g_2 = g_2 g_1 \tag{23}$$

ce qui montre que  $\xi_0$  n'est pas équivalent à zéro, sinon il existerait une fonction  $\zeta(g)$  définie et continue sur un voisinage de l'unité telle que

$$\xi_0(g_1, g_2) = \zeta(g_1) + \zeta(g_2) - \zeta(g_1 g_2)$$

ce qui contredit (23).

Ainsi, tout exposant va s'écrire simplement

$$\xi(g_1, g_2) = r \xi_0(g_1, g_2) = r \underline{a_1} \cdot \Lambda(A_1) \underline{b_2} \tag{24}$$

où  $r$  est une constante réelle positive, négative ou nulle.

On notera  $P_2'$  l'extension centrale de  $P_2$  relative à l'exposant local  $\xi$  donné par (24). L'élément générique  $h$  de  $P_2'$  sera représenté par le couple

$$h = (\theta, g) \quad \text{où} \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g \in P_2$$

La loi de groupe s'écrit :

$$h_1 h_2 = (\theta_1, g_1)(\theta_2, g_2) = (\theta_1 + \theta_2 + r\xi_0(g_1, g_2), g_1 g_2) \quad (25)$$

ou, plus explicitement :

$$\begin{aligned} & (\theta_1, \underline{a}_1, \underline{b}_1, A_1)(\theta_2, \underline{a}_2, \underline{b}_2, A_2) \\ &= (\theta_1 + \theta_2 + r\underline{a}_1 \cdot \Lambda(A_1)\underline{b}_2, \underline{a}_1 + \Lambda(A_1)\underline{a}_2, \underline{b}_1 + \Lambda(A_1)\underline{b}_2, A_1 A_2) \end{aligned} \quad (26)$$

L'inverse est donné par

$$(\theta, \underline{a}, \underline{b}, A)^{-1} = (-\theta + r\underline{a} \cdot \underline{b}, -\Lambda(A)^{-1}\underline{a}, -\Lambda(A)^{-1}\underline{b}, A^{-1}) \quad (27)$$

Les éléments de la forme  $(\theta, e)$  forment un sous-groupe  $T_1^0$ , isomorphe au groupe additif des réels  $\mathbb{R}$  et appelé groupe de phase;  $P_2^r/T_1^0$  est un groupe isomorphe à  $P_2$ .

La détermination des représentations projectives de  $P_2$  se ramène donc à la détermination des vraies représentations de  $P_2^r$ . A priori, il faut distinguer deux extensions associées à deux valeurs distinctes de  $r$ ; néanmoins, toutes les extensions sont isomorphes. Aussi l'extension associée à  $r\xi_0$  est isomorphe à celle associée à  $\xi_0$ ; si  $(\theta', g')$  est un élément de  $P_2^r$  et  $(\theta, g)$  de  $P_2^1$ , l'isomorphisme s'écrit simplement

$$\theta' = r\theta \quad , \quad g' = g$$

La relation entre les représentations projectives de  $P_2$  de type  $r$  et celles de  $P_2^r$  est donnée par

$$U(\theta, g) = e^{i\theta} U(g) \quad (28)$$

Étant donné que  $SO_0(3, 1) \cdot (T_4 \oplus T'_4)$  est doublement connexe, le passage de  $P_2$  à ce dernier se fait en ajoutant simplement une ambiguïté de signe.

Le groupe de Poincaré admet  $T_4$  comme sous-groupe abélien invariant maximal et le groupe facteur  $P/T_4$  est le groupe simple  $SL(2, \mathbb{C})$ . Pour  $P_2$ , le groupe abélien invariant maximal est le groupe  $T_4 \oplus T'_4$ , le groupe facteur est également  $SL(2, \mathbb{C})$ . Le groupe à 15-paramètres  $P_2^r$  que nous avons à étudier a une structure différente de celle de  $P_2$  : le sous-groupe  $T_4 \oplus T_1^0$  (respectivement  $T'_4 \oplus T_1^0$ ) est un sous-groupe abélien invariant maximal à 5-paramètres; le groupe facteur  $P_2^r/T_4 \oplus T_1^0$  (respectivement  $P_2^r/T'_4 \oplus T_1^0$ ) admet à son tour un sous-groupe abélien invariant maximal  $T'_4$  (resp.  $T_4$ ). Finalement, le groupe facteur  $(P_2^r/T_4 \oplus T_1^0)/T'_4$  (resp.  $(P_2^r/T'_4 \oplus T_1^0)/T_4$ ) est le groupe simple  $SL(2, \mathbb{C})$ . On peut donc écrire

$$P_2^r = (T_4 \oplus T_1^0) \cdot (T'_4 \cdot SL(2, \mathbb{C})) \quad (29)$$

ou bien

$$P_2^r = (T_4' \oplus T_1^0) \cdot (T_4 \cdot SL(2, C)) \tag{30}$$

L'algèbre de Lie de l'extension  $P_2^r$  est évidemment légèrement différente de celle de  $P_2$ . Il faut ajouter à l'algèbre de Lie du groupe  $P_2$  le générateur du groupe de phase  $T_1^0$ , générateur qu'on notera  $C$  et qui appartient au centre de l'algèbre de Lie. De plus,  $P^\alpha$  et  $Q^\beta$  ne commutent plus, car l'on a

$$\xi[(a, 0, 1), (0, \underline{b}, 1)] - \xi[(0, \underline{b}, 1), (a, 0, 1)] = r g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$$

d'où la relation

$$[P^\alpha, Q^\beta] = g^{\alpha\beta} r C \tag{31}$$

On voit ainsi que les représentations projectives du groupe  $P_2$  ont exactement la même structure que celles du groupe de Galilée [17]. En particulier  $P_2$  va admettre des représentations projectives non triviales associées à des extensions centrales non triviales qui sont responsables de l'introduction de la relation (31), relation qui généralise celle de Heisenberg

$$[p_i, q_m] = - \delta_{im}.$$

Cependant, une différence essentielle existe dans l'interprétation du coefficient de proportionnalité qui définit l'extension centrale : pour le groupe de Galilée,  $r$  apparaît comme une règle de supersélection [23]; dans chaque sous-espace cohérent opère une extension associée à une valeur bien déterminée de  $r$  qui est alors interprété comme étant la masse physique. Pour ce qui nous concerne, dans le cadre de la symétrie  $P_2$ , nous interprétons le générateur  $rC$  comme représentant simplement l'unité physique.

Il ressort de ce qui précède que les représentations projectives de  $P_2$  physiquement intéressantes sont les représentations projectives non triviales; les autres étant incompatibles avec la relation de Heisenberg généralisée (31).

### III. — SUR LES OBSERVABLES DE LA SYMÉTRIE $P_2$

Les observables d'une particule libre, relativiste ou galiléenne, sont habituellement choisies parmi les représentants, dans une représentation donnée, d'éléments de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie considéré, de son algèbre enveloppante, ou bien si ce n'est pas le cas, elles sont construites à partir de tels éléments. Généralement, les observables ne sont pas définies indépendamment de la représentation, mais sont, dans tous les cas, représentées par des opérateurs définis sur le domaine de Garding ou un autre domaine

qui possède, vis-à-vis de l'ensemble des observables, les mêmes propriétés que ce dernier. En outre, la mécanique quantique exige que ces observables soient représentées par des opérateurs self-adjoints. Or, on sait qu'il existe des opérateurs symétriques qui n'ont aucune extension self-adjointe, il suffit pour cela que les indices de défaut soient différents. Il est donc nécessaire de démontrer que l'opérateur symétrique est également essentiellement self-adjoint pour qu'il puisse représenter l'observable physique qui sera identifié alors à la fermeture self-adjointe de l'opérateur. Il faut, en effet [24], qu'il ait des indices de défaut égaux pour qu'il ait des extensions self-adjointes et des indices de défaut nuls pour qu'on puisse définir, sans ambiguïté, l'observable à partir de l'opérateur symétrique.

Le caractère essentiellement self-adjoint de la première catégorie d'observables est immédiat; celui de la seconde catégorie, sans être général, l'est également pour certaines familles d'opérateurs [25]. En ce qui concerne la troisième catégorie d'observables, celle constituée à partir de représentants d'éléments de l'algèbre de Lie enveloppante, le caractère d'opérateur essentiellement self-adjoint n'est pas automatique et il doit être démontré dans chaque cas particulier.

Il ressort de tout cela que ce sont les observables des deux premières catégories qui sont les plus aptes aux applications physiques; malheureusement, il en existe qui appartiennent à la troisième catégorie. Pour une telle étude dans le cadre de la mécanique quantique relativiste ou galiléenne, voir [26].

Dans le formalisme relativiste habituel (basé sur le groupe de Poincaré), l'opérateur position n'est pas image d'éléments de l'algèbre enveloppante (voir par exemple [6] et [15]). Or, dans ce nouveau formalisme, l'observable position est image d'éléments de l'algèbre de Lie elle-même, indépendamment de la représentation projective non triviale considérée; d'où un des avantages de cette nouvelle symétrie. Quant au spin relativiste, la situation est plus complexe puisque l'on a plusieurs définitions selon que l'on veut mettre l'accent sur la nécessité d'avoir

*a)* des opérateurs de spin covariant par rapport au groupe de Lorentz, ou

*b)* des opérateurs de spin vérifiant les relations de commutation habituelles. La vérification de l'une de ces deux propriétés exclut automatiquement l'autre. Avant d'étudier de plus près certaines observables de cette nouvelle symétrie, nous allons verser, dans la collection de définitions du spin relativiste existant dans la littérature, une nouvelle. Cette dernière ne sera pas la nôtre dans la suite (nous continuerons à prendre comme définition du spin relativiste celle que Bargmann et Wigner ont considérée, voir

par exemple [18]) et ne figure ici qu'à titre d'exemple qu'il serait intéressant d'approfondir. Pour ce faire, nous allons déterminer une classe de représentations de  $P_2'$  pour lesquelles il existe des opérateurs images d'éléments de l'algèbre enveloppante qui pourraient être interprétés comme étant le moment angulaire et le spin et qui apparaissent comme une généralisation du cas non relativiste; l'opérateur de spin ainsi construit vérifiera les mêmes conditions que celui considéré par Berg [8], mais il sera de structure beaucoup plus simple. Cet exemple est construit par analogie avec la mécanique galiléenne dont on va rappeler les propriétés principales (\*).

Pour un système de masse  $m$ , l'opérateur de spin est donné par

$$\vec{S} = \vec{J} - \frac{1}{m} \vec{K} \wedge \vec{P} \tag{32}$$

Le moment angulaire orbital par

$$\vec{L} = \frac{1}{m} \vec{K} \wedge \vec{P} \tag{33}$$

et l'opérateur position par

$$\vec{Q} = \frac{1}{m} \vec{K}$$

On voit que, contrairement au cas relativiste, ce sont des éléments de l'algèbre enveloppante.

Le moment angulaire total est évidemment donné par

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{34}$$

Par analogie avec le cas non relativiste, considérons les éléments  $L^{\alpha\beta}$  et  $S^{\alpha\beta}$  de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(P_2')$  définis par

$$L^{\alpha\beta} = Q^\alpha P^\beta - Q^\beta P^\alpha \quad (35) \quad , \quad S^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} - L^{\alpha\beta} \tag{36}$$

ce qui implique en particulier :

$$M^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta} = Q^\alpha P^\beta - Q^\beta P^\alpha + S^{\alpha\beta}$$

Déterminons les relations de commutation de la sous-algèbre de  $\mathcal{U}(P_2')$  engendrée par  $(M^{\alpha\beta}, P^\alpha, Q^\beta, L^{\alpha\beta}, S^{\alpha\beta})$ . En plus des relations (1), (A-4) et (31), on obtient les suivantes :

$$[L^{\alpha\beta}, M^{\alpha\delta}] = -g^{\alpha\gamma} L^{\beta\delta} \tag{37 a}$$

$$[L^{\alpha\beta}, P^\alpha] = -g^{\alpha\gamma} P^\beta \tag{37 b}$$

---

(\*) Pour les propriétés élémentaires du groupe de Galilée, voir appendice.



$$[L^{\alpha\beta}, Q^\alpha] = -g^{\alpha\alpha}rCQ^\beta \quad (37 c)$$

$$[L^{\alpha\beta}, L^{\alpha\delta}] = -g^{\alpha\alpha}rCL^{\beta\delta} \quad (37 d)$$

$$[S^{\alpha\beta}, M^{\alpha\delta}] = -g^{\alpha\alpha}S^{\beta\delta} \quad (37 e)$$

$$[S^{\alpha\beta}, P^\alpha] = -g^{\alpha\alpha}(1 - rC)P^\beta \quad (37 f)$$

$$[S^{\alpha\beta}, Q^\alpha] = -g^{\alpha\alpha}(1 - rC)Q^\beta \quad (37 g)$$

$$[S^{\alpha\beta}, S^{\alpha\delta}] = -g^{\alpha\alpha}S^{\beta\delta} + g^{\alpha\alpha}(1 - rC)L^{\beta\delta} \quad (37 h)$$

$$[S^{\alpha\beta}, L^{\alpha\delta}] = -g^{\alpha\alpha}(1 - rC)L^{\beta\delta} \quad (37 i)$$

Les relations (37 d) et (37 h) montrent que  $(L^{\alpha\beta})$  d'une part, et  $(S^{\alpha\beta})$  d'autre part ne constituent pas de bases de sous-algèbres de  $\mathcal{U}(\mathcal{P}_2^r)$ .

Posons

$$S^1 = S^{23} \quad ; \quad S^2 = S^{31} \quad ; \quad S^3 = S^{12} \quad (38)$$

et déterminons les représentations de  $\mathfrak{P}_2^r$  pour lesquelles l'opérateur vectoriel  $\vec{S} = (S^1, S^2, S^3)$  puisse être interprété comme étant le spin dans sa formulation trivectorielle, covariant sous les rotations spatiales et les translations et ayant de bonnes relations de commutation.

Pour ce faire, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$[S^i, P^\alpha] = 0 \quad (39 a)$$

$$[S^i, J^j] = \varepsilon^{ijk}S^k \quad (39 b)$$

$$[S^i, S^j] = \varepsilon^{ijk}S^k \quad (39 c)$$

où  $i, j, k = 1, 2, 3$  et

$$J^1 = M^{23} \quad ; \quad J^2 = M^{31} \quad ; \quad J^3 = M^{12} \quad (40)$$

(39 a) et (39 b) caractérisent la covariance du spin sous l'effet des translations et des rotations spatiales, autrement dit  $\vec{S}$  se transforme comme les trois composantes spatiales d'un quadrivecteur sous l'effet de ces transformations; (39 c) caractérise les relations de commutation habituelles du spin, à savoir  $SU(2)$ .

A partir des relations (37), on obtient

$$[S^i, P^0] = 0 \quad (41 a)$$

$$[S^i, P^j] = \varepsilon^{ijk}(1 - rC)P^k \quad (41 b)$$

$$[S^i, J^j] = \varepsilon^{ijk}S^k \quad (41 c)$$

$$[S^i, S^j] = \varepsilon^{ijk}[S^k - (1 - rC)L^k] \quad (41 d)$$

où

$$L^1 = L^{23} \quad ; \quad L^2 = L^{31} \quad ; \quad L^3 = L^{12}$$

On voit donc que pour que (39) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait, dans les représentations cherchées,  $rC$  représenté par l'opérateur identité.

On peut vérifier que  $\vec{S}$  ne se transforme pas comme les trois composantes spatiales d'un quadrivecteur sous l'effet des transformations de Lorentz pures, car :

$$[S^i, K^i] = 0 \quad \text{et} \quad [S^i, K^j] \neq 0 \quad \text{si } i \neq j$$

où  $K^i = M^{i0}$ .

Or, pour qu'un quadri-opérateur ( $B^0, B^1, B^2, B^3$ ) se transforme comme un quadrivecteur sous l'effet de telles transformations, il est nécessaire et suffisant qu'on ait :

$$[K^i, B^m] = \delta^{im} B^0 \quad \text{et} \quad [K^i, B^0] = B^i \tag{42}$$

Pour de telles représentations ( $rC = 1$ ), on a également

$$[S^i, Q^j] = 0$$

on retrouve ainsi toutes les relations de Berg. En plus,  $L^{\alpha\beta}$  apparaît, par sa définition et ses relations de commutation, comme étant le tenseur moment angulaire orbital alors que  $S^{\alpha\beta}$  joue le rôle du tenseur de spin. Il reste à déterminer ces représentations.

On sait qu'il existe une correspondance biunivoque entre les représentations d'une algèbre de Lie donnée et celles de son algèbre enveloppante. En plus, les relations (35)-(36) montrent que la connaissance des représentants de  $(Q^\alpha)$ ,  $(P^\beta)$  et  $(S^{\alpha\beta})$ , qui appartiennent à  $\mathcal{U}(P_2')$  équivaut à la connaissance des représentants des générateurs de  $\mathcal{F}_2'$ . En outre, pour de telles représentations, les représentants de ces éléments forment une base d'une algèbre de Lie dont les relations de commutation sont données par

$$[Q^\alpha, Q^\beta] = [P^\alpha, P^\beta] = 0 \tag{43 a}$$

$$[P^\beta, Q^\alpha] = g^{\alpha\beta} \tag{43 b}$$

$$[S^{\alpha\beta}, S^{\alpha\delta}] = -g^{\alpha\alpha} S^{\beta\delta} \tag{43 c}$$

$$[S^{\alpha\beta}, Q^\alpha] = [S^{\alpha\beta}, P^\alpha] = 0 \tag{43 d}$$

D'après ces relations, cette algèbre apparaît comme étant le produit direct de l'algèbre de Heisenberg à neuf dimensions engendrée par  $(P^\alpha, Q^\beta, 1)$  et d'une algèbre qui, d'après (43 c), est isomorphe à l'algèbre du groupe de Lorentz homogène. Or, les représentations d'un produit direct d'algèbres

de Lie se ramènent à considérer les produits directs des représentations des algèbres constituantes qui sont, dans le cas qui nous intéresse, parfaitement connues d'après les travaux de Von Neuman [27], pour l'algèbre de Heisenberg, et ceux de Gel'fand et ses collaborateurs [28] pour l'algèbre du groupe de Lorentz.

Nous allons nous intéresser maintenant à certains éléments remarquables qui se rapportent à ces différents groupes. Pour distinguer les différents crochets, on les indexera par le groupe correspondant, chaque fois qu'il y a un risque de confusion.

Considérons l'élément de  $\mathcal{U}(\mathcal{F}_2^r)$

$$P^2 = g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta \quad (44)$$

que nous continuerons à interpréter, dans une représentation donnée, comme étant l'observable masse. Comme pour le groupe P, il va commuter avec les transformations de Lorentz

$$[P^2, M^{\alpha\beta}] = 0 \quad (45)$$

Par contre, ce n'est plus un invariant de  $\mathcal{F}_2^r$ , car l'on a

$$[P^2, Q^\alpha]_{\mathcal{F}_2^r} = 2rCP^\alpha \quad (46)$$

Soit

$$Q^2 = g^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta \quad (47)$$

qui sera interprété comme étant le temps propre. On a alors

$$[Q^2, M^{\alpha\beta}] = 0 \quad (48)$$

$$[Q^2, P^\alpha]_{\mathcal{F}_2^r} = -2rCQ^\alpha \quad (49)$$

Si on cherche la relation de commutation entre la masse et le temps propre, on trouve :

$$[P^2, Q^2]_{\mathcal{F}_2^r} = 4rC(2rC + \underline{Q} \cdot \underline{P}) \quad ; \quad \underline{Q} \cdot \underline{P} = g^{\alpha\beta} Q_\alpha P_\beta \quad (50)$$

ce qui prouve que le temps propre et la masse ne sont pas simultanément mesurables. Regardons ce que deviennent les deux autres invariants de P et P' quand on les considère comme élément de  $\mathcal{U}(\mathcal{F}_2^r)$ . Pour ce faire, posons

$$W^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} P_\beta M_{\gamma\delta} \quad (51 a)$$

$$V^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} Q_\beta M_{\gamma\delta} \quad (51 b)$$

qui sont les deux pseudo-vecteurs de Pauli-Lubanski des deux groupes de Poincaré. On a alors les relations

$$[P^\alpha, W^\beta] = 0 \tag{52 a}$$

$$P^\alpha W_\alpha = 0 \tag{52 b}$$

$$[W^\alpha, W^\beta] = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} P_\gamma W_\delta \tag{52 c}$$

$$[M^{\alpha\beta}, W^\gamma] = g^{\beta\gamma} W^\alpha - g^{\alpha\gamma} W^\beta \tag{52 d}$$

d'une part, et

$$[Q^\alpha, V^\beta] = 0 \tag{53 a}$$

$$Q^\alpha V_\alpha = 0 \tag{53 b}$$

$$[V^\alpha, V^\beta] = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} Q_\gamma V_\delta \tag{53 c}$$

$$[M^{\alpha\beta}, V^\gamma] = g^{\beta\gamma} V^\alpha - g^{\alpha\gamma} V^\beta \tag{53 d}$$

de l'autre.

On obtient dans  $\mathcal{U}(\mathcal{F}_2^r)$  la relation suivante

$$[W^\alpha, Q^\varepsilon]_{\mathcal{F}_2^r} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \left( P_\beta Q_\gamma + \frac{rC}{2} M_{\beta\gamma} \right) \tag{54}$$

de laquelle on déduit

$$[W^2, Q^\varepsilon]_{\mathcal{F}_2^r} = \varepsilon^{\alpha\gamma\delta\varepsilon} \left\{ [W_\alpha, P_\gamma Q_\delta]_+ + \frac{rC}{2} [W_\alpha, M_{\gamma\delta}]_+ \right\} \tag{55}$$

où

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

On trouve de même

$$[V^\alpha, P^\varepsilon]_{\mathcal{F}_2^r} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \left( Q_\beta P_\gamma - \frac{rC}{2} M_{\beta\gamma} \right) \tag{56}$$

$$[V^2, P^\varepsilon]_{\mathcal{F}_2^r} = \varepsilon^{\alpha\gamma\delta\varepsilon} \left\{ [V_\alpha, Q_\gamma P_\delta]_+ - \frac{rC}{2} [V_\alpha, M_{\gamma\delta}]_+ \right\} \tag{57}$$

Pour avoir les relations correspondantes dans  $\mathcal{F}_2$ , il suffit de faire dans les relations précédentes  $r = 0$ . Ainsi, les relations (45)-(46) d'une part, et les relations (48)-(49) de l'autre, montrent que  $P^2$  et  $Q^2$  sont des invariants de  $\mathcal{F}_2$ , compte tenu du fait que  $P^2$  commute avec  $(P^\alpha)$  et  $Q^2$  avec  $(Q^\alpha)$ .

En outre, on peut vérifier que si  $\underline{A} = (A^\alpha)$  et  $\underline{B} = (B^\alpha)$  sont deux quadriéléments de  $\mathcal{U}(\mathcal{F}_2)$ , alors :

a) si  $(A^\alpha)$  et  $(B^\alpha)$  commutent avec  $(P^\alpha, Q^\beta)$ , d'après la relation

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B,$$

$g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta$  commute également avec  $(P^\alpha, Q^\beta)$ ;

b) s'ils se transforment comme des quadrivecteurs sous l'effet des transformations de Lorentz, le produit scalaire  $g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta$  commute avec ces dernières. Ce qui montre que  $\underline{Q.P}$  est également un invariant de  $\mathcal{F}_2$ .

Nous avons à considérer des sous-algèbres abéliennes maximales de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{F}_2^r)$  qui, dans une représentation donnée, seront interprétées comme étant les algèbres maximales d'observables simultanément mesurables et qui caractérisent la représentation en question. Pour ce faire, nous devons déterminer le centre de  $\mathcal{U}(\mathcal{F}_2^r)$  ou, ce qui revient au même, les invariants indépendants de  $\mathcal{F}_2^r$ .

Si l'on pose

$$T^{\alpha\beta} = rCM^{\alpha\beta} - L^{\alpha\beta}$$

où  $L^{\alpha\beta}$  est définie par (35), on obtient les relations

$$[T^{\alpha\beta}, P^\gamma] = 0$$

$$[T^{\alpha\beta}, Q^\gamma] = 0$$

$$[T^{\alpha\beta}, M^{\rho\sigma}] = -g^{\alpha\sigma}T^{\beta\rho} - g^{\beta\rho}T^{\alpha\sigma} + g^{\alpha\rho}T^{\beta\sigma} + g^{\beta\sigma}T^{\alpha\rho}$$

Les invariants de  $\mathcal{F}_2^r$  sont donnés par

$$I_0 = rC$$

$$I_1 = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}T^{\gamma\delta}T^{\alpha\beta}$$

$$I_2 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\alpha\beta}T^{\gamma\delta}$$

On remarque que si  $rC$  est représenté par l'identité  $T^{\alpha\beta}$  se réduit à  $S^{\alpha\beta}$  (cf. relation (36)) et  $I_1$  et  $I_2$  représentent les invariants du groupe de Lorentz homogène.

En conclusion de ce chapitre, nous allons faire quelques remarques concernant les propriétés spectrales de l'observable masse et de l'observable temps propre. Étant donné le rôle symétrique joué par ces deux observables, il suffit de considérer l'une d'elles, par exemple l'observable masse  $g^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta$ .

Si on veut que l'observable masse soit quantifiée, les représentations globales du groupe de symétrie sont automatiquement exclues. En effet, si  $U$  est une représentation continue, irréductible, unitaire sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  d'un groupe de Lie connexe d'ordre fini  $G$  contenant le groupe de Poincaré, le spectre de l'opérateur représentant  $g^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta$  est un ensemble connexe sur la droite réelle, donc s'il y a un vecteur propre isolé, c'est la totalité du spectre [29]. Toutes les hypothèses de ce résultat étant nécessaires, pour résoudre la difficulté, on peut, soit considérer des groupes de Lie de dimension infinie, soit alors considérer des représentations locales [30] non intégrables à une représentation du groupe de Lie correspondant. On

peut alors rechercher, suivant [31], des représentations locales de  $\mathcal{F}'_2$  qui donnent un bon spectre de masse, partiellement intégrables [32] à P, afin d'avoir un spectre du vecteur énergie-impulsion continu, propriété physique souhaitable. On peut également chercher des représentations locales de  $\mathcal{F}'_2$  telles que  $P^2$  et  $Q^2$  admettent un spectre discret et partiellement intégrables à P.

#### IV. — RELATIONS ENTRE LE GROUPE $P'_2$ ET LE GROUPE CONFORME

Le groupe conforme, introduit par Cunningham et Bateman [33], puis étudié par maints auteurs (voir par exemple [34]), a vu son rôle augmenter ces dernières années grâce aux diverses possibilités qu'il offre pour la résolution éventuelle de certains problèmes non encore résolus de la physique mathématique contemporaine (voir par exemple [35]). Aussi, il est souhaitable de déterminer les liens qui pourraient exister entre le groupe conforme et le groupe  $P'_2$ .

Le groupe conforme est le groupe des transformations analytiques, définies sur un ouvert maximal de l'espace de Minkowski dépendant de la transformation, telles que si  $\underline{x} \mapsto \underline{x}'$  est une telle transformation, alors

$$ds^2 = 0 \quad \text{implique} \quad ds'^2 = 0$$

où

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

c'est un groupe de Lie à 15 paramètres engendré (par produits finis) par les transformations suivantes :

a) les transformations du groupe de Lorentz inhomogène

$$\underline{x} \mapsto \underline{x}' = \Lambda \underline{x} + \underline{b}$$

b) la réflexion d'espace

$$\underline{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto \underline{x}' = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

c) la réflexion de temps

$$\underline{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto \underline{x}' = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$$

d) les homothéties de rapport  $\lambda > 0$

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' = \lambda \underline{x}$$

e) les accélérations (ou transformations conformes spéciales)

$$\underline{x} \mapsto \underline{x}' = (1 + 2\underline{a} \cdot \underline{x} + \underline{a}^2 \cdot \underline{x}^2)^{-1} (\underline{x} + \underline{a} \underline{x}^2)$$

La composante connexe de l'identité est engendrée (par produits finis) par les transformations de Lorentz inhomogènes, les homothéties et les transformations conformes spéciales.

Si l'on note  $A^\alpha$  les générateurs infinitésimaux des accélérations et  $D$  celui des homothéties, les relations de commutation de son algèbre de Lie  $\mathcal{C}$  sont données en adjoignant à (A-4) les relations suivantes

$$[A^\alpha, P^\beta] = -2(g^{\alpha\beta}D + M^{\alpha\beta}) \quad (58 a)$$

$$[M^{\alpha\beta}, A^\gamma] = g^{\beta\gamma}A^\alpha - g^{\alpha\gamma}A^\beta \quad (58 b)$$

$$[D, P^\alpha] = -P^\alpha \quad (58 c)$$

$$[D, A^\alpha] = A^\alpha \quad (58 d)$$

$$[M^{\alpha\beta}, D] = [A^\alpha, A^\beta] = 0 \quad (58 e)$$

L'algèbre de Lie obtenue est une forme réelle du type  $A_3 = D_3$ , soit

$$\mathcal{F}\mathcal{U}(2, 2) \simeq \mathcal{F}\mathcal{O}(4, 2)$$

Étant donné que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}'_2$  ont même dimension et que ce dernier est un produit semi-direct, le lien le plus naturel qui peut exister entre eux est via la notion de contraction.

La notion de contraction des groupes et des algèbres de Lie (introduite par Segal [36], étudiée par Inonu et Wigner [37] et généralisée par Saletan [38], voir également [39]) se présente formellement de la façon suivante : soit une algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  et une sous-algèbre  $\mathfrak{b}$ , correspondant respectivement à un groupe de Lie  $G$  et un sous-groupe  $H$ . On suppose donné sur  $\mathcal{A}$  une application linéaire régulière  $\varphi_\varepsilon$ , dépendant d'un paramètre  $\varepsilon$  dont la restriction à  $\mathfrak{b}$  est l'opérateur identité. On fait tendre ensuite  $\varepsilon$  vers une certaine limite qui rend  $\varphi_\varepsilon$  singulière, les constantes de structure restant finies. L'algèbre de Lie  $\mathcal{A}^{(1)}$  ainsi obtenue comme une « limite » de  $\mathcal{A}$ , est dite la contractée de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $\mathfrak{b}$ . Les algèbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^{(1)}$  ont même dimension. L'ensemble  $\mathfrak{c}$  des éléments contractés est un idéal abélien de  $\mathcal{A}^{(1)}$  et l'on a  $\mathfrak{b} \simeq \mathcal{A}^{(1)}/\mathfrak{c}$ . Le groupe  $G^{(1)}$  engendré par  $\mathcal{A}^{(1)}$  est dit également le contracté de  $G$  par rapport à  $H$ .

Contractons le groupe conforme par rapport au groupe de Poincaré. Pour ce faire, considérons l'application  $\varphi_\varepsilon : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  définie par

$$\varphi_\varepsilon(A^\alpha) = \varepsilon A^\alpha = A'^\alpha$$

$$\varphi_\varepsilon(D) = \varepsilon D = D'$$

$$\varphi_\varepsilon(M^{\alpha\beta}) = M^{\alpha\beta}$$

$$\varphi_\varepsilon(P^\alpha) = P^\alpha$$

En plus des relations (A-4) qui restent inchangées, on obtient les suivantes

$$\begin{aligned}
 [A'^\alpha, M^{\alpha\beta}] &= g^{\alpha\alpha} A'^\beta & (59) \\
 [A'^\alpha, P^\beta] &= -2(g^{\alpha\beta} D' + \varepsilon M^{\alpha\beta}) \\
 [D', M^{\alpha\beta}] &= 0 \\
 [D', P^\alpha] &= -\varepsilon P^\alpha
 \end{aligned}$$

Si on fait tendre dans (59)  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
 [A'^\alpha, M^{\alpha\beta}] &= g^{\alpha\alpha} A'^\beta & (60) \\
 [A'^\alpha, P^\beta] &= -2g^{\alpha\beta} D' \\
 [D', M^{\alpha\beta}] &= 0 \\
 [D', P^\alpha] &= 0
 \end{aligned}$$

qui constituent avec (A-4) les relations de commutation du groupe contracté  $C^{(1)}$ .

A partir des relations (1), (A-4) et (31) d'un côté, et (A-4) et (60) de l'autre on voit que  $C^{(1)}$  est isomorphe à  $\mathcal{F}_2^r$ , l'isomorphisme étant donné par

$$M^{\alpha\beta} \mapsto M^{\alpha\beta} \ ; \ P^\alpha \mapsto P^\alpha \ ; \ Q^\alpha \mapsto 1/2A'^\alpha \ ; \ rC \mapsto D'$$

L'algèbre de Lie  $\mathcal{F}_2$  a été considérée [31] comme étant une sous-algèbre d'une algèbre de Lie  $\mathcal{A}$ , contenant l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, dont une représentation locale, partiellement intégrable à cette dernière, fournit un spectre de masse discret. Les relations de commutation de  $\mathcal{A}$  étant les mêmes que celles du groupe conforme à part les suivantes :

$$[P^\alpha, D] = A^\alpha \ , \ [A^\alpha, D] = 0 \ , \ [P^\alpha, A^\beta] = 0 \quad (61)$$

Nous allons voir que  $\mathcal{A}$  peut être obtenue par double contraction du groupe conforme. Considérons à cet effet l'application  $\varphi_\varepsilon : C \rightarrow C$  définie par :

$$\begin{aligned}
 \varphi_\varepsilon(P^\alpha) &= \varepsilon(P^\alpha - A^\alpha) = P'^\alpha \ , \ \varphi_\varepsilon(A^\alpha) = \varepsilon(P^\alpha + A^\alpha) = A'^\alpha \ , \ \varphi_\varepsilon(M^{\alpha\beta}) = M^{\alpha\beta} \\
 \varphi_\varepsilon(D) &= D
 \end{aligned} \quad (62)$$

En plus des relations qui font intervenir  $M^{\alpha\beta}$  et  $D$  qui restent inchangées, on obtient en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro

$$[P'^\alpha, M^{\alpha\beta}] = g^{\alpha\alpha} P'^\beta \ , \ [P'^\alpha, D] = A'^\alpha \ , \ [A'^\alpha, M^{\alpha\beta}] = g^{\alpha\alpha} A'^\beta \ , \ [A'^\alpha, D] = P'^\alpha \quad (63)$$

Les relations restantes étant nulles.



Soient  $\mathcal{C}'$  l'algèbre de Lie contractée. Considérons l'application  $\psi_\varepsilon : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}'$  définie par

$$\psi_\varepsilon(A'^\alpha) = \varepsilon A'^\alpha = A''^\alpha, \quad \psi_\varepsilon(D) = \varepsilon D = D'', \quad \psi_\varepsilon(P'^\alpha) = P'^\alpha, \quad \psi_\varepsilon(M^{\alpha\beta}) = M^{\alpha\beta} \quad (64)$$

On trouve alors que l'algèbre contractée vérifie les relations de commutation suivantes :

$$[P'^\alpha, D''] = A''^\alpha, \quad [A''^\alpha, D''] = 0, \quad [P'^\beta, A''^\alpha] = 0 \quad (65)$$

Les relations restantes étant les mêmes que celles du groupe conforme; autrement dit, on retrouve l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  du départ.

D'après les relations de commutation de l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}$ , on voit que celle-ci est une extension inessentielle [40] non triviale de  $\mathfrak{F}_2$  par l'algèbre unidimensionnelle engendrée par  $D''$ , donc sa structure est complètement différente de celle de  $\mathfrak{F}_2^r$  qui est une extension centrale non triviale de  $\mathfrak{F}_2$  par une algèbre également unidimensionnelle; la suite exacte étant

$$\mathfrak{G}_1^\theta \xrightarrow{f} \mathfrak{F}_2^r \xrightarrow{g} \mathfrak{F}_2$$

où  $f$  est l'injection canonique  $f(C) = rC$  et  $g$  l'homomorphisme surjectif défini par

$$g(M^{\alpha\beta}) = M^{\alpha\beta}, \quad g(P^\alpha) = P^\alpha, \quad g(Q^\beta) = Q^\beta, \quad g(C) = 0 \quad (66)$$

De même  $\mathfrak{F}_2$  a une structure complètement différente de celle de  $\mathfrak{F}$  puisque toutes les extensions centrales de  $\mathfrak{F}$  par une algèbre abélienne sont triviales [41].

Peu après l'introduction de l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  par Flato et Sternheimer, Aghassi et ses collaborateurs [13] (voir également Noga [13]) ont considéré comme groupe dynamique de la mécanique quantique relativiste un groupe engendré par une extension d'une algèbre de Lie qui lui est isomorphe. Ces derniers ont tendance à ne considérer comme physiques que les représentations globales. Il ressort, à partir du dernier alinéa du troisième chapitre, qu'il ne suffit pas qu'une observable, la masse par exemple, ne soit pas un invariant pour qu'elle puisse être quantifiée. Il faut de plus, dans certains cas, ne considérer que des représentations locales non intégrables. S'il est vrai, d'après les pionniers de la symétrie physique que sont Wigner et Bargmann, que la symétrie s'exprime naturellement au niveau groupal, il n'en est pas de même pour les représentations physiques et les propriétés spectrales des observables; étant donné que ces dernières se situent au niveau de l'algèbre ou du corps enveloppant. En outre, depuis le théorème négatif de O'Raiheartaigh-Jost-Segal, il ressort que les représentations

locales sont amenées à jouer un rôle primordial dans l'unification des symétries externes et internes ou, simplement, dans la quantification de certaines observables. Ce type de représentations soulève des problèmes difficiles, surtout quand elles ne sont pas partiellement intégrables, et semble encore méconnu.

\* \* \*

Je tiens à remercier les Professeurs M. FLATO et J.-C. GUILLOT, ainsi que tous mes camarades du Laboratoire de Physique Mathématique, pour d'utiles et fructueuses discussions.

---

## APPENDICE

## GROUPES DE POINCARÉ ET DE GALILÉE

$\vec{x}$  représente le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  de composantes  $(x^1, x^2, x^3)$  et  $\underline{x}$  le quadrivecteur de  $\mathbb{R}^4$  de composantes  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ .  $\mathbb{R}^3$  est toujours supposé muni du produit scalaire

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$

et  $\mathbb{R}^4$  du produit scalaire

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

où  $g_{\alpha\beta}$  est le tenseur métrique habituel ( $g_{00} = 1$ ,  $g_{ij} = -\delta_{ij}$ ,  $g_{0i} = 0$ ).

## 1. — Groupe de Poincaré.

Le groupe de Lorentz  $SO_0(3,1)$  est l'ensemble des transformations linéaires laissant invariante la forme bilinéaire définie sur  $\mathbb{R}^4$   $\underline{x} \cdot \underline{y} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ , qu'on note  $\underline{y} = \Lambda \underline{x}$  ou bien  $y^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta$ , de déterminant égal à 1 et telles que  $\Lambda_0^0 \geq 1$ .

Le groupe de Lorentz inhomogène est le produit semi-direct du groupe des translations de l'espace-temps par le groupe de Lorentz; si on note  $(\underline{a}, \Lambda)$  un de ses éléments, la loi de groupe est donnée par

$$(\underline{a}_1, \Lambda_1)(\underline{a}_2, \Lambda_2) = (\underline{a}_1 + \Lambda_1 \underline{a}_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \quad (\text{A-1})$$

conformément à la théorie des représentations projectives [21]. On appelle groupe de Poincaré P le groupe de recouvrement universel du groupe de Lorentz inhomogène. Il est simplement obtenu en substituant au sous-groupe de Lorentz son recouvrement universel  $SL(2, \mathbb{C})$ . Comme celui de Lorentz, c'est un revêtement d'ordre 2 :  $\pm A \in SL(2, \mathbb{C})$  définissent la même transformation de Lorentz  $\Lambda(A)$  par la formule

$$A(\underline{x} \cdot \underline{\sigma}) A^* = (\Lambda(A) \underline{x}) \cdot \underline{\sigma} \quad \text{où} \quad \underline{x} \cdot \underline{\sigma} = x_\alpha \sigma^\alpha \quad (\text{A-2})$$

et  $\sigma^\alpha = (\sigma^0, \vec{\sigma})$  sont les matrices de Pauli habituelles

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si on représente par  $(\underline{a}, A)$  un élément du groupe de Poincaré, la loi de groupe s'écrit alors

$$(\underline{a}_1, A_1)(\underline{a}_2, A_2) = (\underline{a}_1 + \Lambda(A_1) \underline{a}_2, A_1 A_2) \quad (\text{A-3})$$

Ainsi P apparaît comme une inhomogénéisation [19] de  $SL(2, \mathbb{C})$  relativement à la représentation  $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

Si l'on note  $P^\alpha$  les générateurs infinitésimaux des translations,  $M^{\alpha\beta}$  ceux des trans-

formations de Lorentz, les relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré sont données par

$$[M^{\alpha\beta}, M^{\gamma\delta}] = -(g^{\alpha\gamma}M^{\beta\delta} + g^{\beta\delta}M^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\delta}M^{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma}M^{\alpha\delta}) \quad (A-4a)$$

$$[M^{\alpha\beta}, P^\gamma] = g^{\beta\gamma}P^\alpha - g^{\alpha\gamma}P^\beta \quad (A-4b)$$

$$[P^\alpha, P^\beta] = 0. \quad (A-4c)$$

## 2. — Groupe de Galilée.

C'est le groupe des transformations de l'espace et du temps engendrées par les rotations spatiales  $R$ , les transformations de Galilée pures  $\vec{v}$ , les translations d'espaces  $\vec{a}$  et de temps  $b$ . On note l'un de ses éléments par  $(b, \vec{a}, \vec{v}, R)$  avec, par définition

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \\ t' &= t + b \end{aligned} \quad (A-5)$$

La loi de groupe s'écrit alors :

$$(b_1, \vec{a}_1, \vec{v}_1, R)(b_2, \vec{a}_2, \vec{v}_2, R) = (b_1 + b_2, \vec{a}_1 + R_1\vec{a}_2 + b_2\vec{v}_1, \vec{v}_1 + R_1\vec{v}_2, R_1R_2) \quad (A-6)$$

Le groupe de recouvrement universel est simplement obtenu en substituant au sous-groupe des rotations son recouvrement universel  $SU(2)$ . Les matrices  $\pm B \in SU(2)$  déterminent la même rotation  $R(B)$  par la formule

$$B\vec{x} \cdot \vec{\sigma} B^* = (R(B)\vec{x}) \cdot \vec{\sigma}$$

où

$$\vec{x} \cdot \vec{\sigma} = x^1\sigma^1 + x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3$$

Si l'on note  $(b, \vec{a}, \vec{v}, B)$ , l'élément générique, la loi de groupe s'écrit

$$(b_1, \vec{a}_1, \vec{v}_1, B_1)(b_2, \vec{a}_2, \vec{v}_2, B_2) = (b_1 + b_2, \vec{a}_1 + R(B_1)\vec{a}_2 + b_2\vec{v}_1, \vec{v}_1 + R(B_1)\vec{v}_2, B_1B_2) \quad (A-7)$$

Si l'on note  $J^i, K^i, P^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les générateurs infinitésimaux des rotations, transformations de Galilée pures et translations d'espace respectivement et par  $P^0$  le générateur des translations de temps, les relations de commutation de l'algèbre de Lie s'écrivent alors

$$[J^i, J^j] = \epsilon^{ijk}J^k \quad (A-8a)$$

$$[J^i, K^j] = \epsilon^{ijk}K^k \quad (A-8b)$$

$$[K^i, K^j] = 0 \quad (A-8c)$$

$$[J^i, P^j] = \epsilon^{ijk}P^k \quad (A-8d)$$

$$[K^i, P^j] = 0 \quad (A-8e)$$

$$[J^i, P^0] = 0 \quad (A-8f)$$

$$[K^i, P^0] = P^i \quad (A-8g)$$

$$[P^i, P^j] = 0 \quad (A-8h)$$

$$[P^i, P^0] = 0. \quad (A-8i)$$

Bargmann [2] a démontré que la dimension de l'espace vectoriel réel des classes d'équivalence d'exposants locaux est l'unité. Ainsi, contrairement au groupe de Poincaré, le groupe de Galilée possède des représentations projectives non triviales, et c'est précisément celles-là qui ont une interprétation physique. Tous les exposants inéquivalents sont obtenus à partir d'un exposant et lui sont tous proportionnels. La constante de proportionnalité  $m$  représente la masse physique. L'algèbre de Lie de l'extension centrale non triviale est légèrement différente de celle de Galilée : il faut ajouter le générateur  $A_0$  du groupe de phase; de plus, il faut remplacer  $(A-8e)$  par

$$[K^i, P^j] = \delta^{ij} m A_0. \quad (A-9)$$

## RÉFÉRENCES

- [1] W. PAULI, *Z. Physik*, t. **36**, 1926, p. 336.  
 V. FOCK, *Z. Physik*, t. **98**, 1935, p. 145.  
 V. BARGMANN, *Z. Physik*, t. **99**, 1936, p. 576.  
 A. O. BARUT, P. BUDINI et C. FRONSDAL, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. A **291**, 1966, p. 106.  
 I. A. MALKIN et V. I. MAN'KO, *J. E. T. P. Letters*, t. **2**, 1966, p. 146.  
 A. O. BARUT et H. KLEINERT, *Phys. Rev.*, t. **156**, 1967, p. 1541.
- [2] A. O. BARUT, *Phys. Rev.*, t. **135 B**, 1964, p. 839.  
 Y. DOTHAN, M. GELL'MANN et Y. NEE'MANN, *Phys. Letters*, t. **17**, 1965, p. 148.  
 A. PAIS, *Rev. Mod. Phys.*, t. **38**, 1966, p. 215.
- [3] C. W. GARDINER, *Phys. Letters*, t. **11**, 1964, p. 3.  
 W. D. MCGLINN, *Phys. Letters*, t. **12**, 1964, p. 467.  
 L. MICHEL, *Nucl. Phys.*, t. **57**, 1964, p. 356.  
 L. MICHEL, *Phys. Rev.*, t. **137**, 1965, p. B 405.  
 E. C. G. SUDARSHAN *et al.*, *Phys. Rev.*, t. **136**, 1964, p. B 888.  
 Y. TOMOZAWA, *J. Math. Phys.*, t. **6**, 1965, p. 656.
- [4] M. FLATO et D. STERNHEIMER, *J. Math. Phys.*, t. **7**, 1966, p. 1932.
- [5] M. H. L. PRYCE, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. A **195**, 1948, p. 62.  
 C. FRONSDAL, *Phys. Rev.*, t. **113**, 1959, p. 1367.  
 R. ACHARYA et E. C. G. SUDARSHAN, *J. Math. Phys.*, t. **1**, 1960, p. 532.  
 T. F. JORDAN et N. MUKANDA, *Phys. Rev.*, t. **132**, 1963, p. 1842.  
 A. CHAKRABARTI, *J. Math. Phys.*, t. **4**, 1963, p. 1223.  
 T. O. PHILIPS, *Phys. Rev.*, t. **136**, 1964, p. B 893.  
 H. BACRY, *J. Math. Phys.*, t. **5**, 1964, p. 109.  
 A. SANKARANARAYANAN et R. H. GOOD, *Phys. Rev.*, t. **140**, 1965, p. B 509.
- [6] T. D. NEWTON et E. P. WIGNER, *Rev. Mod. Phys.*, t. **21**, 1949, p. 400.
- [7] A. S. WIGHTMAN, *Rev. Mod. Phys.*, t. **34**, 1962, p. 845.
- [8] R. A. BERG, *J. Math. Phys.*, t. **6**, 1965, p. 34.
- [9] G. N. FLEMING, *Phys. Rev.*, t. **137**, 1965, p. B 188.
- [10] J. M. JAUCH et C. PIRON, *Helv. Phys. Acta*, t. **40**, 1967, p. 559.
- [11] A. O. BARUT et S. MALIN, *Rev. Mod. Phys.*, t. **40**, 1968, p. 632.
- [12] W. O. AMREIN, Thèse, Université de Genève, mars 1968.
- [13] J. J. AGHASSI, P. ROMAN et R. M. SANTILLI, *Phys. Rev. D*, t. **1**, 1970, p. 2753 et  
*J. Math. Phys.*, t. **11**, 1970, p. 2297.  
 M. NOGA, *Phys. Rev. D*, t. **2**, 1970, p. 304.
- [14] A. GALINDO, *Nuov. Ciment.*, t. **37**, 1965, p. 413.
- [15] W. WEIDLICH et A. K. MITRA, *Nuov. Ciment.*, t. **30**, 1963, p. 385.

- [16] G. W. MACKEY, *Proc. Na. Ac. Sc. U. S. A.*, t. **35**, 1949, p. 537 et *Acta Math.*, t. **99**, 1958, p. 265.
- [17] E. INONU et E. P. WIGNER, *Nuov. Ciment.*, t. **9**, 1952, p. 705.  
M. HAMERMESH, *Ann. Phys.*, t. **9**, 1960, p. 518.  
J. M. LEVY-LEBLOND, *J. Math. Phys.*, t. **4**, 1963, p. 776.
- [18] A. J. MACFARLANE, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 1116; *Ib.*, t. **4**, 1963, p. 490.  
A. S. WIGHTMAN, *Relations de dispersion et particules élémentaires*, Les Houches, 1960, Hermann, Paris.
- [19] V. BERZI et V. GORINI, *J. Math. Phys.*, t. **9**, 1968, p. 816, 829.
- [20] E. P. WIGNER, *Ann. of Math.*, t. **40**, 1939, p. 149.
- [21] V. BARGMANN, *Ann. of Math.*, t. **59**, 1954, p. 1.
- [22] E. P. WIGNER, *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, Academic Press, 1959. Voir également :  
V. BARGMANN, *J. Math. Phys.*, t. **5**, 1964, p. 862.
- [23] R. F. STREATER et A. S. WIGHTMAN, *PCT, spin and statistics and all that*, Benjamin, N. Y., 1964.
- [24] F. RIESZ et B. S. Z. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris.
- [25] E. NELSON et STINESPRING, *Amer. J. Math.*, t. **81**, 1959, p. 547.  
I. E. SEGAL, *Proc. Am. Math. Soc.*, t. **3**, 1952, p. 13.
- [26] J. C. GUILLOT, *Helv. Phys. Acta*, t. **41**, 1968, p. 5.
- [27] J. V. NEUMANN, *Math. Ann.*, t. **104**, 1931, p. 570.
- [28] I. M. GEL'FAND, R. A. MINLOS et Z. YA. SHAPIRO, *Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications*, MacMillan, N. Y., 1963.
- [29] L. O'RAIFEARTAIGH, *Phys. Rev. Lett.*, t. **14**, 1965, p. 575.  
R. JOST, *Helv. Phys. Act.*, t. **39**, 1966, p. 369.  
I. E. SEGAL, *J. Funct. Anal.*, t. **1**, 1967, p. 1.
- [30] M. FLATO, J. C. GUILLOT et D. STERNHEIMER, *C. R. Ac. Sc.*, t. **270 A**, 1970, p. 914.
- [31] M. FLATO et D. STERNHEIMER, *Comm. Math. Phys.*, t. **12**, 1969, p. 296.
- [32] H. D. DOEBNER et O. MELSHEIMER, *Nuov. Ciment.*, t. **49**, 1967, p. 73.  
M. HAVLICEK, *Comm. Math. Phys.*, t. **20**, 1971, p. 130.
- [33] E. CUNNINGHAM, *Proc. London Math. Soc.*, t. **8**, 1909, p. 77.  
H. BATEMAN, *Proc. London Math. Soc.*, t. **8**, 1910, p. 223.
- [34] T. FULTON, R. ROHRlich et L. WITTEN, *Rev. Mod. Phys.*, t. **34**, 1962, p. 442.  
H. A. KASTRUP, *Ann. Phys. (Leipzig)*, t. **9**, 1962, p. 388.
- [35] A. CLARK, Ph. D. Thesis, 1969, Princeton University.  
J. SIMON, Thèse, Fac. Sciences, Dijon, 1971.
- [36] I. E. SEGAL, *Duke Math. Journ.*, t. **18**, 1951, p. 221.
- [37] E. INONU et E. P. WIGNER, *Pr. Na. Ac. Sc. U. S. A.*, t. **39**, 1953, p. 510; t. **40**, 1953, p. 119.
- [38] E. SELETAN, *J. Math. Phys.*, t. **2**, 1961, p. 1.
- [39] W. T. SHARP, *Racah algebra and the contraction of groups*, Research Rept, CRT-935, AECL-1098, Atomic Energy of Canada Limited, Chalk River, Ontario, 1960.
- [40] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie I*, Hermann, Paris, 1960.
- [41] D. STERNHEIMER, *J. Math. pures et appliquées*, t. **47**, 1968, p. 247.

(Manuscrit reçu le 16 juillet 1971).