ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARIE-CLAIRE BARTHÉLEMY

Contribution à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac. III

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, nº 1 (1971), p. 57-67
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_1_57_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 1, 1971, p. 57-67.

Section A :
Physique théorique.

Contribution à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac. III

par

Marie-Claire BARTHÉLEMY (*)

SOMMAIRE. — Cet article constitue la troisième partie d'un travail d'ensemble consacré à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac.

Le comportement des déphasages est examiné quand la valeur propre $\varkappa$ réelle croît indéfiniment. Une application est faite au cas du potentiel de type exponentiel $V(r) = r^m e^{-\alpha r}$, avec $\alpha > 0$, m étant un entier positif ou nul.

Une propriété du carré du module de $(kr)^{\varkappa} krh_{\varkappa}^{-}(kr)$ est étudiée en appendice.

ABSTRACT. — This is the third part of a general study of potential scattering in the Dirac electron theory.

In this article, we investigate the asymptotic behavior of phase shifts when the real eigenvalue $\varkappa$ increases indefinitely.

An explicit expression is given for a potential of exponential type $V(r) = r^m e^{-\alpha r}$, with $\alpha > 0$ and m a non-negative integer.

In the appendix, we give a property of the square of the modulus of $(kr)^{\varkappa} krh_{\varkappa}^{-}(kr)$.

Nous poursuivons ici une étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac en conservant les notations et définitions introduites dans la première et dans la deuxième partie [*1*] [*2*].

(*) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Poitiers et Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S., Institut Henri Poincaré.

Cette troisième partie sera plus spécialement consacrée à l'examen de certaines propriétés asymptotiques des déphasages, comme fonction de la variable $\varkappa$.

V. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES DÉPHASAGES

Dans ce paragraphe, nous reprenons en les explicitant et en les complétant, les résultats que nous avons donnés dans une Note récente [3].

Le déphasage $\eta_\varkappa(k)$ est donné par :

$$e^{2i\eta_\varkappa(k)} = \frac{h_\varkappa(k)}{h_\varkappa^*(k)} = \frac{(h_\varkappa(k))^2}{|h_\varkappa(k)|^2}$$

où $h_\varkappa(k)$ est la fonction analogue à la fonction de Jost [4].

En rejetant le signe $-$ par la convention $\eta(k) = 0$ dans le cas de la particule libre, on prendra :

$$e^{i\eta_\varkappa(k)} = \frac{h_\varkappa(k)}{|h_\varkappa(k)|}, \quad \text{donc} \quad \sin \eta_\varkappa(k) = \frac{\operatorname{Im} h_\varkappa(k)}{|h_\varkappa(k)|}.$$

Rappelons que $h_\varkappa(k) = \left[\dfrac{r^\varkappa h_{\varkappa_2}(k, r)}{(2\varkappa - 1)!!}\right]_{r=0}$, (voir (IV-1 de [2]), $h_\varkappa(k, r)$ étant la solution du système radial de Dirac, irrégulière à l'origine.

$\mathcal{H}_\varkappa(k, r) = \operatorname{Im} h_\varkappa(k, r)$ vérifie l'équation intégrale :

$$\text{(V-1)} \qquad \mathcal{H}_\varkappa(k, r) = \mathcal{H}_\varkappa^0(k, r) - \int_r^\infty \mathrm{K}(k; r, \xi)\mathrm{V}(\xi)\mathcal{H}_\varkappa(k, \xi)d\xi$$

avec :

$$\mathcal{H}_\varkappa^0(k, r) = -k^\varkappa \frac{k}{\mathrm{E} + \mu} \mathrm{R}_\varkappa^0(k, r),$$

$$\mathrm{K}(k; r, \xi) = \frac{1}{k^\varkappa}[\mathrm{R}_\varkappa^0(k, r)h_\varkappa^{0t}(k, \xi) - h_\varkappa^0(k, r)\mathrm{R}_\varkappa^{0t}(k, \xi)],$$

$$\mathrm{R}_\varkappa^0(k, r) = \begin{vmatrix} krj_{\varkappa-1}(kr) \\ \dfrac{k}{\mathrm{E} - \mu} krj_\varkappa(kr) \end{vmatrix}, \quad h_\varkappa^0(k, r) = k^\varkappa \begin{vmatrix} \dfrac{k}{\mathrm{E} + \mu} krh_{\varkappa-1}^-(kr) \\ krh_\varkappa^-(kr) \end{vmatrix}.$$

Résolvons (V-1) par les approximations successives :

$$\mathcal{H}_\varkappa(k, r) = \sum_{n=0}^\infty \mathcal{H}_\varkappa^{(n)}(k, r),$$

avec :

$$\mathcal{H}_{\varkappa}^{(n)}(k, r) = -\int_r^{\infty} \mathrm{K}(k; r, \xi)\mathrm{V}(\xi)\mathcal{H}_{\varkappa}^{(n-1)}(k, \xi)d\xi.$$

On a :

$$\text{(V-2)} \qquad \mathcal{H}_{\varkappa}^{(1)}(k, r) = \frac{k}{\mathrm{E} + \mu}[k^{\varkappa}\mathrm{R}_{\varkappa}^{0}(k, r)\mathrm{A}(k, r) - h_{\varkappa}^{0}(k, r)\mathrm{B}(k, r)],$$

avec :

$$\mathrm{A}(k, r) = \int_r^{\infty} \frac{1}{k^{\varkappa}} h_{\varkappa}^{0t}(k, \xi)\mathrm{V}(\xi)\mathrm{R}_{\varkappa}^{0}(k, \xi)d\xi,$$

$$\mathrm{B}(k, r) = \int_r^{\infty} \mathrm{R}_{\varkappa}^{0t}(k, \xi)\mathrm{V}(\xi)\mathrm{R}_{\varkappa}^{0}(k, \xi)d\xi.$$

Ces deux expressions se majorent en valeur absolue respectivement par :

$$\mathcal{A}(k) = \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{k^{\varkappa}} h_{\varkappa}^{0t}(k, \xi)\mathrm{V}(\xi)\mathrm{R}_{\varkappa}^{0}(k, \xi) \right| d\xi,$$

$$\mathcal{B}(k) = \int_0^{\infty} | \mathrm{R}_{\varkappa}^{0t}(k, \xi)\mathrm{V}(\xi)\mathrm{R}_{\varkappa}^{0}(k, \xi) | \, d\xi.$$

On obtient, en raisonnant par récurrence, la majoration :

$$\text{(V-3)} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} | \mathcal{H}_{\varkappa}^{(n)}(k, r) | < \left| \frac{k}{\mathrm{E} + \mu} \right| \left\{ \frac{\mathcal{A}(k)}{1 - \mathcal{A}(k)} [\mathcal{A}(k) \, | \, k^{\varkappa}\mathrm{R}_{\varkappa}^{0}(k, r) \, | \right.$$
$$\left. + \mathcal{B}(k) \, | \, h_{\varkappa}^{0}(k, r) \, |] + \frac{\mathcal{B}(k)}{1 - \mathcal{A}(k)} \sum_{n=1}^{\infty} | \, h_{\varkappa}^{(n)}(k, r) \, | \right\}.$$

En explicitant $j_{\varkappa}(kr)$ en fonction de $\mathrm{J}_{\varkappa+\frac{1}{2}}(kr)$ et en utilisant $| \mathrm{J}_{\varkappa}^{2}(z) | \leqslant 1$ et $| \mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z) | \leqslant 1$ on obtient quel que soit $\varkappa$:

$$\mathcal{B}(k) \leqslant \pi \left| \frac{\mathrm{E}k}{\mathrm{E} - \mu} \right| \int_0^{\infty} r \, | \, \mathrm{V}(r) \, | \, dr,$$

et

$$\mathcal{A}(k) \leqslant 2\pi \, | \, \mathrm{E} \, | \int_0^{\infty} r \, | \, \mathrm{V}(r) \, | \, dr.$$

Ceci montre que $\mathcal{A}(k)$ et $\mathcal{B}(k)$ convergent uniformément par rapport à $\varkappa$. On peut donc chercher les limites de $\mathcal{A}(k)$ et $\mathcal{B}(k)$ quand $\varkappa \to +\infty$. En utilisant les formules de Debye [5], on trouve que $\mathcal{A}(k)$ et $\mathcal{B}(k)$ tendent vers zéro quand $\varkappa \to +\infty$.

Par ailleurs, étudions $\sum_{n=1}^{\infty} | h_{\varkappa}^{(n)}(k, r) |$ quand $\varkappa \to +\infty$.

Pour cela, considérons :

$$\mathrm{H}_{\varkappa}(k, r) = \frac{h_{\varkappa}(k, r)}{k^{\varkappa} k r h_{\varkappa}^{-}(kr)}.$$

Cette expression vérifie l'équation intégrale :

$$\text{(V-4)} \qquad \mathrm{H}_{\varkappa}(k, r) = \mathrm{H}_{\varkappa}^{0}(k, r) - \int_{r}^{\infty} \tilde{\mathrm{K}}(k; r, \xi) \mathrm{V}(\xi) \mathrm{H}_{\varkappa}(k, \xi) d\xi,$$

avec :

$$\tilde{\mathrm{K}}(k; r, \xi) = [\mathscr{R}_{\varkappa}^{0}(k, r) \mathrm{H}_{\varkappa}^{0\prime}(k, \xi) - \mathrm{H}_{\varkappa}^{0}(k, r) \mathscr{R}_{\varkappa}^{0\prime}(k, \xi)] k^{\varkappa}(k\xi h_{\varkappa}^{-}(h\xi))$$

$$\mathrm{H}_{\varkappa}^{0}(k, r) = \frac{h_{\varkappa}^{0}(k, r)}{k^{\varkappa} k r h_{\varkappa}^{-}(kr)},$$

$$\mathscr{R}_{\varkappa}^{0}(k, r) = \frac{\mathrm{R}_{\varkappa}^{0}(k, r)}{k^{\varkappa} k r h_{\varkappa}^{-}(kr)}.$$

En remarquant que

$$| (kr)^{\varkappa} k r h_{\varkappa}^{-}(kr) |^2 = \sum_{n=0}^{x} c_{2n}^{\varkappa} (kr)^{2n}$$

avec

$$c_{2n}^{\varkappa} = \frac{(2\varkappa - n)!(2\varkappa - 2n)!}{n![2^{\varkappa - n}(x - n)!]^2},$$

(cf. [5], p. 75), on obtient :

$$\left| \frac{(kr)^{\varkappa - 1} k r h_{\varkappa - 1}^{-}(kr)}{(kr)^{\varkappa} k r h_{\varkappa}^{-}(kr)} \right|^2 \leqslant \frac{2}{\varkappa^2}$$

qui reste inférieur à 1 quand $\varkappa \to +\infty$.

On en déduit :

$$\text{(V-5)} \qquad | \mathrm{H}_{\varkappa}^{0}(k, r) | \leqslant \left| \frac{| \mathrm{E} - \mu | r}{1} \right|.$$

Pour obtenir une majoration de $\tilde{\mathrm{K}}(k; r, \xi)$, nous allons considérer l'équation, en l'absence de potentiel, obtenue à partir de l'équation radiale de Dirac par la transformation $\Psi = \Phi / k^{\varkappa} k r h_{\varkappa}^{-}(kr)$.

La seconde composante de Ψ vérifie pour $\xi \geqslant r > 0$:

$$\frac{d\Psi_2(r)}{dr} = \left(\frac{r}{\xi}\right)^{2\varkappa} \left[\frac{(k\xi)^{\varkappa+1} h_{\varkappa}^{-}(k\xi)}{(kr)^{\varkappa+1} h_{\varkappa}^{-}(kr)} \right]^2 \frac{d\Psi_2(\xi)}{d\xi},$$

ce qui donne, en utilisant :

$$\text{(V-6)}\qquad \frac{|(k\xi)^{\varkappa+1}h_\varkappa^-(k\xi)|^2}{|(kr)^{\varkappa+1}h_\varkappa^-(kr)|^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\varkappa} c_{2n}^\varkappa (k\xi)^{2n}}{\sum_{n=0}^{\varkappa} c_{2n}^\varkappa (kr)^{2n}} \leqslant \left(\frac{\xi}{r}\right)^{2\varkappa}$$

$$\text{(V-7)}\qquad |\Psi_2(r)| \leqslant |\Psi_2(\xi)| + \xi\left|\frac{d\Psi_2(\xi)}{d\xi}\right|.$$

Pour la première composante de Ψ, en intégrant :

$$\Psi_1'(r) = \left(\frac{2\varkappa}{r} - \frac{kh_{\varkappa-1}^-(kr)}{h_\varkappa^-(kr)}\right)\Psi_1(r) - [\mathrm{E}-\mu]\Psi_2(r)$$

comme si $\Psi_2(r)$ était connu, on obtient :

$$\text{(V-8)}\quad \Psi_1(r) = \frac{r^{2\varkappa}}{(kr)^\varkappa krh_\varkappa^-(kr)}\left[\frac{(k\xi)^\varkappa k\xi h_\varkappa^-(k\xi)}{\xi^{2\varkappa}}\Psi_1(\xi) - \int_r^\xi [\mathrm{E}-\mu]\frac{(kt)^\varkappa kth_\varkappa^-(kt)}{t^{2\varkappa}}\Psi_2(t)dt\right].$$

En utilisant (V-6), (V-7), (V-8) ainsi que :

$$\frac{|(kr)^{\varkappa-1}krh_{\varkappa-1}^-(kr)|}{|(kr)^\varkappa krh_\varkappa^-(kr)|} \leqslant \frac{1}{|kr|}$$

et

$$|\mathrm{R}_{\varkappa_2}^{0\prime}(k,\xi)| = \left|\frac{\mathrm{E}+\mu}{k^\varkappa(k\xi h_\varkappa^-(k\xi))^2}\right|,$$

on obtient :

$$\text{(V-9)}\qquad |\tilde{\mathrm{K}}(k;r,\xi)| \leqslant \begin{vmatrix} \dfrac{|\mathrm{E}-\mu|r(1+|k\xi|)}{1+|k\xi|} & \dfrac{1+|k|^2r\xi}{|\mathrm{E}+\mu|\xi} \end{vmatrix}.$$

Résolvons (V-4) par les approximations successives $\mathrm{H}_\varkappa(k,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_\varkappa^{(n)}(k,r)$

avec pour $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{H}_\varkappa^{(n)}(k,r) = -\int_r^\infty \tilde{\mathrm{K}}(k;r,\xi)\mathrm{V}(\xi)\mathrm{H}_\varkappa^{(n-1)}(k,\xi)d\xi.$$

En utilisant (V-5) et (V-9), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, \mathrm{H}_{\varkappa}^{(n)}(k, r)\,| \leqslant \left(\frac{a}{1-d-a(a+|k|b)}\right)\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right| + \left(\frac{d}{1-d-a(a+|k|b)}\right)\left|\begin{matrix}|\mathrm{E}-\mu|\,r\\1\end{matrix}\right|,$$

avec

$$a = \int_0^{\infty} |\, \mathrm{V}(\xi)\,|\, d\xi, \quad b = \int_0^{\infty} \xi\, |\, \mathrm{V}(\xi)\,|\, d\xi, \quad c = \int_0^{\infty} \xi^2\, |\, \mathrm{V}(\xi)\,|\, d\xi$$

et

$$d = (2b + |\,k\,|\,c) \sup\,(|\,\mathrm{E} - \mu\,|, |\,\mathrm{E} + \mu\,|).$$

Chaque intégrale, aussi bien que la série elle-même, converge uniformément par rapport à $\varkappa$, pourvu que $\mathrm{V}(r)$ vérifie les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^{\infty} \xi^n\, |\, \mathrm{V}(\xi)\,|\, d\xi < \infty \quad \text{avec} \quad n = 0, 1 \text{ et } 2.$$

Nous pouvons donc prendre la limite de chaque terme sous le signe d'intégration, ainsi que la limite de la série. En utilisant les formules de Debye [5], on trouve que :

$$\lim_{\varkappa \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{H}_{\varkappa}^{(n)}(k, r) = \mathrm{H}_{\varkappa}^{0}(k, r) \frac{4\varkappa\mathrm{E} - 2\mu}{4\varkappa^2 - 1} \int_r^{\infty} \mathrm{V}(\xi) d\xi,$$

et :

$$\text{(V-10)} \qquad \lim_{\varkappa \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_{\varkappa}^{(n)}(k, r) = h_{\varkappa}^{0}(k, r) \frac{4\varkappa\mathrm{E} - 2\mu}{4\varkappa^2 - 1} \int_r^{\infty} \mathrm{V}(\xi) d\xi.$$

En utilisant (V-2), (V-3) et (V-10) on obtient le comportement de $\mathscr{H}_{\varkappa}(k)$ quand $\varkappa \to +\infty$, $\mathscr{H}_{\varkappa}(k)$ étant donné par $\mathscr{H}_{\varkappa}(k) = \operatorname{Im} h_{\varkappa}(k) = \left[\dfrac{r^{\varkappa}\mathscr{H}_{\varkappa_2}(k, r)}{(2\varkappa - 1)!!}\right]_{r=0}$

$$\lim_{\varkappa \to +\infty} \mathscr{H}_{\varkappa}(k) = -\frac{k}{\mathrm{E} + \mu} \mathrm{B}(k, 0) h_{\varkappa}^{(0)}(k).$$

Le premier terme négligé est inférieur à :

$$\left|\frac{k}{\mathrm{E} + \mu}\right| \mathscr{B}(k) h_{\varkappa}^{(0)}(k) \frac{4\varkappa\mathrm{E} - 2\mu}{4\varkappa^2 - 1} \left[\int_0^{\infty} |\, \mathrm{V}(\xi)\,|\, d\xi + \int_0^{\infty} \xi\, |\, \mathrm{V}(\xi)\,|\, d\xi\right].$$

Par ailleurs $h_{\varkappa}(k) \xrightarrow[\varkappa \to +\infty]{} h_{\varkappa}^{0}(k)$.

Nous obtenons finalement le comportement du déphasage quand $\varkappa \to +\infty$:

$$\lim_{\varkappa \to +\infty} \sin \eta_\varkappa(k) = -\frac{k}{E+\mu}\int_0^\infty R_\varkappa^{0\prime}(k, r)V(r)R_\varkappa^0(k, r)dr,$$

ce qui s'écrit en explicitant $R_\varkappa^0(k, r)$:

(V-11) $\lim_{\varkappa \to +\infty} \sin \eta_\varkappa(k)$

$$= -\frac{k}{E+\mu}\int_0^\infty V(r)\left[(krj_{\varkappa-1}(kr))^2 + \left(\frac{k}{E-\mu}krj_\varkappa(kr)\right)^2\right]dr.$$

Les bornes utilisées ont été obtenues pour $\varkappa$ entier, mais la démonstration reste valable si l'on prend $\varkappa$ réel (non demi-entier) compte tenu du résultat suivant établi en appendice :

Pour $N \leqslant \varkappa \leqslant N+1$, N entier,

$$|(kr)^N krh_N^-(kr)|^2 \leqslant |(kr)^\varkappa krh_\varkappa^-(kr)|^2 \leqslant |(kr)^{N+1}krh_{N+1}^-(kr)|^2.$$

Le calcul de $\sin \eta_\varkappa(k)$ peut être effectué complètement pour un potentiel de type exponentiel $V(r) = r^m e^{-\alpha r}$, avec $\alpha > 0$, m étant un entier positif ou nul.

Nous pouvons évaluer :

$$I_m = \int_0^\infty V(r)(krj_\varkappa(kr))^2 dr = \frac{\pi k}{2}\int_0^\infty r^{m+1}e^{-\alpha r}J^2_{\varkappa+\frac{1}{2}}(kr)dr.$$

En utilisant les résultats de A. H. Van Tuyl [*6*], nous obtenons :

1) *pour m impair :* $m = 2r - 1$ avec $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$I_m = \frac{2^{r-1}}{k^{2r}}\sum_{n=0}^{r}\binom{r}{n}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}\left(\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)^n\left[\frac{\alpha^2}{k^2}+\frac{\alpha^4}{4k^4}\right]^{-(r+n)/2}Q_\varkappa^{r+n}\left(\frac{\alpha^2}{2k^2}+1\right),$$

où $Q_\varkappa^p(z)$ est la fonction de Legendre associée de seconde espèce.

Par ailleurs, le comportement asymptotique [7], pour de grandes valeurs de $\varkappa$, de $Q_\varkappa^{r+n}(z)$ est donné par :

$$Q_\varkappa^{r+n}(z) = e^{i(r+n)\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\varkappa+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\varkappa+r+n+1)}{\Gamma\left(\varkappa+\frac{3}{2}\right)}$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+r+n, \frac{1}{2}-r-n; \frac{3}{2}+\varkappa; \frac{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Ceci nous conduit à la limite :

$$\lim_{\varkappa \to +\infty} \mathrm{I}_m = \frac{2^{r-1}}{k^{2r}} \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} \frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} \left(\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)^n \left[\frac{\alpha^2}{k^2}+\frac{\alpha^4}{4k^4}\right]^{-(2r+2n+1)/4}$$
$$\times\ e^{i(r+n)\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \varkappa^{r+n-\frac{1}{2}} e^{(\varkappa+\frac{1}{2})u},$$

avec

$$\text{(V-12)} \qquad u = \operatorname{Log}\left[\frac{\alpha^2}{2k^2}+1-\left(\frac{\alpha^4}{4k^4}+\frac{\alpha^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] < 0.$$

2) *Pour m pair :* $m = 2r$, avec $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{I}_m = -\alpha \frac{2^{r-1}}{k^{2r+2}} \sum_{n=0}^{r} \frac{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)^n \left[\frac{\alpha^2}{k^2}+\frac{\alpha^4}{4k^4}\right]^{-(r+n+1)/2} \mathrm{Q}_{\varkappa}^{r+n+1}\left(\frac{\alpha^2}{2k^2}+1\right).$$

Le comportement asymptotique pour de grandes valeurs de $\varkappa$ de la fonction de Legendre associée de seconde espèce $\mathrm{Q}_{\varkappa}^{r+n+1}(z)$ est donné par :

$$\mathrm{Q}_{\varkappa}^{r+n+1}(z) = e^{i(r+n+1)\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\left[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{\varkappa+\frac{1}{2}}$$
$$\times \frac{\Gamma(\varkappa+r+n+2)}{\Gamma\left(\varkappa+\frac{3}{2}\right)} \mathrm{F}\left(r+n+\frac{3}{2},\ -r-n-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}+\varkappa;\ \frac{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Finalement :

$$\lim_{\varkappa \to +\infty} \mathrm{I}_m = -\frac{\alpha 2^{r-1}}{k^{2r+2}} \sum_{n=0}^{r} \frac{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)^n \left[\frac{\alpha^2}{k^2}+\frac{\alpha^4}{4k^4}\right]^{-(2r+2n+3)/4}$$
$$\times\ e^{i(r+n+1)\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \varkappa^{r+n+\frac{1}{2}} e^{(\varkappa+\frac{1}{2})u},$$

u étant défini en (V-12).

En reportant ces résultats dans l'expression du déphasage (V-11), nous obtenons :

1) *pour m impair :*

$$\text{(V-13)} \quad \lim_{\varkappa \to +\infty} \sin \eta_\varkappa(k) = -\frac{k}{E+\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^{r-1}}{k^{2r}} \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} \frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)^n e^{i(r+n)\pi}$$

$$\times \left[\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{\alpha^4}{4k^4}\right]^{-(2r+2n+1)/4} \left[(\varkappa-1)^{r+n-\frac{1}{2}} e^{(\varkappa-\frac{1}{2})u} + \left(\frac{k}{E-\mu}\right)^2 \varkappa^{r+n-\frac{1}{2}} e^{(\varkappa+\frac{1}{2})u}\right],$$

2) *pour m pair :*

$$\text{(V-14)} \quad \lim_{\varkappa \to +\infty} \sin \eta_\varkappa(k)$$

$$= \frac{k}{E+\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha \frac{2^{r-1}}{k^{2r+2}} \sum_{n=0}^{r} \frac{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)^n \left[\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{\alpha^4}{4k^4}\right]^{-(2r+2n+3)/4}$$

$$\times e^{i(r+n+1)\pi} \left[(\varkappa-1)^{r+n+\frac{1}{2}} e^{(\varkappa-\frac{1}{2})u} + \left(\frac{k}{E-\mu}\right)^2 \varkappa^{r+n+\frac{1}{2}} e^{(\varkappa+\frac{1}{2})u}\right],$$

u étant défini en (V-12).

Nous retrouvons ici en faisant $m = 0$ l'exemple donné dans [*3*].

A l'aide des expressions (V-13) et (V-14), nous voyons bien que le déphasage $\eta_\varkappa$ tend vers zéro quand $\varkappa \to +\infty$.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. G. Petiau, Directeur de Recherches au C. N. R. S., pour ses constants encouragements.

APPENDICE

Considérons le cas où $\varkappa$ est réel quelconque positif.

$$|(kr)^{\varkappa} krh_{\varkappa}^{-}(kr)|^2 = \frac{\pi}{2}(kr)^{2\varkappa+1}|H_{\varkappa+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)|^2.$$

Posons $kr = x$. Ceci s'écrit :

$$|(kr)^{\varkappa} krh_{\varkappa}^{-}(kr)|^2 = \frac{\pi}{2}|x^{\varkappa+\frac{1}{2}} H_{\varkappa+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)|^2$$

Posons $\nu = \varkappa + \frac{1}{2}$.

On cherche la croissance d'une telle fonction par rapport à $\varkappa$ donc par rapport à ν. Pour cela, cherchons les zéros de la fonction $\frac{\partial}{\partial \nu}|x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)|^2$. Il nous faut donc chercher les zéros de la fonction $\frac{\partial}{\partial \nu}[x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)]$ et de $\frac{\partial}{\partial \nu}[x^{\nu} H_{\nu}^{(1)}(x)]$.

Les variables ν et x étant réelles, en utilisant les représentations asymptotiques des fonctions $H_{\nu}^{(2)}(x)$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} H_{\nu}^{(2)}(x)$ pour ν très différent de x d'une part et pour des valeurs de ν et x sensiblement proches d'autre part, on montre en suivant la méthode de Emde [*8*] employée par J. P. Callonnec [*9*] que $\frac{\partial}{\partial \nu}[x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)]$ n'a pas de zéro pour $\nu > 5$.

On voit donc que $\frac{\partial}{\partial \nu}|x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)|^2$ n'a pas de zéros dans le plan ν. Donc $\frac{\partial}{\partial \nu}|x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)|^2$ est de signe constant pour ν réel positif.

Pour obtenir ce signe, nous examinerons $\frac{\partial}{\partial \nu}|x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)|^2$ quand ν tend vers l'infini.

Soit $\nu \gg x$, $H_{\nu}^{(2)}(x)$ admet la forme asymptotique suivante :

$$H_{\nu}^{(2)}(x) \sim \frac{i(2)^{\frac{1}{2}}}{(\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\nu(\operatorname{th}\xi_0 - \xi_0)}}{(\nu \operatorname{th} \xi_0)^{\frac{1}{2}}},$$

où ξ_0 est défini par :

$$\operatorname{Ch} \xi_0 = \frac{\nu}{x}.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial \nu}|x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)| \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{[\nu(\log x + \xi_0) - x \operatorname{Sh} \xi_0]}}{(x \operatorname{Sh} \xi_0)^{\frac{1}{2}}} \left[\operatorname{Log} x + \xi_0 - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Ch} \xi_0}{x \operatorname{Sh}^2 \xi_0}\right].$$

qui est positif quand $\nu \to +\infty$.

Autrement dit, $|x^{\nu} H_{\nu}^{(2)}(x)|^2$ est une fonction croissante de ν.

Nous pouvons donc écrire que pour $\varkappa$ réel quelconque, $N \leqslant \varkappa \leqslant N + 1$, N étant entier :

$$|(kr)^{N} krh_{N}^{-}(kr)|^2 \leqslant |(kr)^{\varkappa} krh_{\varkappa}^{-}(kr)|^2 \leqslant |(kr)^{N+1} krh_{N+1}^{-}(kr)|^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. C. BARTHÉLÉMY, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **6**, n° 4, 1967, p. 365-393.
[*2*] M. C. BARTHÉLÉMY, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **7**, n° 2, 1967, p. 115-148.
[*3*] M. C. BARTHÉLÉMY, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **268**, 1969, p. 521.
[*4*] R. JOST, *Helvetica Physica Acta*, t. **20**, 1947, p. 256.
[*5*] G. PETIAU, *La théorie des Fonctions de Bessel*, C. N. R. S., 1955.
[*6*] A. H. VAN TUYL, *Mathematics of Comnutation*, t. **18**, n° 87, 1964, p. 424.
[*7*] *Handbook of Math. Funct*, Nat. Bureau of Standards, p. 336. G. N. WATSON, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. **22**, 1918, p. 277.
[*8*] F. EMDE, Passintegrale für Zylinderfunktionen von komplexem index. *Z. A. M. M.*, Bd 19, Nr 2, avril 1939, p. 101.
[*9*] J. P. CALLONNEC, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **269**, 1969, p. 94, et communication privée.

(Manuscrit reçu le 24 juin 1970).