

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BÉCHIR MAHJOUR

Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur d'après le schéma d'Eckart

Annales de l'I. H. P., section A, tome 15, n° 2 (1971), p. 153-168

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__15_2_153_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur d'après le schéma d'Eckart

par

Béchir MAHJOUR

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences, Tunis (Tunisie).

RÉSUMÉ. — Nous étudions le système d'évolution (S) d'un fluide relativiste conducteur de chaleur, décrit par un tenseur d'énergie du type d'Eckart et nous en mettons en évidence les variétés caractéristiques. Sous certaines hypothèses, nous montrons que le système (S) est hyperbolique non strict admettant une solution unique dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 7/6$ puis qu'il est physiquement équivalent à un système hyperbolique non strict admettant une solution unique dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha' = 2$.

ABSTRACT. — We establish the evolution's system (S) of relativistic fluid with heat conduction, described by an energy tensor of Eckart's type and we determine his characteristic varieties. Under some hypothesis, we prove that the system (S) is non-strictly hyperbolic heaving a unique solution in a Gevrey class of index $\alpha = 7/6$, then it is physically equivalent to a non-strictly hyperbolic system heaving a unique solution in a Gevrey class of index $\alpha' = 2$.

1. SCHÉMA ET SYSTÈME D'ÉVOLUTION

a) Considérons dans un domaine Ω de la variété espace-temps V_4 (C^{h+1} , $h \geq 2$) munie d'une métrique hyperbolique normale (C^h), un fluide

relativiste conducteur de chaleur dont le tenseur d'énergie est donné d'après Eckart [1] par l'expression

$$(1.1) \quad T^{\alpha\beta} = rfu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} - u^\alpha q^\beta - q^\alpha u^\beta$$

où r est la densité de matière propre du fluide, f son indice et p sa pression ; u^α est le vecteur-vitesse unitaire du fluide

$$(1.2) \quad u^\alpha u_\alpha = 1$$

et q^β est la composante spatiale du vecteur-courant de chaleur Q^β du fluide

$$(1.3) \quad Q^\beta = \bar{q}u^\beta + q^\beta, \quad \bar{q} = u^\beta Q_\beta \quad \text{et} \quad q^\beta = \gamma^{\alpha\beta} Q_\alpha \quad \text{avec} \quad \gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta;$$

nous avons ainsi

$$(1.4) \quad u^\alpha q_\alpha = 0.$$

Nous considérons l'équation de conduction de la chaleur [2]

$$(1.5) \quad Q^\beta + \kappa u^\alpha \nabla_\alpha Q^\beta + \chi \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \theta - \theta u^\nu \nabla_\nu u_\alpha) = 0$$

où κ et χ sont des coefficients physiques supposés constants.

Nous lui joignons l'équation exprimant la conservation du tenseur d'énergie (conséquence des équations d'Einstein)

$$(1.6) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

et l'équation exprimant le postulat de la conservation de la matière

$$(1.7) \quad \nabla_\alpha (ru^\alpha) = 0.$$

b) L'équation (1.6) s'écrit compte tenu de (1.1)

$$(1.8) \quad u^\beta \nabla_\alpha (rfu^\alpha) + rfu^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha p - u^\alpha \nabla_\alpha q^\beta - q^\beta \nabla_\alpha u^\alpha - q^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - u^\beta \nabla_\alpha q^\alpha = 0$$

dont nous déduisons l'équation de continuité obtenue par contraction par u_β et compte tenu de (1.2) et (1.4) il vient

$$(1.9) \quad \nabla_\alpha (rfu^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p - \nabla_\alpha q^\alpha - u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha q_\beta = 0,$$

qui s'écrit compte tenu de (1.7)

$$u^\alpha (r\partial_\alpha f - \partial_\alpha p) - \nabla_\alpha q^\alpha - u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha q_\beta = 0$$

ou bien compte tenu de la relation différentielle $r\theta dS = rdf - dp$

$$(1.10) \quad r\theta u^\alpha \partial_\alpha S - \nabla_\alpha q^\alpha - u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha q_\beta = 0.$$

En portant (1.9) dans (1.8) nous obtenons

$$(1.11) \quad (rfu^\alpha - q^\alpha)\nabla_\alpha u^\beta - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha p - q^\beta\nabla_\alpha u^\alpha - u^\alpha\nabla_\alpha q^\beta + u^\alpha u^\rho\nabla_\alpha q_\rho u^\beta = 0$$

qui est le système aux lignes de courant du fluide.

c) Nous allons transformer l'équation de la chaleur (1.5) compte tenu de (1.3); il vient en posant

$$(1.12) \quad \rho u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta + u^\alpha\nabla_\alpha q^\beta + u^\alpha u^\beta\partial_\alpha \bar{q} + k\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \theta + (\bar{q}u^\beta + q^\beta)/\kappa = 0$$

dont nous déduisons par contraction par u_β

$$(1.13) \quad u^\alpha u^\beta\nabla_\alpha q_\beta + u^\alpha\partial_\alpha \bar{q} + \bar{q}/\kappa = 0.$$

Ainsi compte tenu de (1.13), le système aux lignes de courant (1.11) se met sous la forme

$$(1.14) \quad (rfu^\alpha - q^\alpha)\nabla_\alpha u^\beta - q^\beta\nabla_\alpha u^\alpha - u^\alpha\nabla_\alpha q^\beta - p'_\theta\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \theta - p'_r\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha r - u^\alpha u^\beta\partial_\alpha \bar{q} - (\bar{q}/\kappa)u^\beta = 0;$$

en ajoutant (1.12) et (1.14) il vient

$$(1.15) \quad [(rf + \rho)u^\alpha - q^\alpha]\nabla_\alpha u^\beta - q^\beta\nabla_\alpha u^\alpha + (k - p'_\theta)\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \theta - p'_r\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha r + q^\beta/\kappa = 0$$

et compte tenu de (1.7), nous obtenons

$$(1.16) \quad [(rf + \rho)u^\alpha - q^\alpha]\nabla_\alpha u^\beta + (k - p'_\theta)\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \theta + (u^\alpha q^\beta - r p'_r\gamma^{\alpha\beta})\partial_\alpha r/r + q^\beta/\kappa = 0.$$

D'autre part compte tenu de (1.13) l'équation de continuité (1.10) s'écrit :

$$(1.17) \quad -\nabla_\alpha q^\alpha + r\theta S'_\theta u^\alpha\partial_\alpha \theta + r\theta S'_r u^\alpha\partial_\alpha r + u^\alpha\partial_\alpha \bar{q} + \bar{q}/\kappa = 0.$$

d) En contractant (1.12) et (1.14) par q_β et en posant

$$|q|^2 = -q^\beta q_\beta$$

nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \rho u^\alpha q^\beta\nabla_\alpha u_\beta + u^\alpha q^\beta\nabla_\alpha q_\beta + kq^\alpha\partial_\alpha \theta - |q|^2/\kappa &= 0, \\ (rfu^\alpha - q^\alpha)q^\beta\nabla_\alpha u_\beta + |q|^2\nabla_\alpha u^\alpha - u^\alpha q^\beta\nabla_\alpha q_\beta - p'_\theta q^\alpha\partial_\alpha \theta - p'_r q^\alpha\partial_\alpha r &= 0 \end{aligned}$$

et en les ajoutant nous obtenons

$$(1.18) \quad (rf + \rho)u^\alpha q^\beta\nabla_\alpha u_\beta - q^\alpha q^\beta\nabla_\alpha u_\beta + |q|^2\nabla_\alpha u^\alpha + (k - p'_\theta)q^\alpha\partial_\alpha \theta - p'_r q^\alpha\partial_\alpha r - |q|^2/\kappa = 0.$$

Sachant que $q_\beta u^\beta = 0$ qui donne

$$(1.19) \quad q_\beta\nabla_\alpha u^\beta + u^\beta\nabla_\alpha q_\beta = 0$$

et en multipliant (1.13) par $(rf + \rho)$ et l'ajoutant à (1.18) nous obtenons compte tenu de (1.7)

$$(1.20) \quad q^\alpha q^\beta \nabla_\alpha u_\beta - (k - p'_0) q^\alpha \partial_\alpha \theta + (|q|^2 u^\alpha + r p'_r q^\alpha) \partial_\alpha r / r - (rf + \rho) u^\alpha \partial_\alpha \bar{q} + [|q|^2 - (rf + \rho) \bar{q}] / \kappa = 0.$$

e) Dans une métrique donnée de V_4 , le système d'évolution du fluide considéré, formé par les équations (1.2), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) satisfaites par les grandeurs physiques, inconnues du problème posé : u^β , q^β , \bar{q} , r et θ , est équivalent au système (S) suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \text{I} & [(rf + \rho) u^\alpha - q^\alpha] \nabla_\alpha u^\beta + (k - p'_0) \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \theta + (u^\alpha q^\beta - r p'_r \gamma^{\alpha\beta}) \partial_\alpha r / r + q^\beta / \kappa = 0, \\ \text{II} & \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \partial_\alpha r / r = 0, \\ \text{III} & q^\alpha q^\beta \nabla_\alpha u_\beta - (k - p'_0) q^\alpha \partial_\alpha \theta + (|q|^2 u^\alpha + r p'_r q^\alpha) \partial_\alpha r / r - (rf + \rho) u^\alpha \partial_\alpha \bar{q} + [|q|^2 - (rf + \rho) \bar{q}] / \kappa = 0, \\ \text{IV} & \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + u^\alpha \nabla_\alpha q^\beta + k \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \theta + u^\alpha u^\beta \partial_\alpha \bar{q} + (\bar{q} u^\beta + q^\beta) / \kappa = 0, \\ \text{V} & -\nabla_\alpha q^\alpha + r \theta S'_\theta u^\alpha \partial_\alpha \theta + r \theta S'_r u^\alpha \partial_\alpha r + u^\alpha \partial_\alpha \bar{q} + \bar{q} / \kappa = 0. \end{cases}$$

2. VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

a) Supposons que, dans le domaine Ω de V_4 occupé par le fluide, les variables u^β , q^β , \bar{q} , r et θ sont continues ; soit $\varphi = 0$ l'équation locale d'une hypersurface Σ régulièrement plongée dans Ω . Σ partage Ω en deux domaines Ω^+ ($\varphi > 0$) et Ω^- ($\varphi < 0$) ; dans chacun de ces domaines, si T est l'une des variables caractérisant le fluide, nous supposons que T est de classe C^2 et que ∇T tend uniformément vers $(\nabla T)^+$ (resp. $(\nabla T)^-$) quand φ tend vers zéro par valeurs positives (resp. négatives) ; nous savons [3] alors qu'il existe un tenseur-distribution $\bar{\delta} T$ appelé discontinuité infinitésimale de T tel que

$$(2.1) \quad \bar{\delta}[\nabla_\alpha T] = l_\alpha \delta T$$

où $l_\alpha = \partial_\alpha \varphi$, $\bar{\delta}$ la distribution de Dirac sur Σ et $[\nabla_\alpha T] = (\nabla T)^+ - (\nabla T)^-$.

En appliquant (2.1) aux équations du système (S) nous obtenons en posant :

$$(2.2) \quad \mathcal{U} = u^\alpha l_\alpha, \quad \mathcal{Q} = q^\alpha l_\alpha, \quad \mathcal{C} = \gamma^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta,$$

$$[(rf + \rho) \mathcal{U} - \mathcal{Q}] \delta u^\beta + (k - p'_0) \gamma^{\alpha\beta} l_\alpha \delta \theta + (\mathcal{U} q^\beta - r p'_r \gamma^{\alpha\beta} l_\alpha) \delta r / r = 0,$$

$$(2.3) \quad \rho \mathcal{U} \delta u^\beta + \mathcal{U} \delta q^\beta + k \gamma^{\alpha\beta} l_\alpha \delta \theta + \mathcal{U} u^\beta \delta \bar{q} = 0,$$

$$(2.4) \quad l_\alpha \delta u^\alpha + \mathcal{U} \delta r / r = 0,$$

$$(2.5) \quad \mathcal{Q} q^\beta \delta u_\beta - (k - p'_0) \mathcal{Q} \delta \theta + (|q|^2 \mathcal{U} + r p'_r \mathcal{Q}) \delta r / r - (rf + \rho) \mathcal{U} \delta \bar{q} = 0,$$

$$(2.6) \quad -l_\alpha \delta q^\alpha + r \theta S'_\theta \mathcal{U} \delta \theta + r \theta S'_r \mathcal{U} \delta r + \mathcal{U} \delta \bar{q} = 0.$$

Enfin les équations (1.19) et (1.13) donnent

$$(2.7) \quad q^\alpha \delta u_\alpha + u^\alpha \delta q_\alpha = 0,$$

$$(2.8) \quad \mathcal{U} u^\alpha \delta q_\alpha + \mathcal{U} \delta \bar{q} = 0.$$

En contractant (2.2) et (2.3) par l_β nous obtenons

$$(2.9) \quad [(rf + \rho)\mathcal{U} - \mathcal{Q}]l_\beta \delta u^\beta + (k - p'_\theta)\mathcal{C} \delta \theta + (\mathcal{U}\mathcal{Q} - rp'_r\mathcal{C})\delta r/r = 0,$$

$$(2.10) \quad \rho\mathcal{U}l_\beta \delta u^\beta + \mathcal{U}l_\beta \delta q^\beta + k\mathcal{C} \delta \theta + \mathcal{U}^2 \delta \bar{q} = 0.$$

b) Supposons $\mathcal{U} = 0$; ce qui caractérise les ondes matérielles; alors

$$(2.4) \quad \text{donne} \quad l_\alpha \delta u^\alpha = 0,$$

$$(2.6) \quad \text{donne} \quad l_\alpha \delta q^\alpha = 0,$$

$$(2.10) \quad \text{donne} \quad \delta \theta = 0,$$

$$(2.9) \quad \text{donne} \quad \delta r = 0,$$

$$(2.2) \quad \text{donne} \quad \delta u^\beta = 0,$$

$$(2.7) \quad \text{donne} \quad u^\alpha \delta q_\alpha = 0;$$

$\delta \bar{q}$ est arbitraire et pour δq^β il reste deux degrés de liberté; ainsi $\mathcal{U} = 0$ est une variété caractéristique d'ordre au moins égal à 3.

c) Supposons maintenant $\mathcal{U} \neq 0$; l'équation (2.8) donne alors

$$(2.11) \quad -u^\alpha \delta q_\alpha = \delta \bar{q}.$$

Comme d'après (2.7)

$$q^\alpha \delta u_\alpha = -u^\alpha \delta q_\alpha = \delta \bar{q}$$

nous obtenons à partir de (2.5)

$$(2.12) \quad (k - p'_\theta)\mathcal{Q} \delta \theta - (|q|^2 \mathcal{U} + rp'_r \mathcal{Q})\delta r/r + [(rf + \rho)\mathcal{U} - \mathcal{Q}]\delta \bar{q} = 0.$$

En portant (2.4) et (2.6) dans (2.10) nous obtenons

$$(2.13) \quad (k\mathcal{C} + r\theta S'_\theta \mathcal{U}^2)\delta \theta - (\rho - r^2 \theta S'_r \mathcal{U}^2)\delta r/r + 2\mathcal{U}^2 \delta \bar{q} = 0.$$

En portant (2.4) dans (2.9) nous obtenons

$$(2.14) \quad (k - p'_\theta)\mathcal{C} \delta \theta - [(rf + \rho)\mathcal{U}^2 - 2\mathcal{U}\mathcal{Q} + rp'_r\mathcal{C}]\delta r/r = 0.$$

Considérons le système homogène aux trois inconnues $\delta \theta$, $\delta r/r$, $\delta \bar{q}$, formé par les trois équations suivantes :

$$(S') \quad \begin{cases} (k\mathcal{C} + r\theta S'_\theta \mathcal{U}^2)\delta \theta + (r^2 \theta S'_r - \rho)\mathcal{U}^2 \delta r/r + 2\mathcal{U}^2 \delta \bar{q} = 0, \\ (k - p'_\theta)\mathcal{C} \delta \theta - [(rf + \rho)\mathcal{U}^2 - 2\mathcal{U}\mathcal{Q} + rp'_r\mathcal{C}]\delta r/r = 0, \\ (k - p'_\theta)\mathcal{Q} \delta \theta - (|q|^2 \mathcal{U} + rp'_r \mathcal{Q})\delta r/r + [(rf + \rho)\mathcal{U} - \mathcal{Q}]\delta \bar{q} = 0. \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution non identiquement nulle, il faut et il suffit que son déterminant soit nul. Ce déterminant est un polynôme homogène du 5^e degré en l_α qui caractérise les ondes « hydrodynamiques » du fluide. Leur vitesse de propagation par rapport au fluide [4] dans la direction spatiale définie par

$$n_\alpha = \frac{l_\alpha - \mathcal{U}u_\alpha}{\sqrt{-\mathcal{C}}}$$

est définie par

$$v = \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{-\mathcal{C}}}.$$

Avec ces notations l'équation donnant la vitesse de ces ondes s'écrit :

$$\begin{vmatrix} r\theta S'_\theta v^2 - k & (r^2\theta S'_r - \rho)v^2 & 2v^2 \\ k - p'_\theta & (rf + \rho)v^2 + 2q_n v - rp'_r & 0 \\ (p'_\theta - k)q_n & -|q|^2 v + rp'_r q_n & (rf + \rho)v + q_n \end{vmatrix} = 0$$

où

$$q_n = q^\alpha n_\alpha = \frac{q^\alpha l_\alpha}{\sqrt{-\mathcal{C}}}$$

Le terme de plus haut degré en v de cette équation est donné par

$$v^5 \begin{vmatrix} r\theta S'_\theta & r^2\theta S'_r - \rho & 2 \\ 0 & rf + \rho & 0 \\ 0 & -|q|^2 & rf + \rho \end{vmatrix} = r\theta(rf + \rho)^2 S'_\theta v^5,$$

monôme du 5^e degré en v , non identiquement nul.

3. ONDES HYDRODYNAMIQUES

a) Considérons le déterminant du système (S'); il s'écrit :

$$(3.1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} r\theta S'_\theta \mathcal{U}^2 + k\mathcal{C} & (r^2\theta S'_r - \rho)\mathcal{U}^2 & 2\mathcal{U}^2 \\ (p'_\theta - k)\mathcal{C} & (\mathcal{A} - 2)\mathcal{U} + rp'_r\mathcal{C} & 0 \\ (p'_\theta - k)2 & |q|^2\mathcal{U} + rp'_r 2 & -\mathcal{A} \end{vmatrix}$$

où nous avons posé

$$(3.2) \quad \mathcal{A} = (rf + \rho)\mathcal{U} - 2.$$

En développant ce déterminant nous obtenons

$$(3.3) \quad \Delta = \mathcal{A} \{ r\theta(rf + \rho)S'_\theta \mathcal{U}^4 + (p'_\theta - k - 2r\theta S'_\theta) \mathcal{U}^3 \mathcal{Q} + [k(rf + \rho) + r^2\theta S'_\theta p'_r + (k - p'_\theta)(r^2\theta S'_r - \rho)] \mathcal{U}^2 \mathcal{C} - 2k \mathcal{U} \mathcal{Q} \mathcal{C} + krp'_r \mathcal{C}^2 \} + 2(k - p'_\theta)(|q|^2 \mathcal{C} + \mathcal{Q}^2) \mathcal{U}^3.$$

b) Pour factoriser le polynôme Δ , nous sommes amenés à mettre en évidence le facteur \mathcal{A} si le terme

$$2(k - p'_\theta)(|q|^2 \mathcal{C} + \mathcal{Q}^2) \mathcal{U}^3$$

est identiquement nul. Il en sera ainsi si l'équation d'état du fluide est supposée vérifier :

$$(3.4) \quad p'_\theta = k,$$

ce qui donne comme équation d'état

$$(3.5) \quad p = k\theta + \psi(r)$$

où $\psi(r)$ est une fonction arbitraire de r . Dans cette hypothèse, Δ s'écrit

$$(3.6) \quad \Delta = \mathcal{A} \{ r\theta(rf + \rho)S'_\theta \mathcal{U}^4 - 2r\theta S'_\theta \mathcal{U}^3 \mathcal{Q} + [k(rf + \rho) + r^2\theta S'_\theta \psi'] \mathcal{U}^2 \mathcal{C} - 2k \mathcal{U} \mathcal{Q} \mathcal{C} + kr\psi' \mathcal{C}^2 \}.$$

Nous pouvons décomposer en un produit de deux facteurs homogènes du second degré le polynôme homogène du 4^e degré, facteur de \mathcal{A} dans Δ , en le considérant comme polynôme du 2^e degré par rapport à \mathcal{C} . Mais nous pouvons le factoriser plus rapidement en revenant à l'expression de Δ donnée par (3.1) où nous tenons compte de (3.4), ainsi

$$\Delta = \begin{vmatrix} r\theta S'_\theta \mathcal{U}^2 + k\mathcal{C} & (r^2\theta S'_r - \rho) \mathcal{U}^2 & 2\mathcal{U}^2 \\ 0 & \mathcal{A} \mathcal{U} - 2\mathcal{U} + r\psi' \mathcal{C} & 0 \\ 0 & |q|^2 \mathcal{U} + r\psi' \mathcal{Q} & -\mathcal{A} \end{vmatrix}$$

se factorise immédiatement et nous obtenons

$$(3.7) \quad \Delta = \mathcal{A}(r\theta S'_\theta \mathcal{U}^2 + k\mathcal{C})[(rf + \rho) \mathcal{U}^2 - 2\mathcal{Q} \mathcal{U} + r\psi' \mathcal{C}].$$

c) Nous obtenons ainsi les trois types d'ondes suivants :

- les ondes énergétiques : $\Gamma_1(l) \equiv (rf + \rho) \mathcal{U} - \mathcal{Q} = 0$,
- les ondes hydrodynamiques : $\Gamma_2(l) \equiv r\theta S'_\theta \mathcal{U}^2 + k\mathcal{C} = 0$,
- et $\Gamma_3(l) \equiv (rf + \rho) \mathcal{U}^2 - 2\mathcal{Q} \mathcal{U} + r\psi' \mathcal{C} = 0$.

Rappelons aussi :

- les ondes matérielles : $\Gamma_0(l) \equiv \mathcal{U} = 0$,
- les ondes gravitationnelles : $\Gamma(l) \equiv g^{ab} l_a l_b = 0$.

4. ÉTUDE DES CONES CARACTÉRISTIQUES

a) Afin d'étudier ces divers cônes en un point x de V_4 , plaçons-nous dans un repère propre orthonormé $\{v_{(\rho)}\}$ où

$$v_{(0)} = u, \quad v_{(3)} = \frac{q}{|q|}.$$

Nous posons :

$$l_0 = t, \quad l_1 = x, \quad l_2 = y, \quad l_3 = z.$$

Dans ce repère les cônes précédents ont pour équations respectivement

$$(4.1) \quad \Gamma: t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

$$(4.2) \quad \Gamma_0: t = 0,$$

$$(4.3) \quad \Gamma_1: at - |q|z = 0,$$

$$(4.4) \quad \Gamma_2: bt^2 - k(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

$$(4.5) \quad \Gamma_3: at^2 - 2|q|zt - c(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

où nous avons posé

$$a = rf + \rho, \quad b = r\theta S'_\theta, \quad c = r\psi'.$$

b) Nous allons étudier la position des cônes Γ , Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 par rapport au cône (plan) Γ_0 .

Le cône matériel Γ_0 est extérieur au cône Γ (si u est temporel).

Le cône énergétique Γ_1 est en général distinct de Γ_0 sauf si $|q| = 0$.

Le cône hydrodynamique Γ_2 est convexe si $k > 0$ (ce qui est vérifié par hypothèse) et si

$$(4.6) \quad b = r\theta S'_\theta > 0.$$

Γ_2 ne coupe pas alors le plan Γ_0 .

Le cône hydrodynamique Γ_3 est convexe si

$$(4.7) \quad a = rf + \rho > 0,$$

$$(4.8) \quad c = r\psi' > 0;$$

cette dernière condition est physiquement toujours vérifiée. Γ_3 ne coupe pas alors le plan Γ_0 .

c) Pour étudier la position des cônes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 par rapport au cône fondamental Γ , nous allons considérer leurs « indicatrices dans \mathbb{R}^3 »

c'est-à-dire leurs sections par l'hyperplan $t = 1$. Nous obtenons ainsi les trois indicatrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad & S: 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \\
 (4.10) \quad & S_1: a - |q|z = 0, \\
 (4.11) \quad & S_2: b - k(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\
 (4.12) \quad & S_3: a - 2|q|z - c(x^2 + y^2 + z^2) = 0.
 \end{aligned}$$

L'axe Oz est un axe de rotation pour ces indicatrices et il suffit de les couper par le plan $x = 0$; nous obtenons alors dans le plan (yOz) les courbes suivantes :

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad & C: y^2 + z^2 = 1, \\
 (4.14) \quad & C_1: a - |q|z = 0, \\
 (4.15) \quad & C_2: y^2 + z^2 = b/k, \\
 (4.16) \quad & C_3: y^2 + z^2 + 2(|q|/c)z - a/c = 0.
 \end{aligned}$$

C_1 (resp. Γ_1) est extérieur à C (resp. Γ) si, compte tenu de (4.7),

$$(4.17) \quad a = rf + \rho > |q|.$$

C est un cercle intérieur au cercle C_2 si

$$(4.18) \quad r\theta S'_0 > k \text{ soit } rf'_0 > 2k,$$

condition qui contient (4.6). Alors le cône Γ est intérieur au cône Γ_2 . Les deux cercles C_3 et C ne se coupent pas si

$$(4.19) \quad |rf + \rho - r\psi'| > 2|q|.$$

D'autre part le cercle C est intérieur au cercle C_3 si

$$(4.20) \quad rf + \rho > r\psi',$$

extérieur dans le cas contraire. Compte tenu de (4.19) et (4.20) le cône Γ est donc intérieur au cône Γ_3 si

$$(4.21) \quad rf + \rho > r\psi' + 2|q|.$$

Remarquons que la condition (4.21) contient (4.7) et (4.17). Voyons si C_1 rencontre le cercle C_3 ; pour cela il faudrait que :

$$y^2 = - \frac{a(|q|^2 + a)}{c|q|^2}$$

ce qui est impossible puisque d'après (4.8) et (4.21) le second membre est négatif. Donc Γ_1 et Γ_3 ne se coupent pas.

d) Nous allons déduire des équations précédentes les vitesses de propagation des ondes correspondantes par rapport au fluide dans la direction spatiale définie par

$$n_\alpha = \frac{l_\alpha - \mathcal{U}u^\alpha}{\sqrt{-\mathcal{C}}}.$$

Cette vitesse est donnée par

$$v = \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{-\mathcal{C}}}.$$

Nous obtenons pour

— les ondes gravitationnelles Γ : $v = 1$,

— les ondes matérielles Γ_0 : $v = 0$,

— les ondes énergétiques Γ_1 : $v = \frac{q_n}{rf + \rho}$ où $q_n = q^\alpha n_\alpha = \frac{q^\alpha l_\alpha}{\sqrt{-\mathcal{C}}}$.

LEMME. — Pour le champ q^α , nous avons

$$q_n^2 \leq |q|^2.$$

En effet, dans un repère propre $\{v_{(\rho)}\}$ ($v_{(0)} = u$) nous avons

$$q^i l_i = g^{ij} q_i l_j$$

et, d'après l'inégalité de Schwartz :

$$(q^i l_i)^2 \leq (-g^{ij} q_i q_j)(-g^{ij} l_i l_j)$$

c'est-à-dire

$$(q^\alpha l_\alpha)^2 \leq |q|^2 (-\gamma^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu)$$

soit

$$q_n^2 \leq |q|^2.$$

Ainsi

$$v = \frac{q_n}{rf + \rho} \leq \frac{|q|}{rf + \rho} < 1 \quad \text{d'après (4.21).}$$

Pour les ondes hydrodynamiques Γ_3 , la vitesse de propagation v est la racine positive de

$$(rf + \rho)v^2 - 2q_n v - r\psi' = 0,$$

qui est bien inférieure à 1 sous la condition (4.21).

Nous pouvons énoncer alors le

THÉORÈME 1. — Si l'équation d'état d'un fluide relativiste conducteur de chaleur vérifie les hypothèses

$$(H) \quad p = k\theta + \psi(r), \quad rf'_\theta > 2k, \quad rf + \rho > r\psi' + 2|q|,$$

alors

- 1° les variétés caractéristiques $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont orientées dans le temps ;
- 2° les opérateurs différentiels qui leur sont associés ainsi que les produits de ceux associés respectivement à Γ_0 et Γ_2 , à Γ_0 et Γ_3 , à Γ_1 et Γ_3 , sont hyperboliques stricts.

5. ÉTUDE DU SYSTÈME D'ÉVOLUTION (S) DU FLUIDE

a) Caractère quasi-linéaire du système (S).

Compte tenu des hypothèses (H), le système d'évolution (S) du fluide s'écrit

$$(S) \quad \begin{cases} \text{I} & [(rf + \rho)u^\alpha - q^\alpha] \nabla_\alpha u^\beta + (u^\alpha q^\beta - r\psi' \gamma^{\alpha\beta}) \partial_\alpha r / r + q^\beta / \kappa = 0, \\ \text{II} & \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \partial_\alpha r / r = 0, \\ \text{III} & q^\alpha q_\beta \nabla_\alpha u^\beta + (|q|^2 u^\alpha + r\psi' q^\alpha) \partial_\alpha r / r - (rf + \rho) u^\alpha \partial_\alpha \bar{q} \\ & \quad + [|q|^2 - (rf + \rho) \bar{q}] / \kappa = 0, \\ \text{IV} & \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + u^\alpha \nabla_\alpha q^\beta + k \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \theta + u^\alpha u^\beta \partial_\alpha \bar{q} + (\bar{q} u^\beta + q^\beta) / \kappa = 0, \\ \text{V} & - \nabla_\alpha q^\alpha + r \theta S_\delta^\delta u^\alpha \partial_\alpha \theta + r^2 \theta S'_\delta u^\alpha \partial_\alpha r / r + u^\alpha \partial_\alpha \bar{q} + \bar{q} / \kappa = 0. \end{cases}$$

Désignons par v^i une quelconque des 11 inconnues u^α, r (ou bien $\text{Log } r$), $\bar{q}, q^\alpha, \theta$, par E^j une quelconque des 11 équations du système (S). Le système (S) est quasi linéaire [5] si on peut trouver des indices m_i et n_j tels qu'il s'écrive

$$E^j \equiv h_i^j(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k, \tilde{D}^{m_i - n_j} v^i) + b^j(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k) = 0$$

où D^m désigne l'ensemble des dérivations partielles d'ordre $\leq m$, \tilde{D}^m celles d'ordre m . L'opérateur h_i^j d'ordre $m_i - n_j$ est appelé la partie principale de l'inconnue v^i dans l'équation E^j .

Le système (S) sera alors quasi linéaire pour le choix suivant des indices de Leray

$$(5.1) \quad \begin{cases} m(u^\alpha) = m(\text{Log } r) = m(\bar{q}) = m(q^\alpha) = m(\theta) = 1, \\ n(\text{I}) = n(\text{II}) = n(\text{III}) = n(\text{IV}) = n(\text{V}) = 0. \end{cases}$$

Les parties principales relativement à toutes les inconnues dans toutes les équations sont alors toutes d'ordre 1.

Le système (S) est du type de Cauchy-Kowalewski si la partie principale, d'ordre $\sum_k m_k - \sum_j n_j = 11$, du déterminant h des h_i^j , défini par

$$h = \sum_{\pi} \sigma(\pi) h_{\pi(1)}^1 \dots h_{\pi(11)}^{11}$$

(où $\sigma(\pi)$ est la signature d'une permutation quelconque des entiers $1 \dots 11$), n'est pas nulle, c'est-à-dire si le polynôme de degré 11, P, n'est pas identiquement nul :

$$(5.2) \quad P = \det (P_i^j) \neq 0$$

où P_i^j est le polynôme homogène en l_α obtenu en remplaçant dans h_i^j la dérivation ∂_α par le vecteur covariant l_α .

Nous allons vérifier (5.2) en même temps que nous allons retrouver les variétés caractéristiques déterminées précédemment. Les vecteurs l_α qui annulent en un point x le polynôme P sont les normales en ce point aux variétés caractéristiques ou fronts d'onde.

Le déterminant P s'écrit :

$$(5.3) \quad P = \begin{array}{c|ccccccccccc} & u^0 & u^1 & u^2 & u^3 & \text{Log } r & \bar{q} & q^0 & q^1 & q^2 & q^3 & \theta \\ \hline & \mathcal{A} & 0 & 0 & 0 & d^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{I} & 0 & \mathcal{A} & 0 & 0 & d^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \mathcal{A} & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & d^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{II} & l_0 & l_1 & l_2 & l_3 & \mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{III} & -2q_0 & -2q_1 & -2q_2 & -2q_3 & -\mathcal{B} & (rf + \rho)\mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \rho\mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & kc^0 \\ \text{IV} & 0 & \rho\mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U} & 0 & 0 & kc^1 \\ & 0 & 0 & \rho\mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U} & 0 & kc^2 \\ & 0 & 0 & 0 & \rho\mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U} & kc^3 \\ \text{V} & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2\theta S'_\alpha \mathcal{U} & 0 & -l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 & r\theta S'_0 \mathcal{U} \end{array}$$

où nous avons posé

$$(5.4) \quad \begin{cases} \mathcal{U} = u^\alpha l_\alpha, & \mathcal{L} = q^\alpha l_\alpha, & \mathcal{A} = (rf + \rho)\mathcal{U} - \mathcal{L}, & \mathcal{B} = |q|^2 \mathcal{U} + r\psi' \mathcal{L}, \\ d^\alpha = \mathcal{U} q^\alpha - r\psi' \gamma^{\alpha\beta} l_\beta, & c^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} l_\beta. \end{cases}$$

Ce déterminant se développe aisément par rapport à la 6^e colonne, par exemple et il vient :

$$(5.5) \quad P = (rf + \rho)\mathcal{U}\Delta_1\Delta_2$$

où

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & 0 & d^0 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 & 0 & d^1 \\ 0 & 0 & \mathcal{A} & 0 & d^2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & d^3 \\ l_0 & l_1 & l_2 & l_3 & \mathcal{U} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathcal{U} & 0 & 0 & 0 & kc^0 \\ 0 & \mathcal{U} & 0 & 0 & kc^1 \\ 0 & 0 & \mathcal{U} & 0 & kc^2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{U} & kc^3 \\ -l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 & r\theta S'_0 \mathcal{U} \end{vmatrix}$$

Ces déterminants se calculent facilement et nous obtenons

$$(5.6) \quad \Delta_1 = \mathcal{A}^3(\mathcal{A}\mathcal{U} - d^a l_a) = \mathcal{A}^3(\mathcal{A}\mathcal{U} - \mathcal{U}\mathcal{Q} + r\psi'\mathcal{C}),$$

$$(5.7) \quad \Delta_2 = \mathcal{U}^3(r\theta S'_0 \mathcal{U}^2 + k\mathcal{C}).$$

Compte tenu de (5.5), (5.6) et (5.7), le déterminant P se met sous la forme

$$(5.8) \quad P(l) = (rf + \rho)\mathcal{U}^4[(rf + \rho)\mathcal{U} - \mathcal{Q}]^3(r\theta S'_0 \mathcal{U}^2 + k\mathcal{C})[(rf + \rho)\mathcal{U}^2 - 2\mathcal{U}\mathcal{Q} + r\psi'\mathcal{C}]$$

soit encore

$$(5.9) \quad P(l) = (rf + \rho)[\Gamma_0(l)]^4[\Gamma_1(l)]^3\Gamma_2(l)\Gamma_3(l).$$

Nous retrouvons ainsi les variétés caractéristiques déjà obtenues et étudiées dans les paragraphes 3 et 4 avec les ordres de multiplicité correspondants.

b) Caractère hyperbolique non strict du système (S).

Le système quasi linéaire

$$(5.10) \quad h_i^j(x, D^{m_k-n_j-1}v^k, \tilde{D}^{m_i-n_j}v^i) + b^j(x, D^{m_k-n_j-1}v^k) = 0$$

est hyperbolique non strict au sens de Leray-Ohya [6] pour des fonctions $w^k(C^\infty)$ si la condition suffisante suivante est vérifiée [7] : en faisant

$$D^{m_k-n_j-1}v^k = D^{m_k-n_j-1}w^k \quad (j, k = 1, \dots, 11)$$

dans les coefficients de (5.10), les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1° le polynôme caractéristique P(l) est un produit de p polynômes hyperboliques stricts

$$(5.11) \quad P(l) = P_1(l) \dots P_p(l);$$

2° les cônes $P_i(l) = 0$ ($i = 1, \dots, p$) contiennent tous dans leur intérieur

un même cône ; celui-ci détermine alors le « domaine d'influence » de la solution ;

3° si d_i désigne le degré du polynôme $P_i(l)$, on a

$$(5.12) \quad \sup_i d_i \geq \sup_k m_k - \inf_j n_j.$$

Ces trois conditions sont réalisées pour le système (S) et des fonctions w^k vérifiant les hypothèses (H) faites dans le paragraphe 4 : le polynôme $P(l)$ est produit de polynômes hyperboliques stricts de degré 1 ou 2 et les cônes $\Gamma_i(l) = 0$ contiennent tous dans leur intérieur le cône fondamental Γ . La condition (5.12) est vérifiée puisque

$$\sup_i d_i = 2 > \sup_k m_k - \inf_j n_j = 1.$$

c) Problème de Cauchy.

Les données de Cauchy, sur une variété initiale Σ d'équation locale $x^0 = 0$, sont

$$\{ u^\alpha, \text{Log } r, \bar{q}, q^\alpha, \theta \}_{x^0=0}.$$

Pour ces données de Cauchy sur Σ telles qu'il existe des w^k correspondants vérifiant les conditions d'hyperbolicité non stricte énoncées ci-dessus et appartenant à une classe de Gevrey d'indice $\alpha = p/(p-1)$, le système (S) a une solution unique dans la classe de Gevrey de même indice :

$$(5.13) \quad v^i \in \gamma_2^{\mu_i + m, (\alpha)}(X')$$

où X' et X sont deux bandes, voisinages de Σ , $X' \subset X$ et

$$(5.14) \quad \begin{cases} \mu_i = d + m_i & \text{où } d = \sum_i m_i - \sum_j n_j \\ m > \frac{n}{2} + p - \inf_i m_i & \text{où } (n+1) \text{ est la dimension de la variété.} \end{cases}$$

Cette solution unique admet un « domaine d'influence » déterminé par le cône fondamental Γ , c'est-à-dire que sa valeur en un point x ne dépend que des données de Cauchy dans le « passé » de ce point.

d) Calcul de l'indice de Gevrey.

Écrivons le polynôme $P(l)$ donné par (5.9) de manière à y faire apparaître le plus petit nombre p possible de polynômes hyperboliques stricts, pour

que l'indice α (donc la classe de Gevrey) soit aussi grand que possible. On peut écrire

$$(5.15) \quad P(l) = P_1(l)P_2(l)P_3(l)P_4(l)P_5(l)P_6(l)P_7(l)$$

avec

$$\begin{aligned} P_1(l) &= (rf + \rho)\Gamma_0(l), & P_2(l) &= \Gamma_0(l), \\ P_3(l) &= P_4(l) = P_5(l) = \Gamma_1(l), \\ P_6(l) &= \Gamma_0(l)\Gamma_2(l), & P_7(l) &= \Gamma_0(l)\Gamma_3(l), \end{aligned}$$

où, d'après le théorème 1, les polynômes $P_i(l)$ sont hyperboliques stricts et les cônes correspondants admettent tous dans leur intérieur le cône fondamental Γ . On obtient ainsi l'existence et l'unicité (ainsi que la causalité relativiste) dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 7/6$:

$$(5.16) \quad v^i \in \gamma_2^{m+12, (7/6)}(X')$$

avec, d'après (5.14) :

$$\begin{aligned} \mu_i &= 12 \quad \forall i = 1, \dots, 11, \\ m &> \frac{3}{2} + 7 - 1 \quad \text{soit} \quad m \geq 8. \end{aligned}$$

Nous pouvons énoncer alors le

THÉORÈME 2. — *Si l'équation d'état d'un fluide relativiste conducteur de chaleur vérifie les hypothèses (H), alors son système d'évolution est un système hyperbolique non strict admettant relativement au problème de Cauchy une solution unique appartenant à une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 7/6$.*

e) Simplification.

Si tous les mineurs T_i^j des éléments t_j^i du déterminant P contiennent en facteur un même polynôme $f(l)$ (qui est nécessairement produit de facteurs irréductibles de P) on peut obtenir une forme diagonale simplifiée pour le système (S). Si le polynôme

$$(5.17) \quad \hat{P}(l) = \frac{P(l)}{f(l)}$$

est produit de p' facteurs hyperboliques stricts ; le système admet une solution et une seule dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha' = p'/(p' - 1)$.

Pour le système (S) on établit le

LEMME. — *Les mineurs T_i^j des éléments t_j^i de P contiennent tous en facteur $[\Gamma_0(l)]^3[\Gamma_1(l)]^2$.*

Ainsi le polynôme $\hat{P}(l)$ donné par (5.17) s'écrit :

$$(5.18) \quad \hat{P}(l) = (rf + \rho)\Gamma_0(l)\Gamma_1(l)\Gamma_2(l)\Gamma_3(l).$$

Nous pouvons le mettre sous la forme

$$(5.19) \quad \hat{P}(l) = P'_1(l)P'_2(l)$$

avec

$$\begin{aligned} P'_1(l) &= (rf + \rho)\Gamma_0(l)\Gamma_2(l) \\ P'_2(l) &= \Gamma_1(l)\Gamma_3(l), \end{aligned}$$

où, d'après le théorème 1, $P'_1(l)$ et $P'_2(l)$ sont deux polynômes hyperboliques stricts. Les conditions du critère d'hyperbolicité non stricte sont encore vérifiées pour le système simplifié et plus particulièrement l'inégalité (5.12) car $\sup_i d'_i = 2 > \sup_k m_k - \inf_k n_k = 1$. On obtient ainsi l'existence et l'unicité de la solution de (S) dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha' = 2$:

$$(5.20) \quad v^i \in \gamma_2^{m+7, (2)}(X')$$

avec

$$m > \frac{3}{2} + 2 - 1 \quad \text{soit} \quad m \geq 3.$$

Nous pouvons alors énoncer le

THÉORÈME 3. — *Si l'équation d'état d'un fluide relativiste conducteur de chaleur vérifie les hypothèses (H), alors son système d'évolution est physiquement équivalent à un système hyperbolique non strict admettant relativement au problème de Cauchy une solution unique appartenant à une classe de Gevrey d'indice $\alpha' = 2$.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ECKART, *Phys. Rev.*, t. **58**, 1940, p. 919-924.
- [2] M. KRANYS, *Il Nuovo Cimento*, t. **42 B**, 1966, p. 51-70.
- [3] B. MAHJOUR, Thèse, Sciences, Paris, 1970.
- [4] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic Hydrodynamics and Magneto-hydrodynamics*, Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1967.
- [5] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*. Institute for advanced study, Princeton, 1953, Notes miméographiées.
- [6] J. LERAY et Y. OHYA, *Mathematische Annalen*, t. **170**, 1967, p. 167-205.
- [7] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, *J. Math. pures et appliquées*, t. **45**, 1966, p. 371-386.

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1971).