ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ILIJA LUKAČEVIĆ

Chocs et ondes rotatoires de la magnétohydrodynamique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, nº 3 (1971), p. 219-248

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_3_219_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XIV, n° 3, 1971, p. 219-248. *Physique théorique.*

Chocs et ondes rotatoires de la magnétohydrodynamique relativiste

par

Ilija LUKAČEVIĆ
Faculté des Sciences, Belgrade

SUMMARY. — One considers magnetohydrodynamic shock-waves and ordinary (or infinitesimal) waves for which intensity of the magnetic field is invariant. Eigenvalues of the discontinuity of stress-energy tensor for a kind of shocks similar to Alfven's are obtained, and necessary and sufficient conditions are given for them. Discontinuities at such wave-fronts are compared, in General Relativity, with those of the Alfven shocks. Then one obtains necessary thermodynamic condition for the existence of ordinary MHD waves, different from Alfven ones, for which the intensity of the magnetic field is not disturbed. Finally, one gives full demonstration for a theorem obtained in a previous paper, related to Alfven waves.

INTRODUCTION

Dans ce travail nous considérons les chocs et les ondes magnétohydrodynamiques non tangentielles (c'est-à-dire telles que le vecteur-vitesse ne soit pas tangent à l'hypersurface d'onde) pour lesquelles l'intensité du champ magnétique reste invariante. Ces chocs et ces ondes sont rotatoires parce que le champ magnétique, ainsi que la vitesse, toujours unitaire, ne peut changer que de direction.

Pour ces chocs, que nous considérerons en premier lieu, il y a trois possibilités, dont l'une, représentée par les chocs d'Alfvén, ne sera considérée que dans la dernière section. Pour les deux autres, l'une a été, pour certains aspects essentiels, décrite par M. Lichnerowicz dans [3]. Quelques-uns de ces résultats ont été obtenus indépendamment et exposés dans [4]. Nous ferons usage d'un lemme de [3] pour démontrer un théorème qui donne la condition nécessaire et suffisante pour ces chocs, à partir de la discontinuité du tenseur d'énergie. Le troisième cas possible pour les chocs rotatoires est très particulier, car les variables physiques pour l'état postérieur au choc sont complètement déterminées par celles qui correspondent à l'état antérieur au choc.

Nous donnons ensuite des relations entre les discontinuités des composantes du tenseur de courbure, en relativité, pour les chocs d'Alfvén, et pour les autres chocs rotatoires.

Nous passons, dans les deux dernières sections, aux ondes infinitésimales ou ordinaires, pour lesquelles l'intensité du champ magnétique n'est pas perturbée. Des ondes rotatoires, différentes de celles d'Alfvén, sont possibles sous une condition thermodynamique particulière. Des propriétés analogues à celles des chocs correspondants peuvent être démontrées. Nous n'en ferons pas le calcul.

Dans la dernière section, nous passons aux ondes d'Alfvén en relativité générale pour donner la démonstration d'un théorème obtenu dans [5] et correct, mais incomplètement démontré dans cet article.

1. TENSEUR D'ÉNERGIE ET ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

Nous considérerons, dans l'espace-temps V_4, dont la métrique ds^2 est de signature $+, -, -, -$, un fluide parfait chargé ayant pour tenseur d'énergie

$$T_{\alpha\beta} = c^2 r f u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

où c est la vitesse de la lumière, r la densité propre de matière, f la fonction-indice :

$$f = 1 + \frac{i}{c^2} \tag{1.2}$$

i l'enthalpie spécifique, u^α le vecteur-vitesse unitaire ($u^\alpha u_\alpha = 1$), p la pression, $g_{\alpha\beta}$ le tenseur potentiel de gravitation, $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur d'énergie du champ électromagnétique dans le milieu matériel considéré. En magnétohydrodynamique ce tenseur est de la forme :

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left\{ |h|^2 \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) - h_\alpha h_\beta \right\} \tag{1.3}$$

où μ est la perméabilité magnétique, et h_α le vecteur champ magnétique (vecteur d'espace toujours orthogonal à u_α), avec :

$$|h|^2 = - h^\alpha h_\alpha$$

Le tenseur d'énergie de la magnétohydrodynamique relativiste s'écrit explicitement :

$$T_{\alpha\beta} = (c^2 rf + \mu |h|^2) u_\alpha u_\beta - \left(p + \frac{1}{2} \mu |h|^2 \right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta \tag{1.4}$$

On désigne par q le coefficient de $g_{\alpha\beta}$, et qui est la pression totale dans le fluide considéré :

$$q = p + \frac{1}{2} \mu |h|^2 \tag{1.5}$$

Les équations fondamentales de la magnétohydrodynamique relativiste sont :

1) L'équation de conservation de la matière :

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0 \tag{1.6}$$

2) Le deuxième groupe d'équations de Maxwell, qui se réduisent à la forme :

$$\nabla_\alpha (h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha) = 0 \tag{1.7}$$

3) Les équations du mouvement :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.8}$$

Les variables thermodynamiques (dont deux peuvent être indépendantes, le gaz étant polytropique) sont liées par la relation classique :

$$T dS = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.9}$$

où T est la température absolue, S l'entropie spécifique, ε l'énergie interne spécifique définie par :

$$\varepsilon = i - \frac{p}{r} \tag{1.10}$$

Des équations du mouvement et de l'équation de conservation de la matière on obtient que :

$$u^\alpha \partial_\alpha S = 0 \tag{1.11}$$

Nous ferons usage de (1.11) dans la partie consacrée aux ondes infinitésimales ou ordinaires.

2. ONDES DE CHOC ET RELATIONS FONDAMENTALES

Nous rappellerons seulement les définitions et les formules dont nous ferons usage.

Une onde de choc Σ, hypersurface orientée dans le temps sous les hypothèses de compressibilité, que nous exposerons dans la section suivante (cf. [3] pour la preuve), divise l'espace-temps en deux parts dont nous considérerons l'une comme antérieure et l'autre comme postérieure au choc. C'est une hypersurface à la traversée de laquelle l'une au moins des variables considérées doit être discontinue. Le tenseur potentiel de gravitation et ses dérivées premières sont continues. Si on désigne par l_α le vecteur unitaire localement normal par rapport à Σ, et par $[P]$ le saut $P' - P$ d'une variable quelconque P (les variables primées correspondent à l'état postérieur au choc) nous aurons, comme conséquence des équations fondamentales (1.6), (1.7), (1.8) les relations suivantes sur l'onde de choc :

$$[ru^\alpha]l_\alpha = [a] = 0 \tag{2.1}$$

$$[h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha]l_\alpha = [V^\beta] = 0 \tag{2.2}$$

$$[T^{\alpha\beta}]l_\alpha = [W^\beta] = 0 \tag{2.3}$$

Le scalaire a et les vecteurs V^β et W^β, qu'on appelle *invariants* au sens de la théorie des chocs, c'est-à-dire continus à la traversée de Σ. Le vecteur unitaire de la normale l_α est naturellement invariant et orienté dans l'espace (le fluide étant compressible). Si on exprime explicitement a, V^β et W^β au moyen de (1.4), (1.5), (2.1), (2.2) et (2.3) on aura :

$$a = ru^\alpha l_\alpha \tag{2.4}$$

$$V^\beta = \eta u^\beta - \frac{a}{r} h^\beta \tag{2.5}$$

$$W^\beta = \frac{a}{r}(c^2 rf + \mu \mid h \mid^2)u^\beta - ql^\beta - \mu\eta h^\beta \tag{2.6}$$

Où on a désigné par η le produit scalaire $h^\alpha l_\alpha$.

Nous considérerons les chocs non tangentiels, c'est-à-dire tels que $a \neq 0$, $\eta \neq 0$, c'est-à-dire avec u^α et h^α non tangents à l'onde de choc. On introduit alors cinq fonctions scalaires invariantes que nous indiquerons brièvement. On a d'abord l'invariant H défini de la manière suivante :

$$\mathrm{H} = \frac{1}{a^2}\mathrm{V}^\beta\mathrm{V}_\beta = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2} = \frac{\eta'^2}{a^2} - \frac{|h'|^2}{r'^2} \tag{2.7}$$

Si on introduit la variable α :

$$\alpha = c^2\frac{f}{r} = \mu\mathrm{H} \tag{2.8}$$

le vecteur invariant W^β peut être exprimé au moyen de deux composantes dont l'une est tangente et l'autre normale à l'onde de choc :

$$\mathrm{W}^\beta = \left\{ a\alpha(ru^\beta + al^\beta) + \frac{\mu}{a} r\eta\mathrm{V}^\beta \right\} - (q + a^2\alpha)l^\beta \tag{2.9}$$

La première expression entre les crochets est la composante tangente, évidemment invariante, de W^β et que nous désignerons par X^β. Le coefficient de l^β étant également invariant, nous avons le scalaire invariant l :

$$l = q + a^2\alpha = q' + a^2\alpha' \tag{2.10}$$

Le scalaire invariant b est défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^\beta\mathrm{V}_\beta &= c^2 af\eta \\ b &= f\eta = f'\eta' \end{aligned} \tag{2.11}$$

Et K par :

$$\mathrm{K} = \frac{1}{a^2}\mathrm{X}^\beta\mathrm{X}_\beta$$

Au moyen de la variable κ :

$$\kappa = |h|^2 - a^2\mathrm{H} \tag{2.12}$$

on peut exprimer K de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= c^4(r^2 + a^2)\frac{f^2}{r^2} + 2\mu c^2\frac{f}{r}\kappa - \mu^2\mathrm{H}\kappa \\ &= c^4(r'^2 + a^2)\frac{f'^2}{r'^2} + 2\mu c^2\frac{f'}{r'}\kappa' - \mu^2\mathrm{H}\kappa' \end{aligned} \tag{2.13}$$

On introduit enfin, l'invariant L :

$$L = c^4 \frac{b^2}{a^2} - HK$$

On peut montrer que ce scalaire se réduit à :

$$L = \kappa\alpha^2 = \kappa'\alpha'^2 \tag{2.14}$$

Nous ferons un usage constant, dans cet article, des scalaires invariants définis par (2.7), (2.10), (2.11), (2.13) et (2.14), ainsi que des paramètres α et κ définis par (2.8) et (2.11).

3. CHOCS ROTATOIRES. CHOCS SINGULIERS

L'intensité de la vitesse unitaire u^α étant nécessairement invariante au cours d'un choc quelconque, nous considérerons comme *rotatoires* les chocs pour lesquels l'intensité du champ magnétique $|h|^2$ reste invariante, car nous n'avons alors, pour les vecteurs u^α et h^α, que des changements de direction. Les autres variables peuvent avoir des discontinuités.

1) Pour $\alpha = \alpha' = 0$ nous aurons des chocs d'Alfvén (cf. [*1*], [*2*]). Pour ces chocs toutes les variables thermodynamiques, l'intensité du champ magnétique ainsi que les projections de u^α et de h^α sur la normale l_α et sur le vecteur invariant V_α sont invariantes.

2) Pour $\alpha = \alpha' \neq 0$, $\kappa \neq 0$ c'est l'absence de choc (cf. [*1*]).

3) Pour $\alpha = -\alpha' \neq 0$ apparaissent des chocs rotatoires particuliers que nous étudierons dans la section suivante.

4) Pour $\kappa = \kappa' = 0$ nous avons des chocs rotatoires que nous étudierons également.

5) Pour $\alpha = \kappa' = 0$ ou $\alpha' = \kappa = 0$ nous aurons des chocs dits singuliers. Ceux-ci ne sont pas rotatoires.

4. CHOCS ROTATOIRES POUR $\kappa \neq 0$

Outre les chocs d'Alfvén, pour lesquels α est nul, la seule possibilité de chocs pareils, qui laissent d'après (2.12) le paramètre κ invariant :

$$[\kappa] = 0 \tag{4.1}$$

est donnée par :

$$\alpha = -\alpha' \neq 0 \tag{4.2}$$

Relation qui résulte de (2.14).

Nous nous servirons du vecteur $\mathcal{U}^\beta$ introduit dans [1] qui est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{U}^\beta = \mathrm{H}(ru^\beta + al^\beta) - \frac{1}{a^2} r\eta \mathrm{V}^\beta \tag{4.3}$$

On peut vérifier directement que ce vecteur est tangent à Σ, et orthogonal par rapport à V_β. Pour $\alpha \neq 0$ on a la relation invariante suivante :

$$\alpha \mathcal{U}^\beta = \alpha' \mathcal{U}'^\beta \tag{4.4'}$$

D'après (4.2) ceci devient :

$$\mathcal{U}^\beta = -\mathcal{U}'^\beta$$

On peut écrire cette relation :

$$\mathrm{H}(ru^\beta + r'u'^\beta) - \frac{1}{a^2}(r\eta + r'\eta')\mathrm{V}^\beta = -2a\mathrm{H}l^\beta$$

Si on multiplie ceci par $[ru_\beta]$, en tenant compte que :

$$\mathrm{V}^\beta[ru_\beta] = \mathrm{V}'^\beta r'u'_\beta - \mathrm{V}^\beta ru_\beta = r'\eta' - r\eta$$

on obtiendra :

$$a^2\mathrm{H}[r^2] - b^2\left[\frac{r^2}{f^2}\right] = 0 \tag{4.5}$$

où nous avons posé $b = f\eta$. Ceci nous donne une relation satisfaite par les discontinuités des variables thermodynamiques r et f.

Considérons, d'autre part, la relation d'invariance (2.13) :

$$c^4(r^2 + a^2)\frac{f^2}{r^2} + 2\mu c^2 \frac{f}{r}\kappa - \mu^2\mathrm{H}\kappa = c^4(r'^2 + a^2)\frac{f'^2}{r'^2} + 2\mu c^2 \frac{f'}{r'}\kappa' - \mu^2\mathrm{H}\kappa'$$

Celle-ci peut être mise, en usant des autres relations d'invariance, sous la forme qui généralise la relation d'Hugoniot de la magnétohydrodynamique classique (cf. [1]) :

$$c^4[f^2] - c^2\left(\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'}\right)[p] + \frac{1}{2}\mu(\alpha + \alpha')[\kappa] + \mu[\alpha](\kappa + \kappa') = 0$$

A la suite de (4.2) et de l'invariance de κ ceci se réduit à :

$$c^4[f^2] - c^2\left(\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'}\right)[p] + 2\mu[\alpha](|h|^2 - a^2\mathrm{H}) = 0 \tag{4.6}$$

ou nous avons écrit explicitement $\kappa = |h|^2 - a^2\mathrm{H}$. Remarquons encore que dans notre cas :

$$c^2\left(\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'}\right) = 2\mu\mathrm{H} \tag{4.7}$$

Donc (4.6) sera :

$$c^4[f^2] - 2\mu\mathrm{H}[p] + 2\mu[\alpha](|h|^2 - a^2\mathrm{H}) = 0 \tag{4.6$'$}$$

Or, la relation (2.10) donne, pour nos chocs :

$$[p] = -a^2[\alpha]$$

ce qui fait que (4.6) se réduit à :

$$c^2[f^2] + 2\mu|h|^2[\alpha] = 0$$

C'est-à-dire, d'après la définition de α :

$$c^2[f^2] + 2\mu|h|^2\left[\frac{f}{r}\right] = 0 \tag{4.8}$$

La relation (4.8) représente aussi une relation de choc qui est satisfaite par les variables thermodynamiques r et f. En usant encore une fois de (4.7) pour substituer $\frac{f}{r}$ et $\frac{f'}{r'}$ (ce qui est possible car r et f sont toujours positifs) dans (4.5) et (4.8), nous pourrons mettre ces deux relations dans la forme :

$$c^2a^2\mathrm{H}[r^2] = b^2\left(\frac{c^2}{\alpha^2} - \frac{r^2}{f^2}\right) \tag{4.5$'$}$$

$$c^2[f^2] = \frac{4}{c^2}\mu|h|^2\alpha \tag{4.8$'$}$$

Les expressions obtenues mettent clairement en évidence que : *les discontinuités des variables thermodynamiques r et f à la traversée d'un choc rotatoire avec $\alpha = -\alpha' \neq 0$ ne peuvent avoir que des valeurs strictement déterminées en fonction des valeurs de ces variables pour l'état précédant le choc.*

Comme Lichnerowicz a obtenu, partant des hypothèses de compressibilité (que nous supposons satisfaites), les inégalités suivantes

$$[p] > 0, \qquad [f] > 0, \qquad \left[\frac{f}{r}\right] < 0, \qquad \Rightarrow [r] > 0$$

la relation (4.5′) est toujours possible, alors que (4.8′) exige $\alpha > 0$.

Remarquons que (4.7) nous montre que $H > 0$ pour les chocs considérés, car f et r sont toujours positifs. Il en résulte que, pour ces chocs, V^β est nécessairement orienté dans le temps.

5. CHOCS ROTATOIRES POUR $\kappa = \kappa' = 0$

La condition $\kappa = \kappa' = 0$ s'écrit, à la suite de (2.7) et de (2.12):

$$|h|^2 - \eta^2 + \frac{a^2}{r^2}|h|^2 = |h'|^2 - \eta'^2 + \frac{a^2}{r'^2}|h'|^2 \tag{5.1}$$

De (2.7) il résulte immédiatement que:

$$[|h|^2] = 0 \tag{5.2}$$

et aussi:

$$|h|^2 = a^2 H$$

c'est-à-dire que V^β est un vecteur de temps:

$$V^\beta V_\beta = |h|^2 \tag{5.3}$$

On démontre que V^β est orienté dans le temps pour les chocs d'Alfvén (cf. [*1*]). C'est donc une conclusion valable pour tous les chocs rotatoires.

Considérons maintenant le carré scalaire du vecteur $\mathcal{U}^\beta$ introduit dans la relation (4.3) de la section précédente:

$$\mathcal{U}^\beta \mathcal{U}_\beta = H\left(Hr^2 + Ha^2 - \frac{1}{a^2}r^2\eta^2\right) \tag{5.4}$$

Si on exprime η^2 au moyen de (5.1), en tenant compte de l'égalité de $|h|^2$ et de a^2H on aura:

$$\mathcal{U}^\beta \mathcal{U}_\beta = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}'^\beta \mathcal{U}'_\beta = 0 \tag{5.5}$$

car des relations symétriques sont valables des deux côtés du choc. Cette conclusion est en accord avec la relation obtenue dans [3], d'après laquelle on a :

$$\mathcal{U}^\beta \mathcal{U}_\beta = -\,\mathrm{H}\kappa \tag{5.5'}$$

Le carré scalaire de $\mathcal{U}^\beta$ étant nul, alors que ce vecteur est orthogonal par rapport à V^β, qui est un vecteur de temps, nous avons comme conclusion que $\mathcal{U}^\beta$, qui doit être un vecteur d'espace (donc non isotrope), est nul des deux côtés de l'onde de choc considérée :

$$\mathrm{H}(ru^\beta + al^\beta) - \frac{1}{a^2} r\eta \mathrm{V}^\beta = \mathrm{H}(r'u'^\beta + al^\beta) - \frac{1}{a^2} r'\eta' \mathrm{V}^\beta \tag{5.6}$$

Ceci résulte également du lemme I de la section 11 de [3]. La relation (5.6), plus restreinte, est obtenue dans [4]. De (5.6) on peut calculer directement la discontinuité de u^β :

$$[u^\beta] = \frac{1}{a^2\mathrm{H}} [\eta] \mathrm{V}^\beta - a\left[\frac{1}{r}\right] l^\beta \tag{5.7}$$

La discontinuité $[u^\beta]$ étant contenue dans le 2-plan local déterminé par l^β et V^β on voit que pour ces chocs on a le comportement contraire de celui des chocs d'Alfvén pour lesquels ces composantes sont précisément invariantes.

Examinons maintenant les vecteurs pour lesquels les discontinuités sont orientées soit dans le temps soit dans l'espace. De (5.6) nous avons immédiatement :

$$a^2\mathrm{H}[ru^\beta] = [r\eta]\mathrm{V}^\beta \tag{5.8}$$

Examinons $[r\eta]$. On peut l'écrire comme :

$$[r\eta] = f\eta \left[\frac{r}{f}\right]$$

le produit $f\eta$ étant, d'après (2.11), toujours invariant. Au cas où $[r\eta]$ serait nul, nous aurions aussi $\left[\frac{f}{r}\right] = 0$. A la suite de (2.13) nous aurions $[r] = 0$, puis $[f] = 0$, ce qui nous conduirait à l'invariance de toutes les variables thermodynamiques (cf. [1] [2]). Lorsqu'on y ajoute l'invariance de $|h|^2$ nous aurons pour ces chocs toutes les conséquences des chocs d'Alfvén, lesquelles, jointes à celles que nous avons déjà, conduiraient à l'absence de choc.

Nous avons donc la conclusion que pour les chocs rotatoires qui satisfont à la condition $\kappa = \kappa' = 0$, la discontinuité du vecteur ru^β est colinéaire au vecteur invariant V^β, donc orientée dans le temps.

Revenons au vecteur invariant W^β défini par (2.6). Il peut être mis, à l'aide de V^β et de H, dans la forme suivante :

$$W^\beta = a\left(c^2\frac{f}{r} - \mu H\right)ru^\beta - ql^\beta + \frac{1}{a}\mu r\eta V^\beta$$

Dans notre cas ce sera :

$$[W^\beta] = a\left[\left(c^2\frac{f}{r} - \mu H\right)ru^\beta\right] - [p]l^\beta + \frac{1}{a}\mu[r\eta]V^\beta = 0$$

A la suite de (5.8) nous aurons :

$$c^2a[fu^\alpha] - [p]l^\alpha = 0 \tag{5.9}$$

La multiplication de cette expression par l_α nous donnera :

$$c^2a^2\left[\frac{f}{r}\right] + [p] = 0 \tag{5.10}$$

Remarquons que l'invariance éventuelle de p, jointe à celle de $|h|^2$ conduirait aux conséquences des chocs d'Alfvén, dont la combinaison avec celles de nos chocs donnerait l'absence de discontinuité.

Nous pouvons donc constater que pour les chocs considérés la discontinuité du vecteur fu^β est colinéaire à la normale à l'onde de choc l^β.

Considérons maintenant le champ magnétique h^α. Si on substitue au vecteur V^β dans (5.6) sa valeur de (2.5), on aura :

$$h^\alpha = r\left(\frac{1}{a}\eta - \frac{1}{\eta}aH\right)u^\alpha - \frac{1}{\eta}a^2Hl^\alpha$$

c'est-à-dire :

$$h^\alpha = \frac{r}{a}\left(\frac{1}{a^2H}\eta^2 - 1\right)V^\alpha - \eta l^\alpha \tag{5.11}$$

D'où on obtient pour la discontinuité $[h^\alpha]$:

$$[h^\alpha] = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2H}[r\eta^2] - [r]\right)V^\alpha - [\eta]l^\alpha \tag{5.12}$$

6. CHOCS SINGULIERS

Le terme de choc singulier s'applique au choc pour lequel on a (cf. [3]):

$$\alpha = 0, \qquad \kappa' = 0 \tag{6.1}$$

ou bien

$$\alpha' = 0, \qquad \kappa = 0$$

Nous examinerons le cas (6.1), car la différence consiste uniquement dans l'échange des paramètres.

Nous avons de (2.10):

$$[q] = - a^2\alpha \tag{6.2}$$

Les relations (6.1) écrites explicitement, sont:

$$c^2 \frac{f}{r} = \mu \mathrm{H} \tag{6.1'}$$

D'où:

$$\mu \mid h' \mid^2 = c^2 a^2 \frac{f}{r} \tag{6.3}$$

Chacune des deux relations (6.1') nous mènent à la conclusion que V^α est un vecteur de temps pour les chocs singuliers de même que pour les chocs rotatoires.

Considérons l'expression (6.2); elle peut s'écrire:

$$[q] + c^2 a^2 \frac{f'}{r'} - \mu \mathrm{H} = 0$$

De la deuxième relation (6.1') et de (6.3) nous pouvons exprimer l'invariant H au moyen de $\frac{f}{r}$. Ceci nous donne:

$$[q] + c^2 a^2 \left[\frac{f}{r}\right] = 0 \tag{6.4}$$

La relation (6.4) est valable pour tous les chocs pour lesquels l'invariant L de (2.14) est nul. Cette relation est satisfaite pour les chocs d'Alfvén, car les discontinuités qui y figurent sont nulles, et pour les autres chocs rotatoires elle se réduit à la forme (4.5) et (5.10).

D'après la définition (2.12) de κ nous avons :

$$[\kappa] = [\,|\,h\,|^2]$$

Dans notre cas ce sera :

$$\kappa = -\,[\,|\,h\,|^2] \tag{6.5}$$

Pour l'état antérieur au choc la relation (5.5′) est :

$$\mathcal{U}^\beta \mathcal{U}_\beta = -\,\mathrm{H}\kappa$$

H doit être positif d'après (6.1). $\mathcal{U}^\beta$ étant orthogonal par rapport à V_β, est un vecteur d'espace. $\mathcal{U}^\beta\mathcal{U}_\beta$ est donc une quantité négative, d'où il résulte que κ est positif. De (6.5) on a alors :

$$[\,|\,h\,|^2] < 0 \tag{6.6}$$

Dans un choc singulier avec $\alpha = \kappa' = 0$ l'intensité du champ magnétique diminue.

Les chocs considérés sont donc des chocs lents (cf. [*1*]).

Si nous écrivons la relation (6.4) de la manière suivante :

$$[p] + \frac{1}{2}\mu[\,|\,h\,|^2] + c^2a^2\left[\frac{f}{r}\right] = 0$$

nous aurons pour les chocs singuliers la conclusion que :

$$[p] + c^2a^2\left[\frac{f}{r}\right] = 0 \tag{6.7}$$

7. UN THÉORÈME SUR LES CHOCS ROTATOIRES

On peut démontrer (cf. [*2*]) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait un choc d'Alfvén est :

$$\begin{aligned} [\mathrm{T}_{\alpha\beta}]l^\beta &= 0 \\ [\mathrm{T}_{\alpha\beta}]\mathrm{K}^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

où K^β est le vecteur densité superficielle de courant, donné par l'expression suivante :

$$\mathrm{K}^\beta = \eta^{\beta\alpha\gamma\delta} l_\alpha [u_\gamma h_\delta] \tag{7.2}$$

η est le tenseur antisymétrique de Ricci. K^β est toujours orthogonal par rapport aux vecteurs l_β, V_β, W_β. Dans le cas de chocs d'Alfvén il est, de plus, orthogonal par rapport aux discontinuités $[u_\beta]$, $[h_\beta]$.

Pour l'étude de la discontinuité du tenseur d'énergie $[T_{\alpha\beta}]$ dans le cas de chocs rotatoires avec $\kappa = \kappa' = 0$, nous introduirons deux vecteurs, k^α et j^α, définis de la manière suivante: k^α est orthogonal par rapport aux vecteurs l_α, V_α et W_α, et j^α est orthogonal par rapport à l_α, V_α et W_α. Donc:

$$(7.3) \qquad k^\alpha l_\alpha = k^\alpha V_\alpha = k^\alpha W_\alpha = 0, \qquad j^\alpha l_\alpha = j^\alpha V_\alpha = j^\alpha k_\alpha = 0$$

Nous rappellerons que pour les chocs que nous considérons, qui sont non tangentiels, V^α est différent de zéro, et k^α est donc toujours déterminé *au moins* comme un vecteur du 2-plan orthogonal par rapport à l_α et à V_α. En plus, pour un W_α différent de zéro (ce que nous n'exigeons pas nécessairement) et qui n'appartient pas au 2-plan déterminé par l_α et V_α, k_α est déterminé d'une manière unique, et j_α de même. Dans ce cas k_α est colinéaire au vecteur densité superficielle de courant K_α (cf. [*2*]). Le 2-plan orthogonal par rapport au 2-plan de l_α et V_α contient, par conséquent, k_α et j_α. Nous considérerons, k_α et j_α comme des vecteurs unitaires, sauf au cas ou ils seraient isotropes.

Formons la discontinuité du tenseur d'énergie. Si nous posons:

$$\mu\beta^2 = c^2 rf + \mu \mid h \mid^2$$

nous aurons:

$$(7.4) \quad [T_{\alpha\beta}] = \mu[\beta^2]([u_\alpha][u_\beta] + [u_\alpha]u_\beta + u_\alpha[u_\beta]) + \mu[\beta^2]u_\alpha u_\beta + \mu\beta^2([u_\alpha][u_\beta] + [u_\alpha]u_\beta + u_\alpha[u_\beta]) - [q]g_{\alpha\beta} - \mu([h_\alpha][h_\beta] + [h_\alpha]h_\beta + h_\alpha[h_\beta]).$$

Retournons maintenant aux chocs rotatoires considérés dans la section 5, c'est-à-dire tels que $\kappa = \kappa' = 0$. A la suite des relations (5.7), (5.10) et (5.11), qui expriment le fait que u^α et h^α appartiennent, pour ces chocs, au 2-plan local déterminé par l^α et V^α, et de l'invariance de l'intensité du champ magnétique, nous obtiendrons, partant de (7.4):

$$(7.5) \qquad \begin{aligned} [T_{\alpha\beta}]j^\beta &= -[p]j_\alpha \\ [T_{\alpha\beta}]k^\beta &= -[p]k_\alpha \end{aligned}$$

Nous voyons que $-[p]$ est une racine propre double de $[T_{\alpha\beta}]$. Cette racine est négative et ses vecteurs propres sont j_α et k_α. Le 2-plan qu'ils déterminent est d'espace puisque V_α est orienté dans le temps.

Les conditions (7.5) sont nécessaires pour le choc rotatoire considéré. Sont-elles suffisantes? Partons de la définition de k^α et de j^α. Lorsque nous aurons formulé les conditions d'orthogonalité de k^α par rapport à l_α, V_α et W_α, nous obtiendrons, pour l'état antérieur au choc :

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} &\eta k^\alpha u_\alpha - \frac{a}{r} k^\alpha h_\alpha = 0 \\ &\frac{a}{r}(c^2 rf + \mu \mid h \mid^2) k^\alpha u_\alpha - \mu\eta k^\alpha h_\alpha = 0 \end{aligned}$$

(pour l'état postérieur au choc nous aurions des relations de la même forme). De (7.6) nous avons deux possibilités :

$$(7.7)\qquad k^\alpha u_\alpha = k^\alpha h_\alpha = 0$$

ou bien le déterminant du système (7.6) par rapport à ces produits, considérés comme variables, sera nul. Supposons que ces déterminants soient nuls des deux cotés du choc. Nous aurons :

$$(7.8)\qquad \beta^2 \frac{a^2}{r^2} - \eta^2 = \beta'^2 \frac{a^2}{r'^2} - \eta'^2 = 0$$

Cette condition démontre qu'il s'agit de chocs d'Alfvén, car elle peut s'écrire comme :

$$\alpha = \alpha' = 0$$

Mais les relations (7.5) sont incompatibles avec les conséquences des chocs d'Alfvén. Lorsqu'on aura calculé $[T_{\alpha\beta}]$, en tenant compte de toutes les propriétés de ceux-ci (cf. [2]), on établira que, pour l'un des systèmes d'équations (7.5), le premier membre est nécessairement différent de zéro, alors que le second membre est nul. On peut choisir, pour vérifier, k^α colinéaire au vecteur densité superficielle de courant K^α, car les deux sont orthogonaux par rapport à l_α et V_α, et, par conséquent, indéterminés pour ces chocs. Dans ce cas le premier système est vérifié, le second ne l'est pas. Ceci est toujours possible, et, par conséquent, suffisant pour démontrer l'incompatibilité de (7.5) avec les chocs d'Alfvén.

Nous en tirons la conclusion que k^α doit être orthogonal par rapport à u_α et h_α d'un coté du choc au moins. C'est donc un vecteur d'espace. Supposons que cette condition soit remplie du côté antérieur au choc, comme l'exprime (7.7).

La condition d'orthogonalité de j^α par rapport à V_α, écrite pour les deux côtés du choc est :

$$(7.9)\qquad \begin{aligned} j^\alpha V_\alpha &= \eta j^\alpha u_\alpha - \frac{a}{r} j^\alpha h_\alpha = 0 \\ &= \eta' j^\alpha u'_\alpha - \frac{a}{r'} j^\alpha h'_\alpha = 0 \end{aligned}$$

Supposons d'abord que $j^\alpha u_\alpha$ et $j^\alpha h_\alpha$ soient différents de zéro pour les deux côtés du choc et multiplions la première des relations (7.5) par j^α. Nous aurons :

$$(7.10)\quad \beta'^2(u'_\alpha+u_\alpha)j^\alpha[u_\beta]j^\beta+[\beta^2](u_\alpha j^\alpha)^2-\frac{1}{2}[\,|\,h\,|^2]j^\alpha j_\alpha-(h'_\alpha+h_\alpha)j^\alpha[h_\beta]j^\beta=0$$

La multiplication du deuxième groupe d'équations (7.5) par k^β nous donnera, compte tenu de (7.7) :

$$(7.11)\qquad -\beta'^2(k^\alpha u'_\alpha)^2+\frac{1}{2}[\,|\,h\,|^2]+(k^\alpha h'_\alpha)^2=0$$

Le signe positif devant la discontinuité de l'intensité du champ magnétique vient de ce que k^α, étant orthogonal par rapport à u_α est un vecteur d'espace ; de plus il est unitaire. Considérons maintenant les relations (7.6). Elles sont valables aussi pour les valeurs des variables pour l'état postérieur au choc. Comme nous avons supposé que $k^\alpha u'_\alpha$ et $k^\alpha h'_\alpha$ sont différents de zéro, nous tirons la conclusion que le déterminant de ce système doit être nul pour l'état postérieur au choc. Ceci nous donne :

$$(7.12)\qquad \beta'^2\frac{a^2}{r'^2}-\eta'^2=0$$

c'est-à-dire que α' est nul. A cause de la relation (2.14) :

$$\kappa\alpha^2=\kappa'\alpha'^2$$

nous aurons nécessairement, sous nos hypothèses :

$$\kappa=0$$

(étant donné que α doit être différent de zéro). Lorsqu'on aura exprimé, dans (7.11), $k^\alpha h'_\alpha$ au moyen de $k^\alpha u'_\alpha$ tiré de la première des relations (7.6) pour l'état postérieur au choc, on obtiendra :

$$(k^\alpha u'_\alpha)^2\left(-\beta'^2+\frac{1}{a^2}r'^2\eta'^2\right)+\frac{1}{2}[\,|\,h\,|^2]=0$$

Ceci donne, à la suite de (7.12) :

$$[\,|\,h\,|^2]=0$$

Il s'agit donc de chocs rotatoires qui mènent, à la suite de $\kappa=0$ à $\kappa'=0$. Ceci n'est qu'un cas particulier des chocs considérés, avec, en plus $\alpha'=0$. Nos conclusions au cas de l'orthogonalité de k^α par rapport à u'_α et h'_α seraient identiques, à la suite de raisonnements symétriques.

Supposons maintenant qu'au lieu de (7.12) on ait, en plus de (7.7):

(7.13) $$k^\alpha u'_\alpha = k^\alpha h'_\alpha = 0$$

Ceci donne immédiatement, à la suite de (7.11):

(7.13') $$[\,|h|^2] = 0$$

Il s'agit donc de chocs rotatoires qui ne sont pas des chocs d'Alfvén. Ce peuvent donc être ou bien des chocs avec κ nul et invariant, ou bien les chocs rotatoires considérés dans la section 4, et pour lesquels on a $\alpha = -\alpha'$. Pour tout choc rotatoire la relation (7.10) se réduit, lorsqu'on aura calculé tous les termes, à la forme:

$$\beta'^2(u'_\alpha j^\alpha)^2 - \beta^2(u_\alpha j^\alpha)^2 - (h'_\alpha j^\alpha)^2 + (h_\alpha j^\alpha)^2 = 0$$

Si nous exprimons $h_\alpha j^\alpha$ au moyen de $u_\alpha j^\alpha$, pour les deux côtés du choc, à partir de (7.9), nous aurons:

$$(u'_\alpha j^\alpha)^2\left(\beta'^2 - \frac{1}{a^2}r'^2\eta'^2\right) = (u_\alpha j^\alpha)^2\left(\beta^2 - \frac{1}{a^2}r^2\eta^2\right)$$

c'est-à-dire:

(7.14) $$(u'_\alpha j^\alpha)^2\frac{\alpha'}{r'^2} = (u_\alpha j^\alpha)^2\frac{\alpha}{r^2}$$

a) Supposons $u'_\alpha j^\alpha$ et $u_\alpha j^\alpha$ simultanément différents de zéro (r ne peut être infini). Il en résulte que α et α' *ne peuvent* être de signes opposés. Nous n'avons donc, comme possibilité, que des chocs rotatoires de la première espèce ($\kappa = \kappa' = 0$).

b) Si le produit scalaire $u^\alpha j_\alpha$ seul est nul, nous avons comme conséquence, la nullité de α'. A la suite de (2.14) ceci donnerait $\kappa = 0$. D'après (7.13') il en résulte que $\kappa' = 0$.

c) Si les produits $u^\alpha j_\alpha$, $u'^\alpha j_\alpha$ sont nuls nous avons, à la suite de (7.9), la nullité de $h^\alpha j_\alpha$ et de $h'^\alpha j_\alpha$. Ceci signifierait, avec la condition (7.13), que les vecteurs u'_α et h'_α, étant orthogonaux par rapport à k_α et à j_α, doivent être contenus dans le 2-plan l_α, V_α. Or, d'après le lemme de Lichnerowicz (cf. [3]), cité dans la section 5, la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité Hκ' soit nulle est précisément celle que doivent satisfaire ces vecteurs. Comme les chocs considérés sont rotatoires, et que pour des chocs rotatoires V^α est orienté dans le temps, ce que nous avons démontré dans les sections précédentes, il en résulte que H ne peut être nul, et que c'est κ' qui doit l'être nécessairement; mais alors c'est aussi κ qui l'est. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un choc magnétohydrodyna-

mique non tangentiel soit un choc rotatoire avec $\kappa = \kappa' = 0$ *est qu'on ait:*

$$[T_{\alpha\beta}]k^\beta = -[p]k_\alpha$$
$$[T_{\alpha\beta}]j^\beta = -[p]j_\alpha$$

où les vecteurs k^β *et* j^β *satisfont aux conditions* (7.3).

Remarquons seulement que les conditions obtenues entraînent:

$$T_{\alpha\beta}k^\beta = -qk_\alpha$$
$$T_{\alpha\beta}j^\beta = -qj_\alpha$$

tant pour l'état antérieur que pour l'état postérieur au choc.

8. LES RACINES PROPRES DE $[T_{\alpha\beta}]$ POUR $\kappa = \kappa' = 0$

Les relations fondamentales (2.3) nous donnent la normale à l'onde de choc comme vecteur propre de la matrice symétrique $[T_{\alpha\beta}]$ pour une racine propre nulle d'un choc magnétohydrodynamique. Pour le cas considéré dans la section précédente nous avons eu le 2-plan déterminé par les vecteurs j^α et k^α, qui correspond à une racine propre double égale à $-[p]$. Nous trouverons donc la quatrième et dernière racine manquante à laquelle correspond un vecteur propre orthogonal par rapport à j^α, k^α, l^α, et qui ne peut être, d'après les définitions précédentes, que V^α. Nous avons donc:

$$(8.1)\quad [T_{\alpha\beta}]V^\beta = \{ c^2[rf][u_\alpha u_\beta] + c^2[rf]u_\alpha u_\beta + (c^2 rf + \mu\,|\,h\,|^2)[u_\alpha u_\beta] - [p]g_{\alpha\beta} - \mu[h_\alpha h_\beta] \}\, V^\beta$$

En usant des relations (5.6), (5.7), (5.11) et (5.12) qui nous permettent d'exprimer u^α et h^α, ainsi que leurs discontinuités, en fonction de l^α et de V^α, nous obtiendrons, en tenant compte des conditions d'invariance de l'intensité de u^α et de h^α, ainsi que de leur orthogonalité pour les états antérieur et postérieur au choc:

$$[T_{\alpha\beta}]V^\beta = \frac{1}{a^2 H}\{ c^2[rf][\eta^2] + c^2[rf]\eta^2 + (c^2 rf + u\,|\,h\,|^2)[\eta^2] \}\, V_\alpha - [p]V_\alpha - \frac{\mu}{a^2}\left[\frac{1}{a^2 H} r^2\eta^2 - 2r\eta^2\right] V_\alpha$$

c'est-à-dire:

$$(8.2)\quad [T_{\alpha\beta}]V^\beta = \left\{ \frac{1}{a^2 H}(c^2[rf\eta^2] + \mu\,|\,h\,|^2[\eta^2]) - [p] - \frac{\mu}{a^2}\left[\frac{1}{a^2 H} r^2\eta^4 - 2r\eta^2\right]\right\} V_\alpha$$

Afin de simplifier (8.2), nous introduirons la condition d'invariance de $|h|^2$. En partant de (5.11):

$$h^\alpha = \frac{r}{a}\left(\frac{1}{a^2\mathrm{H}}\eta^2 - 1\right)\mathrm{V}^\alpha - \eta l^\alpha$$

nous aurons la condition mentionnée sous la forme:

$$\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{a^2\mathrm{H}}r^2\eta^4 - 2r^2\eta^2\right] - [\eta^2] = 0$$

A la suite de cette relation (8.2) deviendra:

$$[\mathrm{T}_{\alpha\beta}]\mathrm{V}^\beta = \frac{1}{a^2\mathrm{H}}(c^2b[r\eta] + \mu\,|h|^2[\eta^2])\mathrm{V}_\alpha - [p]\mathrm{V}_\alpha - \mu[\eta^2]\mathrm{V}_\alpha$$

où nous avons écrit l'invariant b au lieu de $f\eta$. En usant du fait que:

$$|h|^2 = a^2\mathrm{H}$$

nous obtiendrons:

$$[\mathrm{T}_{\alpha\beta}]\mathrm{V}^\beta = \frac{1}{a^2\mathrm{H}}c^2b[r\eta]\mathrm{V}_\alpha - [p]\mathrm{V}_\alpha$$

La discontinuité de p, exprimée au moyen de (5.10), nous permet d'écrire:

$$\frac{1}{a^2\mathrm{H}}c^2b[r\eta] - [p] = c^2\left(\frac{b^2}{a^2\mathrm{H}}\left[\frac{r}{f}\right] + a^2\left[\frac{f}{r}\right]\right)$$

Comme nous avons:

$$a^2\mathrm{H} = \frac{\eta^2r^2}{a^2 + r^2}$$

nous aurons:

$$\frac{b^2}{a^2\mathrm{H}}\left[\frac{r}{f}\right] + a^2\left[\frac{f}{r}\right] = \frac{f^2}{r^2}(a^2 + r^2)\left[\frac{r}{f}\right] + a^2\left[\frac{f}{r}\right]$$

La relation d'Hugoniot (2.13), qui se réduit, dans notre cas à:

$$(r^2 + a^2)\frac{f^2}{r^2} = (r'^2 + a^2)\frac{f'^2}{r'^2}$$

nous permet d'obtenir, enfin:

$$(8.3) \qquad [\mathrm{T}_{\alpha\beta}]\mathrm{V}^\beta = c^2\left[(2a^2 + r^2)\frac{f}{r}\right]\mathrm{V}_\alpha$$

La racine propre recherchée (désignons-la par s_4) est égale à :

$$s_4 = c^2\left[(2a^2 + r^2)\frac{f}{r}\right] \tag{8.4}$$

9. CHOCS ROTATOIRES EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Les équations d'Einstein :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\chi T_{\alpha\beta} \tag{9.1}$$

nous donnent la possibilité d'examiner les discontinuités du tenseur de Ricci sur les fronts des chocs magnétohydrodynamiques. Le tenseur potentiel de gravitation et ses dérivées premières étant continus, les discontinuités des dérivées secondes de ce tenseur sont les seules à apparaitre dans celles du tenseur de Ricci.

En relativité générale les relations (7.1) se réduisent à :

$$\begin{aligned} [R_{\alpha\beta}]l^\beta &= 0 \\ [R_{\alpha\beta}]k^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

et expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour un choc d'Alfvén (cf. [*2*]), la discontinuité du scalaire de Ricci, R, étant nulle. Ces conditions peuvent naturellement être écrites sous la forme plus simple et équivalente :

$$\begin{aligned} [R] &= 0 \\ [R_{\alpha\beta}]k^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{9.2'}$$

Pour les chocs rotatoires avec $\kappa = \kappa' = 0$, les relations (7.5) seront :

$$\begin{aligned} [R_{\alpha\beta}]j^\beta - \frac{1}{2}[R]j_\alpha &= \chi[p]j_\alpha \\ [R_{\alpha\beta}]k^\beta - \frac{1}{2}[R]k_\alpha &= \chi[p]k_\alpha \end{aligned} \tag{9.3}$$

La discontinuité du tenseur de Ricci est, d'après sa définition :

$$[R_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}[\partial_{\beta\rho}g_{\alpha\sigma} + \partial_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho} - \partial_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma} - \partial_{\rho\sigma}g_{\alpha\beta}]$$

ce qui représente, à la suite des formules de Hadamard :

$$[R_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(l_\beta l_\rho \lambda_{\alpha\sigma} + l_\alpha l_\sigma \lambda_{\beta\rho} - l_\alpha l_\beta \lambda_{\rho\sigma} - l_\rho l_\sigma \lambda_{\alpha\beta}) \tag{9.4}$$

où les $\lambda_{\alpha\sigma}$ sont des quantités symétriques. Les équations (9.2′), valables pour les chocs d'Alfvén, deviendront :

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta + \lambda_\alpha{}^\alpha &= 0 \\ l_\alpha \lambda_{\beta\rho} k^\beta k^\rho + \lambda_{\alpha\beta} k^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

De la deuxième de ces relations il résulte que pour ces chocs on a :

$$\lambda_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0$$

Pour les chocs rotatoires avec κ nul on a de (9.3) :

$$\begin{aligned} l_\alpha \lambda_{\beta\rho} j^\beta l^\rho + \lambda_{\alpha\beta} j^\beta - (\lambda_{\beta\rho} l^\beta l^\rho + \lambda_\beta{}^\beta) j_\alpha &= \chi[p] j_\alpha \\ l_\alpha \lambda_{\beta\rho} k^\beta l^\rho + \lambda_{\alpha\beta} k^\beta - (\lambda_{\beta\rho} l^\beta l^\rho + \lambda_\beta{}^\beta) k_\alpha &= \chi[p] k_\alpha \end{aligned}$$

Puisqu'on peut choisir la constante physique χ de manière qu'elle soit positive, on aura, de la première de ces relations :

$$\lambda_{\alpha\beta} j^\alpha j^\beta + \lambda_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta + \lambda_\alpha{}^\alpha = -\chi[p] < 0 \tag{9.6}$$

On obtient une inégalité de forme identique si on substitue k^α à j^α.

Passons maintenant à la relation (8.3). Si nous désignons par v^α le vecteur unitaire colinéaire à V^α et, nous le rappelons, orienté dans le temps, nous aurons :

$$\lambda_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta - \lambda_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta - \lambda^\alpha{}_\alpha = -c^2 \chi \left[(2a^2 + r^2) \frac{f}{r} \right] \tag{9.7}$$

Revenons aux relations (9.3). En tenant compte que :

$$R = \chi(c^2 rf - 4p)$$

nous obtiendrons :

$$[R_{\alpha\beta}] j^\beta = \chi \left[\frac{1}{2} c^2 rf - p \right] j_\alpha$$

A la suite de (5.10) nous aurons :

$$[R_{\alpha\beta}] j^\beta = c^2 \chi \left[\frac{1}{2} rf + a^2 \frac{f}{r} \right] j_\alpha \tag{9.8}$$

Le vecteur j^α étant unitaire et orienté dans l'espace, nous aurons, après substitution de (9.4) dans (9.8):

$$\lambda_{\alpha\beta} j^\alpha j^\beta = - c^2 \chi \left[(2a^2 + r^2) \frac{f}{r} \right] \tag{9.9}$$

De (9.7) et de (9.9) il suit que:

$$\lambda_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \lambda_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta + 2\lambda_{\alpha\beta} j^\alpha j^\beta + \lambda^\alpha{}_\alpha \tag{9.10}$$

L'inégalité (9.6) entraîne alors:

$$\lambda_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta - \lambda_{\alpha\beta} j^\alpha j^\beta < 0 \tag{9.11}$$

Une inégalité de forme identique est valable pour k^α substitué à j^α.

La relation (9.6), formulée successivement pour j^α et k^α dans le premier terme, nous donne:

$$\lambda_{\alpha\beta} j^\alpha j^\beta = \lambda_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \tag{9.12}$$

On peut examiner ces relations dans un repère orthonormé dont les vecteurs de base seraient v^α, l^α, j^α, k^α. Si nous désignons dans l'ordre énuméré, les vecteurs unités $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, nous aurons dans ce repère:

$$g_{00} = 1, \qquad g_{ii} = -1 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Les relations (9.11) et (9.12) deviennent alors:

$$\lambda_{00} < \lambda_{22} \tag{9.11'}$$

et

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} \tag{9.12'}$$

10. ONDES MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUES POUR $|h|^2$ NON PERTURBÉE

Nous considérerons maintenant les ondes infinitésimales dans un fluide magnétohydrodynamique. Toutes les variables sont continues pour ces ondes, mais la dérivée première de l'une d'elles au moins doit être discontinue. Nous désignerons ces discontinuités, ou perturbations des variables, par le symbole δ, dont nous ferons précéder la variable perturbée. Leur théorie est exposée rigoureusement par M. Lichnerowicz dans [*3*]. Ces ondes sont en fait des ondes ordinaires.

Pour une variable T, nous avons sur le front d'onde, que nous désignerons encore par Σ:

$$\nabla T = \bar{\delta}[\nabla T] + \delta T \tag{10.1}$$

Le $\bar{\delta}$ est le delta de Dirac. L'expression entre les parenthèses est la dérivée ordinaire de la variable T (calculée d'une part de l'onde), et le second terme est la perturbation de cette dérivée sur le front d'onde considéré.

Le système fondamental d'équations satisfait par les perturbations est équivalent au système (2.1) et (2.3) pour les discontinuités sur les ondes de choc:

$$\delta(ru^\alpha)l_\alpha = \delta a = 0 \tag{10.2}$$

$$\delta(h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha)l_\alpha = \delta V^\beta = 0 \tag{10.3}$$

$$\delta T^{\alpha\beta} l_\alpha = \delta W^\beta = 0 \tag{10.4}$$

Les scalaires et vecteurs non perturbés ou invariants sont les mêmes que pour les ondes de choc.

La relation fondamentale thermodynamique (1.9) entraîne, sur l'onde:

$$T\delta S = \delta\varepsilon + p\delta\left(\frac{1}{r}\right) \tag{10.5}$$

La condition (1.11) nous conduit, pour une onde non tangentielle ($u^\alpha l_\alpha \neq 0$), à la condition:

$$\delta S = 0 \tag{10.6}$$

Considérons une onde infinitésimale rotatoire, c'est-à-dire telle que soit satisfaite la condition:

$$\delta\,|\,h\,|^2 = 0 \tag{10.7}$$

La perturbation de W_α étant nulle, nous aurons d'après (2.6), en tenant compte de (10.7):

$$\delta W_\alpha = c^2 a u_\alpha \delta f + c^2 a f \delta u_\alpha + \mu\,|\,h\,|^2 a u_\alpha \delta\left(\frac{1}{r}\right) + \mu\,|\,h\,|^2 \frac{a}{r}\delta u_\alpha - l_\alpha \delta p - \mu(h_\alpha \delta\eta + \eta\delta h_\alpha) = 0$$

En multipliant cette expression par l^α, après quelques simplifications, nous aurons:

$$l^\alpha \delta W_\alpha = c^2 a\delta\left(\frac{f}{r}\right) + \mu a^2\,|\,h\,|^2 \delta\left(\frac{1}{r}\right) + \delta p - \mu\delta(\eta^2) = 0 \tag{10.8}$$

D'autre part, pour le vecteur invariant V_α:

$$\delta(V^\alpha V_\alpha) = \delta(\eta^2) - a^2 \mid h \mid^2 \delta\left(\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

En retranchant cette expression de (10.8) on obtient:

$$c^2 a^2 \delta\left(\frac{f}{r}\right) + \delta p = 0 \tag{10.9}$$

Cette relation entre les perturbations de variables purement thermodynamiques est analogue à celle que nous avons obtenue (5.10) pour les chocs rotatoires. Avec (10.6) nous avons donc deux relations linéaires et homogènes par rapport aux perturbations des variables thermodynamiques. Au cas où ces relations seraient indépendantes nous aurions l'absence de perturbation de toutes les variables thermodynamiques, ce qui nous conduirait aux ondes d'Alfvén (cf. [*1*] [*2*]). Examinons le cas ou (10.6) et (10.9) seraient linéairement dépendantes, car alors des ondes rotatoires distinctes de celles d'Alfvén pourraient exister. Revenons à la relation (10.5); à la suite de (10.6) elle donnera:

$$\delta\varepsilon + p\delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \tag{10.6'}$$

Si on exprime ε et i (l'enthalpie propre) au moyen de (1.2) et de (1.10), on aura:

$$\varepsilon = c^2(f - 1) - \frac{p}{r}$$

Ceci substitué dans (10.6'), mène à la relation:

$$\delta p - c^2 r \delta f = 0 \tag{10.10}$$

valable pour toute onde. Elle résulte de (10.6), et lui est équivalente. Substituons δp de (10.9) dans (10.10). Nous aurons:

$$r\delta f + \frac{a^2}{r}\delta f - a^2 \frac{f}{r^2}\delta r = 0$$

Nous pouvons ramener cette relation à la forme:

$$\frac{a^2 \delta(r^2)}{2r^2(r^2 + a^2)} = \frac{\delta f}{f}$$

δ étant un opérateur différentiel, cette expression se réduit à :

$$\delta l^3 \left\{ \frac{f^2}{r^2}(r^2 + a^2) \right\} = 0$$

La quantité $\frac{f^2}{r^2}(r^2 + a^2)$ ne pouvant être infinie (car la densité n'est pas nulle), nous concluons de la dernière relation que :

(10.11) $$\delta(f^2 + a^2\tau^2) = 0$$

où nous avons posé $\tau = \frac{f}{\mathrm{r}}$ (τ est l'équivalent du volume spécifique V classique). Prenons f et τ pour une paire de variables thermodynamiques indépendantes. Si nous considérons l'entropie $S(f, \tau)$, la relation (10.6), pour être équivalente à (10.11), nous conduira évidemment à la conclusion que :

(10.12) $$S(f, \tau) = S(f^2 + a^2\tau^2)$$

Nous aurons alors une seule condition thermodynamique pour les perturbations causées par l'onde. D'où :

Pour qu'il y ait des ondes infinitésimales rotatoires différentes de celles d'Alfvén, il faut que l'entropie S *soit une fonction de f et τ de la forme donnée par* (10.12).

11. ONDES D'ALFVEN ET PERTURBATIONS DU TENSEUR DE RICCI

Nous démontrerons, dans cette section, un théorème que nous avons exposé dans [5], mais dont la démonstration n'était pas satisfaisante. Ceci à cause du fait que la nullité du paramètre α n'est pas suffisante pour qu'une onde infinitésimale non tangentielle soit onde d'Alfvén. Le paramètre α doit être aussi non perturbé sur l'hypersurface Σ. Donc :

(11.1) $$\alpha = \delta\alpha = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour une onde d'Alfvén.

Le théorème en question affirme que les relations

(11.2) $$\delta R_{\alpha\beta} l^\beta = 0 \qquad \delta R_{\alpha\beta} k^\beta = 0$$

donnent la condition nécessaire et suffisante pour qu'une onde infinitésimale non tangentielle en relativité générale soit onde d'Alfvén. Le vecteur k^β est orthogonal par rapport aux vecteurs invariants l_β, V_β, W_β.

Pour les ondes d'Alfvén le calcul direct mène aux relations (11.2). Nous considérerons donc celles-ci comme données, et nous vérifierons si elles sont suffisantes.

Exprimons la condition d'orthogonalité de k^α par rapport à V_α et W_α, en tenant compte de son orthogonalité par rapport à l_α:

$$(11.3)\qquad \begin{aligned} &\eta k^\alpha u_\alpha - \frac{a}{r} k^\alpha h_\alpha = 0 \\ &\frac{a}{r}(c^2 rf + \mu\,|\,h\,|^2) k^\alpha u_\alpha - \mu\eta k^\alpha h_\alpha = 0 \end{aligned}$$

Nous avons deux possibilités: *a*) Les produits $k^\alpha u_\alpha$ et $k^\alpha h_\alpha$ sont simultanément nuls et *b*) Le déterminant de ce système est nul.

Considérons le cas *a*) et posons:

$$(11.4)\qquad \begin{aligned} \delta V_\alpha &= \delta\eta u_\alpha + \eta\delta u_\alpha - a h_\alpha \delta\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{a}{r}\delta h_\alpha = 0 \\ \delta W_\alpha &= a\delta\left(c^2 f + \frac{1}{r}\mu\,|\,h\,|^2\right) u_\alpha + \frac{a}{r}(c^2 rf + \mu\,|\,h\,|^2)\delta u_\alpha - \mu\delta\eta l_\alpha \\ &\qquad - \mu\eta\delta h_\alpha - \delta q l_\alpha = 0 \end{aligned}$$

Nous aurons alors de (11.4):

$$(11.5)\qquad \begin{aligned} &\eta k^\alpha \delta u_\alpha - \frac{a}{r} k^\alpha \delta h_\alpha = 0 \\ &\frac{a}{r}(c^2 rf + \mu\,|\,h\,|^2) k^\alpha \delta u_\alpha - \mu\eta k^\alpha \delta h_\alpha = 0 \end{aligned}$$

Nous avons encore deux possibilités, mais comme le déterminant de ce système est le même que pour (11.3), et que nous ne considérons pas le cas où il serait nul, nous obtenons les conditions suivantes:

$$k^\alpha \delta u_\alpha = k^\alpha \delta h_\alpha = 0$$

Retournons au système (11.2). A la suite des équations de gravitation (9.1) nous aurons, du premier système (11.2):

$$\delta R = 0$$

c'est-à-dire

$$(11.6)\qquad c^2\delta(rf) - 4\delta p = 0$$

En usant de la fonction β^2 :

$$\mu\beta^2 = \mathrm{c^2rf} + \mu \,|\, \mathbf{h} \,|^2$$

nous aurons:

$$\delta \mathrm{R}_{\alpha\beta} = -\chi \{ \mu(\delta\beta^2 u_\alpha u_\beta + \beta^2 \delta u_\alpha u_\beta + \beta^2 u_\alpha \delta u_\beta) + \delta\left(p - \frac{1}{2}c^2 rf - \frac{1}{2}\mu \,|\, h \,|^2\right) g_{\alpha\beta} - \mu(\delta h_\alpha h_\beta + h_\alpha \delta h_\beta) \}$$

Le deuxième système d'équations (11.2) deviendra:

$$\delta \mathrm{R}_{\alpha\beta} k^\beta = \delta\left(p - \frac{1}{2}c^2 rf - \frac{1}{2}\mu \,|\, h \,|^2\right) k_\alpha$$

A la suite de (11.6) ceci nous donnera:

$$\delta\left(p + \frac{1}{2}\mu \,|\, h \,|^2\right) = 0 \tag{11.7}$$

Ceci exprime l'invariance de la pression totale q. Or (2.10) nous donne alors aussi

$$\delta\alpha = 0$$

car toutes les relations (2.10)-(2.14) sont invariantes évidemment pour les ondes ordinaires aussi. D'après la définition de α nous aurons alors:

$$\delta\left(\frac{f}{r}\right) = 0$$

puis, de (2.14):

$$\alpha^2 \delta\kappa + 2\kappa\alpha\delta\alpha = 0$$

La conclusion est que ou bien α est nul, ce qui est le cas d'Alfvén, ou bien c'est $\delta\kappa$ qui l'est. D'où il suit que $\delta \,|\, h \,|^2$ est nul, donc δp aussi. Les autres relations nous conduisent alors aussi bien aux chocs d'Alfvén comme unique possibilité.

Passons au cas *b*). La nullité du système (11.3) nous donne:

$$\beta^2 \frac{a^2}{r^2} - \eta^2 = 0 \tag{11.8}$$

Nous avons donc:

$$\alpha = 0 \tag{11.8'}$$

l^α étant un vecteur d'espace, il résulte de la première des relations (11.2):

$$\delta R_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = -\mu\delta\beta^2 \frac{a^2}{r^2} - 2\mu\beta^2 \frac{a}{r}\delta\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{1}{2}\mu\delta\beta^2 + \delta p + 2\mu\eta\delta\eta = 0$$

c'est-à-dire :

$$-\mu\delta\left(\beta^2\frac{a^2}{r^2} - \eta^2\right) - \frac{1}{2}\mu\delta\beta^2 + \delta p = 0$$

Donc :

$$a^2\delta\alpha = \delta p - \frac{1}{2}\mu\delta\beta^2 \tag{11.9}$$

La deuxième des relations (11.2) donne :

$$\delta R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = -\mu\delta\beta^2(k^\alpha u_\alpha)^2 - 2\mu\beta^2 k^\alpha u_\alpha k^\beta \delta u_\beta \\ + (\mu\delta\beta^2 - \delta p)k^\alpha k_\alpha + 2\mu k^\alpha h_\alpha k^\beta \delta h_\beta = 0$$

ce qui devient, d'après (11.9):

$$\mu\delta\beta^2(k^\alpha u_\alpha)^2 + 2\mu\beta^2 k^\alpha u_\alpha k^\beta\delta u_\beta + k^\beta k_\beta a^2\delta\alpha - 2\mu k^\alpha h_\alpha k^\beta \delta h_\beta = 0 \tag{11.10}$$

En usant de la première des relations (11.3) pour y exprimer :

$$k^\alpha h_\alpha = \frac{1}{a} r\eta k^\alpha u_\alpha$$

ceci deviendra :

$$\mu\delta\beta^2(k^\alpha u_\alpha)^2 + 2\mu\beta^2 k^\alpha u_\alpha k^\beta \delta u_\beta + a^2 k^\beta k_\beta \delta\alpha - \frac{2}{a}\mu r\eta k^\alpha u_\alpha k^\beta \delta h_\beta = 0 \tag{11.11}$$

De la première des relations (11.4) il résulte que :

$$\frac{a}{r}k^\alpha\delta h_\alpha = k^\alpha u_\alpha \delta\eta + \eta k^\alpha \delta u_\alpha - k^\alpha h_\alpha \delta\left(\frac{a}{r}\right) \tag{11.12}$$

à la suite de quoi nous pouvons écrire (11.11) dans la forme :

$$-\mu\delta\beta^2(k^\alpha u_\alpha)^2 - 2\mu\beta^2 k^\alpha u_\alpha k^\beta \delta u_\beta - a^2 k^\beta k_\beta \delta\alpha \\ + \frac{1}{a^2} 2\mu r\eta k^\alpha u_\alpha \left\{ rk^\beta u_\beta \delta\eta + r\eta k^\alpha \delta u_\alpha - r\delta\left(\frac{a}{r}\right)k^\alpha h_\alpha \right\} = 0$$

La relation dont nous nous sommes servis un peu plus haut pour la substitution de $k^\alpha h_\alpha$, ainsi que la condition $\alpha = 0$, nous donnent :

$$\mu(k^\alpha u_\alpha)^2 \left\{ -\delta\beta^2 + \frac{2}{a^2}r^2\eta\delta\eta - \frac{2}{a^3}r^3\eta^2\delta\left(\frac{a}{r}\right) \right\} - a^2 k^\beta k_\beta \delta\alpha = 0$$

c'est-à-dire :

$$(k^\alpha u_\alpha)^2 \mu \delta\left(- \beta^2 + \frac{1}{a^2} r^2 \eta^2 \right) - a^2 k^\beta k_\beta \delta\alpha = 0$$

D'après la définition du paramètre α nous pouvons écrire ceci de la manière suivante :

$$(k^\alpha u_\alpha)^2 \delta(r^2 \alpha) + k^\beta k_\beta a^2 \delta\alpha = 0$$

α étant nul, cette relation devient :

$$\{ (k^\beta u_\beta)^2 r^2 + k^\beta k_\beta \} \delta\alpha = 0 \tag{11.13}$$

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'orientation de k^β, et que celle-ci n'est pas déterminée d'une manière évidente par les conditions que nous avons imposées, et que nous voulons démontrer, nous avons trois possibilités :

1) $k^\beta k_\beta > 0$. k^β est orienté dans le temps. Nous avons alors nécessairement $\delta\alpha = 0$.

2) $k^\beta k_\beta = 0$. Si k^β est un vecteur isotrope, il résulte que nous devons avoir ou bien $k^\beta u_\beta = 0$ (car $r \neq 0$) ou bien encore $\delta\alpha = 0$. La première possibilité est contradictoire, k^α devant être à la fois isotrope et orthogonal par rapport à un vecteur de temps.

3) $k^\beta k_\beta < 0$. Considérons ce vecteur d'espace comme normé par :

$$k^\beta k_\beta = - 1$$

L'expression entre les parenthèses dans (11.13) peut être nulle au cas où :

$$k^\beta u_\beta = \pm \frac{a}{r}$$

ce qui entraîne immédiatement :

$$k^\beta h_\beta = \pm \eta$$

Nous prendrons les expressions des seconds membres avec le signe positif. On peut facilement vérifier qu'un changement de signe ne modifierait aucunement les résultats.

La première des relations (11.2), multipliée par k^α donnera alors :

$$- \frac{a^2}{r^2} \delta\beta^2 - \beta^2 \frac{a}{r} k^\alpha \delta u_\alpha - \beta^2 \frac{a}{r} \delta\left(\frac{a}{r}\right) + \eta k^\alpha \delta h_\alpha - \eta \delta\eta = 0$$

La substitution de $k^\alpha \delta h_\alpha$ de (11.12) nous permet d'écrire :

$$-\frac{a^2}{r^2}\delta\beta^2 - \beta^2\frac{a}{r}k^\alpha\delta u_\alpha - \beta^2\frac{a}{r}\delta\left(\frac{a}{r}\right) + \eta\frac{r}{a}\left\{\frac{a}{r}\delta\eta + \eta k^\alpha \delta u_\alpha - \eta\delta\left(\frac{a}{r}\right)\right\} + \eta\delta\eta = 0$$

En groupant les termes qui contiennent $k^\alpha \delta u_\alpha$, on remarquera qu'étant proportionnels à α, à un facteur près, ils sont nuls. Nous aurons donc la relation :

$$\frac{a^2}{r^2}\delta\beta^2 + \beta^2\frac{a}{r}\delta\left(\frac{a}{r}\right) + \eta^2\frac{r}{a}\delta\left(\frac{a}{r}\right) - 2\eta\delta\eta = 0 \tag{11.14}$$

La nullité de α exprimée par (11.8) nous permet d'écrire :

$$\frac{r}{a}\eta^2 = \beta^2\frac{a}{r}$$

à la suite de quoi (11.14) devient :

$$\frac{a^2}{r^2}\delta\beta^2 + 2\beta^2\frac{a}{r}\delta\left(\frac{a}{r}\right) - 2\eta\delta\eta = 0$$

c'est-à-dire :

$$\delta\left(\beta^2\frac{a^2}{r^2} - \eta^2\right) = 0$$

Donc :

$$\delta\alpha = 0 \tag{11.15}$$

Nous voyons que tous les cas possibles nous mènent à (11.15). Donc aux ondes d'Alfvén. Ce qu'il fallait démontrer.

RÉFÉRENCES

[1] A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. V, 1966, p. 37-75.

[2] I. LUKAČEVIC, Sur les ondes d'Alfvén en magnétohydrodynamique relativiste, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. VIII, 1968, p. 217-240.

[3] A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc et hypothèses de compressibilité en magnétohydrodynamique relativiste, *Commun. Math. Phys.*, t. **12**, 1969, p. 145-174.

[4] I. LUKAČEVIC, Ondes d'Alfvén et perturbations des tenseurs de courbure en relativité générale, *Mat. Vesnik*, t. **6** (21), vol. 4, 1969, p. 365-372.

[5] I. LUKAČEVIC, O nekim svojstvima MHD talasa u relativnosti. IX yugoslav congress of Rational and applied Mechanics, SITJ Beograd, 1969, p. 289-292.

[6] I. SHIKIN, Relativistic effects for magnetohydrodynamic waves, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. XI, 1969, p. 343-372.

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1970).