

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD LÉAUTÉ

## **Singularités, sources de quelques métriques stationnaires**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 15, n° 3 (1971), p. 243-273

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1971\\_\\_15\\_3\\_243\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__15_3_243_0)

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Singularités, sources de quelques métriques stationnaires

par

**Bernard LÉAUTÉ**

Laboratoire de Mécanique Analytique, Faculté des Sciences de Paris.

RÉSUMÉ. — L'objet de cette publication est l'étude des singularités des métriques de Reissner-Nordström, Newman-Unti-Tamburino, Kerr en suivant la méthode que L. Bel a élaboré à propos de la métrique de Schwarzschild. Dans chacun des deux premiers cas nous mettrons en évidence une singularité ponctuelle, support des sources des champs gravitationnel et électrique, pour la solution de R. N. Dans le troisième cas, celui de la métrique de Kerr caractérisée par deux paramètres  $m$  et  $a$ , la singularité sera ponctuelle ou linéaire suivant que  $\frac{m}{a} > 1$  ou  $\frac{m}{a} < 1$ . Nous poursuivons l'étude seulement lorsque  $\frac{m}{a} > 1$  et nous verrons alors que le point singulier apparaît être le support de deux distributions mathématiques ; la première mettant en évidence l'aspect massif de la source, la seconde traduisant, semble-t-il, une rotation intrinsèque de cette source.

SUMMARY. — The object of this paper is the study of singularities of Reissner-Nordström, Newman-Unti-Tamburino, Kerr metrics by following the method worked out by L. Bel about Schwarzschild metric. In each of the two first cases we shall exhibit a punctual singularity, where the sources of the gravitationnal and electric fields, for Reissner-Nordström's solution, are localized. In the third case, that of Kerr's metric which is characterized by two parameters  $m$  and  $a$ , the singularity will be punctual or linear according as  $\frac{m}{a} > 1$  or  $\frac{m}{a} < 1$ . We shall achieve

the study only when  $\frac{m}{a} > 1$  and then we shall see that the singular point is the support of two mathematical distributions; the first one characterizing the massive aspect of the source, the second one seems to show an intrinsic rotation of that source.

---

## INTRODUCTION

Dans une publication récente sur la singularité de Schwarzschild [1], L. Bel <sup>(1)</sup> développait un nouveau point de vue, selon lequel cette singularité pouvait être réduite à un point agissant comme source de la solution extérieure. Cette procédure, contrairement à celle de l'extension, maintient le caractère globalement statique de la métrique et élimine toute spéculation à propos d'objets « effondrés » à travers la singularité de Schwarzschild.

L'un des traits importants du travail précité est le rôle privilégié dévolu à la métrique conforme à la métrique quotient, déduite de la métrique de Schwarzschild. Cette considération conduit à penser que les singularités de certaines métriques, statiques ou stationnaires, pourraient être étudiées selon une procédure semblable à celle développée dans la publication [1]. Nous envisageons, précisément de ce point de vue, l'étude des métriques suivantes :

— Reissner-Nordström, solution statique à symétrie sphérique des équations d'Einstein-Maxwell [2].

— N. U. T. solution stationnaire à symétrie axiale de Newman, Unti, Tamburino [3].

— Enfin Kerr, également solution stationnaire à symétrie axiale [4].

On verra que dans les deux premiers cas on aboutit à mettre en évidence une singularité ponctuelle porteuse des sources : masse, charge, de la solution extérieure. Dans le cas de la métrique de Kerr, caractérisée par deux paramètres  $m$  et  $a$ , la singularité pourra se présenter sous forme

ponctuelle ou linéaire suivant la valeur du rapport  $\frac{m}{a}$ ,  $\frac{m}{a} > 1$  ou  $\frac{m}{a} < 1$ . Lorsque  $\frac{m}{a} > 1$ , on tentera de préciser la structure des sources portées

---

<sup>(1)</sup> Une deuxième étude de L. BEL, dans le même esprit que [1] et portant sur la métrique de Curzon, sera bientôt publiée.

par le point singulier ; on le fera en mettant en évidence des distributions mathématiques permettant de caractériser les paramètres  $m$  et  $a$ .

Outre la mise en évidence et la caractérisation des singularités, la décomposition, des métriques d'espace-temps précitées en métrique d'espace et en champ de gravitation associés ( $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$ ), fera ressortir les analogies et les différences entre elles ; par exemple, on constatera que les métriques d'espace déduites des solutions de Schwarzschild et de N. U. T. sont formellement identiques, les champs de gravitation associés étant, eux, différents.

Tels sont, brièvement énoncés, les principaux thèmes qui vont être envisagés et développés maintenant.

## I. SINGULARITÉ ET SOURCES DE LA MÉTRIQUE DE REISSNER-NORDSTRÖM

### 11. Métrique d'espace-temps, métrique d'espace de R-N.

111. Cette solution, statique à symétrie sphérique, des équations d'Einstein Maxwell peut être écrite sous la forme suivante :

$$(1-1) \quad ds^2 = - \xi^2 dt^2 + \xi^{-2} dr^2 + (r + m)^2 d\omega^2,$$

on a posé :

$$(1-2) \quad \xi^2 \equiv -g_{00} = \frac{r - m}{r + m} + \frac{4\pi q^2}{(r + m)^2}, \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Dans ce système de coordonnées la seule composante non nulle du champ électromagnétique est :

$$(1-3) \quad F^{10} \equiv F_{10} = \frac{q}{(r + m)^2},$$

elle dérive du potentiel  $\Phi$  (il s'agit, en fait, de la quatrième composante du quadripotentiel  $\Phi_a$ ) :

$$(1-4) \quad \Phi = \frac{q}{r + m}.$$

(Pour alléger l'écriture nous poserons, dans toute cette étude,  $G$  et  $c = 1$ ). On constaterait facilement que les fonctions  $t$ ,  $x^1 = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $x^2 = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $x^3 = r \cos \theta$  sont harmoniques, de ce fait les coordonnées  $[t, r, \theta, \varphi]$  peuvent être appelées « polaires harmoniques ». Notons que l'on obtiendrait la métrique de Reissner-Nordström sous sa forme

la plus fréquemment citée [2] en effectuant sur (1-1) le changement de coordonnées :

$$\bar{r} = r + m.$$

Considérons le coefficient  $g_{00}$  : si  $m$  et  $q$  sont tels que  $m^2 < 4\pi q^2$ ,  $g_{00}$  reste de signe constant sur tout l'intervalle des valeurs de  $r$  :  $[0, \infty[$  ; si au contraire  $m^2 \geq 4\pi q^2$ ,  $g_{00}$  s'annule en changeant de signe pour :

$$r = \alpha \equiv \sqrt{m^2 - 4\pi q^2}.$$

Pour cette valeur  $r = \alpha$  il apparait une singularité du « type Schwarzschild » c'est-à-dire telle que :  $g_{00}$  s'annule alors que, par ailleurs, les composantes du tenseur de Riemann restent tout à fait régulières. Dans cette étude nous envisageons bien entendu, le cas où  $m^2 \geq 4\pi q^2$  et notons qu'alors les coordonnées  $[t, x^i]$  ne sont admissibles que pour  $r > \alpha$ .

112. Partant de (1-1) il serait facile d'obtenir la métrique quotient  $d\bar{s}^2$ , puis la métrique conforme à celle-ci :  $d\bar{s}^2 = \xi^2 d\bar{s}^2$  que nous adoptons comme métrique d'espace  $\bar{V}_3$ , son expression est la suivante :

$$(1-5) \quad d\bar{s}^2 = dr^2 + (r^2 - \alpha^2)d\omega^2.$$

Cette métrique est formellement identique à celle déduite de la métrique de Schwarzschild <sup>(2)</sup> [1] ; les raisonnements effectués à son propos valent donc encore, bornons-nous à en dégager les éléments principaux.

On définit d'abord un espace métrique  $\bar{V}_3^*(d^*)$  par la sous-variété ouverte  $\bar{V}_3^*$  de  $R_3$ , des points  $x$  tels que  $r > \alpha$ , munie de la distance  $d^*$  :

$$(1-6) \quad d^*(x_1, x_2) = \text{Inf} \int_{l(x_1, x_2)} d\bar{s} \quad x_1, x_2 \in \bar{V}_3^* ;$$

$l(x_1, x_2)$  ensemble des chemins différentiables par morceaux joignant  $x_1$  à  $x_2$ . La considération de suites de Cauchy de points de  $\bar{V}_3^*$  permet de constater le caractère incomplet de cet espace. Ces suites sont de deux catégories :

(1) suites  $x_n$  telles qu'il existe une valeur  $k$  telle que, pour  $n > k$ , on ait  $r_n > a > \alpha$  ; ces suites convergent vers des points de  $\bar{V}_3^*$ .

(2) suites  $x_n$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $n$  tel que  $r_n - \alpha < \varepsilon$  ; ces suites ne convergent pas mais elles sont équivalentes, la classe d'équivalence qui en résulte détermine donc un point unique  $x_0$ . L'espace  $\bar{V}_3$ , le complété de  $\bar{V}_3^*$ , contient donc un seul point additionnel  $x_0$  tel que  $d(x, x_0) = r - \alpha$  ( $x \in \bar{V}_3^*$ ).

<sup>(2)</sup> Cette constatation met en évidence le fait que les coordonnées  $x^i$  sont harmoniques.

113. L'espace métrique complet  $\bar{V}_3(d)$  peut être muni d'une structure différentiable prolongeant celle de  $\bar{V}_3^*$ . Pour la suite de notre étude, il nous suffit de définir une carte locale  $(U, \Phi)$ :  $U$  étant une boule ouverte centrée sur  $x_0$ ,  $d(x, x_0) < b$  et  $\Phi$  un homéomorphisme de  $U$  sur la boule euclidienne de centre 0. Nous définissons  $\Phi$  par :

$$(1-7) \quad \Phi : x_0 \rightarrow 0; \quad x \rightarrow y \equiv \{ y^1 = u \sin \theta \sin \varphi, y^2 = u \sin \theta \cos \varphi, y^3 = u \cos \theta \}$$

avec  $u = r = \alpha$ .

## 12. Singularité de la métrique et des champs gravitationnel et électrostatique.

121. Dans le voisinage de l'origine  $x_0$  on emploie les coordonnées  $u, \theta, \varphi$ ; la métrique d'espace (1-5) s'écrit :

$$(1-8) \quad d\bar{s}^2 = du^2 + u(u + 2\alpha)d\omega^2.$$

Les composantes, non identiquement nulles, du tenseur de Riemann rapportées au corepère :

$$(1-9) \quad \bar{\theta}^1 = du, \quad \bar{\theta}^2 = [u(u + 2\alpha)]^{\frac{1}{2}}d\theta, \quad \bar{\theta}^3 = [u(u + 2\alpha)]^{\frac{1}{2}} \sin \theta d\varphi$$

s'écrivent :

$$(1-10) \quad \bar{R}_{12 \ 12} = \bar{R}_{13 \ 13} = -\bar{R}_{23 \ 23} = \frac{\alpha^2}{u^2(u + 2\alpha)^2}.$$

On constate qu'elles tendent vers l'infini avec  $u \rightarrow 0$ , ceci montre que le point  $x_0$  est singulier pour la structure riemannienne de  $\bar{V}_3$ .

122. Considérons maintenant les champs gravitationnel et électrostatique. Suivant ici une terminologie explicitée dans le cas du vide [5] et qui présente aussi un intérêt dans des cas plus généraux, on écrit le champ de gravitation sous la forme :

$$(1-11) \quad \vec{\mathcal{E}} = -\overline{\text{grad}} U, \quad U = \text{Log } \xi$$

avec :

$$(1-12) \quad \xi^2 = \frac{u(u + 2\alpha)}{(y + \alpha + m)^2}.$$

Les composantes de  $\vec{\mathcal{E}}$ , rapportées au corepère (1-9), s'écrivent :

$$(1-13) \quad \mathcal{E}_1 = -\frac{1}{u(u + 2\alpha)} \left[ m - \frac{4\pi q^2}{u + \alpha + m} \right], \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \equiv 0;$$

celles du champ électrique  $\vec{E}$ ,  $E_i \equiv F_{i0}$

$$(1-14) \quad E_1 = \frac{q}{(u + m + \alpha)^2}, \quad E_2 = E_3 \equiv 0.$$

Nous verrons, par l'étude ultérieure de l'équation du champ électrique, qu'il est naturel d'associer à  $\vec{E}$  une induction électrique  $\vec{D}$  définie par :

$$(1-15) \quad D^i = \xi^{-2} F^{0i}$$

et dont les composantes explicites sont :

$$(1-16) \quad D^1 = \frac{q}{u(u + 2\alpha)}, \quad D^2 = D^3 \equiv 0.$$

Observons que les composantes du champ gravitationnel  $\mathcal{G}$  et de l'induction électrique  $D$  sont singulières pour  $u = 0$ , c'est-à-dire en  $x_0$ .

### 13. Équations des champs. Sources de la solution extérieure.

#### 131. ÉQUATIONS DES CHAMPS ÉLECTRIQUE ET GRAVITATIONNEL

1311. Envisageons d'abord le champ électrique régi par les équations de Maxwell :

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{qui se réduisent à} \quad \nabla_i F^{i0} = 0.$$

Compte tenu de  $\sqrt{-g} = \xi^{-2} \sqrt{\bar{g}}$  on a :

$$\nabla_i F^{i0} \equiv \frac{1}{\xi^2 \sqrt{\bar{g}}} \partial_i (\xi^{-2} \sqrt{\bar{g}} F^{i0}) = 0$$

d'où l'intérêt d'introduire (1-15) :

$$D^i = \xi^{-2} F^{0i},$$

obtenant ainsi, sur  $\bar{\nabla}_3$  :

$$(1-17) \quad \bar{\nabla}_i D^i = 0 \Leftrightarrow \overline{\text{div}} \vec{D} = 0.$$

Cette équation de conservation donne lieu au théorème de Gauss et permet, ainsi que nous le verrons, de caractériser la source du champ électrique.

1312. Étudions maintenant le champ gravitationnel. Selon des considérations bien connues [6] les équations d'Einstein :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}, \quad \chi = \frac{8\pi G}{c^2}$$

se ramènent, dans le cas présent, à un système de trois groupes d'équations; l'une d'elles s'écrit, dans le cadre du système d'unités choisi :

$$(1-18) \quad \bar{\Delta}U = 4\pi\mu, \quad \mu = \xi^{-2}(T_0^0 - T_i^i).$$

Compte tenu de l'expression générale de  $T_{\alpha\beta}$  :

$$T_{\alpha\beta} = -F_{\rho\alpha}F_{\beta}^{\rho} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu},$$

il est bien facile d'obtenir  $\mu$  et d'expliciter (1-18) :

$$\bar{\Delta}U = 4\pi\xi^{-2}F_{10}F^{10}.$$

Le second membre de cette relation peut être mis sous forme de  $\bar{\text{div}}$  d'où il résulte, en mettant en évidence  $\bar{\mathcal{E}}$  (1-11) et  $\bar{\mathcal{D}}$  (1-16), la formulation suivante :

$$\bar{\nabla}_i(\bar{\mathcal{E}}^i + 4\pi\Phi D^i) = 0,$$

où  $\Phi$  est le potentiel défini en (1-4).

On peut poser :

$$(1-19) \quad \mathcal{K}^i = \bar{\mathcal{E}}^i + 4\pi\Phi D^i$$

et écrire :

$$(1-20) \quad \bar{\nabla}_i \mathcal{K}^i = 0 \Leftrightarrow \bar{\text{div}} \vec{\mathcal{K}} = 0.$$

Seconde relation de conservation concernant, celle-ci, le champ de gravitation modifié par la présence du champ électrique.

## 132. CARACTÉRISATION DES SOURCES

### 1321. Formule générale.

Nous considérons les relations (1-17), (1-20) et nous nous proposons de les définir au sens de la théorie des distributions [7].

Un vecteur  $\vec{h}$  ( $\bar{\mathcal{D}}$  ou  $\vec{\mathcal{K}}$ ), dont les composantes sont des fonctions localement sommables, définit sur  $\bar{\mathcal{V}}_3$  un vecteur distribution :

$$(1-21) \quad \langle h^i, f_i \rangle = \int_{\bar{\mathcal{V}}_3} h^i f_i \bar{\eta}, \quad f_i \in \mathcal{D}^1(\bar{\mathcal{V}}_3),$$

$\bar{\eta}$  élément de volume défini à partir du  $d\bar{s}^2$ . On peut maintenant écrire  $\bar{\nabla}_i h^i$  :

$$\langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = - \langle h^i, \partial_i f \rangle$$



soit :

$$\langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{V}_3 - B(\varepsilon)} h^i \partial_i f \bar{\eta}, \quad f \in \mathcal{D}^0(\bar{V}_3)$$

où  $B(\varepsilon)$  est une boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$ .

Cette expression peut être transformée comme suit :

$$\langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{V}_3 - B(\varepsilon)} [\bar{\nabla}_i (h^i f) - f (\bar{\nabla}_i h^i)] \bar{\eta}.$$

Le second terme du second membre est nul en raison du caractère conservatif de  $\bar{h}$ , le premier terme peut être transformé en une intégrale de surface par la formule de Stokes ; en raison de la condition de support de  $f$ , on obtient :

$$(1-22) \quad \langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_2(\varepsilon)} h^i f d\sigma_i,$$

$S_2(\varepsilon)$  frontière de  $B(\varepsilon)$ .

Nous allons appliquer cette formule aux champs  $D$  et  $\mathcal{K}$ .

1322. *Source du champ électrique.*

Rappelons les composantes (1-16) de  $D^i$  :

$$D^1 = \frac{q}{u(u + 2\alpha)}, \quad D^2 = D^3 \equiv 0.$$

L'on intègre sur la surface  $u = \varepsilon$ . La fonction d'essai  $f$  peut être développée au voisinage de l'origine  $x_0$  :

$$f(u, \theta, \varphi) = f(x_0) + \varepsilon \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x_0)} + \varepsilon^2 R(f).$$

La formule (1-22) est utilisée sans aucune difficulté, le résultat est :

$$(1-23) \quad \langle \bar{\nabla}_i D^i, f \rangle = 4\pi q f(x_0) \Leftrightarrow \bar{\nabla}_i D^i = 4\pi q \delta_{x_0}$$

où  $\delta_{x_0}$  est le symbole de la « fonction de Dirac », c'est-à-dire de la mesure formée d'une masse + 1 au point  $x_0$  [7].

1322. *Source du champ gravitationnel.*

Les composantes du vecteur  $\mathcal{K}^i$ , défini en (1-19), se déduisent facilement de (1-13) et de (1-16) ; elles valent :

$$\mathcal{K}^1 = - \frac{m}{u(u + 2\alpha)}, \quad \mathcal{K}^2 = \mathcal{K}^3 \equiv 0.$$

La formule (1-22) s'applique, de même que précédemment, et il vient :

$$(1-24) \quad \langle \bar{\nabla}_i \mathcal{K}^i, f \rangle = -4\pi m f(x_0) \Leftrightarrow \bar{\nabla}_i \mathcal{K}^i = -4\pi m \delta_{x_0}.$$

Les relations (1-23) et (1-24) font apparaître les quantités symboliques :  $q\delta_{x_0}$  et  $-m\delta_{x_0}$  comme sources des champs électrostatique et gravitationnel.

#### 14. Commentaires, extension et limite de la méthode.

141. Nous avons vu précédemment comment la méthode élaborée par L. Bel pour l'étude de la singularité de Schwarzschild pouvait être adaptée au cas de la métrique de Reissner-Nordström ; une analyse du même type pourrait être menée à propos de la solution statique à symétrie sphérique représentative du champ gravitationnel couplé avec un champ scalaire sans masse, obtenue par A. I. Janis, E. T. Newman et J. Winicour [8]. Indiquons brièvement quelques aspects caractéristiques de ce cas.

142. La solution des équations d'Einstein, correspondant à ce cas, peut être explicitée par la donnée des éléments suivants :

(a) la métrique d'espace  $\bar{\nabla}_3$  :

$$(1-25) \quad d\bar{s}^2 = dr^2 + (r^2 - \alpha^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad \alpha = \mu m ;$$

(b) le champ de gravitation dérivant du potentiel U :

$$(1-26) \quad U = \text{Log } \xi \quad \text{avec} \quad \xi^2 = \left( \frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right)^{1/\mu} ;$$

(c) le champ scalaire :

$$(1-27) \quad \Phi = AU.$$

Les potentiels U et  $\Phi$  satisfont aux équations :

$$(1-28) \quad \bar{\Delta}U = 0, \quad \bar{\Delta}\Phi = 0 ;$$

ils dépendent des deux constantes  $m$  et  $A$  ; la quantité  $\mu$  s'écrivant :

$$(1-29) \quad \mu^2 \equiv 1 + \kappa \frac{A^2}{m^2} > 1$$

où  $\kappa$  est la constante de couplage relative au champ scalaire  $\Phi$ .

On observera que la métrique d'espace, écrite en coordonnées polaires harmoniques, revêt la même forme que dans les cas précédents et, selon la procédure déjà décrite, conduit donc à une singularité ponctuelle  $x_0$ .

Les équations (1-28) définies au sens des distributions permettent de caractériser les sources du champ gravitationnel et du champ scalaire :

$$(1-30) \quad \bar{\Delta}U = 4\pi m\delta_{x_0}, \quad \bar{\Delta}\Phi = 4\pi A m\delta_{x_0}.$$

On voit ainsi que la source du champ gravitationnel est  $m\delta_{x_0}$  et celle du champ scalaire  $A m\delta_{x_0}$ .

143. Les développements précédents ont fait apparaître des analogies précises entre les divers cas envisagés. On retiendra, en particulier, que les métriques d'espace, relatives aux solutions : du vide, avec champ électrostatique, avec champ scalaire sans masse, peuvent toutes s'écrire, en coordonnées polaires harmoniques, sous la forme suivante :

$$(1-31) \quad d\bar{s}^2 = dr^2 + (r^2 - \alpha^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

elles ne diffèrent que par la signification du paramètre  $\alpha$ .

Il importe de préciser que l'expression (1-31), valable pour un certain nombre de cas, n'a pas un caractère général ; l'exemple du champ scalaire avec masse le montre [9]. Sans nous appesantir sur l'étude de ce cas, indiquons cependant que les équations, qui le régissent, peuvent être commodément écrites dans le cadre de la métrique d'espace suivante :

$$(1-32) \quad d\bar{s}^2 = e^{2B} d\bar{r}^2 + e^{2C} \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Et quelques calculs élémentaires, portant sur le système d'équations précitées, montrent qu'il est exclu que la métrique (1-32) revête la forme (1-31).

## II. MÉTRIQUE DE NEWMAN, UNTI ET TAMBURINO

### 21. Métrique d'espace-temps. Métrique d'espace de N. U. T.

211. La métrique de N. U. T. [3] est une solution stationnaire à symétrie axiale des équations d'Einstein du vide, son expression est la suivante :

$$(2-1) \quad ds^2 = -\xi^2 \left( dt + 4b \sin^2 \frac{1}{2} \theta d\varphi \right)^2 + \xi^{-2} dr^2 + (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

avec

$$(2-2) \quad \xi^2 \equiv -g_{00} = 1 - 2 \frac{mr + b^2}{r^2 + b^2}.$$

Rappelons quelques propriétés de cette métrique :

a) L'annulation de  $b$  conduit à la métrique de Schwarzschild.

b) Elle tend asymptotiquement vers la métrique de Minkowski pour  $r \rightarrow \infty$  ; pour constater cette propriété il est nécessaire d'utiliser deux cartes locales [10].

Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

la métrique prend la forme :

$$(2-3) \quad ds^2 = -\xi^2 \left[ dt + 2b \frac{xdy - ydx}{r(r+z)} \right]^2 + \xi^{-2} dr^2 \\ + \frac{r^2 + b^2}{r^4} [(ydx - xdy)^2 + (zdy - ydz)^2 + (xdz - zdx)^2],$$

valable pour le domaine défini comme suit :

$$r \in [0, \infty[, \quad \theta \in [0, \pi[, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

On passe à une seconde carte par la relation :

$$t' = t + 4b\varphi \Leftrightarrow t' = t + 4b \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

la métrique s'écrit alors :

$$(2-3 \text{ bis}) \quad ds^2 = -\xi^2 \left( dt' - 2b \frac{xdy - ydx}{r(r-z)} \right)^2 + \xi^{-2} dr^2 \\ + \frac{r^2 + b^2}{r^4} [(ydx + xdy)^2 + (zdy - ydz)^2 + (xdz - zdx)^2],$$

le domaine étant cette fois :

$$r \in [0, \infty[, \quad \theta \in ]0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Le demi-axe  $z \leq 0$  est exclu du premier domaine,  $z \geq 0$  du second ; mais en envisageant les deux cartes toutes les directions sont considérées et la propriété annoncée apparaît bien.

c) Remarquons encore que les composantes du tenseur de Riemann, rapportées à la cobase orthonormée déduite de (2-1) s'expriment comme suit :

$$R_{02 \ 02} = R_{03 \ 03} = -R_{31 \ 31} = -R_{12 \ 12} = -\frac{1}{2} R_{01 \ 01} = \frac{1}{2} R_{23 \ 23} \equiv A$$

$$R_{02 \ 31} = R_{03 \ 12} = -\frac{1}{2} R_{01 \ 23} \equiv B$$

avec

$$(2-4) \quad \begin{aligned} A &\equiv \frac{1}{(r^2 + b^2)^3} [mr^3 + 3b^3r(r - m) - b^4] \\ B &\equiv -\frac{b}{(r^2 + b^2)^3} [r^3 - 3r(mr + b^2) + b^2m]. \end{aligned}$$

On voit qu'elles sont toujours bornées et tendent vers 0 pour  $r \rightarrow \infty$ .

Revenons à l'expression (2-1) de la métrique de N. U. T. on constate que le coefficient :

$$g_{00} = - \left[ 1 - 2 \frac{mr + b^2}{r^2 + b^2} \right]$$

s'annule pour la valeur  $r_0 = m + \sqrt{m^2 + b^2}$ ; selon les indications données en I cette singularité apparaît être du « type Schwarzschild », la coordonnée  $r$  n'est admissible que pour  $r > r_0$ .

212. La métrique d'espace  $\bar{V}_3$ , déduite de (2-1), s'écrit :

$$(2-5) \quad d\bar{s}^2 = dr^2 + (r^2 - 2mr - b^2)(d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Effectuons le changement de coordonnée :

$$(2-6) \quad \bar{r} = r + m,$$

on obtient :

$$(2-7) \quad d\bar{s}^2 = d\bar{r}^2 + (\bar{r}^2 - \alpha^2)d\omega^2 \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = m^2 + b^2.$$

Cette expression est la même que précédemment (1-5); ce fait et la relation [5] :

$$(2-8) \quad \bar{\nabla}_i \bar{\Phi}^i \equiv \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \partial_i (\sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{ij} \Phi_j) = 0 \quad \text{où} \quad \Phi_i \equiv \frac{g_{0i}}{g_{00}},$$

manifestement satisfaite, permettent de dire que le système de coordonnées  $[t, x^i]$ , admissible seulement pour  $\bar{r} > \alpha$ , est harmonique.

213. Compte tenu des considérations précédentes, il est tout à fait clair que nous sommes ramenés à l'étude décrite en (1-2) et, naturellement, à la même conclusion : l'espace métrique  $\bar{V}_3^*(d^*)$ , associé à  $\bar{V}_3$ , est incomplet et son complété  $\bar{V}_3(d)$  contient seulement un point additionnel  $x_0$  tel que  $d(x_0, x) = \bar{r} - \alpha$ .

## 22. Singularité de la métrique et du champ gravitationnel.

221. On pourrait ici reprendre l'alinéa 121, noter que la métrique (2-7) peut être écrite :

$$(2-9) \quad d\bar{s}^2 = du^2 + u(u + 2\alpha)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

et constater que les composantes du tenseur de Riemann de  $\bar{V}_3$  (1-10) présentent une singularité pour  $u = 0$  c'est-à-dire en  $x_0$ .

222. Considérons maintenant le champ gravitationnel; dans le cadre du formalisme employé [5] ou [11] la description du champ de gravitation stationnaire s'effectue à l'aide du vecteur  $\bar{\mathcal{E}}$ , déjà introduit en (1-11), et du tenseur  $\mathcal{B}_{ij}$  défini comme suit :

$$(2-10) \quad \mathcal{B}_{ij} = \xi(\partial_i \Phi_j - \partial_j \Phi_i) \quad \text{où} \quad \Phi_i \equiv \frac{g_{0i}}{g_{00}}$$

et auquel, par dualité, on associe le vecteur  $\bar{\mathcal{B}}$  :

$$(2-11) \quad \mathcal{B}^i = \frac{1}{2} \bar{\eta}^{ijk} \mathcal{B}_{jh} \quad \text{où} \quad \bar{\eta}^{ijk} = \frac{\varepsilon^{ijk}}{\sqrt{g}}$$

Rappelons encore la définition du vecteur  $\bar{h}$  :

$$(2-12) \quad h_i = -\mathcal{E}_i - \frac{\xi^3}{2} \Phi_k \mathcal{B}_i^k$$

Les composantes de ces quantités, rapportées au corepère orthonormé déduit de (2-9) et indiqué en (1-9), valent :

$$(2-13) \quad \xi^2 = \frac{u(u+2\alpha)}{(u+\alpha+m)^2 + b^2};$$

$$(2-14) \quad \mathcal{E}_1 = - \left[ \frac{u+\alpha}{u(u+2\alpha)} - \frac{u+\alpha+m}{(u+\alpha+m)^2 + b^2} \right], \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \equiv 0;$$

$$(2-15) \quad \mathcal{B}_{23} = \frac{2b}{[u(u+2\alpha)[(u+\alpha+m)^2 + b^2]]^{1/2}} \equiv \mathcal{B}_{11}, \quad \mathcal{B}_{31} = \mathcal{B}_{12} \equiv 0;$$

$$(2-16) \quad \begin{cases} h_1 = \frac{u+\alpha}{u(u+2\alpha)} - \frac{u+\alpha+m}{(u+\alpha+m)^2 + b^2}, \\ h_2 = \frac{2b^2(1-\cos\theta)u(u+2\alpha)}{[(u+\alpha+m)^2 + b^2]^2 \sin\theta}, \\ h_3 \equiv 0. \end{cases}$$

On constate que ces expressions sont singulières en  $x_0$ .

### 23. Équations du champ. Source du champ gravitationnel de N. U. T.

#### 231. ÉQUATIONS DU CHAMP

Dans le cas d'un espace-temps stationnaire, les équations d'Einstein du vide peuvent être écrites complètement dans le formalisme développé en [5], [11], citons les quatre premières :

$$(2-17) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{\mathcal{B}} = -3\vec{\mathcal{B}} \wedge \vec{\mathcal{E}} \\ \Delta U = -\frac{1}{2}\xi^2 \vec{\mathcal{B}}^2. \end{cases}$$

Grâce au vecteur  $\vec{h}$  (2-12) on a les expressions équivalentes :

$$(2-18) \quad \bar{\nabla}_i h^i = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{h} = 0,$$

$$(2-19) \quad \bar{\nabla}_i (\xi^3 \vec{\mathcal{B}}^{ij}) = 0.$$

Ces formules de conservation vont fournir le moyen de caractériser les sources.

#### 232. CARACTÉRISATION DES SOURCES

Nous avons précisé à l'alinéa 1321 la méthode et donné en (1-22) une formule que nous appliquons ici au vecteur  $h^i$  (2-12) satisfaisant (2-18). Les composantes de  $h^i$  sont localement sommables dans tout ouvert excluant l'origine, elle définissent un vecteur-distribution et l'on a :

$$(2-20) \quad \langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_2(\varepsilon)} h^i f d\sigma_i.$$

Le calcul effectif du second membre de (2-20) se fait sans difficulté ; on utilise l'expression des composantes  $h_i$  (2-16), celle de la métrique (2-9) ; la fonction  $f$  est développée, comme précédemment, au voisinage de l'origine  $x_0$ . Le résultat obtenu, au terme du calcul, est :

$$(2-21) \quad \langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = -4\pi\alpha f(x_0) \Leftrightarrow \bar{\nabla}_i h^i = -4\pi\alpha \delta_{x_0}.$$

Cette relation caractérise la source du champ gravitationnel de N. U. T. écrite symboliquement :

$$\sqrt{(m^2 + b^2)^{-1/2}} \delta_{x_0}.$$

La formule (2-19) conduit aussi à définir une distribution ; la procédure complète sera explicitée dans une étude ultérieure, notons seulement qu'une source du type  $b\delta_{x_0}$  est mise en évidence.

## 24. Commentaires : symétries et interprétation de la métrique de N. U. T.

241. L'analyse précédente fait apparaître que la métrique d'espace-temps de N. U. T. qui, de prime abord, présente la symétrie axiale, conduit à une métrique d'espace (2-9) et à un champ de gravitation associé  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$  (2-14), (2-15), pourvus de la symétrie sphérique. Selon notre point de vue, on peut donc dire que la métrique de N. U. T. est une solution stationnaire à symétrie sphérique des équations d'Einstein du vide. Indiquons qu'une conclusion semblable apparaît dans une publication de C. W. Misner [10] où, en particulier, est étudié le groupe  $G_4$  des transformations isométriques de la variété de N. U. T.

242. Procédant par analogie avec l'électro-magnétisme classique, M. Demianski et E. T. Newman [12] ont suggéré l'interprétation suivante des paramètres  $m$  et  $b$  :  $m$ , la masse, est l'analogue de la charge électrique  $e$  alors que  $b$  serait l'analogue gravitationnel d'un hypothétique monopole magnétique  $q$ . Le résultat (2-21), la structure du champ  $\mathcal{B}$  (2-15) (surtout comparée avec le cas suivant de la métrique de Kerr), les considérations de l'alinéa précédent nous incitent à retenir cette interprétation ; notre étude permettant, de plus, de fixer la localisation des sources.

## III. MÉTRIQUE DE KERR

### 31. Métrique d'espace-temps de Kerr : écriture, propriétés.

311. La métrique de Kerr [4], solution stationnaire à symétrie axiale des équations d'Einstein, s'écrit :

$$(3-1) \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right)dt^2 + 4\frac{mr}{\rho^2}a \sin^2 \theta dt d\varphi + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{r^2 + a^2 - 2mr} + d\theta^2 \right) + \left( r^2 + a^2 + \frac{2mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

avec

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Rappelons quelques propriétés de cette métrique, utiles pour la suite :

a) L'annulation de la constante  $a$  conduit à la métrique de Schwarzschild sous sa forme habituelle.



b) Les composantes du tenseur de courbure sont obtenues par combinaisons linéaires des deux expressions suivantes :

$$(3-2) \quad A = \frac{mr}{\rho^6} (r^2 - 3a^2 \cos^2 \theta), \quad B = \frac{m\alpha \cos \theta}{\rho^6} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta).$$

Elles s'annulent identiquement quand  $m = 0$ .

c) Cette constatation permet de préciser la signification des coordonnées  $r, \theta, \varphi$ , par rapport aux coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  ; pour  $m = 0$ , la courbure disparaît, la métrique (3-1) devient donc minkowskienne et l'on obtient les relations :

$$(3-3) \quad x = (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

et aussi le lien avec les coordonnées polaires ( $\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi} \equiv \varphi$ ) :

$$(3-4) \quad \tilde{r}^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta, \quad \tilde{r} \cos \tilde{\theta} = r \cos \theta.$$

Les surfaces correspondant à des valeurs constantes de  $r$  et de  $\theta$  sont, respectivement, des ellipsoïdes et des hyperboloïdes de révolution homofocaux ; la ligne des foyers étant la circonférence  $\Gamma$  définie par :

$$(3-5) \quad (\Gamma) \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

L'interprétation des coordonnées, indiquées pour  $m$  nulle, sera admise aussi pour  $m \neq 0$  <sup>(3)</sup>.

d) Notons enfin que, sur la circonférence  $\Gamma$ , les composantes du tenseur de courbure déduites de (3-2) deviennent infinies.

312. La surface singulière correspondant à  $g_{00} = 0$ , analogue, dans le cas de Kerr, de la singularité de Schwarzschild, est déterminée par l'équation :

$$(3-6) \quad -g_{00} \equiv 1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = 0.$$

Plus généralement on étudie les surfaces équipotentielles sur lesquelles  $-g_{00}$  prend une valeur constante notée  $\xi^2$ ,

$$0 \leq \xi^2 < 1.$$

Divers cas se présentent, selon les valeurs respectives des paramètres  $m$

---

<sup>(3)</sup> Le système de coordonnées  $[t, x, y, z]$  ne constitue pas un système de coordonnées harmoniques comme cela était le cas en I et II.

et  $a$ , nous devons examiner successivement les cas :  $\frac{m}{a} > 1$ ,  $\frac{m}{a} < 1$  et enfin le cas limite  $\frac{m}{a} = 1$ .

L'allure des courbes, traces de ces surfaces sur un plan axial, sera précisée ultérieurement ; notons déjà que toutes présentent une ligne anguleuse liée à la discontinuité sur la circonférence  $\Gamma$  (3-5).

### 32. Étude de l'espace $\bar{V}_3$ . Espace métrique associé $\bar{V}_3(d)$ .

321. Partant de la métrique d'espace-temps de Kerr (3-1), on détermine facilement la métrique d'espace  $\bar{V}_3$  qui s'écrit :

$$(3-7) \quad d\bar{s}^2 = (\rho^2 - 2mr) \left( \frac{dr^2}{r^2 + a^2 - 2mr} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2 - 2mr) \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Suivant la procédure déjà utilisée, on définit un espace métrique  $\bar{V}_3^*(d^*)$  comme la sous-variété ouverte des points  $x$  de  $\mathbb{R}_3$  tels que :

$$(3-8) \quad \{ x(r, \theta, \varphi) \in \bar{V}_3^* \Leftrightarrow r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2mr > 0 \}$$

et munie de la distance  $d^*$  :

$$(3-9) \quad d^*(x_1, x_2) = \text{Inf} \int_{l(x_1, x_2)} d\bar{s}; \quad x_1, x_2 \in \bar{V}_3^*$$

$l(x_1, x_2)$  ensemble des chemins, différentiables par morceaux, joignant  $x_1$  à  $x_2$ .

*L'espace  $\bar{V}_3^*(d^*)$  est incomplet mais son complété  $\bar{V}_3(d)$  contient : soit un point additionnel, soit une ligne additionnelle suivant que  $\frac{m}{a} > 1$  ou  $\frac{m}{a} < 1$  (Dans le cas limite  $m = a$ , la ligne est réduite à un point).*

Pour aboutir à ce résultat il est nécessaire d'envisager des suites de Cauchy de points  $x_n$  de  $\bar{V}_3^*(d^*)$ ; elles peuvent être de deux types :

(1) Une suite  $x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n)$  est du premier type s'il existe un entier  $k$  tel que pour tout entier  $n > k$  on ait :

$$r_n^2 + a^2 \cos^2 \theta_n - 2mr_n \geq \eta > 0,$$

$\eta$  nombre réel quelconque.

Toute suite de ce type converge vers un point  $x \in \bar{V}_3^*$ .

(2) Une suite  $x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n)$  est du second type si quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n$  tel que :

$$r_n^2 + a^2 \cos^2 \theta_n - 2mr_n \leq \varepsilon.$$

Pour étudier ces suites (2) il faut distinguer entre les deux cas précités.

322.  $\frac{m}{a} > 1.$

Indiquons l'allure de la courbe singulière, trace sur un plan axial de la surface singulière  $g_{00} = 0$ ; en raison des symétries on peut se borner à un croquis couvrant un quart de plan.

A l'intérieur de ce cas il y a encore deux possibilités :

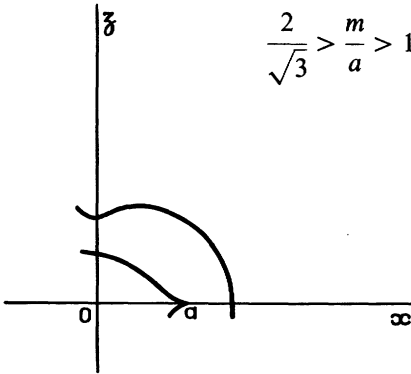


FIG. 1.

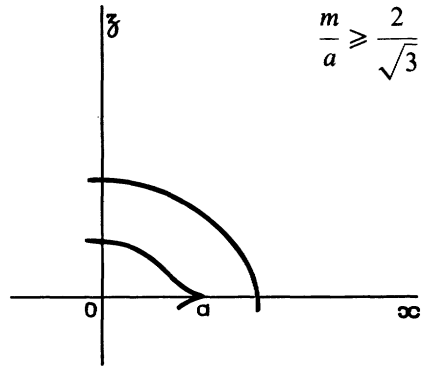


FIG. 1 bis.

Envisageons deux suites du type (2):  $x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n)$  et  $x'_m(r'_m, \theta'_m, \varphi'_m)$ , on va montrer que la distance  $d^*(x_n, x'_m)$  peut être rendue arbitrairement petite, prouvant ainsi l'équivalence des suites de Cauchy  $x_n$  et  $x'_m$ ; ce résultat valant pour tout couple de suites de type (2) on est conduit à définir un point unique  $x_0$ , représentatif de la classe d'équivalence.

Pour établir cette proposition on va évaluer la distance  $d^*(x_n, x'_m)$  en suivant le circuit :

$$x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n) \rightarrow x_p^*(r_n, \theta_n, \varphi'_m) \rightarrow x_q^+(r_q^+, \theta_n, \varphi'_m) \rightarrow x'_m(r'_m, \theta'_m, \varphi'_m);$$

$x_p^*$  appartient à la surface  $(\xi_n)$  :

$$1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = \xi_n^2;$$

$x_q^+$  et  $x'_m$  appartiennent à la surface  $(\xi'_m)$ ;  $\varphi_n \equiv \varphi$ ,  $\varphi'_m \equiv \varphi'$ .

a) On peut borner la distance  $d^*(x_m, x_p^*)$  en calculant la longueur des deux arcs de méridien, de la surface  $(\xi_n)$ , correspondant aux angles  $\varphi_n$  et  $\varphi'_m$ ; omettant les détails du calcul on aboutit à :

$$(3-10) \quad d^*(x_m, x_p^*) \leq 2\xi_n \int_0^{\theta_n} \rho \left[ 1 + \frac{r^2 a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)^2 (r^2 + a^2 - 2mr)} \right]^{1/2} d\theta \equiv \xi_n K_1$$

où

$$r(\theta) = \frac{m}{1 - \xi_n^2} + \sqrt{\left(\frac{m}{1 - \xi_n^2}\right)^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

et

$$\rho^2(\theta) = r^2(\theta) + a^2 \cos^2 \theta.$$

Précisons que l'intégrale (3-10) existe effectivement et est bien bornée.

b) Les points  $x_p^*$  et  $x_q^+$  sont joints par la ligne d'équation  $\theta \equiv \theta_n = \text{cte}$ ; nous avons vu à l'alinéa 311 qu'il s'agit d'un arc d'hyperbole. On évalue  $d^*(x_p^*, x_q^+)$  en calculant la longueur de cette courbe comprise entre les surfaces  $(\xi_n)$  et  $(\xi'_m)$ , soit :

$$d^*(x_p^*, x_q^+) \leq \int_{r_n}^{r_q^+} \left( \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta_n - 2mr}{r^2 + a^2 - 2mr} \right)^{1/2} dr$$

et supposant, par exemple :

$$\xi'_m \geq \xi_n,$$

on peut majorer comme suit :

$$(3-11) \quad d^*(x_p^*, x_q^+) \leq \frac{\xi'_m \rho_q^+}{(\xi'_m \rho_q^{+2} + a^2 \sin^2 \theta_n)^{1/2}} |r_q^+ - r_n| \equiv \xi'_m K_2$$

où

$$\rho_q^{+2} = r_q^{+2} + a^2 \cos^2 \theta_n.$$

c) Enfin les points  $x_q^+$  et  $x'_m$ , de la surface  $(\xi'_m)$ , sont joints par un arc du méridien déterminé par l'angle  $\varphi'_m$ ; on obtient la contribution suivante, semblable à a) :

$$(3-12) \quad d^*(x_q^+, x'_m) \leq \xi'_m \int_{\theta_n}^{\theta'_m} \rho \left[ 1 + 4 \frac{a^4 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)^2 (r^2 + a^2 - 2mr)} \right]^{1/2} d\theta \equiv \xi'_m K_3$$

où

$$r(\theta) = \frac{m}{1 - \xi_m'^2} + \sqrt{\left(\frac{m}{1 - \xi_m'^2}\right)^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

Appliquant aux expressions (3-10), (3-11) (3-12) l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$(3-13) \quad d^*(x_n, x'_m) < 3\varepsilon K$$

où  $\varepsilon = \xi'_m \equiv \text{Sup} (\xi_n, \xi'_m)$  et  $K = \text{Sup} (K_1, K_2, K_3)$ .

L'inégalité (3-13) prouve bien que la distance  $d^*(x_n, x'_m)$  peut être rendue arbitrairement petite et ainsi le résultat annoncé est atteint.

d) *Remarque.* — A propos des expressions (3-10), (3-12), nous avons précisé la détermination de  $r(\theta)$ , celle correspondant à la nappe extérieure des surfaces  $(\xi_p)$ , tendant vers la surface singulière  $g_{00} = 0$  (fig. 1, 1 bis), fut indiquée ; il importe de noter que le résultat reste tout aussi valable si l'on emploie l'autre détermination, soit :

$$r(\theta) = \frac{m}{1 - \xi_p^2} - \sqrt{\left(\frac{m}{1 - \xi_p^2}\right)^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad \xi_p = \xi_n \text{ ou } \xi'_m.$$

Il en résulte seulement quelques modifications minimales dans la formulation.

323.  $\frac{m}{a} < 1$ . Précisons l'allure de la surface singulière  $g_{00} = 0$  :

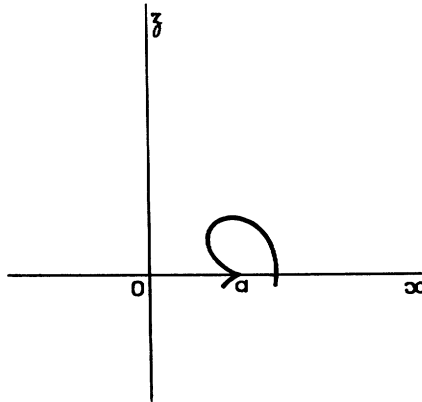


FIG. 2.

On va encore envisager les suites du second type définies à l'alinéa 321 et l'on se propose de montrer que les suites caractérisées par un même angle de méridien  $\varphi$  sont équivalentes et que l'ensemble des classes d'équivalence

ainsi définies forme, en un sens qui sera précisé, une circonférence de longueur :

$$2\pi a \left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right).$$

Le raisonnement à mener ici recoupe largement le précédent, le circuit emprunté est le même; précisons seulement l'évaluation de la distance  $d^*(x_n, x_p^*)$  où la différence avec le cas précédent est sensible.

Le circuit  $x_n \rightarrow x_p^*$  est décomposé comme suit :

$$x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n) \rightarrow a_n \left( \frac{m}{1 - \xi_n^2}, \Theta_n, \varphi_n \right) \rightarrow b_n \left( \frac{m}{1 - \xi_n^2}, \Theta_n, \varphi'_m \right) \rightarrow x_p^*(r_n, \theta_n, \varphi'_m).$$

Tous ces points appartiennent à la surface ( $\xi_n$ ); les points  $a_n$  et  $b_n$  sont situés sur le parallèle, qualifié de ligne de crête, où la coordonnée  $\theta$  présente son minimum de valeur, soit :

$$(3-14) \quad \cos \Theta_n = \frac{m}{a(1 - \xi_n^2)}.$$

Cette ligne <sup>(4)</sup> peut encore être caractérisée comme suit, en utilisant (3-4) :

$$\tilde{r}_n \equiv R_n = a, \quad \cos \tilde{\Theta}_n = \left[ \frac{m}{a(1 - \xi_n^2)} \right]^2.$$

Indiquons maintenant les majorations des distances.

(a<sub>1</sub>) L'examen des positions relatives des points constituant le circuit  $x_n \rightarrow x_p^*$ , montre clairement que l'on a :

$$d^*(x_n, a_n) \equiv d^*(b_n, x_p^*).$$

Et, de façon semblable à (3-10), on obtient :

$$(3-15) \quad 2d^*(x_n, a_n) \leq 2\xi_n \int_{\theta_n}^{\Theta_n} \rho \left[ 1 + 4 \frac{r^2 a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)^2 (r^2 + a^2 - 2mr)} \right]^{1/2} d\theta \equiv \xi_n K'_1.$$

On se convainc facilement que cette intégrale converge, en particulier à la borne  $\Theta_n$  fixée par (3-14).

(a<sub>2</sub>) Évaluons la distance des points  $a_n$  et  $b_n$ , on aboutit à :

$$(3-16) \quad d^*(a_n, b_n) \leq \left[ \frac{2\xi_n^2 m^2}{(1 - \xi_n^2)^2} + a^2 - \frac{m^2}{(1 - \xi_n^2)^2} \right]^{1/2} \left[ 1 - \frac{m^2}{a^2(1 - \xi_n^2)^2} \right]^{1/2} |\varphi_n - \varphi'_m|.$$

<sup>(4)</sup> En raison de la symétrie on a une ligne de crête qui correspond à  $\Theta_n$  et une autre à  $\pi - \Theta_n$ .

On applique l'inégalité triangulaire aux divers éléments du circuit et, compte tenu des relations (3-15), (3-16), (3-11), (3-12), l'on est conduit à :

$$(3-17) \quad d^*(x_n, x'_m) \leq \varepsilon K + \left[ m^2 \frac{2\xi_n^2 - 1}{(1 - \xi_n^2)^2} + a^2 \right]^{1/2} \left[ 1 - \frac{m^2}{a^2(1 - \xi_n^2)^2} \right]^{1/2} |\varphi_n - \varphi'_m|$$

où  $\varepsilon = \text{Sup}(\xi_n, \xi'_m)$  et  $K = \text{Sup}(K'_1, K_2, K_3)$ .

Pour  $\varphi_n \equiv \varphi'_m = \varphi$  il est clair que :

$$d_{(n \text{ et } m \rightarrow \infty)}^*(x_n, x'_m) \rightarrow 0.$$

et c'est une partie du résultat énoncé au début de cet alinéa. Justifions maintenant le reste de cette proposition. Pour ce faire, considérons l'ensemble des points appartenant à deux classes d'équivalence distinctes  $x_0$  et  $x'_0$ , caractérisées par leurs angles de méridien  $\varphi$  et  $\varphi'$ ; la suite des longueurs  $L_n$  des courbes tracées sur la surface ( $\xi_n$ ), pour relier tout couple de points  $x_n \in x_0$  et  $x'_n \in x'_0$  de cette surface, peut être minorée comme suit :

$$L_n(x_n \rightarrow x'_m; \xi_n) \geq L_n(a_n \rightarrow b_n; \xi_n).$$

Le second membre de cette inégalité est l'expression de la longueur de la ligne de crête reliant les points  $a_n \in x_0$  et  $b_n \in x'_0$  de la surface ( $\xi_n$ ). Manifestement cette ligne est une géodésique pour la métrique (3-7) et sa longueur s'obtient facilement, elle vaut :

$$L_n(a_n \rightarrow b_n; \xi_n) = \left[ \frac{2\xi_n^2 - 1}{(1 - \xi_n^2)^2} m^2 + a^2 \right]^{1/2} \left[ 1 - \frac{m^2}{a^2(1 - \xi_n^2)^2} \right]^{1/2} |\varphi - \varphi'|.$$

(Cette expression figure au second membre de (3-16)). La suite des nombres  $L_n(a_n \rightarrow b_n; \xi_n)$  est une suite décroissante convergente, lorsque  $n \rightarrow \infty$  c'est-à-dire  $\xi_n \rightarrow 0$ , on obtient la valeur limite  $L(a \rightarrow b)$  qui est :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(a_n \rightarrow b_n; \xi_n) \equiv L(a \rightarrow b) = \left( 1 - \frac{m^2}{a^2} \right) a |\varphi - \varphi'|.$$

Si l'on considère la réunion de toutes les classes d'équivalence on obtient donc une circonférence de longueur  $2\pi a \left( 1 - \frac{m^2}{a^2} \right)$ ; ce nombre est, en somme, la borne inférieure, pour  $\xi_n \rightarrow 0$  des longueurs de toutes les courbes fermées, entourant l'axe de symétrie  $zz'$ , tracées sur les surfaces ( $\xi_n$ ) de la suite.

*Remarque.* — Précisons, à propos des expressions (3-15), (3-11), (3-12), qu'à la différence du cas précédent  $\frac{m}{a} > 1$ , il peut fort bien se faire qu'il y ait lieu d'employer une détermination de  $r$  dans telle formule et l'autre dans telle autre formule si, par exemple, les points  $x_n$  et  $x'_m$  se trouvent disposés de part et d'autre de la ligne de crête.

324.  $m = a$ .

Indiquons dans ce cas, limite des deux précédents, l'allure de la surface singulière  $g_{00} = 0$  :

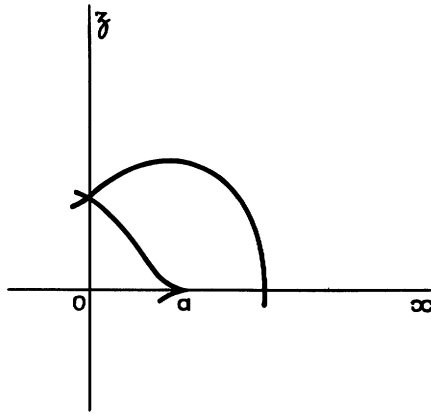


FIG. 3.

La circonférence obtenue en 323. se trouve réduite à un point singulier, comme en 322.

325. De façon analogue au cas de Schwarzschild et aux exemples précédents on peut utiliser la distance  $d$  comme coordonnée radiale ; on pose :

$$(3-18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d^*(x_1, x'_n) \equiv d(x_1, x'_0) = u.$$

La métrique possédant la symétrie axiale,  $u$  dépend des coordonnées  $r$  et  $\theta$  du point  $x_1$ . Observons que dans le cas  $\frac{m}{a} > 1$  la définition (3-18) ne recèle aucune ambiguïté, alors que dans le cas  $\frac{m}{a} < 1$ , nous devons ajouter que le point  $x'_0$ , classe d'équivalence des suites  $x'_n$  de type (2), doit être caractérisé par un même angle  $\varphi$  que le point  $x_1(r, \theta, \varphi)$ .



Bien que l'expression de  $u$  puisse, théoriquement, être déduite de celle de la métrique (3-7), ce calcul n'a ici aucune utilité car la suite du texte montrera que l'on peut se dispenser d'explicitier  $u$ .

326. L'espace  $\bar{V}_3(d)$  complet, par construction, peut être muni d'une structure différentiable compatible avec celle de  $\bar{V}_3^*$ . Définissons seulement une carte locale  $(U, \Phi)$ ;  $U$  étant une boule ouverte centrée sur  $x_0$ ,  $d(x_0, x) < b$  et  $\Phi$  un homéomorphisme de  $U$  sur la boule euclidienne de centre 0;  $\Phi$  est défini par :

$$(3-19) \quad \Phi: x_0 \rightarrow 0, x \rightarrow y \{ y^{1'} = u \sin \tilde{\theta} \cos \varphi, y^{2'} = u \sin \tilde{\theta} \sin \varphi, y^{3'} = u \cos \tilde{\theta} \}$$

où  $u = u(r, \theta)$ ,  $u = u(\tilde{r}, \tilde{\theta})$  suivant l'alinéa 325., le lien entre  $(r, \theta)$  et  $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$  figurent en (3-4). Le point  $x_0$ , représentatif de la surface singulière  $\xi = 0$ , correspond à  $u = 0$ .

Bien entendu il est clair que les considérations précédentes et particulièrement la définition de l'homéomorphisme  $\Phi$  (3-19), ne valent que dans le cas  $\frac{m}{a} > 1$ ; la détermination  $r_+$  décrivant la nappe extérieure des surfaces  $g_{00} = 0$  (fig. 1, 1 bis) étant utilisée.

Dans la suite on se restreindra à l'étude du cas  $\frac{m}{a} > 1$  et à l'utilisation de la détermination  $r_+$ .

### 33. Singularité de la métrique et du champ gravitationnel

$$\left( \text{cas } \frac{m}{a} > 1 \right)$$

331. On utilisera dans le voisinage de l'origine  $x_0$  le système de coordonnées  $(u, \theta, \varphi)$ , la métrique d'espace  $\bar{V}_3$  s'écrit alors :

$$(3-20) \quad d\bar{s}^2 = \frac{\rho^2 - 2mr}{r^2 + a^2 - 2mr} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial \theta} du d\theta \right. \\ \left. + \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + (r^2 + a^2 - 2mr) \right] d\theta^2 \right\} + (r^2 + a^2 - 2mr) \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

où  $r$  est défini comme fonction de  $u$  et  $\theta$  par inversion de la fonction  $u$  :

$$u = u(r, \theta) \Leftrightarrow r = r(u, \theta).$$

A l'expression (3-20) de la métrique se trouve associée celle de la cobase orthonormée :

$$(3-21) \quad \theta^1 = \left( \frac{\rho^2 - 2mr}{r^2 + a^2 - 2mr} \right)^{1/2} \left( \frac{\partial r}{\partial u} du + \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta \right),$$

$$\theta^2 = (\rho^2 - 2mr)^{1/2} d\theta, \quad \theta^3 = (r^2 + a^2 - 2mr)^{1/2} \sin \theta d\varphi.$$

Les composantes, non identiquement nulles, du tenseur de Riemann s'écrivent, par rapport à cette cobase :

$$(3-22) \quad \bar{R}_{12 \ 12} = -m^2 \frac{r^2 + a^2 - 2mr + a^2 \sin^2 \theta}{(\rho^2 - 2mr)^3},$$

$$\bar{R}_{23 \ 23} = m^2 \frac{r^2 + a^2 - 2mr}{(\rho^2 - 2mr)^3},$$

$$\bar{R}_{31 \ 31} = -m^2 \frac{1}{(\rho^2 - 2mr)^2}.$$

On constate qu'elles sont singulières pour  $\rho^2 - 2mr \equiv \rho^2 \xi^2 = 0$ , c'est-à-dire au point  $x_0$ .

332. On considère maintenant le champ gravitationnel et l'on calcule, à propos de la solution de Kerr, les quantités  $\mathcal{B}_{ij}$ ,  $h_i$  définies à l'alinéa 222. On obtient la suite d'expressions :

$$(3-23) \quad \xi^2 = 1 - \frac{2mr}{\rho^2};$$

$$(3-24) \quad \mathcal{B}_{23} = - \frac{4mar \cos \theta (r^2 + a^2 - 2mr)^{1/2}}{\xi^3 \rho^5},$$

$$\mathcal{B}_{31} = - \frac{2ma(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta}{\xi^3 \rho^5},$$

$$\mathcal{B}_{12} = 0;$$

$$(3-25) \quad h_1 = \frac{m}{\rho^5 \xi} \frac{(r^2 + a^2)(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 - 2mr)^{1/2}},$$

$$h_2 = - \frac{2ma^2 r \sin \theta \cos \theta}{\rho^5 \xi},$$

$$h_3 = 0.$$

Ces composantes, rapportées au corepère (3-21), sont singulières pour  $\xi = 0$  c'est-à-dire en  $x_0$ .

Il apparaît donc que ce point  $x_0$  est singulier et pour la structure riemannienne et pour le champ de gravitation.

### 34. Équations du champ. Source de la solution extérieure de Kerr.

#### 341. ÉQUATIONS DU CHAMP

Nous avons cité, à propos de la métrique de N. U. T., la formulation de certaines de ces équations (2-17); rappelons les expressions que nous allons utiliser à l'alinéa suivant :

$$(3-26) \quad \bar{\nabla}_i h^i = 0$$

$$(3-27) \quad \bar{\nabla}_i (\xi^3 \mathcal{B}^{ij}) = 0.$$

#### 342. CARACTÉRISATION DES SOURCES

3421. On applique ici une formule déjà maintes fois utilisées,

$$(3-28) \quad \langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_2(\varepsilon)} h^i f d\sigma_i; \quad f \in \mathcal{D}^0(\bar{V}_3)$$

la surface d'intégration  $S_2(\varepsilon)$  est une surface équipotentielle, telle que  $-g_{00}(u, \theta) = \varepsilon^2$ . Explicitons quelques éléments du calcul :

— surface d'intégration  $S_2(\varepsilon)$  :

$$(3-29) \quad 1 - \frac{2mr}{\rho^2} = \varepsilon^2$$

— métrique induite sur cette surface :

$$(3-30) \quad d\hat{s}^2 = \frac{\rho^2 - 2mr}{r^2 + a^2 - 2mr} \left[ \frac{4r^2 a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)^2} + r^2 + a^2 - 2mr \right] d\theta^2 + (r^2 + a^2 - 2mr) \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

On utilise ces expressions, celle des composantes  $h_i$  pour écrire le second membre de (3-28); on obtient :

$$(3-31) \quad \langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 1 + \frac{k^2}{2} \left[ \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{1 + \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} + \frac{k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta} (1 + \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta})} \right] \right\} f(u, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

on a posé :

$$k = \frac{a}{m} (1 - \varepsilon^2).$$

Le calcul de cette expression ne présente aucune difficulté. La fonction  $f$  est développée autour de l'origine :

$$f(u, \theta, \varphi) = f(x_0) + (\partial_u f)_{(x_0)} + u^2 \mathbf{R}(f);$$

l'intégration s'effectue simplement, en remarquant qu'après une intégration par parties du troisième terme les expressions, autres que le premier terme, ou sont nulles, ou se détruisent mutuellement.

On obtient finalement :

$$(3-32) \quad \langle \bar{\nabla}_i h^i, f \rangle = -4\pi m f(x_0) \Leftrightarrow \bar{\nabla}_i h^i = -4\pi m \delta_{x_0}.$$

On a ainsi une première caractérisation des sources du champ de Kerr, localisées sur la singularité  $x_0$ , mettant en évidence l'aspect massif.

3422. A la différence du cas précédent de la métrique de N. U. T., nous allons, ici, préciser complètement le raisonnement qui nous permet d'associer à (3-27) une distribution mathématique de telle façon qu'il en découle quelques éclaircissements dans l'interprétation.

Le type de tenseur-distribution, qui intervient dans cette étude, présente un caractère mixte : une fois covariant, une fois contravariant ; on définit <sup>(5)</sup> le tenseur-distribution mixte d'ordre deux  $\mathcal{B}_j^i$  sur  $\bar{V}_3$  par :

$$(3-33) \quad \langle \mathcal{B}_j^i, \Phi_i^j \rangle = \int_{V_3} \mathcal{B}_j^i \Phi_i^j \bar{\eta};$$

les composantes  $\mathcal{B}_j^i, \Phi_i^j$  sont rapportées à  $[\omega^i]$  et  $[e_{ii}]$ , repères et corepères duaux quelconques pour le moment ;  $\Phi_i^j \in \mathcal{D}^2(\bar{V}_3)$  et  $\bar{\eta}$  est l'élément de volume de  $\bar{V}_3$ . Écrivons maintenant la définition de (3-27) comme distribution :

$$(3-34) \quad \langle \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i), \Phi^j \rangle = - \langle \xi^3 \mathcal{B}_j^i, \bar{\nabla}_i \Phi^j \rangle, \quad \Phi^j \in \mathcal{D}^1(\bar{V}_3)$$

soit :

$$\langle \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i), \Phi^j \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{V}_3 - B(\varepsilon)} \xi^3 \mathcal{B}_j^i \bar{\nabla}_i \Phi^j \bar{\eta}$$

où  $B(\varepsilon)$  est une boule de  $\bar{V}_3$  centrée sur  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$ .

Cette expression peut être transformée comme suit :

$$\langle \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i), \Phi^j \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V_3 - B(\varepsilon)} [\bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i \Phi^j) - \Phi^j \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i)] \bar{\eta},$$

en raison de (3-27) la contribution du second terme étant nulle, on passe à l'intégrale de surface suivante :

$$(3-35) \quad \langle \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i), \Phi^j \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_2(\varepsilon)} \xi^3 \mathcal{B}_j^i \Phi^j(x) d\sigma_{ij}, \quad S_2(\varepsilon) = \partial B(\varepsilon).$$

<sup>(5)</sup> Les composantes  $\mathcal{B}_j^i$  (3-24) sont des fonctions localement sommables, elles permettent donc bien de définir des distributions.

Nous nous proposons d'appliquer cette formule à la métrique de Kerr selon des modalités qu'il importe de préciser, au mieux, maintenant.

a) Repère et corepère. Les repères et corepères (3-21) orthonormés et duaux déduits de (3-20) s'avèrent insatisfaisants pour ce calcul car les champs de vecteurs (ou de covecteurs) qui les engendrent n'ont aucune direction privilégiée. Il faut ici recourir à des champs de vecteurs qui présentent des directions constantes, asymptotiquement au moins; les repères et corepères duaux  $[e_i]$ ,  $[dy^i]$  déduits des coordonnées  $[y^i]$  (3-19), conviennent. La détermination des matrices de passage  $A_j^i$ , le calcul des composantes  $\mathcal{B}_j^i$ , ne présentent aucune difficulté.

b) La surface  $S_2(\varepsilon)$  est celle correspondant à l'équipotentielle

$$(3-36) \quad 1 - \frac{2mr}{\rho^2} = \varepsilon^2 \quad (-g_{00} = \varepsilon^2).$$

La limite  $\varepsilon = 0$  équivaut à  $u = 0$ .

c) Les fonctions  $\Phi^i$  sont par hypothèse, indéfiniment dérivables et à supports compacts:  $\Phi^i \in \mathcal{D}^1(\bar{V}^3)$ . Elles sont développables autour de l'origine  $x_0$ , c'est-à-dire  $u = 0$ ; on a les expressions:

(3-37)

$$\begin{aligned} \Phi^1(x) &= \Phi^1(x_0) + u(\partial_1 \Phi^1 \sin \tilde{\theta} \cos \varphi \\ &\quad + \partial_2 \Phi^1 \sin \tilde{\theta} \sin \varphi + \partial_3 \Phi^1 \cos \tilde{\theta})_{(x_0)} + u^2 R(\Phi^1), \\ \Phi^2(x) &= \Phi^2(x_0) + u(\partial_1 \Phi^2 \sin \tilde{\theta} \cos \varphi \\ &\quad + \partial_2 \Phi^2 \sin \tilde{\theta} \sin \varphi + \partial_3 \Phi^2 \cos \tilde{\theta})_{(x_0)} + u^2 R(\Phi^2); \end{aligned}$$

on a posé:  $\partial_i \Phi^1 = \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^i}$ , de même pour  $\Phi^2$ .

Ébauchons le déroulement du calcul en transcrivant (3-35):

$$(3-38) \quad \langle \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i), \Phi^j \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2ma(r^2 + a^2 - 2mr)}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \frac{\sin \varphi \Phi^1(x) - \cos \varphi \Phi^2(x)}{u \sin \theta} \sin^3 \theta d\theta d\varphi$$

puis, afin d'indiquer la procédure de passage à la limite, substituons à  $\Phi^1$  et  $\Phi^2$  leurs développements (3-37); omettant les termes qui n'apportent aucune contribution, nous avons:

$$(3-39) \quad \langle \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}_j^i), \Phi^j \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2ma(r^2 + a^2 - 2mr) \sin^3 \theta}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \left\{ \frac{\sin \varphi \Phi^1(x_0) - \cos \varphi \Phi^2(x_0)}{u \sin \tilde{\theta}} + [(\partial_2 \Phi^1)_{(x_0)} \sin^2 \varphi - (\partial_1 \Phi^2)_{(x_0)} \cos^2 \varphi] \right\} d\theta d\varphi.$$

Le second membre de (3-39) comprend deux termes :

a) Le premier, manifestement nul par l'intégration sur  $\varphi$  pour  $u \neq 0$ , devient une forme  $\frac{0}{0}$  pour  $u = 0$  ; il est correct d'admettre aussi un résultat nul pour la limite  $u = 0$ .

b) Le second, après intégration sur  $\varphi$ , s'écrit :

$$\langle \bar{\nabla}_i(\xi^3, \mathcal{B}^j), \Phi^j \rangle = -2\pi m a [(\partial_2 \Phi^1)_{(x_0)} - (\partial_1 \Phi^2)_{(x_0)}] \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{r^2 + a^2 - 2mr}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \sin^3 \theta d\theta.$$

Compte tenu de (3-36) on peut facilement calculer l'intégrale ci-dessus, on obtient :

$$f\left(\frac{m}{a}\right) = 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} - \frac{m}{a} \left( \pi - 2 \operatorname{Arc} \cos \frac{a}{m} - 2 \frac{a}{m} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \cos \frac{a}{m} - \frac{a}{m} \sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} - \frac{2}{3} \frac{a^3}{m^3} \right) \left( \frac{m}{a} \right)^3,$$

et finalement on aboutit à :

$$(3-40) \quad \langle \bar{\nabla}_i(\xi^3 \mathcal{B}^j), \Phi^j \rangle = -2\pi m a f\left(\frac{m}{a}\right) [(\partial_2 \Phi^1)_{(x_0)} - (\partial_1 \Phi^2)_{(x_0)}].$$

Ce résultat, spécifique de la métrique de Kerr, met en évidence, semble-t-il, un moment de rotation intrinsèque de la source ponctuelle. La justification de cette interprétation réside dans une analogie avec l'électromagnétisme dont nous allons expliciter brièvement les éléments.

Considérons un circuit circulaire de rayon  $a$  parcouru par un courant électrique d'intensité  $i$  ; le dipôle magnétique est le système limite obtenu lorsque le rayon  $a$  tend vers zéro de telle façon que la quantité  $\mathcal{M} = \pi a^2 i$ , appelée moment dipolaire magnétique, reste finie. L'induction magnétique  $\vec{B}$ , déduite de celle de la spire, par passage à la limite  $a \rightarrow 0$ , a pour composantes, dans un système de coordonnées polaires :

$$(3-41) \quad B^1 = 2\mathcal{M} \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad B^2 = -\mathcal{M} \frac{\sin \theta}{r^4}, \quad B^3 \equiv 0.$$

Elle satisfait à l'équation du champ :

$$(3-42) \quad \overline{\operatorname{rot}} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla_i B^{ij} = 0$$

où  $B_{ij}$  est le tenseur dual du vecteur induction  $B^i$ .

Cette dernière équation peut être écrite au sens de la théorie des distributions et l'on obtient :

$$(3-43) \quad \langle \nabla_i B_j^i, \Phi^j \rangle = \frac{2}{3} \pi \mathcal{M} [(\partial_2 \Phi_1)_{(0)} - (\partial_1 \Phi_2)_{(0)}],$$

dans cette expression les indices primés 1', 2', 3' sont relatifs aux coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  liées à  $r, \theta, \varphi$  par les formules habituelles.

Comme ici l'espace est euclidien la position des indices de  $\Phi_i$ , dans le second membre de (3-43), devient indifférente.

Il résulte de ces quelques considérations que les grandeurs gravitationnelle  $\mathcal{B}$  et électromagnétique  $B$  apparaissent comme analogues, les équations de champ (3-27) et (3-42) pourront être rapprochées, de même les relations (3-40) et (3-43) présentent des formes semblables, la quantité  $\text{maf} \left( \frac{m}{a} \right)$  peut donc être envisagée comme analogue à  $\mathcal{M}$  et être appelée : « moment dipolaire gravitationnel de rotation ».

(Notons que cette conclusion pourrait être tirée aussi en comparant (3-40) avec un résultat indiqué dans le livre de L. Schwartz, p. 336).

### 35. Commentaires.

La méthode d'analyse des singularités et de caractérisation des sources, que nous venons de décrire et d'appliquer, s'avère particulièrement efficace dans le cas de la métrique de Kerr.

On a pu en effet montrer que les singularités sont de deux types : ponctuelle pour  $\frac{m}{a} > 1$ , linéaire pour  $\frac{m}{a} < 1$  ; observons que cette classification apparaît dans la plupart des questions touchant la métrique de Kerr, elle semble donc fondamentale pour l'interprétation de cette métrique.

Dans le cas  $\frac{m}{a} > 1$ , l'étude des sources montre, outre l'aspect « massif » commun aux autres métriques, un aspect spécifique caractéristique d'une rotation intrinsèque de la source ponctuelle. On notera que cette dernière conclusion a surtout une signification qualitative ; bien entendu, il est clair que la valeur de la quantité notée « moment dipolaire de rotation » est liée à un système de coordonnées  $(y^i)$  particulier et, elle peut évidemment être discutée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. BEL, *Journal of Math. Physics*, t. **10**, 1969, p. 1501.
- [2] M. A. TONNELAT, *Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité*. Masson, p. 314.
- [3] E. NEWMAN, L. TAMBURINO et T. UNTI, *Journal of Math. Physics*, t. **4**, 1963, p. 915.
- [4] R. KERR, *Physics Rev. Letters*, t. **11**, 1965, p. 237.
- [5] L. BEL et J. G. ESCARD, *Rend. Atti. Accad. Nazl. Lincei*, t. **8**, 41, 1966, p. 476.
- [6] V. FOCK, *The theory of space-time and Gravitaion*. Pergamon Press, 1964.
- [7] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Herman edition, 1966.
- [8] A. I. JANIS, E. NEWMAN et J. WINICOUR, *Physics Review Letters*, t. **20**, 8, 1968, p. 878.
- [9] L. BEL et B. LEAUTÉ, *Annales de l'I. H. P.*, t. **10**, 3, 1969, p. 317.
- [10] C. W. MISNER, *Journal of Math. Physics*, t. **4**, 1963, p. 924.
- [11] A. LICHTNEROWICZ, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson.
- [12] M. DEMIANSKI et E. T. NEWMAN, *Bulletin de l'Ac. Polonaise des Sciences*, t. **14**, n° 11, 1966, p. 653.

*Manuscrit reçu le 30 mars 1971.*