ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

R. LAPIEDRA

Le champ électromagnétique singulier généralisé dans l'espace-temps de Schwarzschild

Annales de l'I. H. P., section A, tome 12, nº 2 (1970), p. 183-213
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__12_2_183_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XII, n° 2, 1970, p. 183-213. *Physique théorique.*

Le champ électromagnétique singulier généralisé dans l'espace-temps de Schwarzschild

par

R. LAPIEDRA

RÉSUMÉ. — On introduit brièvement la notion de champ électromagnétique singulier. Ce champ vient décrit par deux 2-formes singulières, $F_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta} \equiv \lambda F_{\alpha\beta} + \nu \overset{*}{F}_{\alpha\beta}$.

On donne par la suite une interprétation des équations du champ singulier généralisé qui revient à considérer le vide de la Relativité Générale comme étant doué d'un certain pouvoir anisotrope d'induction.

Finalement on étudie les équations de ce champ singulier généralisé dans l'espace-temps de Schwarzschild, dans le cas où le vecteur fondamental, $\vec{l}$, de $F_{\alpha\beta}$ est le vecteur d'onde correspondant à la généralisation d'onde plane électromagnétique monocromatique dans l'espace-temps de Schwarzschild, donnée par Bel et Montserrat. On distingue deux cas, selon que $\nu = 0$ ou pas et dans les deux cas on construit le champ singulier généralisé associé à $\vec{l}$.

1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES. — En relativité générale les équations de Maxwell du vide s'écrivent

$$\nabla_\alpha \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = 0, \qquad \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \qquad \left(\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \right) \tag{1.1}$$

où la 2-forme $F_{\alpha\beta}$ décrit le champ électromagnétique. A ce champ il y a associé un tenseur d'impulsion-énergie, $\tau_{\alpha\beta}$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}) - F_\alpha{}^\rho F_{\beta\rho} \tag{1.2}$$

Si nous voulons décrire un état intrinsèque de radiation électromagnétique, nous sommes amenés à ne considérer que les 2-formes, $F_{\alpha\beta}$, pour lesquelles le vecteur flux d'énergie du champ ou vecteur de Poynting, $\vec{P}(\vec{e})$, relatif à un observateur associé au vecteur $\vec{e}$ (vecteur unitaire orienté dans le temps)

$$P^{\alpha}(\vec{e}) = (\delta^{\alpha}_{\rho} + e^{\alpha}e_{\rho})\tau^{\rho\sigma}e_{\sigma} \tag{1.3}$$

soit toujours différent de zéro quel qu'il soit le vecteur $\vec{e}$ orienté dans le temps.

Ces 2-formes pour lesquelles le vecteur de Poynting est intrinsèquement non nul sont bien connues: ce sont les 2-formes dites singulières ou des 2-formes, $F_{\alpha\beta}$, pour lesquelles il existe un vecteur $\vec{l}$, nécessairement isotrope dit vecteur fondamental de $F_{\alpha\beta}$, tel que l'on a

$$l^{\alpha}F_{\alpha\beta} = l^{\alpha}\overset{*}{F}_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.4}$$

On démontre que les 2-formes singulières, $F_{\alpha\beta}$, peuvent s'écrire sous la forme

$$F_{\alpha\beta} = A(l_{\alpha}P_{\beta} - l_{\beta}P_{\alpha}) \tag{1.5}$$

et pour la 2-forme, $\overset{*}{F}_{\alpha\beta}$, dual de $F_{\alpha\beta}$

$$\overset{*}{F}_{\alpha\beta} = A(l_{\alpha}Q_{\beta} - l_{\beta}Q_{\alpha}) \tag{1.6}$$

Dans (1.5), (1.6), A est un certain scalaire et les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ sont tels que l'on a [1]

$$\vec{P}\cdot\vec{l} = \vec{Q}\cdot\vec{l} = \vec{P}\cdot\vec{Q} = 0, \qquad \vec{P}^2 = \vec{Q}^2 = -1 \tag{1.7}$$

$F_{\alpha\beta}$ étant fixée, $\vec{l}$ est défini à un facteur près (seulement le produit $\overrightarrow{Al}$ est déterminé)

$$\vec{l} \to \rho\vec{l} \tag{1.8}$$

Mais si nous nous penchons sur la congruence isotrope de courbes, $\Gamma(\vec{l})$, dont les courbes sont les trajectoires du champ des vecteurs $\vec{l}$, celle-ci est bien définie et à partir d'elle on obtient $\vec{l}$ ou $\rho\vec{l}$, selon la paramétrisation que l'on prend le long des courbes de $\Gamma(\vec{l})$.

Maintenant le théorème de Mariot-Robinson [*1*] [*2*] dit que: *pour qu'il existe des solutions singulières,* $F_{\alpha\beta}$, *de vecteur fondamental* $\vec{l}$, *des équations*

---

(1) Nous supposons que la variété riemanienne, V_4, qui décrit l'espace-temps est de signature -2. Les deux dernières relations de (1.7) signifient alors que $\vec{P}$, $\vec{Q}$ sont orientés dans l'espace.

de Maxwell du vide il faut et il suffit que la congruence isotrope $\Gamma(\vec{l})$ *soit géodésique et sans distorsion* (1).

D'autre part, nous avons donné ailleurs (MM. Bel, Montserrat et moi-même) [*3*] les raisons qui nous ont amenés à généraliser la notion de champ électromagnétique singulier, pour lequel nous avons donné, dans le vide, les équations

$$\nabla_\alpha \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = 0, \qquad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.9}$$

avec pour $G_{\alpha\beta}$

$$G_{\alpha\beta} \equiv \lambda F_{\alpha\beta} + \nu \overset{*}{F}_{\alpha\beta} \qquad (\lambda \neq 0) \tag{1.10}$$

λ, ν étant deux scalaires et $F_{\alpha\beta}$ une 2-forme singulière.

Le champ électromagnétique singulier généralisé vient ainsi décrit par un couple, $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, de 2-formes singulières. Aussi dans le cas d'un milieu matériel (présence d'induction) le champ électromagnétique tout court vient décrit par un couple de 2-formes [*4*] (nous reviendrons plus tard, § 2 — sur cette question). Par analogie avec ce qui est dans ce cas, nous prendrons comme tenseur d'impulsion-énergie, $\tau_{\alpha\beta}$, du champ singulier généralisé

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(G_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})g_{\alpha\beta} - G_{\rho\alpha}F^{\rho}{}_{\beta} \tag{1.11}$$

La 2-forme $F_{\alpha\beta}$ étant une 2-forme singulière, on vérifie aisément que $\tau_{\alpha\beta}$ donné par (1.11) est un tenseur symétrique.

Maintenant, compte tenu de (1.10), (1.5), (1.6), on voit que le vecteur de Poynting, $\vec{P}(\vec{e})$, construit avec $\tau_{\alpha\beta}$ donné par (1.11), est tel que l'on a

$$\vec{e}^2 = 1 \Rightarrow \vec{P}(\vec{e}) \neq 0 \tag{1.12}$$

ce qui est nécessaire si l'on doit avoir un état de radiation intrinsèque pour le champ singulier généralisé.

Finalement, nous avons donné [*3*] deux théorèmes qui sont la contre-partie pour le champ singulier généralisé du théorème de Mariot-Robinson. Ces deux théorèmes sont les suivants :

THÉORÈME I. — *Pour qu'il existe un champ électromagnétique singulier généralisé, ayant comme vecteur fondamental un vecteur isotrope* $\vec{l}$, *il faut et il suffit que* $\Gamma(\vec{l})$ *soit une congruence géodésique.*

C'est le théorème de Mariot-Robinson, la condition distorsion nulle ayant disparue.

(1) Pour les notions de distorsion, rotation et dilatation d'une congruence isotrope et géodésique voir le résumé donné en appendice à la fin de ce travail.

On peut se demander si en fait on ne pourrait démontrer un théorème plus fort que le théorème I. Par exemple en posant $v = 0$ dans (1.10). Nous avons démontré que ceci n'est pas possible en général. Plus précisément nous avons démontré [3] le théorème suivant

THÉORÈME II. — *Pour qu'il existe un champ électromagnétique généralisé, avec $v = 0$, ayant comme vecteur fondamental un vecteur isotrope $\vec{l}$, il faut et il suffit que $\Gamma(\vec{l})$ soit une congruence géodésique et telle que l'on ait*

$$\frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu\alpha\beta}\dot{B}_{\alpha\rho}B^{\rho}_{\beta}l_{\mu} = -2D^2\omega l^{\lambda} \tag{1.13}$$

où

$$B_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_{\alpha}l_{\beta} + \nabla_{\beta}l_{\alpha} - 2\theta g_{\alpha\beta}) \tag{1.14}$$

Dans (1.13), (1.14), le tenseur $\eta^{\lambda\mu\alpha\beta}$ est le tenseur élément de volume de V_4 et D, ω, θ des scalaires représentant la distorsion, la rotation et la dilatation, respectivement de $\Gamma(\vec{l})$ (voir Appendice).

La condition (1.13) peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathrm{Im}\,[\bar{\sigma}R(\vec{l}, \vec{S})] = 2D^2\omega \tag{1.15}$$

où le premier membre représente la partie imaginaire de $\bar{\sigma}R(\vec{l}, \vec{S})$. Pour $R(\vec{l}, \vec{S})$ et σ valent les expressions (à propos de σ voir Appendice).

$$R(\vec{l}, \vec{S}) \equiv \frac{1}{4}R_{\alpha\beta\lambda\mu}l^{\alpha}S^{\beta}l^{\lambda}S^{\mu} \qquad \left(\vec{S} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{X} + i\vec{Y})\right) \tag{1.16}$$

$$\sigma \equiv S^{\alpha}S^{\beta}\nabla_{\alpha}l_{\beta} \tag{1.17}$$

où $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est le tenseur de courbure de V_4.

Nous donnons par la suite une troisième manière d'écrire (1.13), dont nous nous servirons dans le paragraphe 4

$$\dot{H}K - \dot{K}H = P^{\alpha}\dot{Q}_{\alpha}D^2 + 2\omega D^2 \qquad (\dot{-} \equiv l^{\rho}\nabla_{\rho} -) \tag{1.18}$$

où H, K sont des scalaires réels tels que

$$K + iH \equiv \sigma \tag{1.19}$$

Dans les théorèmes I et II la condition $D = 0$, présente dans le théorème de Mariot-Robinson, n'apparaît plus et c'est là que réside l'intérêt du champ électromagnétique singulier généralisé. En effet, les congruences isotropes, géodésiques *et sans distorsion* étant extrêmement rares dans les espaces-temps du vide, également rares devraient être les trajectoires possibles des rayons lumineux dans le cadre des champs électromagnétiques singuliers non généralisés, ce qui donne des limitations absurdes pour la propagation de la lumière dans le vide [3].

2. UNE INTERPRÉTATION POSSIBLE DES ÉQUATIONS (1.9). — D'après Pham Man Quan [4] [5], le champ électromagnétique dans un milieu avec induction vient décrit par un couple de 2-formes, $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$. Étant donné un vecteur orienté dans le temps $\vec{e}$, $\vec{e}^2 = 1$, les champs et les inductions électriques et magnétiques associés à la direction de $\vec{e}$, s'expriment

$$(2.1) \quad E_\alpha = F_{\rho\alpha}e^\rho, \qquad D_\alpha = G_{\rho\alpha}e^\rho, \qquad H_\alpha = \overset{*}{G}_{\rho\alpha}e^\rho, \qquad B_\alpha = \overset{*}{F}_{\rho\alpha}e^\rho$$

où $\vec{E}$, $\vec{D}$ représentent le champ et l'induction électrique et $\vec{H}$, $\vec{B}$ le champ et l'induction magnétiques, respectivement.

Maintenant, les champs et les inductions sont reliés à travers deux matrices inversibles ε^α_β, τ^α_β, telles que l'on a, d'une part

$$(2.2) \qquad D^\alpha = \varepsilon^\alpha_\rho E^\rho, \qquad H^\alpha = \tau^\alpha_\rho B^\rho$$

et d'autre part

$$(2.3) \qquad \varepsilon^\alpha_\beta = \varepsilon\delta^\alpha_\beta + e^\alpha_\beta,$$

$$(2.4) \qquad \tau^\alpha_\beta = \tau\delta^\alpha_\beta + t^\alpha_\beta$$

avec δ^α_β le tenseur delta de Kronecker et

$$(2.5) \qquad e^\alpha_\rho e^\rho = t^\alpha_\rho e^\rho = 0$$

c'est-à-dire $\vec{e}$ est vecteur propre de ε^α_β et τ^α_β.

A partir des équations (2.3), (2.4) on peut alors exprimer $G_{\alpha\beta}$ en fonction de $F_{\alpha\beta}$

$$(2.6) \quad G_{\alpha\beta} = \tau F_{\alpha\beta} + (\tau - \varepsilon)(F_{\sigma\alpha}e^\sigma e_\beta - F_{\sigma\beta}e^\sigma e_\alpha) + (e^\rho_\alpha e_\beta - e^\rho_\beta e_\alpha)u^\sigma F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}e^\gamma t^\delta_\mu \eta_{\mu\nu\rho\sigma}e_\nu F_{\rho\sigma}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$(2.7) \qquad \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 0,$$

$$(2.8) \qquad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta$$

où $\vec{J}$ représente le vecteur courant électrique.

Par suite imaginons le vide comme étant doué d'une induction anisotrope, voir donnons-nous comme formules reliant les champs aux inductions

$$(2.9) \qquad \vec{D} = \lambda\vec{E} + \nu\vec{B},$$

$$(2.10) \qquad \vec{H} = -\nu\vec{E} + \lambda\vec{B}$$

compte tenu de (2.2), (2.3), (2.4), les équations (2.9), (2.10) s'écrivent

$$(2.11)\qquad (\varepsilon\delta^\alpha_\rho + e^\alpha_\rho)E^\rho = \lambda E^\alpha + \nu B^\alpha,$$
$$(2.12)\qquad (\tau\delta^\alpha_\rho + t^\alpha_\rho)B^\rho = -\nu E^\alpha + \lambda B^\alpha$$

équations qui seront satisfaites si l'on prend

$$(2.13)\qquad \varepsilon = \tau = \lambda, \qquad e^\alpha_\rho E^\rho = \nu B^\alpha, \qquad t^\alpha_\rho B^\rho = -\nu E^\alpha$$

De (2.1), (2.13), (2.6) il vient

$$(2.14)\qquad G_{\alpha\beta} = \lambda F_{\alpha\beta} + \nu(B_\beta e_\alpha - B_\alpha e_\beta) + \nu\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}e^\gamma E^\delta$$

d'où, en tenant compte de nouveau de (2.1),

$$(2.15)\qquad G_{\alpha\beta} = \lambda F_{\alpha\beta} - \nu(\overset{*}{F}_{\rho\alpha}e^\rho e_\beta - \overset{*}{F}_{\rho\beta}e^\rho e_\alpha) + \nu\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}e^\gamma F^{\lambda\delta}e_\lambda$$

Supposons désormais $F_{\alpha\beta}$ singulière

$$(2.16)\qquad F_{\alpha\beta} = A(l_\alpha P_\beta - l_\beta P_\alpha), \qquad \overset{*}{F}_{\alpha\beta} = A(l_\alpha Q_\beta - l_\beta Q_\alpha)$$

où

$$(2.17)\qquad \vec{P}^2 = \vec{Q}^2 = -1, \qquad \vec{P}\cdot\vec{l} = \vec{Q}\cdot\vec{l} = \vec{l}^2 = 0$$

$F_{\alpha\beta}$ étant fixé, (2.16) détermine $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ aux transformations près

$$(2.18)\qquad \vec{P} \to \vec{P} + \eta_1\vec{l},$$
$$(2.19)\qquad \vec{Q} \to \vec{P} + \eta_2\vec{l}$$

avec η_1, η_2 deux scalaires réels.

Compte tenu de cette indétermination, on peut se convaincre facilement que tout vecteur $\vec{e}$, $\vec{e}^2 = 1$, peut s'écrire sous la forme

$$(2.20)\qquad \vec{e} = \alpha\vec{l} + \beta\vec{K} \qquad (2\alpha\beta = 1)$$

avec

$$(2.21)\qquad \vec{K}^2 = \vec{K}\cdot\vec{P} = \vec{K}\cdot\vec{Q} = 0, \qquad \vec{K}\cdot\vec{l} = 1$$

On aura par conséquent

$$(2.22)\qquad B_\alpha = \overset{*}{F}_{\rho\alpha}e^\rho = \beta A Q_\alpha, \qquad E_\alpha = F_{\rho\alpha}e^\rho = \beta A P_\alpha$$

D'autre part

$$(2.23)\qquad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}e^\gamma P^\delta = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\alpha l^\gamma P^\delta + \beta K^\gamma P^\delta)$$
$$= \alpha(l_\alpha Q_\beta - l_\beta Q_\alpha) - \beta(K_\alpha Q_\beta - K_\rho Q_\alpha)$$

et avec (2.22), (2.23), l'équation (2.15) devient

$$(2.24)\qquad G_{\alpha\beta} = \lambda F_{\alpha\beta} + 2\alpha\beta\nu A(l_\alpha Q_\beta - l_\beta Q_\alpha) = \lambda F_{\alpha\beta} + \nu\overset{*}{F}_{\alpha\beta}$$

et si nous supposons que dans le vide le vecteur courant $\vec{\mathrm{J}}$ est nul, les équations de Maxwell (2.7) et (2.8) s'écriront

$$\nabla_\alpha \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.25}$$

$$\nabla_\alpha(\lambda \mathrm{F}^{\alpha\beta} + \nu \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\alpha\beta}) = 0 \tag{2.26}$$

c'est-à-dire juste les équations (1.9). Ainsi, d'après les équations (1.9), l'espace-temps en absence de matière peut être envisagé comme étant doué d'une induction électromagnétique anisotrope donnée par les équations (2.9), (2.10).

Il peut être intéressant de constater que l'interprétation qu'on vient de donner des équations (1.9) reste valable même dans le cas où $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ n'est pas singulière. En effet, $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ admettra maintenant une expression de la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\alpha\beta} = {} & a(l_\alpha \mathrm{P}_\beta - l_\beta \mathrm{P}_\alpha) + b(l_\alpha \mathrm{Q}_\beta - l_\beta \mathrm{Q}_\alpha) + c(l_\alpha \mathrm{K}_\beta - l_\beta \mathrm{K}_\alpha) \\ & + d(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{Q}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{Q}_\alpha) + f(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{K}_\alpha) + g(\mathrm{Q}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{Q}_\alpha \mathrm{K}_\alpha) \end{aligned} \tag{2.27}$$

où a, b, ..., représentent des coefficients scalaires convenables. Par conséquent

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathrm{F}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{F}^{\gamma\delta} = {} & - b(l_\alpha \mathrm{P}_\beta - l_\beta \mathrm{P}_\alpha) + \alpha(l_\alpha \mathrm{Q}_\beta - l_\beta \mathrm{Q}_\alpha) \\ & - d(l_\alpha \mathrm{K}_\beta - l_\beta \mathrm{K}_\alpha) + c(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{Q}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{Q}_\alpha) \\ & + g(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{K}_\alpha) - f(\mathrm{Q}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{Q}_\beta \mathrm{K}_\alpha) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Voyons ce que devient (2.15) quand nous y posons (2.27), (2.28) et (2.20). Tout d'abord on a, d'une part

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\gamma \mathrm{F}^{\lambda\delta} e_\lambda = {} & \alpha(a\beta - f^\alpha)(l_\alpha \mathrm{Q}_\beta - l_\beta \mathrm{Q}_\alpha) \\ & - \alpha(b\beta - g\alpha)(l_\alpha \mathrm{P}_\beta - l_\beta \mathrm{P}_\alpha) + 2c\alpha\beta(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{Q}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{Q}_\alpha) \\ & + \beta(a\beta - f\alpha)(\mathrm{Q}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{Q}_\beta \mathrm{Q}_\alpha) - \beta(b\beta - g\alpha)(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{K}_\alpha) \end{aligned} \tag{2.29}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\rho\beta} e^\rho e_\alpha - \mathrm{F}_{\alpha\rho} e^\rho e_\beta = {} & \alpha(\alpha g + b\beta)(l_\alpha \mathrm{P}_\beta - l_\beta \mathrm{P}_\alpha) \\ & - \alpha(\alpha f + a\beta)(l_\alpha \mathrm{Q}_\beta - l_\beta \mathrm{Q}_\alpha) + d(l_\alpha \mathrm{K}_\beta - l_\beta \mathrm{K}_\alpha) \\ & - \beta(b\beta + g\alpha)(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{K}_\rho - \mathrm{P}_\beta \mathrm{K}_\alpha) + \beta(f\alpha + a\beta)(\mathrm{Q}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{Q}_\beta \mathrm{K}_\alpha) \end{aligned} \tag{2.30}$$

d'où (2.15) devient

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_{\alpha\beta} = {} & \lambda \mathrm{F}_{\alpha\beta} + \nu[- b(l_\alpha \mathrm{P}_\beta - l_\beta \mathrm{P}_\alpha) + a(l_\alpha \mathrm{Q}_\beta - l_\beta \mathrm{Q}_\alpha) \\ & - d(l_\alpha \mathrm{K}_\beta - l_\beta \mathrm{K}_\alpha) + g(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{K}_\alpha) - f(\mathrm{Q}_\alpha \mathrm{K}_\beta - \mathrm{Q}_\beta \mathrm{K}_\alpha) + c(\mathrm{P}_\alpha \mathrm{Q}_\beta - \mathrm{P}_\beta \mathrm{Q}_\alpha)] \end{aligned} \tag{2.31}$$

ce qui, d'après (2.28) donne

$$\mathrm{G}_{\alpha\beta} = \lambda \mathrm{F}_{\alpha\beta} + \nu \overset{*}{\mathrm{F}}_{\alpha\beta} \tag{2.32}$$

comme on le voulait démontrer.

3. L'ESPACE-TEMPS DE SCHWARZSCHILD. — Considérons l'espace-temps de Schwarzschild. Le ds^2 extérieur s'écrit en coordonnées polaires

$$(3.1) \qquad ds^2 = \kappa dt^2 - \frac{1}{\kappa c^2} dr^2 - \frac{r^2}{c^2}(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2)$$

où nous avons posé

$$(3.2) \qquad \kappa \equiv 1 - \frac{2\mu}{r}, \qquad \mu \equiv \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}}{c^2}$$

$\mathcal{G}$ étant la constante de gravitation, $\mathcal{M}$ la masse du corps qui crée le champ gravitationnel et c la vitesse de la lumière dans le vide. Sous la simple inspection de (3.1) on trouve

$$(3.3) \quad g_{00} = \kappa, \qquad g_{11} = -\frac{1}{\kappa c^2}, \qquad g_{22} = -\frac{r^2}{c^2}, \qquad g_{33} = -\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{c^2}$$

d'où trivialement

$$(3.4) \quad g^{00} = \kappa^{-1}, \qquad g^{11} = -\kappa c^2, \qquad g^{22} = -\frac{c^2}{r^2}, \qquad g^{33} = -\frac{c^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

Si dans (3.2) $\mathcal{M}$ n'est pas trop grand, μ est très petit (c'est notamment le cas où $\mathcal{M}$ est la masse du soleil) et les expressions où μ apparaît peuvent être développées dans une série de puissances de μ, dont il suffira de prendre les premiers termes. C'est ce que nous ferons dorénavant en arrêtant les développements aux termes d'ordre un en μ, les termes d'ordre supérieur à un étant considérés négligeables. Comme il ressortira des calculs qui suivent, cette approximation ne sera valable que pour r et θ suffisamment écartés des valeurs $r = 0$ et $\theta = \pi$ respectivement, ceci du fait que pour $r = 0$ et $\theta = \pi$ certains coefficients des développements en puissances de μ deviennent infiniment grands.

4. ONDES PLANES A L'INFINI DANS L'ESPACE-TEMPS DE SCHWARZSCHILD. — Bel et Montserrat [6] ont proposé une généralisation de la notion d'onde plane monocromatique dans l'espace-temps de Schwarzschild, dont les fronts d'onde, dans le cas d'une onde électromagnétique sont donnés, modulo $0(\mu^2)$ par la fonction d'onde S

$$(4.1) \qquad S = Et - \frac{E}{c} r \cos \theta + \mu \frac{E}{c}\left[-2 \lg \left(r \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \cos \theta \right]$$

cette fonction S paraît être la meilleure description possible d'une onde monocromatique entrante et plane à l'infini $z = +\infty$.

Les rayons de propagation associés à S viennent alors donnés, modulo $0(\mu^2)$, par le champ de vecteurs isotrope et géodésique $\vec{l}$

$$(4.2)\qquad \begin{cases} l_0 = \dfrac{\partial S}{\partial t} = E, \\ l_1 = \dfrac{\partial S}{\partial r} = -\dfrac{E}{c}\left(\cos\theta + \dfrac{2\mu}{r}\right), \\ l_2 = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = \dfrac{E}{c}\left[r \operatorname{sen}\theta + \mu\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}\theta}\right], \\ l_3 = \dfrac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

ou bien à l'aide de (3.4)

$$(4.3)\qquad \begin{cases} l^0 = E\left(1 + \dfrac{2\mu}{r}\right), \\ l^1 = cE\left[\cos\theta + \dfrac{2\mu}{r}(1-\cos\theta)\right], \\ l^2 = -\dfrac{cE}{r^2}\left[r \operatorname{sen}\theta + \mu\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}\theta}\right], \\ l^3 = 0. \end{cases}$$

Maintenant, puisque l'on a $l_\alpha = \partial_\alpha S$, de (18) (Appendice) on voit tout de suite que la rotation, ω, de la congruence $\Gamma(\vec{l})$, avec l donné par (4.2), est nulle

$$(4.4)\qquad \omega = 0$$

D'autre part, l'on trouve [7] pour la distorsion, D, de $\Gamma(\vec{l})$

$$(4.5)\qquad D = \frac{\mu c E}{r^2}\left(\cos\theta - \frac{2}{1+\cos\theta}\right)$$

la dilatation, θ, étant nulle modulo $0(\mu^2)$.

Ainsi puisque D n'est pas nulle, du théorème de Mariot-Robinson (§ 1) découle qu'on ne peut associer à $\Gamma(\vec{l})$ des solutions singulières des équations de Maxwell du vide (1.1). Par la suite nous nous proposons, donc, d'associer à $\Gamma(\vec{l})$ un champ électromagnétique singulier généralisé, à des termes en μ^2 près. C'est-à-dire nous nous proposons de construire, à cette approximation près, deux 2-formes songulières, $F_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}$, de vecteur fondamental $\vec{l}$ donné par (4.2), satisfaisant aux équations (1.9), (1.10).

5. Le champ singulier généralisé associé à $\Gamma(\vec{l})$ dans le cas où $v = 0$. — Les calculs qui suivent, aussi bien dans ce paragraphe-ci que dans le suivant, ne sont valables en général que modulo $0(\mu^2)$. Non obstant, nous ne ferons plus référence à cette limitation qu'occasionnellement, afin de ne pas trop alourdir l'expression.

Nous commençons par démontrer que $\Gamma(\vec{l})$ satisfait la condition (1.13). Pour cela faire partons de (1.13) sous la forme (1.18)

$$\dot{H}K - \dot{K}H = 2D^2\omega + P^\alpha\dot{Q}_\alpha D^2 \tag{5.1}$$

où les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ satisfont aux relations (1.7). Le vecteur $\vec{l}$ étant fixé, les relations (1.7) ne déterminent pas les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ d'une manière univoque. En fait l'un et l'autre sont définis aux transformations près

$$\vec{S} \to \vec{S}' = e^\varphi(\vec{S} + \eta\vec{l}) \qquad \left(\vec{S} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P} + i\vec{Q})\right) \tag{5.2}$$

φ étant un scalaire réel et η un scalaire complexe. Puisque (5.1) est équivalente à la relation (1.13) où les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ n'apparaissent nullement, la relation (5.1) doit être invariante vis-à-vis des transformations (5.2), ce qui n'est pas difficile de vérifier directement.

Prenons comme des vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$, les deux vecteurs [7]

$$\left\{\begin{aligned} &P^0 = 0, \quad P^1 = 0, \quad P^2 = 0, \quad P^3 = \frac{c}{r \operatorname{sen} \theta}, \\ &Q^0 = -\frac{c}{r}\frac{l_2}{c\kappa^2 l_1 + l_0}, \quad Q^1 = -\frac{c^2}{r}\frac{\kappa^2 l_2}{c\kappa^2 l_1 + l_0}, \quad Q^2 = \frac{e}{r}, \quad Q^3 = 0, \end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

On vérifie que ces deux vecteurs satisfont effectivement aux conditions (1.7). D'autre part ils ont été choisis de manière à avoir

$$H = 0 \tag{5.4}$$

avec H défini par (1.19).

Maintenant puisque, comme il a été déjà signalé, $\omega = 0$ (voir (4.4)), (5.1) s'écrit du fait de (5.4)

$$D^2P^\alpha\dot{Q}_\alpha = 0 \tag{5.5}$$

ou bien puisque $D \neq 0$

$$P^\alpha\dot{Q}_\alpha = 0 \tag{5.6}$$

Avant de démontrer que cette relation est effectivement satisfaite, écrivons les symboles de Christoffel non nuls de l'espace-temps de Schwarzschild [7]

$$
(5.7)\quad \begin{cases}
\Gamma_1{}^1{}_1 = -\dfrac{\mu}{r^2}\dfrac{1}{\kappa^2}, & \Gamma_2{}^1{}_2 = -r\kappa^2, \qquad \Gamma_3{}^1{}_3 = -r\kappa^2 \operatorname{sen}\theta \\[2mm]
\Gamma_0{}^1{}_0 = \dfrac{\mu}{r^2} c^2\kappa^2, & \Gamma_1{}^2{}_2 = \Gamma_2{}^2{}_1 = \Gamma_1{}^3{}_3 = \Gamma_3{}^3{}_1 = \dfrac{1}{r} \\[2mm]
\Gamma_1{}^0{}_0 = \Gamma_0{}^0{}_1 = \dfrac{\mu}{r^2}\cdot\dfrac{1}{k^2}, & \Gamma_2{}^3{}_3 = \Gamma_3{}^3{}_2 = \operatorname{cotg}\theta, \quad \Gamma_3{}^2{}_3 = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta
\end{cases}
$$

D'autre part, du fait de l'orthogonalité de $\vec{\mathrm{P}}$ et $\vec{\mathrm{Q}}$, l'on a

$$(5.8)\qquad \mathrm{P}^\alpha\dot{\mathrm{Q}}_\alpha = -\dot{\mathrm{P}}^\alpha\mathrm{Q}_\alpha$$

et si, compte tenu de (4.3), (5.3), (5.7), on calcule $\dot{\mathrm{P}}^\alpha$ on trouve $\dot{\mathrm{P}}^\alpha = 0$ et partant $\dot{\mathrm{P}}^\alpha\mathrm{Q}_\alpha = 0$, comme on le voulait démontrer.

Ainsi $\Gamma(\vec{l})$ est telle qu'elle satisfait la relation (1.13) et du théorème II il résulte alors que nous pouvons trouver λ, A, $\vec{\mathrm{P}}$, $\vec{\mathrm{Q}}$, ces deux vecteurs satisfaisant aux relations d'orthogonalité (1.7), tels que l'on ait

$$(5.9)\qquad \tilde{\mathrm{J}}^\beta \equiv \nabla_\alpha \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha[\mathrm{A}(l^\alpha\mathrm{Q}^\beta - l^\beta\mathrm{Q}^\alpha)] = 0$$

$$(5.10)\qquad \mathrm{J}^\beta = \nabla_\alpha(\lambda\mathrm{F}^{\alpha\beta}) = \nabla_\alpha[\lambda\mathrm{A}(l^\alpha\mathrm{P}^\beta - l^\beta\mathrm{Q}^\alpha)] = 0$$

Compte tenu du fait que nous avons d'une part $\omega = 0$ et d'autre part $\theta = 0$ (modulo $0(\mu^2)$), on trouve que le système (5.9), (5.10) est équivalent au système

$$(5.11)\qquad \mathrm{A}^{-1}\vec{l}\cdot\vec{\tilde{\mathrm{J}}} = l^\alpha\dot{\mathrm{Q}}_\alpha = 0$$

$$(5.12)\qquad (\lambda\mathrm{A})^{-1}\vec{l}\cdot\vec{\mathrm{J}} = l^\alpha\dot{\mathrm{P}}_\alpha = 0$$

$$(5.13)\qquad -\frac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}(\vec{\tilde{\mathrm{J}}}\cdot\vec{\mathrm{P}} + \lambda^{-1}\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{\mathrm{Q}}) = \mathrm{H} = 0$$

$$(5.14)\qquad -\mathrm{A}^{-1}\vec{\tilde{\mathrm{J}}}\cdot\vec{\mathrm{P}} = \mathrm{Q}^\alpha\dot{\mathrm{P}}_\alpha = 0$$

$$(5.15)\qquad -\mathrm{A}^{-1}(\vec{\tilde{\mathrm{J}}}\cdot\vec{\mathrm{Q}} + \lambda^{-1}\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{\mathrm{P}}) = l^\rho\partial_\rho \lg(\lambda\mathrm{A}^2) = 0$$

$$(5.16)\qquad \mathrm{A}^{-1}(\vec{\tilde{\mathrm{J}}}\cdot\vec{\mathrm{Q}} - \lambda^{-1}\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{\mathrm{P}}) = \lambda^{-1}\dot{\lambda} + 2\mathrm{K} = 0$$

$$(5.17)\qquad \mathrm{A}^{-1}\vec{\tilde{\mathrm{J}}}\cdot\vec{\mathrm{K}} = -\mathrm{Q}^\alpha\partial_\alpha \lg\mathrm{A} + \mathrm{K}^\alpha\dot{\mathrm{Q}}_\alpha - \mathrm{Q}^\alpha\mathrm{K}^\beta\nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha\mathrm{Q}^\alpha = 0$$

$$(5.18)\qquad \mathrm{A}^{-1}\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{\mathrm{K}} = -\mathrm{P}^\alpha\partial_\alpha\lambda - \lambda\mathrm{P}^\alpha\partial_\alpha \lg\mathrm{A} + \lambda(\mathrm{K}^\alpha\dot{\mathrm{P}}_\alpha - \mathrm{P}^\alpha\mathrm{K}^\beta\nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha\mathrm{P}^\alpha) = 0$$

Dans (5.17), (5.18) $\vec{\mathrm{K}}$ est un vecteur isotrope et tel que

$$(5.19)\qquad \vec{\mathrm{K}}\cdot\vec{\mathrm{P}} = \vec{\mathrm{K}}\cdot\vec{\mathrm{Q}} = 0, \qquad \vec{\mathrm{K}}\cdot\vec{l} = 1$$

Quant aux scalaires H, K, ils ont été définis dans (1.19).

Maintenant (5.11), (5.12) sont satisfaites du fait que $\Gamma(\vec{l})$ est géodésique et (5.13), (5.14) seront satisfaites aussi du moment que nous avons pris pour $\vec{P}$, $\vec{Q}$, les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ de (5.3) (voir (5.4), (5.6)).

D'autre part (5.16), (5.15) s'écrivent encore

$$\dot{\lambda} = -2\lambda K, \tag{5.20}$$

$$\dot{A} = AK \tag{5.21}$$

Calculons K. De

$$\theta = -\frac{1}{2}(P^\alpha P^\beta + Q^\alpha Q^\beta)\nabla_\alpha l_\beta = 0 \tag{5.22}$$

$$K = \frac{1}{2}(P^\alpha P^\beta - Q^\alpha Q^\beta)\nabla_\alpha l^\beta \tag{5.23}$$

on trouve, compte tenu de (5.3),

$$K = P^\alpha P^\beta \nabla_\alpha l_\beta = (P^3)^2 \nabla_3 l_3 \tag{5.24}$$

Le calcul donne pour $\nabla_3 l_3$

$$\nabla_3 l_3 = -\mu\frac{E}{c}(2 - 2\cos\theta - \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta) \tag{5.25}$$

d'où

$$K = \frac{c^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(-\mu\frac{E}{c}\right)(2 - \cos\theta - \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) \tag{5.26}$$

$$= -\frac{\mu c E}{r^2}\left(\frac{2}{1+\cos\theta} - \cos\theta\right)$$

Calculons maintenant Q^α en substituant (4.2) dans (5.3). On obtient après certains calculs

$$\left\{\begin{aligned} Q^0 &= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} - \mu\frac{3+\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}, \\ Q^1 &= -\frac{c\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} - \mu\frac{c(1-\cos\theta)}{r\operatorname{sen}\theta} \\ Q^2 &= \frac{c}{r}, \\ Q^3 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{5.27}$$

Passons au calcul des expressions $K^\alpha\dot{Q}_\alpha$, $Q^\alpha K^\beta\nabla_\alpha l_\beta$, $\nabla_\alpha Q^\alpha$ qui apparaissent dans (5.17). Tout d'abord, de (5.12), (5.14) et du fait que l'on a $\vec{Q}^2 = -1$, $\vec{P}\cdot\vec{Q} = 0$, l'on trouve

$$\dot{Q}^\alpha = \dot{Q}^\rho K_\rho \cdot l^\alpha \tag{5.28}$$

ou bien pour $\alpha = 2$

(5.29) $$\dot{Q}^2 = K^\alpha \dot{Q}_\alpha \cdot l^2$$

Mais, compte tenu de (5.7),

(5.30) $$\dot{Q}^2 = l^2 \nabla_2 Q^2 = l^2 \Gamma_2{}^2{}_1 Q^1$$

d'où

(5.31) $$K^\alpha \dot{Q}_\alpha = \Gamma_2{}^2{}_1 Q^1$$

D'autre part, du fait que $\omega = H = 0$, on a

(5.32) $$Q^\alpha \nabla_\alpha l^\beta = - Q^\alpha Q^\rho \nabla_\alpha l_\rho \cdot Q^\beta + Q^\alpha K^\rho \nabla_\alpha l_\rho \cdot l^\beta$$

d'où, en vertu de (5.22), (5.23),

(5.33) $$Q^\alpha \nabla_\alpha l^\beta = K Q^\beta + Q^\alpha K^\rho \nabla_\alpha l_\rho \cdot l^\beta$$

mais pour $\beta = 2$ on a d'une part

(5.34) $$Q^\alpha \nabla_\alpha l^2 = K Q^2 + Q^\alpha K^\rho \nabla_\alpha l_\rho \cdot l^2$$

et d'autre part

(5.35) $$Q^\alpha \nabla_\alpha l^2 = g^{22}(Q^0 \nabla_0 l_2 + Q^1 \nabla_1 l_2 + Q^2 \nabla_2 l_2)$$

Le calcul donne

(5.36) $$\nabla_0 l_2 = - \Gamma_0{}^\alpha{}_2 l_\alpha = 0$$

et (5.35) se ramène donc à

(5.37) $$Q^\alpha \nabla_\alpha l^2 = g^{22}(Q^1 \nabla_1 l^2 + Q^2 \nabla_2 l^2)$$

Maintenant de (5.34), (5.37)

(5.38) $$Q^\alpha K^\beta \nabla_\alpha l_\beta = \frac{Q^1 \nabla_1 l_2 + Q^2 \nabla_2 l_2 - (g^{22})^{-1} K Q^2}{l_2}$$

Finalement pour $\nabla_\alpha Q^\alpha$ l'on a

(5.39) $$\begin{aligned} \nabla_\alpha Q^\alpha &= \Gamma_0{}^0{}_\alpha Q^\alpha + \partial_r Q^1 + \Gamma_1{}^1{}_\alpha Q^\alpha + \Gamma_2{}^2{}_\alpha Q^\alpha + \Gamma_3{}^3{}_\alpha Q^\alpha \\ &= \Gamma_0{}^0{}_1 Q^1 + \Gamma_1{}^1{}_1 Q^1 + \Gamma_2{}^2{}_1 Q^1 + \Gamma_3{}^3{}_1 Q^1 + \Gamma_3{}^3{}_2 Q^2 + \partial_r Q^1 \end{aligned}$$

Ainsi on aura de (5.31), (5.38), (5.39)

(5.40) $$\begin{aligned} K_\alpha \dot{Q}^\alpha - Q^\alpha K^\beta \nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha Q^\alpha &= - \frac{Q^1 \nabla_1 l_2 + Q^2 \nabla_2 l_2}{l_2} + \frac{K Q^2}{g^{22} l_2} - \Gamma_3{}^3{}_1 Q^1 - \Gamma_3{}^3{}_2 Q^2 - \partial_r Q^1 \\ &= - Q^1 \left(\frac{\nabla_1 l_2}{l_2} + \Gamma_3{}^3{}_1 \right) - \frac{Q^2 \nabla_2 l_2}{l_2} + \frac{K Q^2}{g^{22} l_2} - \Gamma_3{}^3{}_2 Q^2 - \partial_r Q^1 \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (3.4), (4.2), (5.7), (5.26), (5.27), on obtient

$$(5.41)\qquad K_\alpha\dot{Q}^\alpha - Q^\alpha K^\beta\nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha Q^\alpha = \frac{c}{r \text{ sen } \theta} + \frac{\mu c}{r^2}\frac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}$$

Le calcul de l'expression

$$(5.42)\qquad K_\alpha\dot{P}^\alpha - P^\alpha K^\beta\nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha P^\alpha$$

qui apparaît dans (5.18) s'avère beaucoup plus simple. Compte tenu de (4.2), (4.3), (5.3) et (5.7), on trouve tout de suite

$$(5.43)\qquad K_\alpha\dot{P}^\alpha = P^\alpha K^\beta\nabla_\alpha l_\beta = \nabla_\alpha P^\alpha = 0$$

Ainsi, compte tenu de (5.41), (5.43), les équations (5.17), (5.18) s'écrivent, respectivement

$$(5.44)\qquad Q^\alpha\partial_\alpha A = \left(\frac{c}{r \text{ sen } \theta} + \frac{\mu}{r^2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right)A$$

$$(5.45)\qquad P^\alpha\partial_\alpha(\lambda A) = 0$$

où (5.45) s'écrit encore en vertu de (5.3)

$$(5.46)\qquad \partial\varphi(\lambda A) = 0$$

En résumé nous devons déterminer λ, A de manière à satisfaire aux quatre équations (5.20), (5.21), (5.44) et (5.45)

$$(5.47)\qquad \dot{\lambda} = -2\lambda K \quad ,$$

$$(5.48)\qquad \dot{A} = AK$$

$$(5.49)\qquad Q^\alpha\partial_\alpha A = \left(\frac{c}{r \text{ sen } \theta} + \frac{\mu c}{r^2}\frac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right)A \quad ,$$

$$(5.50)\qquad \partial\varphi(\lambda A) = 0$$

avec K et Q^α données par (5.26), (5.27) respectivement.

Maintenant développons λ, A en puissances de μ. Modulo $0(\mu^2)$ l'on aura

$$(5.51)\qquad \lambda = \overset{(0)}{\lambda} + \mu\overset{(1)}{\lambda} \quad ,$$

$$(5.52)\qquad A = \overset{(0)}{A} + \mu\overset{(1)}{A}$$

Nous prendrons $\overset{(0)}{\lambda} = 1$.

D'une part, cette valeur de $\overset{(0)}{\lambda}$ satisfait modulo $0(\mu)$ à l'équation (5.47) et d'autre part avec cette valeur de $\overset{(0)}{\lambda}$ l'on a pour (5.10), modulo $0(\mu)$,

$$(5.54)\qquad \nabla_\alpha\overset{(0)}{F}{}^{\alpha\beta} = 0$$

c'est-à-dire qu'avec la valeur de $\overset{(0)}{\lambda}$ choisie les équations (5.9), (5.10) se ramènent modulo $0(\mu)$ aux équations de Maxwell du vide, ce qui se raccorde très bien avec le théorème de Mariot-Robinson (voir § 1), puisque d'après (4.5) on a $D = 0$ modulo $0(\mu)$.

Avec (5.51), (5.53), l'équation (5.47) devient

$$\mu l^\alpha \partial_\alpha \overset{(1)}{\lambda} = -2K \tag{5.55}$$

ce qui, compte tenu de (4.3), (5.26), donne

$$\partial_t \overset{(1)}{\lambda} + c\cos\theta\partial_r \overset{(1)}{\lambda} - \frac{c}{r}\operatorname{sen}\theta\partial_\theta \overset{(1)}{\lambda} = \frac{2c}{r^2}\left(\frac{2}{1+\cos\theta} - \cos\theta\right) \tag{5.56}$$

et si nous supposons que λ ne dépend pas de t

$$\cos\theta\partial_r \overset{(1)}{\lambda} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\partial_\theta \overset{(1)}{\lambda} = \frac{2}{r^2}\left(\frac{2}{1+\cos\theta} - \cos\theta\right) \tag{5.57}$$

Une des solutions de cette équation différentielle est (¹)

$$\overset{(1)}{\lambda} = \frac{2}{r}\,\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1} \tag{5.58}$$

Nous l'avons choisie parce qu'elle a la particularité de s'annuler à l'infini $r \to \infty$ pour n'importe quelle direction du plan r, θ, sauf pour $\theta = \pi$ et aussi dans la demi-droite $\theta = 0$, c'est-à-dire qu'elle s'annule partout où D s'annule (voir (4.5)).

D'autre part, compte tenu de (4.3), (5.26), (5.27), les équations (5.48), (5.49) s'écrivent

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{2}{r}\mu\right)\partial_t A + c\left[\cos\theta + \frac{2\mu}{r}(1-\cos\theta)\right]\partial_r A \\ - \frac{c}{r^2}\left[r\operatorname{sen}\theta + \mu\frac{(1-\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}\theta}\right]\partial_\theta A = \mu\frac{cA}{r^2}\left(\cos\theta - \frac{2}{1+\cos\theta}\right)\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} + \mu\frac{3+\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\right)\partial_t A - c\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} + \mu\frac{1-\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\right)\partial_r A \\ + \frac{c}{r}\partial_\theta A = A\left(\frac{c}{r\operatorname{sen}\theta} + 2\frac{\mu c}{r^2}\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)\end{aligned} \tag{5.60}$$

(¹) Nous devons cette valeur de $\overset{(1)}{\lambda}$ à A. Montserrat.

Modulo $0(\mu)$ les équations (5.59), (5.60) sont équivalentes respectivement à

$$\partial_t \overset{(0)}{A} + c\cos\theta\,\partial_r \overset{(0)}{A} - \frac{c\,\mathrm{sen}\,\theta}{r}\,\partial_\theta \overset{(0)}{A} = 0 \tag{5.61}$$

$$-\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\,\partial_t \overset{(0)}{A} - c\,\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\,\partial_r \overset{(0)}{A} + \frac{c}{r}\,\partial_\theta \overset{(0)}{A} - \frac{c}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\,\overset{(0)}{A} = 0 \tag{5.62}$$

L'intégration de (5.61) nous conduit au système

$$dt = \frac{dr}{c\cos\theta} = \frac{r d\theta}{-c\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{d\overset{(0)}{A}}{0} \tag{5.63}$$

dont il s'agit de trouver trois intégrales premières. On voit aisément que

$$\overset{(0)}{A} = c_1 \quad , \quad r\,\mathrm{sen}\,\theta = u \quad , \quad \mathrm{E}t - \mathrm{E}\frac{r\cos\theta}{c} = \mathrm{v} \tag{5.64}$$

avec c_1, u, v, trois constantes, sont trois intégrales premières de (5.63). Dès lors la solution générale de (5.61) sera

$$\overset{(0)}{A} = f\left(r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \mathrm{E}t - \mathrm{E}\frac{r\cos\theta}{c},\ \varphi\right) \tag{5.65}$$

c'est-à-dire une fonction quelconque de u, v, φ. Or de (5.51), (5.53), (5.58), il vient $\partial_\varphi \lambda = 0$, d'où (5.50) devient

$$\partial_\varphi A = 0 \tag{5.66}$$

Par conséquent

$$\overset{(0)}{A} = f\left(r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \mathrm{E}t - \mathrm{E}\frac{r\cos\theta}{c}\right) \tag{5.67}$$

Portant cette expression de $\overset{(0)}{A}$ dans (5.62)

$$-\mathrm{E}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\,\partial_{\mathrm{v}} f - \frac{c\,\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta.\partial_u f - \frac{\mathrm{E}\cos\theta}{c}\cdot\partial_{\mathrm{v}} f\right) + \frac{c}{r}\left(r\cos\theta.\partial_u f + \frac{\mathrm{E}r\,\mathrm{sen}\,\theta}{c}\cdot\partial_{\mathrm{v}} f\right) - \frac{c}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} f = 0 \tag{5.68}$$

d'où l'on trouve

$$\partial_u f = -\frac{f}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} = -\frac{f}{u} \tag{5.69}$$

équation différentielle dont la solution est de la forme

$$f = c_2 u^{-1} \tag{5.71}$$

où c_2 est une constante d'intégration.

Par conséquent

$$\overset{(0)}{A} = (r \operatorname{sen} \theta)^{-1} f\left(Et - E\frac{r\cos\theta}{c}\right) \tag{5.72}$$

avec f une fonction arbitraire.

Nous choisirons f comme étant la fonction cosinus et ainsi nous aurons

$$\overset{(0)}{A} = \frac{\cos\left(Et - \dfrac{Er\cos\theta}{c}\right)}{r \operatorname{sen}\theta} \tag{5.73}$$

Il nous reste encore le calcul de $\overset{(1)}{A}$. Revenons aux équations (5.48), (5.49), que nous écrirons sous la forme

$$(\overset{(0)}{l^\alpha} + \mu \overset{(1)}{l^\alpha})\partial_\alpha(\overset{(0)}{A} + \mu\overset{(1)}{A}) = \mu \overset{(1)}{K}(\overset{(0)}{A} + \mu\overset{(1)}{A}) \tag{5.74}$$

$$(\overset{(0)}{Q^\alpha} + \mu\overset{(1)}{Q^\alpha})\partial_\alpha(\overset{(0)}{A} + \mu\overset{(1)}{A}) = \left(\frac{c}{r\operatorname{sen}\theta} + \frac{\mu c}{r^2}\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)(\overset{(0)}{A} + \mu\overset{(1)}{A}) \tag{5.75}$$

système d'équations dont la partie d'ordre un en μ donne

$$\overset{(0)}{l^\alpha}\partial_\alpha\overset{(1)}{A} = \overset{(0)}{A}\overset{(1)}{K} - \overset{(1)}{l^\alpha}\partial_\alpha\overset{(0)}{A} \tag{5.76}$$

$$\overset{(0)}{Q^\alpha}\partial_\alpha\overset{(1)}{A} - \frac{c}{r\operatorname{sen}\theta}\overset{(1)}{A} = -\overset{(1)}{Q^\alpha}\partial_\alpha\overset{(0)}{A} + \frac{c}{r^2}\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\overset{(0)}{A} \tag{5.77}$$

où il faudra calculer les expressions $\overset{(1)}{l^\alpha}\partial_\alpha\overset{(0)}{A}$ et $\overset{(1)}{Q^\alpha}\partial_\alpha\overset{(0)}{A}$.

Compte tenu de (4.3), (15.27), on obtient

$$\overset{(1)}{l^\alpha}\partial_\alpha\overset{(0)}{A} = -\frac{E^2}{r}(1+\cos^2\theta)\frac{\operatorname{sen} v}{u} + \frac{cE}{r^2}\left(\cos\theta - \frac{2}{1+\cos\theta}\right)\frac{\cos v}{u} \tag{5.78}$$

$$\overset{(1)}{Q^\alpha}\partial_\alpha\overset{(0)}{A} = E(3+\cos\theta)\frac{\operatorname{sen} v}{u^2} + \frac{c(1-\cos\theta)}{r^2\operatorname{sen}\theta}\overset{(0)}{A} \tag{5.79}$$

d'où (5.76), (5.77) deviennent respectivement

$$\overset{(0)}{l^\alpha}\partial_\alpha\overset{(1)}{A} = \frac{E^2}{r}(1+\cos^2\theta)\frac{\operatorname{sen} v}{u} \tag{5.80}$$

$$(5.81) \qquad \overset{(0)}{Q^{\alpha}}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{A} - \frac{c}{r \operatorname{sen} \theta}\overset{(1)}{A} = -\,E(3 + \cos^2\theta)\frac{\operatorname{sen} v}{u^2}$$

dont la première s'écrit explicitement, compte tenu de (4.3),

$$(5.82) \qquad \partial_t\overset{(1)}{A} + c\cos\theta\,\partial_r\overset{(1)}{A} - \frac{c \operatorname{sen}\theta}{r}\partial_\theta\overset{(1)}{A} = \frac{E(1+\cos^2\theta)}{r}\frac{\operatorname{sen} v}{u}$$

Le système associé à cette équation différentielle

$$(5.83) \qquad dt = \frac{dr}{c\cos\theta} = \frac{d\theta}{-c\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}} = \frac{d\overset{(1)}{A}}{\dfrac{E}{r}(1+\cos^2\theta)\dfrac{\operatorname{sen} v}{u}}$$

admet les trois intégrales premières

$$(5.84) \qquad r\operatorname{sen}\theta = u, \qquad Et - E\frac{r\cos\theta}{c} = v,$$
$$\overset{(1)}{A} + \frac{E}{c}\frac{\operatorname{sen} v}{u}\left(2\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right) = c_3$$

avec u, v, c_3, trois constantes.

L'intégrale générale de (5.82) est donc de la forme

$$(5.85) \qquad f(u, v, c_3) = 0 \qquad f \equiv \text{fonction arbitraire}$$

d'où

$$(5.86) \qquad \overset{(1)}{A} = f(u, v) - \frac{E}{c}\frac{\operatorname{sen} v}{u}\left(2\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right), \qquad f \equiv \text{fonction arbitraire}$$

Maintenant nous allons substituer cette expression de $\overset{(1)}{A}$ dans (5.81). Tous calculs faits, on trouve

$$(5.87) \qquad \overset{(0)}{Q^{\alpha}}\partial_{\alpha}f - \frac{cf}{u} + 2E\frac{\operatorname{sen} v}{u^2} = 0$$

et en explicitant $\overset{(0)}{Q^{\alpha}}\partial_{\alpha}f$

$$(5.88) \qquad \partial_u f + \frac{f}{u} - \frac{2E}{c}\frac{\operatorname{sen} v}{u^2} = 0$$

équation différentielle dont l'intégrale générale est de la forme

$$(5.89) \qquad f(u, v) = \frac{2E}{c}\frac{\operatorname{sen} v}{u}(\lg u + b(v))$$

où par $b(v)$ nous avons désigné une fonction arbitraire de v. (5.86) devient donc

$$(5.90)\quad \overset{(1)}{A} = \frac{E}{c}\frac{\operatorname{sen} v}{u}\left[2 \lg\left(r \cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta + 2\lg 2 + 2b(v)\right]$$

et en faisant le choix $b = -\lg 2$

$$(5.91)\quad \overset{(1)}{A} = \frac{E}{c}\frac{\operatorname{sen} v}{u}\left[2 \lg\left(r \cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta\right]$$

En résumé nous avons obtenu une solution des équations (5.9), (5.10), caractérisée par les résultats (5.3), (5.27), (5.53), (5.58), (5.73), (5.91) que nous résumons par la suite

$$(5.92)\quad P^\alpha = \left(0, 0, 0, \frac{c}{r \operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$(5.93)\quad Q^\alpha = \left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} - \mu\frac{3+\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta},\right.$$
$$\left. -\frac{c\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} - \mu\frac{c(1-\cos\theta)}{r\operatorname{sen}\theta}, \frac{c}{r}, 0\right)$$

$$(5.94)\quad \lambda = 1 + \frac{2\mu}{r}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}$$

$$(5.95)\quad A = \frac{\cos v}{u} + \mu\frac{E}{c}\frac{\operatorname{sen} v}{u}\left[2\lg\left(r\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta\right]$$

avec

$$u = r\operatorname{sen}\theta, \qquad v = Et - \frac{Er\cos\theta}{c}.$$

Maintenant, modulo $0(\mu^2)$, l'on trouve

$$(5.96)\quad \cos S = \cos(\overset{(0)}{S} + \mu\overset{(1)}{S}) = \cos\overset{(0)}{S}\cos(\mu\overset{(1)}{S}) - \operatorname{sen}\overset{(0)}{S}\operatorname{sen}(\mu\overset{(1)}{S})$$

et, compte tenu de (4.1), (5.95), on obtient la relation intéressante

$$(5.97)\quad A = \frac{\cos S}{u}$$

6. Le champ singulier généralisé associé a $\Gamma(\vec{l})$ dans le cas où $v \neq 0$. — Dans le paragraphe précédant nous avons construit un champ singulier généralisé associé à $\Gamma(\vec{l})$, $\vec{l}$ donné par (4.2), ce champ s'exprimant à l'aide de deux 2-formes singulières de vecteur fondamental $\vec{l}$, $\overset{*}{F}_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$

$$(6.1)\quad \overset{*}{F}_{\alpha\beta} = A(l_\alpha Q_\beta - l_\beta Q_\alpha) \quad , \quad G_{\alpha\beta} \equiv \lambda F_{\alpha\beta} = \lambda A(l_\alpha P_\beta - l_\beta P_\alpha)$$

avec $\vec{P}$, $\vec{Q}$ donnés par (5.92), (5.93). De (2.1) il vient alors, en choisissant $\vec{e}$ de manière à avoir $\vec{e} \cdot \vec{P} = 0$

$$E_\beta = A(e^\alpha l_\alpha)P_\beta \tag{6.2}$$

c'est-à-dire $\vec{P}$ a la direction du champ électrique associé à $\vec{e}$ et les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ décrivent ainsi, en quelque sorte, l'état de polarisation du champ électromagnétique. Dès lors (5.92), (5.93) révèlent un état de polarisation du champ (6.1) assez particulier. Par la suite nous allons construire, modulo $0(\mu^2)$, un nouveau champ singulier généralisé associé à $\Gamma(\vec{l})$

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = A(l^\alpha Y^\beta - l^\beta Y^\alpha) \tag{6.3}$$

$$G^{\alpha\beta} = \lambda F^{\alpha\beta} + \nu \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} \qquad (F^{\alpha\beta} = A(l^\alpha X^\beta - l^\beta X^\alpha)) \tag{6.4}$$

dont l'état de polarisation à l'infini $z \to +\infty$ soit le même partout. Plus précisément, si $(t, x, y, z) \equiv (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ sont les coordonnées déduites des $(t, r, \theta, \varphi) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ par les formules de transformation

$$\begin{aligned} x^{0'} &= x^0 \quad , & x^{1'} &= x^1 \operatorname{sen} x^2 \cos x^3 \quad , \\ x^{2'} &= x^1 \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen} x^3 \quad , & x^{3'} &= x^1 \cos x^2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

on doit avoir $\vec{X}$, $\vec{Y}$ indépendants des coordonnées x, y à l'infini $z \to +\infty$.

Nous allons commencer par construire deux tels vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$ à partir des vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ donnés par (5.92), (5.93) par le biais de deux transformations successives qui seront équivalentes à une transformation de la forme (5.2), ce qui garantira automatiquement pour $\vec{X}$, $\vec{Y}$ les relations d'orthogonalité nécessaires (voir (1.7)).

Considérons les deux vecteurs $\vec{M}$, $\vec{N}$

$$\vec{M} \equiv \vec{P} \quad , \quad \vec{N} \equiv \vec{Q} + h\vec{l} \tag{6.6}$$

où h est un scalaire tel que l'on a

$$Q^0 + hl^0 = 0 \tag{6.7}$$

Compte tenu de (4.2), (5.92), (5.93)

$$M^\alpha = \left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{c}{r \operatorname{sen} \theta}\right) \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} N^\alpha = \Bigg(0,\ &- c \operatorname{sen} \theta + \mu \frac{c}{r} \frac{(1 - \cos \theta)(3 + \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta}, \\ &- \frac{c}{r} \cos \theta - \frac{2\mu c}{r^2}(1 - \cos \theta),\ 0\Bigg) \end{aligned} \tag{6.9}$$

Maintenant, si nous désignons pour $M^{\alpha'}$, $N^{\alpha'}$ les composantes des vecteurs $\vec{M}$, $\vec{N}$ dans le repère naturel associé aux coordonnées $x^{\alpha'}$

(6.10) $$M^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\beta} M^{\beta} \quad , \quad N^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\beta} N^{\beta}$$

où $A^{\alpha'}_{\beta}$ est la matrix de transformation associée à (6.5), c'est-à-dire

(6.11) $$\begin{cases} A^{0'}_0 = 1 \quad A^{0'}_1 = 0 \quad A^{0'}_2 = 0 \quad A^{0'}_3 = 0 \\ A^{1'}_0 = 0 \quad A^{1'}_1 = \operatorname{sen} X^2 \cos X^3 \quad A^{1'}_2 = x^1 \cos x^2 \cos x^3 \quad A^{1'}_3 = - x^1 \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen} x^3 \\ A^{2'}_0 = 0 \quad A^{2'}_1 = \operatorname{sen} X^2 \operatorname{sen} X^3 \quad A^{2'}_2 = x^1 \cos x^2 \operatorname{sen} x^3 \quad A^{2'}_3 = x^1 \operatorname{sen} x^2 \cos x^3 \\ A^{3'}_0 = 0 \quad A^{3'}_1 = \cos X^2 \quad A^{3'}_2 = - x^1 \operatorname{sen} x^2 \quad A^{3'}_3 = 0 \end{cases}$$

de (6.10), (6.11)

(6.12) $$M^{\alpha'} = (0, - c \operatorname{sen} \varphi, c \cos \varphi, 0)$$

(6.13) $$\begin{cases} N^{0'} = 0, \\ N^{1'} = N^1 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + N^2 r \cos \theta \cos \varphi \\ N^{2'} = N^1 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + N^2 r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ N^{3'} = N^1 \cos \theta - N^2 r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

d'où

(6.14) $$(M^{\alpha'})_{\infty} \equiv \lim_{z \to +\infty} M^{\alpha'} = M^{\alpha'} = (0, - c \operatorname{sen} \varphi, c \cos \varphi, 0)$$

(6.15) $$(N^{\alpha'})_{\infty} \equiv \lim_{z \to +\infty} N^{\alpha'} = (0, - c \cos \varphi, - c \operatorname{sen} \varphi, 0)$$

Considérons les deux vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$

(6.16) $$\vec{X} \equiv \vec{M} \cos \gamma - \vec{N} \operatorname{sen} \gamma \quad , \quad \vec{Y} \equiv \vec{M} \operatorname{sen} \gamma + \vec{N} \cos \gamma$$

où γ est tel que l'on a

(6.18) $$\lim_{z \to +\infty} \gamma = \varphi$$

L'on a alors

(6.19) $$(X^{\alpha'})_{\infty} = (0, 0, c, 0)$$

(6.20) $$(Y^{\alpha'})_{\infty} = (0, - c, 0, 0)$$

c'est-à-dire, l'infini $z = + \infty$, les deux vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$ définis par (6.16), (6.17) ne dépendant pas de x, y.

Par la suite, nous allons déterminer d'une part $\vec{X}$, $\vec{Y}$, donnés par (6.16), (6.17) (c'est-à-dire γ) et d'autre part A, λ, ν, de manière à ce que le système d'équations

$$(6.21) \qquad \tilde{J}^{\beta} \equiv \nabla_{\alpha}\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad (F^{\alpha\beta} = A(l^{\alpha}X^{\beta} - l^{\beta}X^{\alpha}))$$
$$(6.22) \qquad J^{\beta} \equiv \nabla_{\alpha}(\lambda F^{\alpha\beta} + \nu\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}) = 0$$

Nous procédons maintenant d'une manière analogue à comme il a été fait pour obtenir le système (5.11)-(5.18). On trouve que le système (6.21), (6.22) est équivalent au système

$$(6.23) \qquad l^{\alpha}\dot{X}_{\alpha} = l^{\alpha}\dot{Y}_{\alpha} = 0$$
$$(6.24) \qquad \lambda^{-1}\dot{\nu} + 2H(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$$
$$(6.25) \qquad X^{\alpha}\dot{Y}_{\alpha} - H(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$$
$$(6.26) \qquad l^{\rho}\partial_{\rho} \lg (\lambda A^2) = 0$$
$$(6.27) \qquad \lambda^{-1}\dot{\lambda} + 2K(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$$
$$(6.28) \qquad Y^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg A + \nabla_{\alpha}Y^{\alpha} + Y^{\alpha}C^{\beta}\nabla_{\alpha}l_{\beta} - C^{\alpha}\dot{Y}_{\alpha} = 0$$
$$(6.29) \qquad X^{\alpha}\partial_{\alpha}\lambda + Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\nu + \lambda X^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg A + \lambda(\nabla_{\alpha}X^{\alpha} + X^{\alpha}C^{\beta}\nabla_{\alpha}l_{\beta} - C^{\alpha}\dot{X}_{\alpha}) = 0$$

Dans (6.28), (6.29), $\vec{C}$ est un vecteur isotrope tel que

$$(6.30) \qquad \vec{C}\cdot\vec{X} = \vec{C}\cdot\vec{Y} = 0 \quad , \quad \vec{C}\cdot\vec{l} = 1$$

Pour $H(\vec{X}, \vec{Y})$, $K(\vec{X}, \vec{Y})$ valent les expressions

$$(6.31) \qquad H(\vec{X}, \vec{Y}) \equiv \frac{1}{2}(X^{\alpha}Y^{\beta} - X^{\beta}Y^{\alpha})\nabla_{\alpha}l_{\beta}, \quad K(\vec{X}, \vec{Y}) \equiv \frac{1}{2}(X^{\alpha}X^{\beta} - Y^{\alpha}Y^{\beta})\nabla_{\alpha}l_{\beta}$$

Les équations (6.23) expriment le caractère géodésique de l. Elles sont ainsi satisfaites automatiquement.

Maintenant, compte tenu de (6.16), (6.17), (6.6),

$$(6.32) \qquad H(\vec{X}, \vec{Y}) = K \text{ sen } 2\gamma + H \cos 2\gamma$$
$$(6.33) \qquad K(\vec{X}, \vec{Y}) = -H \text{ sen } 2\gamma + K \cos 2\gamma$$

où pour H, K valent des expressions semblables à celles de (6.31), mais avec les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ de (5.92), (5.93) prenant la place des vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$ respectivement.

Compte tenu de (5.4), les expressions (6.32), (6.33) deviennent respectivement

$$(6.34) \qquad H(\vec{X}, \vec{Y}) = K \text{ sen } 2\gamma \quad , \quad K(\vec{X}, \vec{Y}) = K \cos 2\gamma$$

d'où les quatre équations (6.24)-(6.27) s'écrivent

$$\dot{\nu} = -2\lambda \mathrm{K} \operatorname{sen} 2\gamma \quad , \quad \dot{\gamma} = -\mathrm{K} \operatorname{sen} 2\gamma \tag{6.36}$$

$$\dot{(\mathrm{A}\sqrt{\lambda})} = 0 \quad , \quad \dot{\lambda} = -2\lambda \mathrm{K} \cos 2\gamma \tag{6.38}$$

Modulo $O(\mu)$, (6.36) s'écrit

$$\overset{(0)}{l^\alpha} \partial_\alpha \overset{(0)}{\nu} = \overset{(0)}{l^\alpha} \partial_\alpha \overset{(0)}{\gamma} = \overset{(0)}{l^\alpha} \partial_\alpha \overset{(0)}{\lambda} = 0 \tag{6.40}$$

Dans le paragraphe 5 nous avons posé $\overset{(0)}{\lambda} = 1$ (voir (5.53)). Pour des raisons analogues nous poserons maintenant

$$\overset{(0)}{\lambda} = 1 \quad , \quad \overset{(0)}{\nu} = 0 \tag{6.41}$$

ces valeurs de $\overset{(0)}{\lambda}$, $\overset{(0)}{\nu}$ étant trivialement compatibles avec (6.40).

En ce qui concerne $\overset{(0)}{\gamma}$ on a

$$\mathrm{E}^{-1} \overset{(0)}{l^\alpha} \partial_\alpha \overset{(0)}{\gamma} = \partial_t \overset{(0)}{\gamma} + c \cos \theta \partial_r \overset{(0)}{\gamma} - c \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \partial_\theta \overset{(0)}{\gamma} = 0 \tag{6.42}$$

dont l'intégrale générale est, en accord avec l'intégration qu'on a fait de (5.61) dans le paragraphe 5

$$\overset{(0)}{\gamma} = f\left(r \operatorname{sen} \theta, \mathrm{E}t - \mathrm{E}\frac{r \cos \theta}{c}, \varphi\right) \tag{6.43}$$

c'est-à-dire une fonction arbitraire, f, de φ et de

$$u \equiv r \operatorname{sen} \theta \quad , \quad v \equiv \mathrm{E}t - \frac{\mathrm{E}}{c} r \cos \theta \tag{6.44}$$

Compte tenu de (6.18), f se ramène nécessairement à

$$\overset{(0)}{\gamma} = \varphi \tag{6.45}$$

Maintenant les termes d'ordre un en μ de l'équation (6.36) donnent respectivement

$$\overset{(0)}{l^\alpha} \partial_\alpha \overset{(1)}{v} = -2 \overset{(1)}{\mathrm{K}} \operatorname{sen} 2\varphi \tag{6.46}$$

$$\overset{(0)}{l^\alpha} \partial_\alpha \overset{(1)}{\gamma} = - \overset{(1)}{\mathrm{K}} \operatorname{sen} 2\varphi \tag{6.47}$$

$$\overset{(0)}{l^\alpha} \partial_\alpha \overset{(1)}{\lambda} = -2 \overset{(1)}{\mathrm{K}} \cos 2\varphi \tag{6.48}$$

avec $\overset{(1)}{\mathrm{K}} = \mu^{-1}\mathrm{K}$, K étant donné par (5.26).

Nous prendrons comme des solutions de ces trois équations, respectivement les trois fonctions suivantes, $\overset{(1)}{\nu}$, $\overset{(1)}{\gamma}$, $\overset{(1)}{\lambda}$, analogues à (5.58)

$$\overset{(1)}{\nu} = \frac{2}{r}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}\operatorname{sen} 2\varphi \tag{6.49}$$

$$\overset{(1)}{\gamma} = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}\operatorname{sen} 2\varphi \tag{6.50}$$

$$\overset{(1)}{\lambda} = \frac{2}{r}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}\cos 2\varphi \tag{6.51}$$

Considérons maintenant l'équation (6.38), qui avec la notation

$$A\sqrt{\lambda} = \mathscr{A} \tag{6.52}$$

s'écrira

$$\dot{\mathscr{A}} = 0 \tag{6.53}$$

ou encore, modulo $0(\mu)$

$$\overset{(0)}{l^\alpha}\partial_\alpha \overset{(0)}{\mathscr{A}} = 0 \tag{6.54}$$

dont l'intégrale générale est une fonction arbitraire, f, de u, v, φ

$$\overset{(0)}{\mathscr{A}} = f(u, v, \varphi) \tag{6.55}$$

Mais de (16.52) l'on a

$$\overset{(0)}{A} = \overset{(0)}{\mathscr{A}} \quad , \quad \overset{(0)}{A} = \overset{(1)}{\mathscr{A}} - \frac{1}{2}\overset{(0)}{A}\,\overset{(1)}{\lambda} \tag{6.56}$$

et nous avons donc

$$\overset{(0)}{A} = f(u, v, \varphi) \tag{6.57}$$

Nous reviendrons après sur le terme d'ordre un en μ de (6.53) et le calcul de $\overset{(1)}{A}$. Pour l'instant considérons les équations (6.28), (6.29) qui, d'après (6.16), s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned}(- M^\alpha\partial_\alpha \lg A + C^\alpha\dot{M}_\alpha - M^\alpha C^\beta\nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha M^\alpha + N^\alpha\partial_\alpha\gamma)\operatorname{sen}\gamma \\ + (N^\alpha\partial_\alpha \lg A + M^\alpha\partial_\alpha\gamma + \nabla_\alpha N^\alpha + N^\alpha C^\beta\nabla_\alpha l_\beta - C^\alpha\dot{N}_\alpha)\cos\gamma = 0\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}[M^\alpha\partial_\alpha\lambda + N^\alpha\partial_\alpha\nu + \lambda M^\alpha\partial_\alpha \lg A + \lambda(\nabla_\alpha M^\alpha - N^\alpha\partial_\alpha\gamma + M^\alpha C^\beta\nabla_\alpha l_\beta \\ - C^\alpha\dot{M}_\alpha)]\cos\gamma + [M^\alpha\partial_\alpha\nu + N^\alpha\partial_\alpha\lambda - \lambda N^\alpha\partial_\alpha \lg A - \lambda(\nabla_\alpha N^\alpha \\ + M^\alpha\partial_\alpha\gamma + N^\alpha C^\beta\nabla_\alpha l_\beta - C^\alpha\dot{N}_\alpha)]\operatorname{sen}\gamma = 0\end{aligned} \tag{6.59}$$

Maintenant, puisque les deux 2-formes

$$l^\alpha M^\beta - l^\beta M^\alpha \quad , \quad l^\alpha N^\beta - l^\beta N^\alpha \tag{6.60}$$

sont invariantes vis-à-vis des transformations

$$\vec{M} \to \vec{P} \quad , \quad \vec{N} \to \vec{Q} \tag{6.61}$$

avec pour $\vec{P}$, $\vec{Q}$ les deux vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ de (6.6), il en est de même pour les équations (6.58), (6.59), que nous pourrons écrire par conséquent en y posant $\vec{P}$, $\vec{Q}$ au lieu de $\vec{M}$, $\vec{N}$ respectivement. Nous pouvons aussi poser $\vec{K}$ au lieu de $\vec{C}$ dans ces deux équations, $\vec{K}$ étant un vecteur isotrope tel que

$$\vec{K}\cdot\vec{P} = \vec{K}\cdot\vec{Q} = 0 \quad , \quad \vec{K}\cdot\vec{l} = 1 \tag{6.62}$$

Compte tenu de (6.6), on trouve

$$\vec{K} = \vec{C} - h\vec{N} + \frac{1}{2}h^2\vec{l} \tag{6.63}$$

Or, les deux équations (6.58), (6.59) étant justement

$$A^{-1}C_\beta\tilde{\mathrm{J}}^\beta = 0, \qquad A^{-1}C_\beta\mathrm{J}^\beta = 0 \tag{6.64}$$

avec

$$\tilde{\mathrm{J}}^\beta \equiv \nabla_\alpha \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} \quad , \quad \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = A(l^\alpha Y^\beta - l^\beta Y^\alpha) \tag{6.65}$$

$$\mathrm{J}^\beta \equiv \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} \quad , \quad G^{\alpha\beta} = \lambda A(l^\alpha X^\beta - l^\beta X^\alpha) + \nu A(l^\alpha Y^\beta - l^\beta Y^\alpha) \tag{6.66}$$

et λ, ν, γ, $\overset{(0)}{A}$ ayant été déterminés de manière à avoir

$$l^\beta\tilde{\mathrm{J}}_\beta = X^\beta\tilde{\mathrm{J}}_\beta = Y^\beta\tilde{\mathrm{J}}_\beta = l^\beta\mathrm{J}_\beta = X^\beta\mathrm{J}_\beta = Y^\beta\mathrm{J}_\beta \tag{6.67}$$

ou ce qui lui est équivalent (voir (6.16)

$$l^\beta\tilde{\mathrm{J}}_\beta = M^\beta\tilde{\mathrm{J}}_\beta = N^\beta\tilde{\mathrm{J}}_\beta = l^\beta\mathrm{J}_\beta = M^\beta\mathrm{J}_\beta = N^\beta\mathrm{J}_\beta \tag{6.68}$$

nous avons en vertu de (6.63)

$$K_\beta\tilde{\mathrm{J}}^\beta = C_\beta\tilde{\mathrm{J}}^\beta \quad , \quad K_\beta\mathrm{J}^\beta = C_\beta\mathrm{J}^\beta \tag{6.69}$$

ce qui montre bien qu'il est indifférent de poser $\vec{K}$ ou $\vec{C}$ dans (6.58), (6.59). Par conséquent nous écrivons à nouveau (6.58), (6.59) en y remplaçant $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{C}$ par $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{K}$, respectivement. On obtient

$$(P^\alpha\partial_\alpha \lg A - Q^\alpha\partial_\alpha\gamma)\,\mathrm{sen}\,\gamma + (Q^\alpha\partial_\alpha \lg A - q + P^\alpha\partial_\alpha\gamma)\cos\gamma = 0 \tag{6.71}$$

$$\begin{aligned}&[P^\alpha\partial_\alpha\lambda + Q^\alpha\partial_\alpha\nu + \lambda(P^\alpha\partial_\alpha \lg A - Q^\alpha\partial_\alpha\gamma)]\cos\gamma \\ &\quad + [P^\alpha\partial_\alpha\nu - Q^\alpha\partial_\alpha\lambda - \lambda(Q^\alpha\partial_\alpha \lg A - q + P^\alpha\partial_\alpha\gamma)]\,\mathrm{sen}\,\gamma = 0\end{aligned} \tag{6.72}$$

où, d'une part, nous avons tenu compte de (voir (5.43))

$$K_\alpha \dot{P}^\alpha - P^\alpha K^\beta \nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha P^\alpha = 0 \tag{6.73}$$

et, d'autre part, nous avons posé

$$q \equiv K^\alpha \dot{Q}_\alpha - Q^\alpha K^\beta \nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha Q^\alpha \tag{6.74}$$

q ayant été déjà calculé dans le paragraphe 5 (voir (5.41)).

Modulo $0(\mu)$, les équations (6.71), (6.72) s'écrivent

$$\overset{(0)}{P}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(0)}{A} \cdot \text{sen } \varphi + \overset{(0)}{Q}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(0)}{A} \cos \varphi = 0 \tag{6.75}$$

$$\overset{(0)}{P}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(0)}{A} \cdot \cos \varphi - \overset{(0)}{Q}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(0)}{A} \text{ sen } \varphi = 0 \tag{6.76}$$

ces deux relations ne pouvant être satisfaites simultanément que si l'on a séparément

$$\overset{(0)}{P}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(0)}{A} = 0 \quad , \quad \overset{(0)}{Q}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(0)}{A} = 0 \tag{6.77}$$

c'est-à-dire, d'après (5.3), (5.27)

$$\partial \varphi \overset{(0)}{A} = 0 \tag{6.79}$$

$$\frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} \partial_t \overset{(0)}{A} + \frac{c \text{ sen } \theta}{1 - \cos \theta} \partial_r \overset{(0)}{A} - \frac{c}{r} \partial_\theta \overset{(0)}{A} = 0 \tag{6.80}$$

ce qui, compte tenu de (6.57), donne pour $\overset{(0)}{A}$ l'expression

$$\overset{(0)}{A} = f(v) \tag{6.81}$$

Nous prendrons

$$\overset{(0)}{A} = \cos v \tag{6.82}$$

$\overset{(0)}{A}$ ainsi calculé, revenons au calcul de $\overset{(1)}{A}$. Le terme d'ordre un en μ de (6.53) s'écrit

$$\overset{(0)}{l}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(1)}{\mathscr{A}} = - \overset{(1)}{l}{}^\alpha \partial_\alpha \overset{(0)}{A} \tag{6.83}$$

et de (4.3), (6.82)

$$\partial_t \overset{(1)}{\mathscr{A}} + c \cos \theta \partial_r \overset{(1)}{\mathscr{A}} - \frac{c \text{ sen } \theta}{r} \partial_\theta \overset{(1)}{\mathscr{A}} = E \frac{1 + \cos^2 \theta}{r} \text{ sen } v \tag{6.84}$$

équation différentielle dont l'intégrale générale est de la forme

$$\overset{(1)}{\mathscr{A}} = f(u, v, \varphi) = \frac{E}{c}\left(2 \lg \text{tg} \frac{\theta}{2} + \cos \theta\right) \text{sen } v \tag{6.85}$$

avec $f(u, v, \varphi)$ une fonction arbitraire de u, v, φ. De (6.85), en vertu de (6.56)

$$(6.86)\quad \overset{(1)}{A} = f(u, v, \varphi) - \frac{1}{2}\overset{(1)}{\lambda}\cos v - \frac{E}{c}\left(2 \lg \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)\operatorname{sen} v$$

$\overset{(1)}{A}$ devant satisfaire encore aux équations qui résultent de prendre les termes d'ordre un en μ des équations (6.71), (6.72). On obtient pour ces termes d'ordre un en μ

$$(6.87)\quad (\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{A} - \overset{(0)}{A}\,\overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\gamma})\operatorname{sen}\varphi + [\overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{A} + \overset{(1)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(0)}{A} + \overset{(0)}{A}(\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\gamma} - \overset{(1)}{q})]\cos\varphi = 0$$

$$(6.88)\quad (\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{A} - \overset{(0)}{A}\,\overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\gamma})\cos\varphi - [\overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{A} + \overset{(1)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(0)}{A} + \overset{(0)}{A}(\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\gamma} - \overset{(1)}{q})]\operatorname{sen}\varphi$$
$$= \overset{(0)}{A}[(\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\lambda} + \overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\nu})\cos\varphi + (\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\nu} - \overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\lambda})\operatorname{sen}\varphi]$$

Tous calculs faits, on trouve

$$(6.89)\quad \overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{A} - \overset{(0)}{A}\,\overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\gamma} = \frac{c}{u}\partial_{\varphi}f + \frac{c}{u^2}\operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta)\cos v\operatorname{sen} 2\varphi$$

$$(6.90)\quad \overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{A} + \overset{(1)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(0)}{A} + \overset{(0)}{A}(\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\gamma} - \overset{(1)}{q}) = -c\partial_u f + 2E\frac{\operatorname{sen} v}{u}$$
$$+ \frac{c}{u^2}\operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta)\cos v\cos 2\varphi + \frac{c}{u^2}\operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta - 1)\cos v$$

$$(6.91)\quad (\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\lambda} + \overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\nu})\cos\varphi + (\overset{(0)}{P}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\nu} - \overset{(0)}{Q}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}\overset{(1)}{\lambda})\operatorname{sen}\varphi$$
$$= -\frac{2c}{u^2}\operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\varphi$$

où nous avons tenu compte des expressions de $\overset{(1)}{q}$, $\overset{(1)}{\nu}$, $\overset{(1)}{\gamma}$, $\overset{(1)}{\lambda}$, $\overset{(0)}{A}$, $\overset{(1)}{A}$, données par (6.74), (5.41), (6.49), (6.50), (6.51), (6.82), (6.86).

En substituant (6.89), (6.90), (6.91) dans (6.87), (6.88)

$$(6.92)\quad \left[\frac{c}{u}\partial_{\varphi}f + \frac{c}{u^2}\operatorname{sen}\theta.(1 - \cos\theta).\cos v.\operatorname{sen} 2\varphi\right]\operatorname{sen}\varphi$$
$$+\left[-c\partial_u f + 2E\frac{\operatorname{sen} v}{u} + \frac{c}{u^2}\operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta)\cos v\cos 2\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{c}{u^2}\operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta - 1)\cos v\right]\cos\varphi = 0$$

$$(6.93)\quad \left[\frac{c}{u}\partial_\varphi f + \frac{c}{u^2}\,\mathrm{sen}\,\theta(1-\cos\theta)\cos v\,\mathrm{sen}\,2\varphi\right]\cos\varphi$$
$$-\left[-c\partial_u f + 2\mathrm{E}\frac{\mathrm{sen}\,v}{u} + \frac{c}{u^2}\,\mathrm{sen}\,\theta(1-\cos\theta)\cos v\cos 2\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{c}{u^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos\theta-1)\cos v\right]\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$= -\frac{2c}{u^2}\,\mathrm{sen}\,\theta(1-\cos\theta)\cos v\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

d'où

$$(6.94)\quad \frac{c}{u}\partial^\varphi f.\,\mathrm{sen}\,\varphi - \left(c\partial_u f - 2\mathrm{E}\frac{\mathrm{sen}\,v}{u}\right)\cos\varphi = 0$$

$$(6.95)\quad \frac{c}{u}\partial_\varphi f.\,\cos\varphi + \left(c\partial_u f - 2\mathrm{E}\frac{\mathrm{sen}\,v}{u}\right)\mathrm{sen}\,\varphi = 0$$

ces deux équations ne pouvant être satisfaites simultanément que si l'on a séparément

$$(6.96)\quad \partial_\varphi f = 0 \quad , \quad \partial_u f = \frac{2\mathrm{E}}{c}\frac{\mathrm{sen}\,v}{u}$$

L'intégrale générale de ce système d'équations différentielles est une fonction de u, v de la forme

$$(6.98)\quad f(u, v) = \frac{2\mathrm{E}}{c}\,\mathrm{sen}\,v\,\lg u + b(v)$$

où $b(v)$ désigne une fonction arbitraire de v qui ne dépend pas de u.

En choisissant pour $b(v)$ l'expression

$$(6.99)\quad b(v) = -2\lg 2\cdot\frac{\mathrm{E}}{c}\,\mathrm{sen}\,v$$

$$(6.100)\quad \overset{(1)}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{E}}{c}\left[2\lg\left(r\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta\right]\mathrm{sen}\,v - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}\cos v\cos 2\varphi$$

Finalement calculons un des deux vecteurs $\vec{\mathrm{X}}$, $\vec{\mathrm{Y}}$ de (6.16), (6.17). Par exemple $\vec{\mathrm{Y}}$. Compte tenu de (6.6)

$$(6.101)\quad \mathrm{Y}^0 = 0,\quad \mathrm{Y}^1 = \mathrm{N}^1\cos\gamma,\quad \mathrm{Y}^2 = \mathrm{N}^2\cos\gamma,\quad \mathrm{Y}^3 = \mathrm{P}^3\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

ou bien, modulo $0(\mu^2)$,

$$(6.102)\qquad \begin{aligned} Y^0 &= 0 \\ Y^1 &= N^1 \cos\varphi + \mu(\overset{(1)}{N^1} \cos\varphi - \overset{(1)}{\gamma}\overset{(0)}{N^1} \operatorname{sen}\varphi) \\ Y^2 &= N^2 \cos\varphi + \mu(\overset{(1)}{N^2} \cos\varphi - \overset{(1)}{\gamma}\overset{(0)}{N^2} \operatorname{sen}\varphi) \\ Y^3 &= P^3 (\operatorname{sen}\varphi + \mu \overset{(1)}{\gamma} \cos\varphi) \end{aligned}$$

et, compte tenu de (6.9),

$$(6.103)\qquad \begin{aligned} Y^0 &= 0 \\ Y^1 &= -c \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \mu \frac{c}{r} \operatorname{sen}\theta \left[2 + \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}(1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi)\right] \cos\varphi \\ Y^2 &= -\frac{c}{r}\cos\theta\cos\varphi + \mu\frac{2c}{r^2}(\cos\theta - 1)\left(1 + \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\operatorname{sen}^2\varphi\right)\cos\varphi \\ Y^3 &= \frac{c \operatorname{sen}\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} + \mu\frac{2c}{r^2}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi \end{aligned}$$

En résumé la solution trouvée au système d'équations (6.23)-(6.29), modulo $0(\mu^2)$, est donnée par (6.103) d'une part et, d'autre part, par

$$(6.104)\qquad \lambda = 1 + \mu \frac{2}{r}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}\cos 2\varphi$$

$$(6.105)\qquad v = \mu \frac{2}{r}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}\operatorname{sen} 2\varphi$$

$$(6.106)\qquad A = \cos v + \mu \frac{E}{c}\left[2 \lg\left(r\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta\right]\operatorname{sen} v - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}\cos 2\varphi \cos v$$

avec

$$(6.107)\qquad v \equiv Et - \frac{Er\cos\theta}{c}$$

On peut vérifier aisément que l'on a

$$(6.108)\qquad \sqrt{\lambda} A = \cos S$$

avec λ, A et S donnés respectivement par (6.104), (6.106), (4.1). En fait la fonction $b(v)$ de (6.99) a été choisie de manière à avoir un A tel que (6.108) soit satisfaite.

APPENDICE

La distorsion, la rotation et la dilatation d'une congruence de courbes géodésiques et isotropes.

Une congruence de courbes est une famille de courbes à trois paramètres

(1) $$X^\alpha = X^\alpha(S, Y^i)$$

les Y^i étant constantes le long de chaque courbe.

Les paramètres S, Y^i étant fixes, à chaque congruence de courbes on peut associer un champ de vecteurs

(2) $$l^\alpha = \frac{\partial X^\alpha(S, Y^i)}{\partial S}$$

Nous supposerons la congruence (2.1) être isotrope et géodésique, c'est-à-dire, d'une part

(3) $$\vec{l}^2 = 0$$

et d'autre part

(4) $$l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = r l_\alpha$$

ou bien encore, choisissant convenablement le paramètre S

(5) $$l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = 0$$

Quand (4) se ramène à (5) on dit de S qu'il est un paramètre affine.

Donnons-nous trois champs de vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{K}$, tels que l'on ait

(6) $$\vec{l}\cdot\vec{P} = \vec{l}\cdot\vec{Q} = \vec{K}\cdot\vec{P} = \vec{K}\cdot\vec{Q} = \vec{K}^2 = \vec{P}\cdot\vec{Q} = 0, \qquad \vec{P}^2 = \vec{Q}^2 = -1, \qquad \vec{K}\cdot\vec{l} = 1$$

De $\vec{l}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{K}$ on dit alors qu'ils forment un repère quasi orthonormé adapté à la congruence à laquelle le champ de vecteurs $\vec{l}$ est associé. Cette congruence nous la noterons dorénavant $\Gamma(\vec{l})$.

Maintenant, l étant donné, les relations (6) déterminent les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{K}$, aux transformations près

(7) $$\vec{S} \to \vec{S}' = e^{i\varphi}(\vec{S} + \eta\vec{l})$$

(8) $$\vec{K} \to \vec{K}' = \vec{K} + \bar{\eta}\vec{S} + \eta\bar{\vec{S}} + \eta\bar{\eta}\vec{l}$$

où nous avons posé

(9) $$\vec{S} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P} + i\vec{Q})$$

φ étant un scalaire réel, η un scalaire complexe, $\bar{\eta}$ son complexe conjugué et $\bar{\vec{S}}$ le complexe conjugué de $\vec{S}$.

Ceci dit, on définit les scalaires réels distorsion, D, rotation, ω et dilatation, θ de $\Gamma(\vec{l})$ comme ceci [2] [3]

(10) $$D^2 \equiv \sigma\bar{\sigma} \qquad (\bar{\sigma} \text{ complexe conjugué de } \sigma)$$

(11) $$\theta + i\omega \equiv \zeta$$

où σ et ζ valent

(12) $$\sigma \equiv S^\alpha S^\beta \nabla_\alpha l_\beta$$

(13) $$\zeta \equiv - S^\alpha \bar{S}^\beta \nabla_\alpha l_\beta$$

A l'aide des vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$, les scalaires ω, θ, D s'écrivent encore (1)

$$(14) \qquad \omega = \frac{1}{2}(P^\alpha Q^\alpha - P^\beta Q^\alpha)\nabla_\alpha l_\beta, \qquad \theta = -\frac{1}{2}(P^\alpha P^\beta + Q^\alpha Q^\beta)\nabla_\alpha l_\beta$$

$$(15) \qquad D = (H^2 + K^2)^{1/2}$$

avec

$$(16) \qquad H \equiv \frac{1}{2}(P^\alpha Q^\beta + P^\beta Q^\alpha)\nabla_\alpha l_\beta, \qquad K \equiv \frac{1}{2}(P^\alpha P^\beta - Q^\alpha Q^\beta)\nabla_\alpha l_\beta$$

Compte tenu de (12), (13), on démontre aisément que D, ω, θ sont invariants vis-à-vis des transformations (7). Plus précisément on démontre que l'on a

$$D = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha l_\beta(\nabla^\alpha l^\beta + \nabla^\beta l^\alpha) - \nabla_\alpha l^\alpha]^{1/2}$$

$$\omega^2 = \nabla_\alpha l_\beta(\nabla^\alpha l^\beta - \nabla^\beta l^\alpha), \qquad \theta = \frac{1}{2}\nabla_\alpha l_\beta$$

REMERCIEMENTS

Je prie M. Lichnerowicz de trouver ici le témoignage de ma gratitude pour l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de m'accorder pendant l'élaboration de ce travail.

Je tiens aussi à remercier M. Bel à qui je dois quelques suggestions très utiles.

Enfin, je ne saurais oublier « L'aide à la Recherche Scientifique » et le « Centre National de la Recherche Scientifique », dont l'aide matérielle m'a permis de réaliser ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] L. Mariot, *Thèse*, Paris, 1957.
[2] I. Robinson, *Jl. math. Physics*, **2**, 1961, p. 309.
[3] L. Bel, R. Lapiedra et A. Montserrat, *Cah. Phys.*, **19**, 1965, p. 433.
[4] Pham Man Quan, *C. R. Ac. Sc.*, **245**, 1957, p. 1782.
[5] Pham Man Quan, *Cah. Phys.*, **12**, 1958, p. 297.
[6] L. Bel et A. Montserrat, *C. R. Ac. Sc.*, **258**, 1964, p. 4659.
[7] A. Montserrat, *Thèse*, Paris, 1965.
[8] R. Sachs, *Proc. Royal Society*, **264**, 1961, p. 309.

Reçu le 27 juin 1969.

(1) L'expression de θ qu'on donne par la suite suppose que le scalaire r figurant dans (4) est nul.