

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

CÉCILE DEWITT MORETTE

L'intégrale fonctionnelle de Feynman. Une introduction

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, n° 2 (1969), p. 153-206

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_2_153_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'intégrale fonctionnelle de Feynman. Une introduction

par

Cécile Morette DEWITT

(Department of Physics, University of North Carolina, Chapel Hill).

SOMMAIRE. — Choix exclusifs et choix interférentiels; probabilité et amplitude de probabilité. — L'amplitude fonctionnelle du chemin. — Intégrale fonctionnelle de Feynman. — Amplitude d'une particule libre; mesure de Wiener. — Amplitude d'une particule dans un potentiel; produit ordonné; principe variationnel de Schwinger. — Fonctionnelle aléatoire imaginaire. — Coordonnées intrinsèques; approximation W. K. B. — Caractéristiques des chemins. — Chemins définis sur une variété pseudo-riemmanienne. — Chemins définis sur une variété non homotopiquement nulle. — Intégrale fonctionnelle de Feynman en théorie des champs. — Mesure dans l'espace d'intégration; chaînes non causales. — Champ invariant dans un groupe de transformations; cas abélien : champ électromagnétique. — Cas non-abélien : champ Yang-Mills; particules fictives.

L'intégrale fonctionnelle de Feynman est, je crois, un sujet agréable de discussions entre mathématiciens et physiciens. Elle permet aux physiciens de présenter, grâce à une idée mathématique, non encore parfaitement définie, un formalisme simple et riche qui transcrit aussi directement que possible les phénomènes physiques et tout particulièrement les phénomènes quantiques. Ce formalisme introduit des concepts nouveaux :

1. Le concept de probabilité en mécanique quantique, fort différent du concept de probabilité de Laplace ; la distinction entre choix exclusifs et choix interférentiels;

2. Le concept de fonctionnelle aléatoire — probabilité attachée non plus à une valeur de la variable mais à une fonction donnée — et la généralisation aux fonctionnelles aléatoires des théorèmes sur les fonctions aléatoires;

3. L'extension dans une direction toute nouvelle du domaine de validité du principe de moindre action.

Il a été utilisé dans l'étude de systèmes extrêmement variés : à l'origine, mécanique quantique, et théorie des champs dans laquelle il peut être le point de départ du formalisme covariant ou du formalisme canonique, c'est en effet la jonction d'où Dyson est parti lorsqu'il a prouvé l'équivalence des travaux de Feynman et Schwinger en électromagnétique quantique; c'est aussi le point de départ commun des travaux canoniques de Faddeev [23] et des travaux covariants de B. S. DeWitt en gravitation quantique. Il offre une possibilité d'analyse quantitative des idées de Wheeler en géométrodynamique. Il présente des points de vue nouveaux en théorie de l'information, mécanique statistique, théorie de l'hélium liquide.

Il est à l'origine des diagrammes de Feynman, puissants moyens de calcul qui, pour le même labeur donnent des résultats à un ou deux ordres supérieurs aux calculs conduits par les formalismes antérieurs.

Récemment des progrès marquants ont été faits dans l'étude de l'intégrale fonctionnelle de Feynman.

1^o Ed. Nelson l'a étudiée en tant que prolongement analytique de l'intégrale de Wiener pour le mouvement brownien.

2^o L. Schulman a étudié la somme sur des chemins de classes d'homotopie différentes et a ainsi incorporé le spin dans la structure même de l'intégrale.

3^o En théorie des champs, B. S. DeWitt et L. Faddeev ont généralisé par des voies différentes l'intégrale de Feynman aux champs possédant des groupes d'invariances.

4^o F. A. Berezin a élucidé la théorie des fonctionnelles de variables anti-commutatives.

Faute d'une définition mathématique parfaitement élaborée de l'intégrale de Feynman, je vais commencer au commencement, analyser successivement ce que nous pouvons faire avec l'intégrale de Feynman lorsque l'intuition physique sert de guide là où les mathématiques ne peuvent encore éclairer la route; j'espère ainsi en cerner la nature.

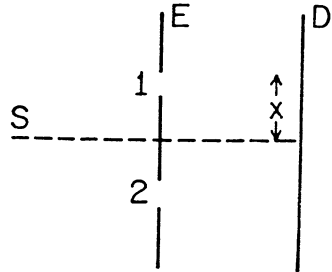
Ce travail est le résultat de la préparation des conférences faites au séminaire de Mécanique Analytique dirigé par Mme Y. Choquet-Bruhat et au séminaire de Théories Physiques dirigé par Mme M. A. Tonnelat,

en mars 1969. Au cours des discussions qui ont suivi ces exposés, j'ai pris connaissance de travaux fort intéressants [19] [27] [28] [29] [45] que j'aurais aimé incorporer dans ces notes. Mais une idée en entraînant une autre, cette révision aurait amené une rédaction entièrement nouvelle de ces notes de cours et aurait considérablement retardé leur parution. Il m'a paru plus utile de les communiquer sans délai, en ajoutant simplement le sous-titre : « Une introduction ». Je remercie très vivement Mme Y. Choquet-Bruhat dont l'invitation à faire ces conférences m'a permis de faire un travail qui m'intéresse, là où je pouvais y trouver le plus de plaisir et les discussions les plus fructueuses.

CHOIX EXCLUSIFS ET CHOIX INTERFÉRENTIELS; PROBABILITÉ ET AMPLITUDE DE PROBABILITÉ

Une expérience qui met en évidence directement la nature des phénomènes quantiques est la suivante :

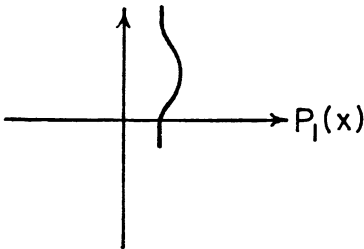
Étant donné une source ponctuelle monoénergétique d'électrons, par exemple, un écran E percé de deux trous 1 et 2 et un détecteur D; on observe le nombre d'électrons détectés sur la droite D en fonction de x pendant un temps donné.



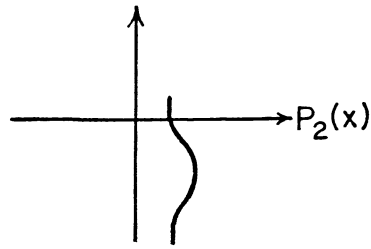
Autrement dit, on mesure la probabilité $P(x)$ qu'un électron arrive en x :

- lorsque les deux trous sont ouverts,
- lorsque l'un seulement est ouvert.

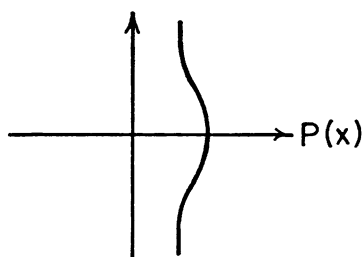
Le résultat de cette expérience est le suivant :



Le trou 1 est ouvert.

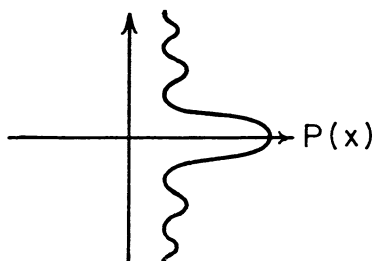


Le trou 2 est ouvert.



Résultat attendu lorsque les 2 trous sont ouverts, si l'on suppose

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x)$$



Résultat observé lorsque les 2 trous sont ouverts.

le résultat observé conduit la plupart des physiciens à la conclusion suivante : « On ne peut pas dire : l'électron est passé soit par 1 soit par 2 ». Feynman préfère dire : « Il y a deux sortes de choix, les choix exclusifs qui obéissent aux lois de probabilité de Laplace $P = P_1 + P_2$, et les choix interférentiels dont nous allons préciser la nature et qui obéissent à des lois différentes ». Quelle que soit l'interprétation donnée au résultat observé, les physiciens reconnaissent des franges d'interférence familières en optique et disent :

Les probabilités P_1 et P_2 ne s'ajoutent pas mais les amplitudes $\Phi_i(x)$ des probabilités $P_i(x)$ s'ajoutent et la probabilité totale observée est

$$P(x) = |\Phi(x)|^2 \quad \text{où} \quad \Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$$

Peut-on généraliser cette conclusion et dire que l'amplitude de la probabilité pour qu'un système passe d'une configuration a à une configuration b est la somme des amplitudes correspondant à tous les chemins possibles ? La réponse donnée par Feynman et récemment précisée par Schulman : « Oui lorsque les chemins sont dans la même classe d'homotopie; pas nécessairement lorsque les chemins sont dans des classes d'homotopie différentes. »

Raffinons l'expérience précédente pour préciser la distinction entre choix exclusifs et choix interférentiels et leurs lois respectives. Plaçons derrière l'écran une source lumineuse monochromatique qui permette par diffusion des photons de dire si l'électron est passé par 1 ou par 2. Je dis bien « permette », en effet, il n'est pas nécessaire que le résultat de l'observation soit enregistré. La probabilité observée est maintenant

$$P = P_1 + P_2 = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2.$$

En utilisant une source lumineuse de plus en plus faible, peut-on passer

continûment d'un spectre à l'autre? Y a-t-il transition continue de $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$ à $|\Phi_1 + \Phi_2|^2$? Tout d'abord comment affaiblit-on une source lumineuse?

— On peut diminuer le nombre de photons d'impulsion donnée par unité de temps; si l'on diminue suffisamment le nombre de photons, certains électrons passent en l'absence de photons et $P(x)$ est donné par l'expression suivante :

$$P(x) = \text{nombre d'électrons diffusés } (|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2) \\ + \text{ nombre d'électrons passés inaperçus par les protons } (|\Phi_1 + \Phi_2|^2).$$

Il y a transition continue d'un spectre à l'autre mais il n'y a pas transition continue de $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$ à $|\Phi_1 + \Phi_2|^2$.

— On peut également affaiblir la source en augmentant la longueur d'onde des photons mais alors le photon n'est plus suffisamment localisé pour que la diffusion électron-photon permette de dire par quel trou l'électron est passé et l'on observe un spectre d'interférence.

L'analyse de cette expérience a amené Feynman aux définitions suivantes : un choix est exclusif lorsqu'il est possible, en principe, de savoir quel choix a été fait; un choix est interférentiel lorsqu'aucune expérience ne peut déterminer le choix qui a été fait.

Donnons un autre exemple où l'on observe simultanément des choix exclusifs et des choix interférentiels :

La diffusion des neutrons à spin parallèles par un cristal montre que les neutrons dont le spin n'a pas changé obéissent à la loi des choix interférentiels (on ne sait pas par quel noyau un neutron sortant a été diffusé); les neutrons dont les spins ont été inversés obéissent à la loi des choix exclusifs, car alors on pourrait savoir quel noyau a diffusé un neutron donné en repérant l'état de spin de chaque noyau avant et après l'expériences

Faisons une autre expérience qui nous donnera un renseignement supplémentaire sur les lois des choix interférentiels. Considérons la diffusion de 2 particules A et B à 90° (supposons pour ne pas nous encombrer de considérations superflues que l'énergie cinétique de A et B soit faible et qu'il n'y ait pas d'interaction de spin dans la collision).

Soit $\Phi_{AB}(1,2)$ l'amplitude de la probabilité que A soit diffusé en 1 et B soit diffusé en 2. $\Phi_{AB}(2,1)$ l'amplitude de la probabilité que A soit diffusé en 2 et B en 1; l'angle de diffusion étant 90° . $\Phi_{AB}(1,2) = \Phi_{BA}(2,1)$ par raison de symétrie. Posons $|\Phi_{AB}(1,2)|^2 = p$.

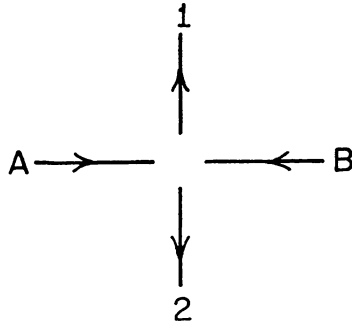
Mesurons la probabilité que l'une des deux particules soit diffusée en 1, l'autre en 2, dans les deux cas suivants :

— A et B sont différents, le choix est exclusif, on peut observer la nature de la particule en 1 sans perturber la diffusion. La probabilité attendue $|\Phi_{AB}(1,2)|^2 + |\Phi_{AB}(2,1)|^2 = 2p$ est effectivement observée.

— A et B sont identiques, le choix est interférentiel. La probabilité observée est-elle $|\Phi_{AB}(1,2) + \Phi_{AB}(2,1)|^2 = 4p$?

A et B sont des bosons. La réponse est oui.

A et B sont des fermions. La réponse est non ; dans le dispositif considéré, elle est égale à 0, c'est-à-dire, comme l'a dit Pauli depuis longtemps, elle est égale à $|\Phi_{AB}(1,2) - \Phi_{AB}(2,1)|^2$.



Dans le cas de choix exclusifs, les amplitudes de tous les chemins d'une même classe d'homotopie s'ajoutent, les différentes classes d'homotopie contribuent à l'amplitude totale avec des phases différentes que l'on déterminera en faisant appel à d'autres considérations.

Pour calculer l'amplitude totale, deux questions se posent :

1. Quelle est l'amplitude associée à un chemin donné ?
2. Lorsqu'il y a un nombre infini de chemins possibles, la somme des amplitudes associées à tous les chemins devient une intégrale, quelle en est la mesure ?

L'AMPLITUDE, FONCTIONNELLE DU CHEMIN

Pour certains systèmes (dits classiques) la probabilité d'une certaine trajectoire est égale à un, la probabilité des autres est nulle. Un système est classique si son action S mesurée en unité du quantum d'action

$\hbar = 10^{-21}$ erg|sec est grande. Sa trajectoire $\bar{\mathbf{q}}(t)$ rend l'action $S[\mathbf{q}]$ stationnaire

$$\delta S[\bar{\mathbf{q}}] = 0 \quad \text{posons} \quad S[\bar{\mathbf{q}}] \equiv \bar{S}.$$

Associons à un chemin \mathbf{q} l'amplitude $\exp i \frac{S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]}{\hbar}$, on obtient le résultat souhaité pour les systèmes classiques. En effet, lorsque S/\hbar est grand, il suffit d'une petite variation entre les chemins pour que les phases diffèrent par π et que les amplitudes correspondantes interfèrent destructivement. Ceci à l'exception du chemin $\bar{\mathbf{q}}(t)$ qui rend l'action stationnaire. Plus précisément, les chemins $\bar{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$ très voisins de $\bar{\mathbf{q}}(t)$ contribuent aussi dans la mesure où $S[\bar{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\eta}] - \bar{S}$ est petite par rapport à \hbar . Le chemin classique n'est donc, en fait, défini qu'à cette approximation près.

Il semble que l'interférence destructive des exponentielles $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ dans les intégrales de Feynman lorsque $S/\hbar \rightarrow \infty$ pour les chemins éloignés du chemin classique assure la convergence des intégrales aussi puissamment que les exponentielles réelles négatives du mouvement brownien.

Alors que la mécanique classique n'utilise l'action que pour déterminer la trajectoire qui la minimise (classiquement on ne vérifie que l'équation $\delta S[\bar{\mathbf{q}}] = 0$) la mécanique quantique cherche l'action telle que l'amplitude associée à un chemin soit $\exp \frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}]$.

Il est fort probable que nous serons amené à découvrir des amplitudes différentes de celle qui s'impose naturellement pour un système ayant une limite classique. Le choix de l'amplitude associée à un chemin est moins solidement établi que le principe de superposition des amplitudes.

INTÉGRALE FONCTIONNELLE DE FEYNMAN

Ayant déterminé l'amplitude de la probabilité associée à un chemin donné, nous cherchons à calculer la somme des amplitudes associées à tous les chemins possibles. Cette somme (*) est une intégrale fonctionnelle sur l'espace compact Hausdorff Ω [15, p. 339] des fonctions \mathbf{q} :

$$\int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]} \mathcal{D}\mathbf{q} \quad \mathbf{q} \in \Omega$$

(*) Cette somme étant l'amplitude de la probabilité que le système dans « l'état \mathbf{a} » soit ultérieurement dans « l'état \mathbf{b} » s'écrit en notation de Dirac $\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle$.

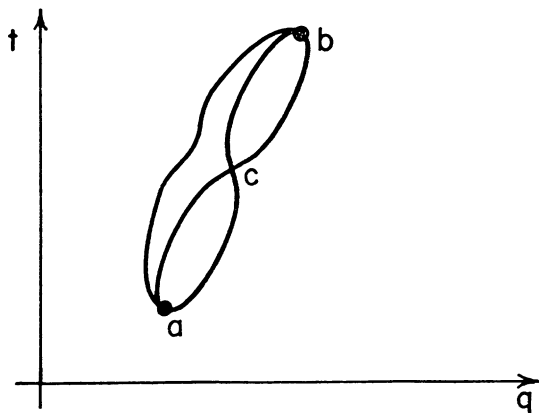
La définition de $\mathcal{D}\mathbf{q}$, et plus généralement la définition de la mesure (*) soulève des problèmes qui ne sont que partiellement résolus. Toutefois un certain nombre de propriétés de $\mathcal{D}\mathbf{q}$ a été empiriquement découvert et nous allons dans cet exposé montrer — faute de démontrer — que la mesure de l'intégrale de Feynman est $\exp \frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}} \mathcal{D}\mathbf{q}$ « S_{libre} » étant l'action associée aux particules libres.

Propriétés de $\mathcal{D}\mathbf{q}$.

Posons

$$\int_{\Omega} \exp \frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] \mathcal{D}\mathbf{q} \equiv K(\mathbf{b}; \mathbf{a})$$

Un théorème de Stone-Weierstrass [30] dit que toute fonction continue sur Ω , $S[\mathbf{q}]$ peut être approchée uniformément par des fonctions continues de plusieurs variables $\{q(t_k)\}$ (une fonctionnelle peut être approchée par une fonction d'un grand nombre de variables).



(*) Par « mesure de l'intégrale de Feynman » nous entendons « généralisation de la mesure de l'intégrale de Wiener ». Le mot « mesure » a été employé en physique dans le sens « mesurage » (mesurage des grandeurs observables; en anglais, « measuring ») et dans le sens « mesure » (mesure dans la théorie de l'intégration; en anglais, « measure »). Jusqu'ici cet abus de langage ne portait pas à confusion car les travaux relatifs au mesurage et ceux relatifs à la mesure n'avaient pas de domaine d'intérêt commun. Comme le montre ces exposés, il n'en est plus de même; nous verrons que la mesure de l'intégrale de Feynman en théorie des champs peut être partiellement déterminée par une analyse du mesurage en théorie quantique des champs. Pour les connexions entre l'intégrale de Wiener et l'intégrale sur un espace de Hilbert introduite par Friedrichs et Shapiro et Segal voir [29].

Nous allons donc décomposer l'intervalle t_a, t_b en N intervalles égaux ε

$$\begin{aligned}t_0 &= t_a \\t_k &= t_0 + k\varepsilon \\t_b &= t_0 + N\varepsilon \\q(t_k) &\equiv q_k\end{aligned}$$

et écrire :

$$K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N\varepsilon = t_b - t_a}} \int_N \dots \int \exp \frac{i}{\hbar} S(\mathbf{q}_b \dots \mathbf{q}_k \dots \mathbf{q}_a) \prod_{k=1}^N \delta(\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_N) m_{k,k-1} d\mathbf{q}_k$$

Calcul de $m_{k,k-1}$.

Lorsque

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_a}^{t_b} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt$$

ce que nous allons dorénavant supposer sauf mention du contraire (*).

$$S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + S[\mathbf{q}, \mathbf{c}, \mathbf{a}]$$

pour tout chemin \mathbf{q} allant de \mathbf{a} à \mathbf{c} à \mathbf{b} il s'ensuit que (en choisissant pour t_c un temps t_k)

$$K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \int K(\mathbf{b}; \mathbf{c}) K(\mathbf{c}; \mathbf{a}) d\mathbf{q}_c$$

$$K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \int_{N-1} \dots \int K(\mathbf{b}; N-1) K(N-1; N-2) \dots K(1; \mathbf{a}) d\mathbf{q}_{N-1} \dots d\mathbf{q}_1$$

Il y a multiplication des amplitudes d'événements successifs, nous avons un processus marcoffien. Les $K(\mathbf{b}; \mathbf{a})$ sont les éléments d'un semi-groupe. Notons aussi $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ d'où $K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = K^*(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Nous n'avons aucune indication sur le chemin suivi pendant un intervalle de temps ε . Supposons que ce soit le chemin classique

$$S(\mathbf{q}_b \dots \mathbf{q}_k \dots \mathbf{q}_a) = \sum_{k=1}^N \bar{S}(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k-1})$$

(*) Nous rencontrerons ultérieurement des intégrales fonctionnelles

$$\int \exp \frac{i}{\hbar} F[\mathbf{q}] \mathcal{D}\mathbf{q}$$

où typiquement

$$F[\mathbf{q}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{\mathbf{q}_a}^t ds f(\mathbf{q}(t) \mathbf{q}(s))$$

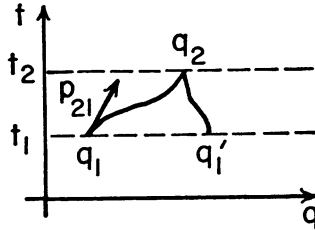
on a alors, typiquement

$$K(2; 1) = m_{2,1} \exp \frac{i}{\hbar} \bar{S}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)$$

les deux conditions « unitarité » et « propriété du semi-groupe des amplitudes » déterminent $m_k, k-1$.

UNITARITÉ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\mathbf{q}_1 t_1; \mathbf{q}_2 t_2) K(\mathbf{q}_2 t_2; \mathbf{q}'_1 t_1) d\mathbf{q}_2 = \delta(\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}_1)$$



Développons S en série de Taylor

$$\begin{aligned} \bar{S}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) &= \bar{S}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) + (q_1^\mu - q_2^\mu) \left. \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_1^\mu} \right|_{\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2} + O(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^2 \\ \partial \bar{S}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) / \partial q_1^\mu &= -p_{\mu 2,1}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \end{aligned}$$

La condition d'unitarité s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_{2,1} \right] |m_{2,1}|^2 d\mathbf{q}_2 = \delta(\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}_1)$$

Faisons le changement de variable

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2 &\rightarrow \mathbf{p}_{2,1} / 2\pi\hbar \\ d\mathbf{q}_2 &= \left[\frac{\partial(\mathbf{p}_{2,1} / 2\pi\hbar)}{\partial(\mathbf{q}_2)} \right]^{-1} d\mathbf{p}_{2,1} / 2\pi\hbar \end{aligned}$$

on obtient immédiatement (*)

$$|m_{2,1}| = \left[\frac{\partial(\mathbf{p}_{2,1} / 2\pi\hbar)}{\partial(\mathbf{q}_2)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{+\frac{l}{2}} \left| \text{Det} \left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial q_1^\mu \partial q_2^\nu} \right) \right|^{\frac{1}{2}} \quad \mu = 1, 2 \dots l$$

(*) Avant d'être utilisé dans la mesure de l'intégrale fonctionnelle de Feynman [9], ce déterminant a été introduit par J. H. Van Vleck dans l'expression générale de la fonction

PROPRIÉTÉ DE SEMI-GROUPE

$$K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \int K(\mathbf{b}; \mathbf{c})K(\mathbf{c}; \mathbf{a})d\mathbf{q}_c$$

Nous allons déterminer la phase de m en utilisant la propriété de semi-groupe dans un exemple particulier, d'une part pour simplifier l'écriture, d'autre part parce que cet exemple joue un rôle très important.

Considérons une particule libre dans un espace à l dimensions

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \frac{M}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 dt$$

$$\bar{S}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \frac{M}{2} \frac{(\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a)^2}{t_b - t_a}$$

Remarquons que c'est aussi la valeur de S calculée par le théorème de la moyenne pour un intervalle infiniment petit (c'est-à-dire sans faire l'hypothèse $S(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k-1}) = \bar{S}(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k-1})$).

Calculons la phase φ de m lorsque $t_b - t_c = t_c - t_a = \Delta t$ et $\mathbf{q}(t)$ unidimensionnel

$$m_{\Delta t} = e^{i\varphi} \left(\frac{M}{2\pi\hbar\Delta t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K(b; a) = m_{2\Delta t} \exp \frac{i}{\hbar} \frac{M}{2} \frac{(q_b - q_a)^2}{2\Delta t}$$

$$\int K(b; c)K(c; a)dq_c = (m_{\Delta t})^2 \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{M}{2} \frac{1}{\Delta t} [(q_b - q_c)^2 + (q_c - q_a)^2] \right\} dq_c$$

$$= (m_{\Delta t})^2 \left(\frac{i\pi\hbar\Delta t}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \frac{i}{\hbar} \frac{M}{2} \frac{(q_b - q_a)^2}{2\Delta t}$$

Pour satisfaire la propriété des semi-groupes, il faut choisir $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

En conclusion

$$m_{k,k-1} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar i} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \text{Det} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial q_k^\mu \partial q_{k-1}^\nu} \right|^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\text{Det} \left(\frac{1}{i\hbar} \bar{S}_{,\mu\nu} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

en notation abrégée.

d'onde à l'approximation W. B. K. [31]. Il a montré en particulier que ce déterminant satisfait une équation de continuité; avec nos notations

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (m\dot{\mathbf{q}}) = 0$$

où les indices $k, k-1$ sont sous-entendus, cette équation étant satisfaite pour les variables d'indice k : t_k, q_k, \dot{q}_k et les variables d'indice $k-1$.

Produit infini.

$$\mathcal{D}\mathbf{q} = \prod_{k=1}^N \delta(\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_N) m_{k,k-1} d\mathbf{q}_k$$

Si à chaque valeur du temps t_k nous faisons le changement de variable :

$$\mathbf{q}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k, k-1} |ih$$

le jacobien

$$\frac{\partial(\mathbf{p}_{1,0}/ih, \mathbf{p}_{2,1}/ih, \dots, \mathbf{p}_{N,N-1}/ih)}{\partial(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_N)} = \prod_{k=1}^N \frac{\partial(\mathbf{p}_{k,k-1}/ih)}{\partial(\mathbf{q}^k)} = \prod_{k=1}^N m_{k,k-1}$$

A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ avec $N\varepsilon = \text{constant}$, on peut dire que le jacobien est le jacobien fonctionnel $\frac{\partial[\mathbf{p}/ih]}{\partial[\mathbf{q}]}$ correspondant à un changement de description du chemin, $\mathbf{q}(t)$ étant une description ponctuelle d'un chemin partant de \mathbf{a} , $\mathbf{p}(t)$ étant la description tangentielle de ce même chemin. On peut écrire

$$\mathcal{D}\mathbf{q} = \delta(q_b - q_N) \sqrt{\frac{\partial[\mathbf{p}/ih]}{\partial[\mathbf{q}]}} \prod_t d\mathbf{q}$$

Nous pressentons que lorsqu'il n'est pas possible de passer les variables $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ aux variables \mathbf{q}, \mathbf{p} , c'est-à-dire lorsque le système possède des contraintes $f(q, \dot{q}) = 0$ l'étude de la mesure présentera des difficultés nouvelles, nous les étudierons au cours du chapitre sur l'intégrale de Feynman en théorie des champs.

AMPLITUDE D'UNE PARTICULE LIBRE. MESURE DE WIENER

Posons

$$K_w(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \left(\frac{M}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \frac{i M}{\hbar} \frac{|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a|^2}{2(t_b - t_a)} = \int e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}}[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]} \mathcal{D}\mathbf{q}$$

l'amplitude d'une particule libre.

1. Étudions K_w lorsque la masse M est imaginaire $iM < 0$.

$K_w(\mathbf{b}; \mathbf{a})d\mathbf{q}_b$ est la probabilité qu'une particule animée d'un mouvement brownien (constante de diffusion $D = \frac{i\hbar}{2M}$) partant de \mathbf{q}_a au temps t_a soit dans l'intervalle $(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_b + d\mathbf{q}_b)$ au temps t_b . L'intégrale de Wiener d'une fonctionnelle $F[q]$ s'écrit [15]

$$\begin{aligned} Pr_a[F] &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N\varepsilon = \text{const.}}} \int_{\Omega} F(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_N) K_w(N; N-1) \dots K_w(1; \mathbf{a}) d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \\ &= \int_{\Omega} F[\mathbf{q}] Pr_a[d\mathbf{q}] \end{aligned}$$

Par suite

$$Pr_a[F] = \int d\mathbf{q}_b \int F[\mathbf{q}] e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}}[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]} \mathcal{D}\mathbf{q}$$

La « mesure » de l'intégrale de Feynman est donc :

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}}[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]\right) \mathcal{D}\mathbf{q}$$

L'intégration sur la variable finale $d\mathbf{q}_b$ enlève beaucoup d'intérêt à l'expression $Pr_a[F]$ pour le physicien qui a surtout besoin de connaître $K(\mathbf{b}; \mathbf{a})$ en tant que fonction des variables finales \mathbf{q}_b . L'intégrale de Wiener élaborée pour l'étude du mouvement brownien est une variable du point de départ \mathbf{a} : $Pr_a[F]$ implique une intégration sur la variable finale $d\mathbf{q}_b$ et pas d'intégration sur la variable initiale $d\mathbf{q}_a$. Le physicien par contre, ne désire pas intégrer sur $d\mathbf{q}_b$, mais l'intégration sur $d\mathbf{q}_a$ est souvent utile pour résoudre le problème de Cauchy suivant :

Étant donné les données de Cauchy $\Phi(\mathbf{q}_a)$ de la fonction d'onde $U(\mathbf{q}, t)$ au temps $t = t_a$, quelle est la fonction d'onde au temps t ? Or une fonction d'onde n'est autre qu'une amplitude de Feynman considérée comme fonction des seules variables finales (*). La solution du problème de Cauchy

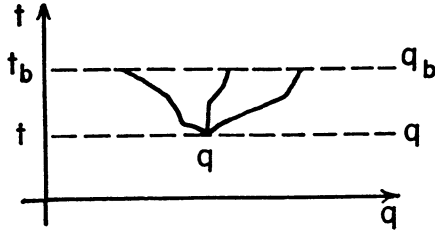
(*) De cette relation entre la fonction d'onde et l'amplitude de Feynman, on déduit immédiatement que K satisfait la même équation que la fonction d'onde

$$\frac{i\hbar\partial}{\partial t} K(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_a t_a) - HK(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_a t_a) = 0$$

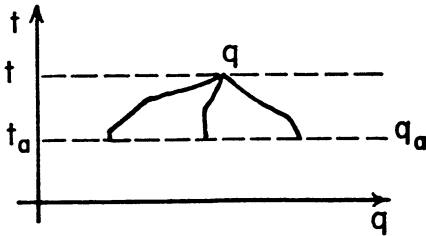
équation que l'on peut aussi vérifier directement; en fait, le plus souvent K désigne l'ampli-

est donc, par application de la règle de multiplication d'amplitudes successives.

$$U(\mathbf{q}, t) = \int K(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_a t_a) \Phi(\mathbf{q}_a) d\mathbf{q}_a$$



situation pour le mouvement brownien



situation pour le problème de Cauchy

or l'expression qui nous intéresse

$$\int K_w(\mathbf{q}, \Delta t; \mathbf{q}_a, 0) \Phi(\mathbf{q}_a) d\mathbf{q}_a \quad \text{où} \quad \Delta t = t_b - t_a$$

tude dont les conditions aux limites sont $K(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_a t_a) = 0$ pour $t < t_a$ c'est-à-dire l'amplitude $g = \theta(t, t_a) K(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_a t_a)$

$$i\hbar \frac{\partial g}{\partial t} - Hg = i\hbar \delta(t - t_a) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_a)$$

compte tenu du fait que

$$K(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_a t_a) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_a).$$

Sauf précision contraire, conformément à l'usage, nous appellerons g indifféremment K ou g et nous parlerons indifféremment de l'amplitude ou du propagateur de Feynman lorsqu'il est inutile de préciser autrement.

est fonction de $|\mathbf{q} - \mathbf{q}_a|^2$ et par suite égale à

$$\int K_w(\mathbf{q}_b, \Delta t; \mathbf{q}, 0) \Phi(\mathbf{q}_b) d\mathbf{q}_b$$

expression utilisée par Nelson dans son étude de l'intégrale de Feynman. Dans ses notes de cours [29, p. 458] Tarski appelle $K(\mathbf{b}; \mathbf{a})$ une « intégrale de Wiener conditionnelle ».

2. M réel.

Nelson a montré que l'intégrale de Wiener reste définie lorsque la masse devient réelle (sauf pour un ensemble de valeurs réelles de M de mesure nulle); la preuve est faite en deux étapes : *a*) remplacer la masse imaginaire par une masse complexe ; *b*) faire tendre la masse complexe $M + i\mu$ vers M non tangentiellement.

Intuitivement, ce théorème peut être rendu plausible en remarquant que le produit de convolution de deux gaussiennes d'écart quadratique moyen σ et τ est une gaussienne d'écart quadratique moyen $(\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}$ que σ et τ soit réel ou imaginaire. Les intégrales qui apparaissent dans le produit de convolution dans les deux cas sont les mêmes; en effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \exp i \frac{\pi}{4} \frac{a}{|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia'x^2} dx = \sqrt{\frac{i\pi}{a'}} \quad \text{pour } a' > 0$$

où le plan complexe de a a été coupé le long du demi-axe négatif et où la racine positive est choisie pour a positif.

Par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{pour } a \text{ réel}$$

résultat que l'on peut obtenir à partir du précédent en faisant $a' = ia$. Or l'intégrale infinie

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N\varepsilon = \text{const.}}} \int \prod_{k=1}^N K_w(k, k-1) d\mathbf{q}_k$$

est un produit infini de convolution de gaussiennes d'écart quadratique moyen $\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$.

**AMPLITUDE D'UNE PARTICULE
DANS UN POTENTIEL V; PRODUIT ORDONNÉ;
PRINCIPE VARIATIONNEL DE SCHWINGER**

$$S = S_{\text{libre}} - \int_{t_a}^{t_b} V(\mathbf{q}(t), t) dt$$

$$U(\mathbf{q}, t) = \int_{\Omega} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V dt} \Phi(\mathbf{q}_a) Pr_{\mathbf{q}} d\mathbf{q}$$

Nelson justifie cette expression de la façon suivante :

Partant de l'intégrale de Wiener (M imaginaire) pour les marches aléatoires rappelant la généralisation par Kac pour la diffusion de la chaleur, il précise les conditions que V doit remplir pour que cette intégrale existe, à savoir : « Il existe un ensemble ferme F dans \mathbb{R}^l de mesure de Lebesgue zéro tel que V soit continu et réel dans le complément de F ». Dans ce cas

$$U_{M,V}^{\Delta t} \Phi = \lim_{N \rightarrow 0} \left(K_M^{\frac{\Delta t}{N}} M_V^{\frac{\Delta t}{N}} \right)^N \Phi$$

où

$$K_M^{\Delta t} \Phi = \int K_w(\mathbf{q}, \Delta t; \mathbf{q}_a, 0) \Phi(\mathbf{q}_a) d\mathbf{q}_a$$

$$M_V^{\Delta t} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta t V\right)$$

existe et converge vers U (\mathbf{q}, t).

Ce résultat reste valable lorsque M devient réel dans les mêmes conditions que l'amplitude d'une particule libre.

De plus $\{U_{M,V}^{\Delta t}\}$ est un semi-groupe fortement continu. Revenons au noyau K (\mathbf{b}, \mathbf{a})

$$K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V(\mathbf{q}(t), t) dt\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}}\right) \mathcal{D}\mathbf{q}$$

Calcul de K par la méthode de perturbation.

Lorsque l'intégrale temporelle du potentiel le long d'un chemin (assez voisin du chemin classique) est petite par rapport à \hbar on peut développer K en puissance de la constante de couplage (sous-entendue dans $V = e\mathcal{U}$)

$$K = K_w + K_1 + \dots$$

où

$$K_n = \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int \left(\int_{t_a}^{t_b} V(\mathbf{q}(t), t) dt \right)^n \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}}\right) \mathcal{D}\mathbf{q}$$

A titre d'exemple calculons K_2 .

En intervertissant l'ordre des intégrations (*) (pour alléger l'écriture nous pouvons sous-entendre la dépendance éventuelle de V sur le temps)

$$\begin{aligned} K_2 &= -\frac{1}{2\hbar^2} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} ds \int V(\mathbf{q}(t))V(\mathbf{q}(s)) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}}\right) \mathcal{D}\mathbf{q} \\ &= -\frac{1}{2\hbar^2} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q}_t \int_{t_a}^{t_b} ds \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q}_s \\ &\quad K_w(\mathbf{q}_b t_b ; \mathbf{q}_t t) V(\mathbf{q}_t) K_w(\mathbf{q}_t t ; \mathbf{q}_s s) V(\mathbf{q}_s) K_w(\mathbf{q}_s s ; \mathbf{q}_a t_a) \end{aligned}$$

Sur cette expression de K_2 et des expressions analogues pour K_n on peut « lire » les fameuses règles de Feynman : propagateur des particules libres, vertex d'interaction, intégrales $\int d\mathbf{q}_s ds$ à chaque vertex [5]. La simplicité de ces règles permet, pour le même labeur, de pousser les résultats à un ou deux ordres supérieurs aux résultats obtenus par les autres formalismes.

Produit ordonné.

L'intégration de Feynman ordonne les produits d'opérateur chronologiquement; ainsi en reproduisant partiellement l'analyse de K_2 on obtient :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{q}(t)\mathbf{q}(s) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{libre}}\right) \mathcal{D}\mathbf{q} &= \langle b | Q(t)Q(s) | a \rangle && \text{si } t > s \\ &= \langle b | Q(s)Q(t) | a \rangle && \text{si } s > t \\ &= \langle b | TQ(s)Q(t) | a \rangle && \text{par définition de } T \end{aligned}$$

$Q(t)$ est l'opérateur correspondant à la fonction $q(t)$.

(*) Remarque : Étant donné que $K(q_i t; q_j s) = 0$ pour $t < s$

$$\frac{1}{2!} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} ds \dots = \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^t ds \dots$$

et des relations analogues pour K_n .

Principe variationnel de Schwinger [29].

Variation de l'amplitude $\langle b | a \rangle$ lorsque l'action varie

$$\begin{aligned}\langle b | a \rangle &= \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]\right) \mathcal{D}\mathbf{q} \\ \delta \langle b | a \rangle &= \int \frac{i}{\hbar} \delta S \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]\right) \mathcal{D}\mathbf{q} \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle b | T \delta S | a \rangle\end{aligned}$$

Cette relation est le point de départ de nombreux et fort beaux travaux en théorie des champs.

FONCTIONNELLE ALÉATOIRE IMAGINAIRE

Nous venons d'étudier des expressions du type suivant :

$$\int F[\mathbf{q}] e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]} \mathcal{D}\mathbf{q} = \langle b | \text{TF}[\mathbf{Q}] | a \rangle$$

Ces expressions généralisent le concept de moyenne dans deux directions :

Théorie de Laplace	Intégrale de Feynman
Probabilité	↔ Amplitude de probabilité
Fonction aléatoire	↔ Fonctionnelle aléatoire

Exemple : moyenne

à la variable aléatoire on attache une probabilité $P(x)$ (fonction aléatoire réelle) et on calcule

au chemin (à la fonction) aléatoire on attache une amplitude de probabilité (fonctionnelle aléatoire imaginaire)

$\exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]\right)$ et on calcule

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \quad \langle b | \text{TQ} | a \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{q} \exp \frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] \mathcal{D}\mathbf{q}$$

Toutes les notions et les propriétés des fonctions aléatoires réelles peuvent être généralisées aux fonctionnelles aléatoires imaginaires.

CALCUL DE K EN COORDONNÉES INTRINSÈQUES; APPROXIMATION W. B. K

Étant donné le rôle particulier joué par le chemin classique $\bar{\mathbf{q}}$, il est naturel de choisir le point $\bar{\mathbf{q}} \in \Omega$ comme origine dans Ω , et de calculer K dans ce système de coordonnées que nous appellerons désormais coordonnées intrinsèques.

Un chemin arbitraire

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$$

$$\mathcal{D}\mathbf{q} = \mathcal{D}\boldsymbol{\eta}$$

$$S[\mathbf{q}] = S[\bar{\mathbf{q}}] + \delta S \Big|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \delta^2 S \Big|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}} + \dots \quad \text{avec} \quad S[\bar{\mathbf{q}}] \equiv \bar{S} \quad \text{et} \quad \delta S \Big|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}} = 0$$

et par un abus d'écriture commode et fréquemment utilisé :

$$S[\mathbf{q}] = \bar{S} + \frac{1}{2} \delta^2 S[\bar{\mathbf{q}}] + \dots$$

Dérivées fonctionnelles.

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta q^\mu(t)} \eta^\mu(t) dt$$

$$\delta^2 S = \int \frac{\delta^2 S}{\delta q^\mu(t) \delta q^\nu(s)} \eta^\mu(t) \eta^\nu(s) dt ds$$

Il est commode d'introduire la notation suivante pour les dérivées fonctionnelles

$$\frac{\delta^2 S[\mathbf{q}]}{\delta q^\mu(t) \delta q^\nu(s)} = S_{,ij}$$

les indices latins i, j, k, \dots représentent tous les indices, ici l'indice discontinu μ et l'indice continu t . Il ne peut pas y avoir de confusion entre par exemple $\bar{S}_{,\mu\nu}$ et $S_{,ij}$ (indépendamment de la distinction entre indices grecs et indices latins), car l'action classique n'est pas une fonctionnelle des chemins mais une fonction des points initiaux et finaux \mathbf{a} et \mathbf{b} ; $\bar{S}_{,\mu\nu}$ ne peut donc pas

être une dérivée fonctionnelle seconde, il ne peut être qu'une dérivée seconde ordinaire. Sommation sur un indice continu implique une intégrale.

Ainsi :

$$S_{,i} = \frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}} \right) \quad \delta S = S_{,i} \eta^i = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}} \right) \right) \eta^{\mu}(t) dt$$

$$S_{,ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^{\mu} \partial q^{\nu}} \delta(t, t') + \frac{\partial^2 L}{\partial q^{\mu} \partial \dot{q}^{\nu}} \frac{d}{dt} \delta(t, t') - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{\mu} \partial q^{\nu}} \delta(t, t') + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{\mu} \partial \dot{q}^{\nu}} \frac{d}{dt} \delta(t, t') \right)$$

$$\equiv \mathcal{G}_{\mu\nu} \delta(t, t')$$

où $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ est un opérateur différentiel linéaire

$$\begin{aligned} \delta^2 S &= S_{,ij} \eta^i \eta^j \\ &= \int (\mathcal{G}_{\mu\nu} \delta(t, t') * \eta^{\mu}(t) \eta^{\nu}(t')) dt \quad \text{où la convolution est faite sur } t' \\ &= \int \mathcal{G}_{\mu\nu} \eta^{\mu} \eta^{\nu} dt \\ &= \int \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\mu} \partial q^{\nu}} \eta^{\mu} \eta^{\nu} + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{\mu} \partial q^{\nu}} \dot{\eta}^{\mu} \eta^{\nu} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{\mu} \partial \dot{q}^{\nu}} \dot{\eta}^{\mu} \dot{\eta}^{\nu} \right) dt \end{aligned}$$

résultat que l'on aurait d'ailleurs pu écrire immédiatement en variant indépendamment les q et les \dot{q} .

Intégrale de Feynman en coordonnées intrinsèques.

Les déviations $\eta(t)$ par rapport au chemin classique $\bar{q}(t)$ satisfont aux conditions aux limites suivantes :

$$\eta(t_b) = \eta(t_a) = 0$$

L'intégrale sur les variables η est donc indépendante de q_b et q_a , c'est une intégrale sur des chemins $\eta(t)$ allant de zéro à zéro pendant le temps $t_b - t_a$. Une méthode de calcul de $\int F[\eta] \mathcal{D}\eta$ consiste à poser

$$\eta(t) = \sum a_n \sin \frac{n\pi t}{t_b - t_a}$$

et à considérer un chemin donné comme une fonction des $\{a_n\}$.

Approximation W. B. K.

L'intégration fonctionnelle de Feynman lorsque le développement de l'action autour de l'action classique est limité à la seconde variation

$$S[\mathbf{q}] = \bar{S} + \frac{1}{2} \delta^2 S[\bar{\mathbf{q}}]$$

est toujours possible [9].

\bar{S} ne dépend pas de la fonction d'intégration $\boldsymbol{\eta}$ et $\delta^2 S$ est une fonctionnelle quadratique de la fonction d'intégration $\boldsymbol{\eta}$: lors de la division du temps en intervalles ε , et de la décomposition correspondante de $\delta^2 S$ en intégrales du temps de t_{k-1} à t_k , les fonctions $\boldsymbol{\eta}(t)$ et $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$ sont remplacées par leurs valeurs moyennes, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\eta}_{k-1})$ et $\frac{1}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{\eta}_{k-1})$; par suite $\delta^2 S[\bar{\mathbf{q}}, k, k-1]$ est une fonction quadratique des variables d'intégration $\boldsymbol{\eta}_{k-1}$ et $\boldsymbol{\eta}_k$, sa dérivée seconde par rapport à $\boldsymbol{\eta}_{k-1}$ et $\boldsymbol{\eta}_k$ qui apparaît dans l'expression de la mesure ne dépend pas des variables d'intégration. L'intégrale fonctionnelle de Feynman se réduit à une convolution infinie de gaussiennes. Le résultat obtenu avec cette approximation est identique aux résultats obtenus par la méthode W. K. B. [9].

CARACTÉRISTIQUES DES CHEMINS $\mathbf{q}(t)$

Les actions qui contribuent à l'intégrale fonctionnelle sont celles pour lesquelles $S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] \approx \hbar$. Posons $t_b - t_a = \Delta t$, $\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a = \Delta \mathbf{q}$. Pour Δt suffisamment petit, c'est le terme $S_{\text{libre}} = M(\Delta \mathbf{q})^2 / 2\Delta t$ qui domine, c'est-à-dire les chemins tels que

$$\frac{M(\Delta \mathbf{q})^2}{2\Delta t} \approx \hbar \quad \Delta \mathbf{q} \approx \left(\frac{\hbar \Delta t}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la vitesse moyenne le long de ces chemins est

$$\frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta t} \approx \left(\frac{\hbar}{M\Delta t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

elle tend vers l'infini quand $\Delta t \rightarrow 0$ les chemins ne sont pas différentiables. Nous retrouvons les caractéristiques des marches aléatoires du mouvement brownien. Notons que dans les développements en puissance de Δt , les

termes d'ordre $(\Delta \mathbf{q})^2$ sont du même ordre de grandeur que Δt . Cette propriété de « mouvement brownien submicroscopique » a été analysée par plusieurs auteurs [33] [34].

CHEMINS DÉFINIS SUR UNE VARIÉTÉ PSEUDO-RIEMANIENNE

Jusqu'à présent $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^l$ l'espace euclidien à l -dimensions. Dorénavant $\mathbf{q}(t) \in M$ où M est une variété pseudo-riemmanienne à l -dimension avec métrique $g_{\mu\nu}$.

La généralisation (*) de la mesure est évidente

$$\bar{S}_{\text{libre}}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \frac{M\sigma(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_a)}{t_b - t_a}$$

2σ = carré de la distance géodésique

$$K_w(k, k-1) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{l}{2}} |\text{Det } \bar{S}_{\text{libre}, \mu\nu}| \exp \frac{i}{\hbar} \bar{S}_{\text{libre}}(k, k-1)$$

$\bar{S}_{\text{libre}, \mu\nu}$ est la seconde dérivée covariante de \bar{S}_{libre} , dérivée une fois par rapport à q_k^μ , une fois par rapport à q_{k-1}^ν .

K_w ainsi défini est-il le propagateur associé à l'équation de Schrödinger avec

$$H = \frac{-1}{2M} \Delta$$

où Δ est le laplacien opérant sur une densité scalaire

$$\Delta = g^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial q^\mu} g^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} g^{-\frac{1}{2}} ?$$

La question se pose, car, sur un espace courbe, l'hamiltonien quantique n'est défini qu'à une constante additive près, proportionnelle, par raison de dimensions à $\hbar^2 R|M$

$$H_\gamma = H + \gamma \hbar^2 R|M$$

(*) Notons que dans certains travaux K_w est scalaire [12] et dans d'autres travaux K_w est une densité scalaire [17] [18]. Désignons le scalaire par K_w^s

$$\int |K_w|^2 d\mathbf{q} = \int |K_w^s|^2 \sqrt{g} d\mathbf{q}$$

$$K_w = g^{\frac{1}{2}}(q_k) K_w^s(k, k-1) g^{\frac{1}{2}}(q_{k-1})$$

Nous travaillerons avec le pseudo-scalaire K_w .

où γ est une constante inconnue, e: H_γ l'hamiltonien de l'équation satisfaite par K_w

$$i\hbar \frac{\partial K_w}{\partial t} - H_\gamma K_w = i\hbar \delta(t - t_a) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_a)$$

Pour simplifier la comparaison des formalismes de Feynman et de Schrödinger dont nous aurons besoin ultérieurement, posons K'_w tel que

$$i\hbar \frac{\partial K'_w}{\partial t} - H K'_w = i\hbar \delta(t - t_a) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_a)$$

Déterminons la relation entre K_w et K'_w .

Posons (*)

$$K'_w = K_w \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i(t - t_a))^n$$

$$a_0 = 1$$

Substituons cet ansatz dans l'équation de K'_w ; en utilisant l'équation de Jacobi :

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = H\left(\frac{\partial}{\partial q}, q\right) \bar{S}$$

et l'équation de continuité du déterminant de Van Vleck $m = |\text{Det } \bar{S}_{,\mu\nu}|$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (m \bar{S}_{,\mu})_{,\mu} = 0$$

on obtient pour a l'équation suivante (*) :

$$\sigma_{,\mu} a_{1,\mu} + a_1 = \frac{1}{2M} D^{-\frac{1}{2}} (D^{\frac{1}{2}})_{,\mu} a_1$$

$$D \equiv g^{-\frac{1}{2}} |\text{Det } \sigma_{,\mu\nu}| g'^{-\frac{1}{2}}$$

(*) Référence [17], équation 17.54. Avec nos notations l'équation générale de récurrence pour a_n (équation 17.57) s'écrit

$$\sigma^{,\mu} a_{n+1,\mu} + (n+1) a_{n+1} = \frac{1}{2M} D^{-\frac{1}{2}} (D^{\frac{1}{2}} a_n)_{,\mu} a_n$$

Pour le problème que nous considérons il suffit de calculer limite a_i .

$t-t_a \rightarrow 0$

en utilisant les limites pour $t - t_a \rightarrow 0$ des dérivées covariantes (jusqu'à la quatrième dérivée) de la distance géodésique σ on obtient

$$\limite_{\varepsilon \rightarrow 0} a_1 = \pm \frac{\hbar R}{12M}$$

(le signe dépend de la convention faite pour la courbure R ; avec les conventions [17] utilisées dans le paragraphe suivant $a_1 = + \hbar R / 12 M$).

$$K'_w = \left(1 + i\varepsilon \frac{\hbar R}{12M} \right) K_w$$

$$K_w = e^{-i\varepsilon \frac{\hbar R}{12M}} K'_w$$

$$H_y = H + \frac{\hbar^2 R}{12M}$$

CHEMINS DÉFINIS SUR UNE VARIÉTÉ NON HOMOTOPIQUEMENT NULLE

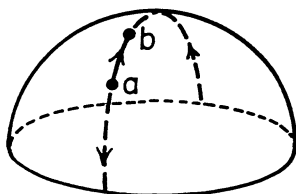
Nous avons d'abord considéré des chemins tels que $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^l$ nous avons ensuite généralisé cette étude au cas $\mathbf{q}(t) \in M$ où M est une variété pseudo-riemannienne, nous allons maintenant étudier le cas où les chemins $\mathbf{q}(t)$ entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} peuvent être dans différentes classes d'homotopie [26].

Pour fixer les idées considérons un système dont les configurations $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$, c'est-à-dire par exemple une toupie, ou une particule à spin. La caractérisation d'une particule à spin par un élément de $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ est justifiée soit par l'étude de F. Bopp et R. Haag [39], soit par l'assimilation du spin à un 2-courant impair [40].

Pour une particule libre l'amplitude d'un chemin dans $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ est le produit de l'amplitude dans \mathbb{R}^3 que nous avons déjà étudiée et de l'amplitude du chemin dans $\text{SO}(3)$. Nous allons donc nous borner ici à l'étude de l'amplitude d'un chemin défini sur $\text{SO}(3)$ c'est-à-dire sur une 3-sphère où les antipodes définissent le même point (espace projectif \mathbb{P}^3).

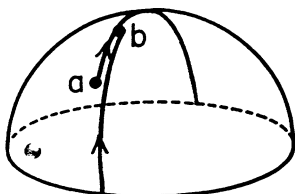
Géodésiques sur $\text{SO}(3)$.

Il y a deux classes d'homotopie sur $\text{SO}(3)$: le chemin en trait plein est homotopiquement équivalent à zéro. Le chemin en pointillé n'est pas homotopiquement équivalent au chemin en trait plein.

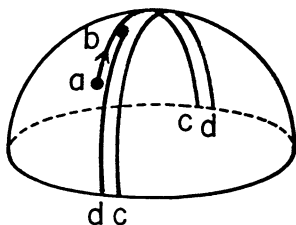


Soit $\{q^I\}$ la classe des chemins homotopiquement équivalents à zéro (classe I) et $\{q^{II}\}$ l'autre classe (classe II).

Soit Γ_0 la longueur de la géodésique de a à b dans la classe I, prise le long du plus petit arc (a, b) . L'échelle est choisie de telle sorte que la longueur de la géodésique soit égale à l'angle de rotation.



Les géodésiques de la classe II sont $\{\Gamma_0 = 2n\pi; n \text{ impair}\}$.



Les géodésiques de la classe I sont $\{\Gamma_0 + 2n\pi; n \text{ pair}\}$ comme on le voit facilement en déplaçant c vers d . Nous pouvons calculer

$$K^I = \int e^{\frac{i}{\hbar} S[q^I, b, a]} \mathcal{D}q^I \quad \text{et} \quad K^{II} = \int e^{\frac{i}{\hbar} S[q^{II}, b, a]} \mathcal{D}q^{II}$$

suivant la prescription habituelle de Feynman, mais nous n'avons pas d'indication sur la phase relative entre les chemins de classe I et les chemins de classe II.

Nous allons déterminer cette phase de la façon suivante :

— Calculer K sur le groupe de recouvrement de $SO(3)$ où tous les chemins sont homotopiquement équivalents à zéro.

— Calculer K par le formalisme de Schrodinger pour avoir un élément de comparaison.

— Analyser les résultats obtenus.

Géodésiques sur $SU(2)$.

Le groupe de recouvrement de la « demi 3-sphère » $SO(3)$ est la 3-sphère $SU(2)$. Prenons pour coordonnées dans $SO(3)$ les angles d'Euler dont la métrique et, par suite, le lagrangien d'une particule libre, sont particulièrement simple

$$\varepsilon = \{ \varphi, \theta, \psi; \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi < \pi \}$$

$$g_{\theta\theta} = g_{\varphi\varphi} = g_{\psi\psi} = 1 \quad g_{\varphi\psi} = g_{\psi\varphi} = \cos \theta \quad R = \frac{3}{2}$$

Nous pouvons également utiliser les angles d'Euler comme coordonnées de $SU(2)$ mais alors φ peut prendre toutes les valeurs de 0 à 2π .

Dans $SO(3)$ il y a une correspondance bi-univoque entre une rotation physique et les valeurs des angles d'Euler définissant cette rotation.

Dans $SU(2)$, deux ensembles d'angles d'Euler, correspondant à des antipodes, correspondent à la même rotation physique.

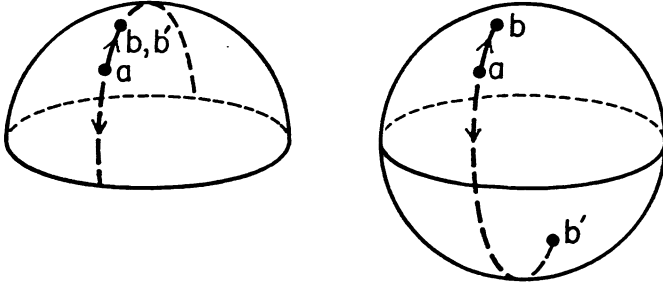
L'opérateur rotation d'un angle α autour d'un axe \hat{n} peut être représenté par la matrice

$$R(\alpha, \hat{n}) = \exp \left[-i\alpha \hat{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right]$$

La rotation $(2\pi - \alpha, -\hat{n})$ est la même rotation physique que (α, \hat{n}) il ne lui correspond pas d'élément dans $SO(3)$, il lui correspond un élément dans $SU(2)$ et l'opérateur rotation correspondant.

$$R(2\pi - \alpha, -\hat{n}) = -R(\alpha, \hat{n})$$

Supposons que $R(\alpha, \hat{n})$ transforme le système de la configuration \mathbf{a} à la configuration \mathbf{b} le long de Γ_0 , $R(2\pi - \alpha, -\hat{n})$ transforme le système de la configuration \mathbf{a} à la configuration appelée $\mathbf{b}' \in SU(2)$; \mathbf{b} et \mathbf{b}' sont aux antipodes.



$R(2\pi - \alpha, -\hat{n})$ transforme le système de la configuration \mathbf{a} à la configuration $\mathbf{b} \in SO(3)$ le long du chemin pointillé.

Les longueurs Γ des géodésiques dans $SO(3)$ et $SU(2)$ sont données respectivement par :

$$SO(3) \quad \text{classe I} \quad \cos \frac{1}{2} \Gamma = \text{Tr} U_b U_a^{-1} \quad \Gamma^I = \{ \Gamma_0 + 2n\pi ; n \text{ pair} \}$$

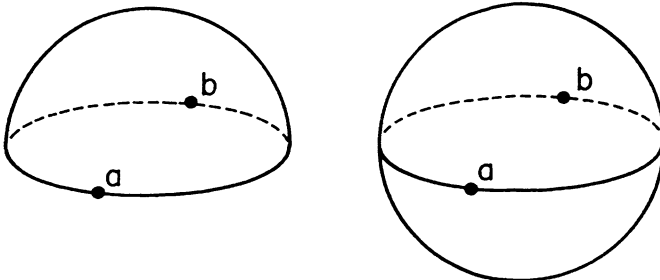
$$\text{classe II} \quad \cos \frac{1}{2} \Gamma = - \text{Tr} U_b U_a^{-1} \quad \Gamma^{II} = \{ \Gamma_0 + 2n\pi ; n \text{ impair} \}$$

$$SU(2) \quad \cos \frac{1}{2} \Gamma = \text{Tr} U_b U_a^{-1} \quad \Gamma = \{ \Gamma_0 + 4n\pi ; n \text{ entier} \}$$

où

$$U = e^{-i\varphi\sigma_z/2} e^{-i\theta\sigma_y/2} e^{-i\psi\sigma_z/2}$$

Considérons par exemple deux antipodes :



$$\Gamma_{ba}^I = 2\pi$$

$$\Gamma_{ba}^{II} = 0$$

$$\Gamma_{ba} = 2\pi$$

Amplitudes infinitésimales de Feynman sur SO(3) et SU(2).

Le lagrangien d'une particule libre sur SO(3) et SU(2) est

$$L = \frac{1}{2} I(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\psi})$$

où I est le moment d'inertie.

Le calcul de l'action classique \bar{S} peut être simplifié compte tenu de l'invariance de \bar{S} dans les rotations et l'on obtient le résultat prévisible suivant :

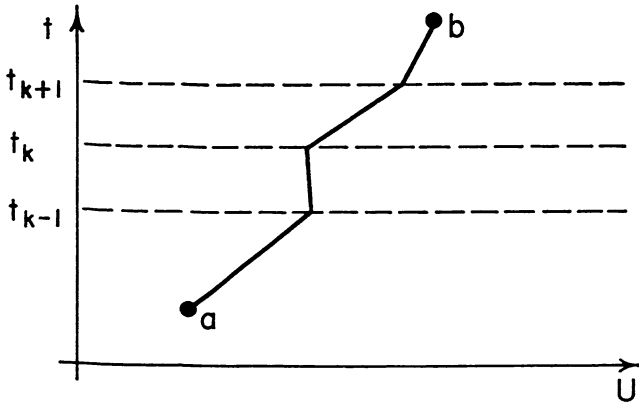
$$\bar{S} = \frac{I}{2} \frac{\Gamma^2}{\Delta t}$$

le calcul de K ne présente pas de difficultés particulières et l'on obtient pour un intervalle de temps infinitésimal ε (compte tenu de l'expression pour \bar{S} et de la valeur de la courbure $R = 3/2$) :

$$K(U_k, \varepsilon ; U_{k-1}, 0) = \left(\frac{I}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{i\hbar \varepsilon}{8I}}}{2 \sin \frac{1}{2} \Gamma_{k,k-1}} \frac{\Gamma_{k,k-1}}{e^{\frac{i}{\hbar} \bar{S}}}$$

Lors de la convolution des opérateurs infinitésimaux, la variable U_k est intégrée sur toutes les valeurs du groupe et on peut arriver au temps t_{k+1} par l'une quelconque des géodésiques

$$\begin{aligned} \Gamma_{k, k+1} &= \Gamma_0 + 2n\pi & \text{sur} & \text{SO}(3) \\ \Gamma_{k, k+1} &= \Gamma_0 + 4n\pi & \text{sur} & \text{SU}(2) \end{aligned}$$



Il convient de sommer sur toutes les possibilités même dans l'expression du propagateur infinitésimal; il est certain que cette somme sur toutes les valeurs de n comprend des chemins « non physiques » en ce sens que dans l'intervalle de temps ε , le système ne peut pas parcourir tous les chemins $\Gamma_{k, k+1}$, mais la contribution de ces longs chemins est automatiquement éliminée par l'interférence destructive de l'intégration de Feynman.

La somme sur n n'est pas définie sur $SO(3)$ puisque nous ne connaissons pas la valeur relative de la phase des chemins de classe I (n pair) et de classe II (n impair). Elle est définie sur $SU(2)$ et nous obtenons pour le propagateur infinitésimal sur $SU(2)$.

$$K_{SU(2)} = \left(\frac{I}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\hbar\varepsilon/8I} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_0 + 4n\pi}{2 \sin \frac{1}{2} \Gamma_0} \exp \left[\frac{iI(\Gamma_0 + 4n\pi)^2}{2\hbar\varepsilon} \right]$$

Amplitude de Schrödinger.

Nous allons maintenant calculer le propagateur pour un intervalle de temps fini par le formalisme de Schrödinger qui fait apparaître les relations entre $K_{SU(2)}$, $K_{SO(3)}^I$ et $K_{SO(3)}^{II}$.

L'hamiltonien H du système que nous étudions est indépendant du temps. Soit Φ_n et E_n ses fonctions propres et ses valeurs propres, l'amplitude de Feynman étant le propagateur associé à l'équation de Schrödinger est égale à

$$K(\mathbf{q}_b t_b ; \mathbf{q}_a t_a) = \sum_n \Phi_n(\mathbf{q}_b) \Phi_n^*(\mathbf{q}_a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)}$$

Il est à remarquer que si nous ne connaissons pas déjà ce résultat nous aurions pu le supposer à partir de la notion d'amplitude de la façon suivante :

$\Phi_n^*(\mathbf{q}_a)$ est l'amplitude que la particule au point \mathbf{q}_a soit dans l'état n (énergie E_n).

$e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)}$ est l'amplitude que la particule qui était dans l'état n au temps t_a soit toujours dans l'état n au temps t_b , l'hamiltonien étant indépendant du temps, il n'y a pas d'amplitude de transition d'un état n à un état différent n' .

$\Phi_n(\mathbf{q}_b)$ est l'amplitude que la particule dans l'état n soit trouvée au point \mathbf{q}_b .

L'amplitude que la particule au point \mathbf{q}_a au temps t_a soit au point \mathbf{q}_b au temps t_b , dans un état d'énergie quelconque est

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}_b t_b ; \mathbf{q}_a t_a) = \sum_n \Phi_n(\mathbf{q}_b) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)} \Phi_n^*(\mathbf{q}_a)$$

Pour le système étudié

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mathbf{I}} \Delta$$

où Δ le laplacien sur $\text{SO}(3)$ et sur $\text{SU}(2)$ est

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \psi} \right)$$

dont les fonctions propres et valeurs propres sont respectivement :

$$\Phi_{mk}^J (\text{sur } \text{SU}(2)) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} D_{mk}^{J*}(\varphi, \theta, \psi) \quad \text{où } J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$\Phi_{mk}' (\text{sur } \text{SO}(3)) = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} D_{mk}^{J*}(\varphi, \theta, \psi) \quad \text{où } J = 0, 1, 2, 3 \dots$$

J est la valeur propre du spin total.

Les D sont les matrices de représentation sur $\text{SU}(2)$ telles que

$$\begin{aligned} \sum_{m,k} D_{mk}^{J*}(\varepsilon_b) D_{mk}^J(\varepsilon_a) &= \sum_{m=-J}^J e^{im\Gamma} \\ &= \frac{\sin\left(J + \frac{1}{2}\right)\Gamma}{\sin\frac{1}{2}\Gamma} \\ E_{Jmk} &= \frac{\hbar^2}{2\mathbf{I}} J(J+1) \end{aligned}$$

Le propagateur cherché est donc

$$\mathbf{K}(\varepsilon_b \mathbf{T} ; \varepsilon_a 0) = \sum_{jmk} \Phi_{mk}^j(\varepsilon_b) \Phi_{mk}^{j*}(\varepsilon_a) \exp\left[-\frac{i\hbar\mathbf{T}}{2\mathbf{I}} J(J+1)\right]$$

on peut écrire \mathbf{K} en termes de fonction θ_3 de Jacobi et, en utilisant les pro-

priétés de θ_3 , mettre K sous une forme qui permet une comparaison directe avec l'amplitude de Feynman

$$K_{\text{SO}(3)} = \frac{-2}{\sin \frac{1}{2} \Gamma} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial \Gamma} g_+$$

$$K_{\text{SU}(2)} = \frac{1}{2} \frac{-2}{\sin \frac{1}{2} \Gamma} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial \Gamma} (g_+ + g_-)$$

où

$$\begin{aligned} g_+ &= \sum_{j \text{ entier}} \cos \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \Gamma \right] \exp \left[-\frac{i\hbar\Gamma}{2I} J(J+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{i\Gamma/2} \theta_3 \left(\frac{1}{2} \Gamma - \frac{1}{2} c, \frac{-c}{\pi} \right) \quad c = \frac{\hbar\Gamma}{2I} \\ &= \frac{1}{2} e^{ic/4} \sqrt{\frac{\pi}{ic}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{4c}(\Gamma-2\pi n)^2} e^{i\pi n} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g_- &= \sum_{j \text{ demi-entier}} \cos \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \Gamma \right] \exp \left[-\frac{i\hbar\Gamma}{2I} J(J+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{ic/4} \sqrt{\frac{\pi}{ic}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{4c}(\Gamma-2\pi n)^2} + \text{terme indépendant de } \Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\text{SU}(2)} &= \frac{1}{2} \frac{e^{i\hbar\Gamma/8I}}{2 \sin \frac{1}{2} \Gamma} \left(\frac{I}{2\pi i \hbar \Gamma} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_n [(-)^n (\Gamma + 2n\pi) + (\Gamma + 2n\pi)] e^{\frac{iI}{2\hbar\Gamma} (\Gamma + 2n\pi)^2} \\ &= \frac{e^{i\hbar\Gamma/8I}}{2 \sin \frac{1}{2} \Gamma} \left(\frac{I}{2\pi i \hbar \Gamma} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\Gamma + 4n\pi) e^{\frac{iI}{2\hbar\Gamma} (\Gamma + 4n\pi)^2} \end{aligned}$$

Pour $\Gamma = \varepsilon$ on retrouve l'amplitude de Feynman (*).

$$K_{\text{SU}(2)} = K_{\text{SU}(2)}(J \text{ entier}) + K_{\text{SU}(2)}(J \text{ demi-entier})$$

(*) Il est assez remarquable qu'une fois de plus la convolution du propagateur infinitésimal redonne le même propagateur pour des intervalles de temps fini. Le phénomène, assez fréquent, a été étudié mais les théorèmes proposés ont des failles qui mettent en doute leur validité [16]. Ce phénomène est un aspect des processus indéfiniment divisibles [32] [45].

Par ailleurs, on peut par simple lecture des expressions de $K_{SU(2)}$ pour j entier et j demi-entier établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2K_{SU(2)}(j \text{ entier}) &= K_{SO(3)}^I - K_{SO(3)}^{II} \\ 2K_{SU(2)}(j \text{ demi-entier}) &= K_{SO(3)}^I + K_{SO(3)}^{II} \end{aligned}$$

Conclusion.

Donc si dans l'intégrale de Feynman sur $SO(3)$:

- on affecte du signe moins les chemins de classe II, on obtient le propagateur de particules de spin entier;
- on affecte du signe plus tous les chemins, on obtient le propagateur de particules de spin demi-entier.

Nous avons ici un exemple intéressant d'une situation où les propriétés du système sont déterminées par les propriétés globales de la variété sur laquelle sont définie le chemin du système.

L'INTÉGRALE FONCTIONNELLE DE FEYNMAN EN THÉORIE DES CHAMPS

L'intégrale fonctionnelle de Feynmann en théorie des particules a pour base les deux principes suivants :

— loi des choix interférentiels : s'il n'est pas possible de déterminer le chemin choisi entre deux configurations données \mathbf{a} et \mathbf{b} , l'amplitude totale de la probabilité de transition de \mathbf{a} à \mathbf{b} est la somme des amplitudes associées à tous les chemins possibles;

— principe de moindre action : lorsque l'action $S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]$ fonctionnelle du chemin $\mathbf{q}(t)$ est grande par rapport à \hbar pour tout \mathbf{q} c'est-à-dire lorsque le système est classique, les seuls chemins qui contribuent à l'amplitude totale de probabilité de transition de \mathbf{a} à \mathbf{b} sont le chemin classique $\bar{\mathbf{q}}(t)$ qui minimise l'action, $S_{,i}[\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = 0$ et les chemins $\bar{\mathbf{q}}(t) + \eta(t)$ suffisamment voisins de $\bar{\mathbf{q}}(t)$ pour que $S[\bar{\mathbf{q}} + \eta] - S[\bar{\mathbf{q}}] \ll \hbar$.

Elle s'écrit

$$\begin{aligned} K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) &= \int_{\Omega} \exp \frac{i}{\hbar} S[\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] \mathcal{D}\mathbf{q} \\ \mathcal{D}\mathbf{q} &= \mathcal{M}[\mathbf{q}] \prod_t d\mathbf{q}(t) \end{aligned}$$

Les deux principes ci-dessus peuvent être immédiatement généralisés au cas de la théorie des champs, l'application $q : \mathbb{R} \rightarrow M$ devient une application $A : V^4 \rightarrow M$ de l'espace temps V^4 à une variété M qui dépend de la nature du champ A , et, la variable continue t est remplacée par la variable continue $x = \{r, t\}$ d'espace temps.

L'intégrale de Feynman s'écrit alors

$$K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \int_{\Omega} \exp \frac{i}{\hbar} S[A, \mathbf{b}, \mathbf{a}] \mathcal{D}A$$

$$\mathcal{D}A = \mathcal{M}[A] \prod_{\mu, x} dA_{\mu}(x) \equiv \mathcal{M}[A] dA$$

MESURE DANS L'ESPACE D'INTÉGRATION; CHAINES NON CAUSALES

$\mathcal{M}[q]$ a été déterminé en imposant à $K(\mathbf{b}; \mathbf{a})$ la condition d'unitarité, nous allons obtenir certaines propriétés de $\mathcal{M}[A]$ en imposant aux équations d'opérateurs déduites de l'intégrale de Feynman la condition d'hermiticité, c'est-à-dire une condition intimement liée à l'unitarité. Il serait peut-être préférable d'imposer à l'intégrale de Feynman l'obligation de conduire à des équations d'opérateurs invariante dans un changement des variables choisies pour décrire le champ [18, équation 15.11a]. Cette condition a été partiellement exploitée dans l'étude des chaînes non causales [18, équations 19.33 et 19.20], il serait intéressant de l'étudier systématiquement dans le contexte de la mesure de l'intégrale de Feynman.

Nous allons conduire le calcul de \mathcal{M} en coordonnées intrinsèques [9]; de même qu'en théorie des particules l'origine des coordonnées intrinsèques dans l'espace d'intégration Ω est le chemin classique \bar{q} tel que $S_{,i}[\bar{q}] = 0$, l'origine des coordonnées intrinsèques en théorie des champs est le champ classique φ (« background field », 18) tel que $S_{,i}[\varphi] = 0$; un champ arbitraire s'écrit $\varphi + \phi$ et ϕ est la variable d'intégration en coordonnées intrinsèques. Choisissons pour configuration initiale ($t = -\infty$) et finale ($t = +\infty$) le vide, l'amplitude de transition du vide au vide étant le matériau le plus versatile des théories des champs à partir duquel on obtient les autres amplitudes en calculant les dérivées fonctionnelles appropriées.

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle = \int \exp \frac{i}{\hbar} S[\varphi + \phi] \mathcal{D}\phi$$

Posons

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle = e^{i\omega[\varphi]} e^{-i\omega[0]}$$

de telle sorte que $\langle 0, \infty | 0, \infty \rangle \rightarrow 1$ lorsque $\varphi \rightarrow 0$, $\varphi = 0$ correspond a un espace temps plat et vide. Comme il a été montré précédemment, l'intégration de Feynman « quantifie » et « ordonne chronologiquement »

$$\int F[\phi] \exp \frac{i}{\hbar} S[\varphi + \phi] \mathcal{D}\phi = \langle 0, \infty | \text{TF}[\Phi] | 0, -\infty \rangle$$

Φ (majuscule) est l'opérateur quantique correspondant à la grandeur ϕ (minuscule), T ordonne les produits d'opérateurs chronologiquement.

Conformément aux conclusions d'une analyse des mesurages en théorie quantique des champs [42] le champ quantique est un opérateur

$$\Psi = \varphi + \Phi$$

qui obéit à l'équation du champ classique φ .

$S_{,i}[\varphi + \Phi] = 0$ (appelée par la suite équation du champ quantique).

Contrairement à l'équation du champ classique, cette équation n'est pas unique. Si l'on fait un changement dans le mode de description du champ, changement de variable $\Psi \rightarrow \Psi'$, l'équation satisfaite par Ψ' n'est pas nécessairement équivalente à l'équation satisfaite par Ψ en raison de la non-commutativité des opérateurs. Peut-on obtenir une équation unique pour les opérateurs champ à partir de l'intégrale de Feynman?

En supposant que

$$\int \frac{\delta}{\delta\phi^i} \left\{ \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\varphi + \phi] + \log \mathcal{M} \right) \right\} d\phi = 0$$

c'est-à-dire en supposant qu'aux limites d'intégration ϕ est suffisamment grand pour que l'interférence destructive des oscillations rapides de l'exponentielle assure la nullité de l'intégrale, on obtient, en utilisant la relation entre l'intégrale de Feynman et valeur moyenne d'opérateurs ordonnés chronologiquement :

$$0 = \langle 0, \infty | T \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{,i}[\varphi + \Phi] + (\log \mathcal{M})_{,i} \right\} | 0, -\infty \rangle$$

Cette relation étant vraie quels que soient les états initiaux et finaux est vraie pour l'opérateur lui-même :

$$T \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{,i}[\varphi + \Phi] + (\log \mathcal{M})_{,i} \right\} = 0$$

(appelée par la suite équation d'opérateurs de Feynman).

Nous avons maintenant deux équations pour l'opérateur champ :

- l'équation du champ quantique (ambiguë) manifestement hermitienne;
- l'équation d'opérateurs de Feynman (unique) avec un terme inconnu \mathcal{M} .

A toutes fins utiles déterminons les relations que doivent satisfaire \mathcal{M} pour que ces deux équations soient identiques

$$\begin{aligned} T(\log \mathcal{M})_{,i} &= \frac{i}{\hbar} S_{,i}[\varphi + \Phi] - \frac{i}{\hbar} T S_{,i}[\varphi + \Phi] \\ &= \frac{i}{2\hbar} S_{,ijk}(\Phi^j \Phi^k - T\Phi^j \Phi^k) + \dots \\ &= -\frac{1}{2\hbar} S_{,ijk} G^{+jk} + \dots \end{aligned}$$

où

$$G^{+jk} = -i(k, j)[\Phi^j, \Phi^k]$$

est le propagateur avancé $G^{+jk} = 0$ pour « j » ultérieur à « k ».

Les propagateurs G d'opérateurs s'expriment en termes des propagateurs g du champ classique par la relation suivante [18, équation 19.12] :

$$G[\varphi + \Phi] = g[\varphi] + g_{,i}\Phi^i + \frac{1}{2} g_{,ij}\Phi^i\Phi^j + \text{des termes compliqués}$$

On obtient (*) ainsi pour \mathcal{M}

$$\begin{aligned} T(\log \mathcal{M})_{,i} &= -\frac{1}{2}(\log \det G^+)_{,i} + \dots \\ \mathcal{M}[\varphi] &= (\det g^+)^{-\frac{1}{2}} \\ \mathcal{M}[\varphi + \Phi] &= (\det g^+)^{-\frac{1}{2}} + \dots \end{aligned}$$

Cette expression pour \mathcal{M} présente une certaine similarité avec l'expression obtenue pour \mathcal{M} en théorie des particules. Toutefois

$$\mathcal{M}[q] \sim \left(\pi \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial q^i \partial q^j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(*) En utilisant les relations :

$$\begin{aligned} \delta \log \det A &= -\text{tr}(A \delta A^{-1}) \\ (\log \det A)_{,i} &= -A^{jk}(A^{-1})_{kj},i \end{aligned}$$

Par ailleurs l'inverse de la matrice continue g^{+jk} est formellement, au signe près, $S_{,jk}/\hbar$:

$$\frac{1}{\hbar} S_{,ij} g^{+jk} = -\delta_i^k$$

Notons que $S_{,ij}$ est l'unique inverse de g^+ mais que g^+ n'est pas l'unique inverse de $S_{,ij}$.

n'a d'éléments que sur la diagonale principale (ou sur des blocs carrés le long de cette diagonale suivant la dimension de la variété sur laquelle est défini $q(t)$) alors que

$$\mathcal{M}[q] \sim (\det S_{,ij})^{\frac{1}{2}}$$

a des éléments sur la diagonale principale et les deux diagonales qui l'encadrent. L'étude de $\mathcal{M}[\varphi]$ par généralisation des résultats obtenus pour $\mathcal{M}[q]$ reste à faire. En théorie des particules le terme S_{libre} joue le rôle déterminant, il n'est pas évident, en théorie des champs, que les termes quadratiques dans la variable d'intégration suffisent à eux seuls à jouer le même rôle que S_{libre} (la présence de boucles complexes dans les diagrammes d'ordre supérieur soulève des doutes à ce sujet). Connaissant le premier terme de \mathcal{M} dans un développement par rapport au champ classique (approximation W. K. B. [9]), nous allons examiner l'influence de \mathcal{M} à cette approximation. C'est-à-dire calculer

$$e^{i\omega[\varphi]} = c \int e^{\frac{i}{\hbar} S_{,ij} \phi^i \phi^j} (\det g^+)^{-\frac{1}{2}} d\phi$$

où c est toute constante multiplicative éliminée dans la quantité d'intérêt physique

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle = e^{i\omega[\varphi]} e^{-i\omega[0]}$$

Cette intégrale de Feynman est à nouveau une convolution infinie de gaussiennes généralisant la gaussienne type

$$K^\sigma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

mais satisfaisant à la même relation fondamentale

$$K^{\sigma_1} * K^{\sigma_2} = K^{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

L'inverse de la matrice continue $S_{,ij}$ n'étant pas unique (*), il n'est pas

(*) La seconde dérivée fonctionnelle de l'action $S_{,ij}$ peut être considérée comme une matrice continue. En raison du caractère hyperbolique de la métrique d'espace-temps elle n'a pas une inverse définie uniquement. L'équation

$$\frac{1}{\hbar} S_{,ik} G^{kj} = -\delta_i^j$$

est satisfaite, entre autres, par les propagateurs avancés et retardés, par leur demi-somme, par le propagateur de Feynman. Il se trouve que le propagateur de Feynman est le seul

possible de deviner le résultat de l'intégration de Feynman simplement en identifiant l'écart quadratique moyen total $\left(\sum_i \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $\sqrt{i}(\det S_{,ij})^{-\frac{1}{2}}$.

Nous allons voir au paragraphe suivant que l'intégration de Feynman fait apparaître comme inverse de $S_{,ij}$ le propagateur particulier appelé maintenant « propagateur de Feynman » que nous désignerons par la lettre g sans autre signe distinctif. On obtient ainsi formellement

$$\begin{aligned} e^{i\omega[\varphi]} &= c \left(\frac{\det g}{\det g^+} \right)^{1/2} \\ \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle &= e^{i\omega[\varphi]} e^{-i\omega[0]} \\ &= \left(\frac{\det(1 - g_0 U)}{\det(1 - g_0^+ U)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

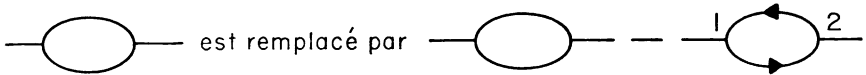
avec

$$U_{ij} = S_{,ij} - S_{,ij}[\varphi = 0]$$

A quels processus correspondent les termes introduits dans l'amplitude de transition par $\mathcal{M}[\varphi]$, c'est-à-dire par les termes en g^+ ?

Chaînes non causales.

Typiquement les termes en g^+ introduisent de nouveaux diagrammes tels que les suivants :



qui obéisse aux deux règles des matrices finies [17, p. 153] : l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique, la variation d'une matrice et de son inverse satisfont l'équation $G = -G\delta G^{-1}G$. Cette position privilégiée du propagateur de Feynman parmi les différentes inverses de la seconde dérivée fonctionnelle de l'action est due au fait qu'on peut l'obtenir, par prolongement analytique de la variable temps, à partir du propagateur unique correspondant à un système non physique (équivalent au système physique) où la métrique d'espace-temps serait elliptique. Dans cet exposé nous avons précisé la définition mathématique de l'intégrale de Feynman par prolongement analytique de la masse dans l'intégrale de Wiener, puis calculé le propagateur à partir de l'intégrale. Des travaux [15] ont été faits également sur le prolongement analytique du temps dans l'intégrale de Wiener. Une étude complète du prolongement analytique dans le temps de l'intégrale de Feynman et des expressions (propagateur, etc.) qui en découlent serait intéressante. Le propagateur de Feynman est privilégié d'un autre point de vue. Alors qu'il n'apparaît pratiquement pas en théorie classique il est le propagateur par excellence des théories quantiques. Ceci résulte immédiatement du fait qu'il est le résultat d'une intégration fonctionnelle sur tous les chemins possibles, opération qui est l'opération même de la quantification.

le propagateur d'une boucle sans flèche est g , celui des boucles avec flèches pleines est g^+ . Étant donné que g^{+jk} n'est pas symétrique en k et j , l'orientation des flèches et la postériorité sont définies. Ce dernier diagramme est une chaîne non causale car le propagateur sur l'une des branches de la boucle dit « 1 est dans le cône de lumière futur de 2 » et le propagateur sur l'autre branche de la boucle dit « 1 est dans le cône de lumière passé de 2 ». Donc 1 et 2 coïncident. Les chaînes non causales ne contribuent qu'aux termes de renormalisation, car à deux points qui coïncident, correspond dans la transformée de Fourier une fréquence infinie. La nécessité d'introduire de nouveaux diagrammes pour préserver l'unitarité du formalisme avait été reconnue par Feynman qui avait proposé une prescription analogue à l'introduction des chaînes non causales : Exprimons le propagateur de Feynman g en termes de g^+ et de $g^{(+)}$ le propagateur qui « propage les fréquences positives »

$$g = g^+ - g^{(+)}$$

$$S_{,ij}g^{+jk} = -\delta_i^k$$

$$S_{,ij}g^{(+)jk} = 0$$

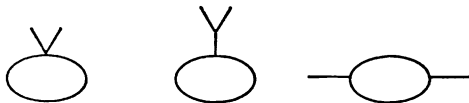
Cette dernière équation nous dit que $g^{(+)}$ propage des particules réelles (« on the mass shell ») telles que $M^2 + p^2 = 0$. Par la substitution de $g^+ - g^{(+)}$ à g , les deux diagrammes ci-dessus deviennent



une flèche ordinaire désigne le propagateur $G^{(+)}$, la flèche ne se rapporte qu'à la portion de boucle sur laquelle elle est marquée.

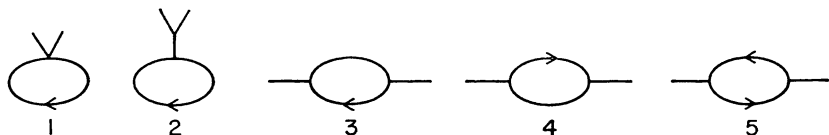
La présence de propagateurs de particules réelles est liée à la notion de « paniers de Feynman » et au « théorème de l'arbre » que nous allons introduire sur un exemple. Un panier est un ensemble de diagrammes obtenus de la façon suivante :

1° Considérons, par exemple, tous les diagrammes dont la totalité représente l'amplitude de transition d'une seule particule :

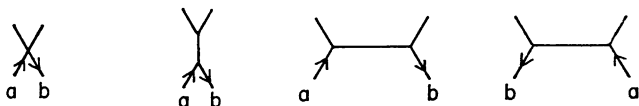


diagrammes primaires

2° Enlevons les chaînes non causales; conformément aux résultats du paragraphe précédent, on obtient les diagrammes suivants où les lignes à flèches représentent des particules réelles



3° Un panier est constitué par les diagrammes qui, par ouverture des lignes à flèches, donnent des arbres de même structure (un arbre est un diagramme qu'une seule coupure décompose en deux diagrammes indépendants). Ainsi, les diagrammes 1, 2, 3 et 4 constituent un panier; le diagramme 5 constitue un autre panier, en effet, ouvrons 1, 2, 3, 4 on obtient :



ouvrons 5 on obtient les deux arbres suivants :



Étant donné que les lignes à flèches propagent des particules réelles, en les ouvrant on obtient des diagrammes correspondant à un processus réel (physique). Par ouverture des lignes à flèche d'un panier on obtient la classe complète, à l'ordre d'approximation considéré, du même processus physique. Ainsi l'ouverture des lignes du panier { 1, 2, 3, 4 } donne la classe complète des diagrammes de diffusion de deux particules a et b , en première approximation. De plus l'amplitude totale du panier { 1, 2, 3, 4 } est égale à l'amplitude totale de la diffusion des particules a et b sommée sur toutes les quantités de mouvement des particules a et b .

Le groupement par panier est utile dans un autre contexte : lorsque le champ possède un groupe de transformations, chaque élément du panier n'est pas invariant dans le groupe considéré, mais le panier complet est invariant.

Suivant l'usage, les processus quantiques sont décrits en termes pictoriaux,

il ne faut toutefois pas perdre de vue le fait que ceux-ci ne sont qu'une transcription commode de termes obtenus par l'analyse fonctionnelle à partir des idées de la théorie de mesurage. C'est ainsi que les « paniers » ont pour origine les chaînes non causales introduites en imposant à la mesure de l'intégrale de Feynman les impératifs de la théorie du mesurage.

CHAMPS INVARIANTS DANS UN PSEUDO-GROUPE DE TRANSFORMATION; CAS ABÉLIEN : CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Lorsque l'action est invariante dans certaines transformations telles que les transformations de jauge du champ électromagnétique, les transformations Yang-Mills, les transformations de coordonnées généralisées, l'intégrale de Feynman présente des caractéristiques nouvelles. Rappelons d'abord le schéma du calcul classique de Feynman pour le champ électromagnétique dont les détails se trouvent dans son livre [1].

Notation :

$$\begin{aligned} \text{Potentiel} & \quad \{ A_\mu \} \equiv \{ \mathbf{A}, \phi \} \\ \text{courant} & \quad \{ j^\mu \} \equiv \{ \mathbf{j}, \rho \} \end{aligned}$$

Transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{4\pi c} \int \mathbf{a}_k(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \phi_k(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\ &= \int \phi(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4} \end{aligned}$$

et des expressions analogues à $\phi_k(t)$ et $\phi(\mathbf{k}, \omega)$ pour

$$\mathbf{j}_k(t), \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega), \rho_k(t) \text{ et } \rho(\mathbf{k}, \omega)$$

Jauge de Coulomb A^T telle que :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}^T &= 0 & \mathbf{a}_k^T \cdot \mathbf{k} &= 0 & \Phi_k &= 4\pi \rho_k / k^2 \\ \ddot{\mathbf{a}}_k^T &+ k^2 c^2 \mathbf{a}_k^T &= &\sqrt{4\pi} \mathbf{j}_k \end{aligned}$$

Considérons le système classique constitué de particules chargées dans un

champ électromagnétique et quantifions-le en intégrant sur tous les « chemins » possibles. Il ne s'agit donc pas du système « particules de Dirac, champ électromagnétique », mais de son approximation pour des particules non relativistes (*).

$$S[\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{A}, \Phi] = S_1[\mathbf{q}^{(i)}] = S_2[\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{A}, \phi] + S_3[\mathbf{A}, \phi]$$

le terme d'interaction S_2 est linéaire en \mathbf{A} et ϕ mais peut être arbitraire en $\mathbf{q}^{(i)}$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_i \int_{t_a}^{t_b} \frac{m^{(i)}}{2} (\dot{\mathbf{q}}^{(i)})^2 dt \\ S_2 &= \int \left(\rho \phi - \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right) dr dt \\ &= \sum_i e^{(i)} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \phi(\mathbf{q}^{(i)}(t), t) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{q}}^{(i)}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}^{(i)}(t), t) \right\} dt \\ S_3 &= \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left| \nabla \phi + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right\} dr dt \end{aligned}$$

Dans la jauge de Coulomb, on peut regrouper les termes de S de telle sorte que

$$S = \{ S_1[\mathbf{q}^{(i)}] + S_{\text{coulomb}}[\mathbf{q}^{(i)}] \} + S_{\text{int}}[\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{A}^T] + S_{\text{rad}}[\mathbf{A}^T]$$

On peut alors poursuivre le calcul de l'intégrale de Feynman soit en intégrant d'abord sur $\mathcal{D}\mathbf{A}^T$, soit en intégrant d'abord sur $\mathcal{D}\mathbf{q}$.

Nous allons intégrer S sur $\mathcal{D}\mathbf{A}^T$ pour mettre en évidence certains aspects du champ électromagnétique

$$S_{\text{int}} + S_{\text{rad}} = \sum_k \int_{t_a}^{t_b} \left(\sqrt{4\pi} (\mathbf{j}_k^* \cdot \mathbf{a}_k^T + \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{a}_k^{*T}) + \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{a}}_k^{*T} \cdot \mathbf{a}_k^T - \frac{k^2 c^2}{2} \mathbf{a}_k^{*T} \cdot \mathbf{a}_k^T \right) \right) dt$$

le champ est représenté par un ensemble d'oscillateurs harmoniques forcés.

C'est l'intégration $\int \mathcal{D}\mathbf{A}^T$ qui « quantifie » les oscillateurs. L'intégrale

(*) L'intégrale fonctionnelle de Feynman présente encore des difficultés dans le cas des particules de Dirac. Les travaux récents de Schulman [26] sur l'intégrale de Feynman pour les particules à spin non relativistes et les travaux de Berezin [20] sur les fonctionnelles de variables anticommutatives ont résolu les difficultés essentielles et nous devrions pouvoir maintenant traiter les particules de Dirac par l'intégrale fonctionnelle.

$\int \exp \frac{i}{\hbar} (S_{\text{int}} + S_{\text{rad}}) \mathcal{D}\mathbf{A}^T$ est une intégrale infiniment multiple du type intégrale de Wiener. Elle n'est en fait qu'un produit — d'un nombre infini de facteurs — de convolution de gaussiennes et peut être calculée analytiquement. Il suffit de faire le calcul pour le cas où le champ est à l'état fondamental dans les configurations \mathbf{a} et \mathbf{b} (l'énergie d'un état sans photon est ajustée à zéro).

$$\int \exp \frac{i}{\hbar} (S_{\text{int}} + S_{\text{rad}}) \mathcal{D}\mathbf{A}^T = \exp \left(- \sum_{\mathbf{k}} \frac{\pi}{|\mathbf{k}| \hbar c} \iint \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^T(t) \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^T(s) e^{-\tau |\mathbf{k}| c |t-s|} d\tau ds \right) \\ \equiv \exp \frac{i}{\hbar} X[\mathbf{q}]$$

L'expression $X[\mathbf{q}]$ appelle plusieurs remarques :

1° Ce n'est plus, comme les fonctionnelles $S[\mathbf{q}]$ une intégrale simple du temps. $X[\mathbf{q}]$ ne jouit pas des propriétés additives de $S[\mathbf{q}]$ dans le temps ($S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = S[\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + S[\mathbf{q}, \mathbf{c}, \mathbf{a}]$ pour tout chemin \mathbf{q} allant de \mathbf{a} à \mathbf{b} par \mathbf{c}).

La notion de fonction d'onde des particules, à partir de laquelle on peut calculer les probabilités futures de ces particules, n'existe plus. Cette situation apparaît déjà lorsqu'on calcule l'intégrale de Feynman d'une particule en interaction avec un oscillateur harmonique, intégrale qui est le prototype de celle que nous venons de calculer : l'effet de la particule sur l'oscillateur à un temps passé réagira sur la particule à un temps futur, d'où le produit des forces de couplage à différentes valeurs du temps, et l'intégrale double sur ces deux variables temporelles.

2° Le terme $\exp(-ikc|t-s|)$ est le fameux propagateur de Feynman :

$$\exp(-ikc|t-s|) = 2ikc \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega|t-s|}}{\omega^2 - k^2c^2 + i\varepsilon} \frac{d\omega}{2\pi}$$

(obtenu en utilisant $\int_0^\infty e^{-i(\xi-i\varepsilon)t} dt = 1/i(\xi-i\varepsilon)$)

$$\frac{1}{4\pi} \delta_{\mathbb{F}}(t^2c^2 - r^2) \equiv \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2c^2 + i\varepsilon}$$

l'invariance relativiste du propagateur est évidente. En utilisant ces relations, on obtient

$$X[\mathbf{q}] = -2\pi \int \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{|\mathbf{j}^T(\mathbf{k}, \omega)|^2}{\omega^2 - \mathbf{k}^2c^2 + i\varepsilon}$$

3° Après avoir intégré sur $\mathcal{D}\mathbf{A}^T$, il est naturel de regrouper $X[\mathbf{q}]$ et $S_{\text{coulomb}}[\mathbf{q}]$

$$\begin{aligned} F[\mathbf{q}] &\equiv X[\mathbf{q}] + S_{\text{coulomb}}[\mathbf{q}] = -2\pi \int \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{|\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)|^2 - c^2 |\rho(\mathbf{k}, \omega)|^2}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 c^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{-1}{2c} \int d\mathbf{r}dtd\mathbf{r}'dt' \delta_F(c^2(t-t')^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2) (\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') - c^2 \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t')) \end{aligned}$$

l'invariance relativiste des expressions relatives au champ électromagnétique réapparaît.

En résumé :

$$\begin{aligned} K(\mathbf{b}; \mathbf{a}) &= \int e^{\frac{i}{\hbar} S} \mathcal{D}\mathbf{q} \mathcal{D}\mathbf{A} \mathcal{D}\Phi \\ &= \int e^{\frac{i}{\hbar} (S_1 + F)} \mathcal{D}\mathbf{q} \end{aligned}$$

Si l'on avait procédé d'abord à l'intégration sur $\mathcal{D}\mathbf{q}$ on aurait obtenu l'expression suivante

$$K = \int e^{\frac{i}{\hbar} S_3} T[\mathbf{A}, \Phi] \mathcal{D}\mathbf{A} \mathcal{D}\Phi$$

En l'absence d'une théorie complète des particules de Dirac par l'intégrale fonctionnelle, il existe plusieurs techniques pour calculer $T[\mathbf{A}, \phi]$. On poursuit l'intégration sur $\mathcal{D}\mathbf{A}$ généralement en développant T en puissance de \mathbf{A} et ϕ et en utilisant des intégrales telles que la suivante :

$$\int A_\mu(\mathbf{r}, t) A_\nu(\mathbf{r}', t') e^{\frac{i}{\hbar} S_3[\mathbf{A}, \Phi]} \mathcal{D}\mathbf{A} \mathcal{D}\Phi = 2\hbar \eta_{\mu\nu} \delta_F(c^2(t-t')^2 - |(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|^2)$$

Analysons la procédure suivie : une jauge est choisie, l'intégration est faite dans la jauge choisie, le résultat est multiplié par une expression dont nous allons préciser l'origine sur un modèle, exemple plus simple que le champ électromagnétique mais qui en possède les caractéristiques essentielles. Soit une action $S = \frac{1}{4} (A_2 - A_1)^2$ fonction des deux variables indépendantes A_1 et A_2 . Ce modèle moins riche que le modèle dynamique $S = \int_{t_a}^{t_b} (\dot{A}_2 - A_1)^2 dt$, parfois utilisé, suffit à nos besoins.

S est invariant dans les transformations de jauge définies par

$$\begin{cases} A_1 \rightarrow A_1^\wedge = A_1 + \Lambda \\ A_2 \rightarrow A_2^\wedge = A_2 + \Lambda \end{cases}$$

L'intégrale fonctionnelle de Feynman est simplement

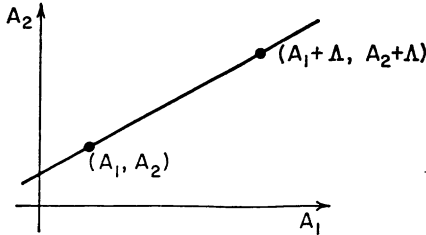
$$\int e^{\frac{i}{\hbar} S(A_1, A_2)} \mathcal{M}(A_1, A_2) dA_1 dA_2$$

Remarquons qu'en raison de l'invariance de jauge de S.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A_1, A_2) &= \mathcal{M}(A_1^\wedge, A_2^\wedge) \frac{\partial(A^\wedge)}{\partial(A)} \\ \frac{\partial(A^\wedge)}{\partial(A)} &= 1 \end{aligned}$$

Nous prouverons ultérieurement que ce résultat est très général. Il résulte que $\mathcal{M}(A_1, A_2) = \mathcal{M}(A_1^\wedge, A_2^\wedge)$ est invariant dans les transformations de jauge considérées.

Pour le plaisir, mais ultérieurement par nécessité, nous pouvons remplacer l'intégration sur A_1 et A_2 par une intégration sur un sous-espace du plan $A_1 A_2$ convenablement choisi, suivi d'une intégration sur Λ , les grandeurs à intégrer étant indépendantes de Λ , cette dernière intégrale sera simplement égale au volume du groupe. Intégrons, par exemple, le long de l'axe A_2 et le long des orbites de A déterminées par les points de l'axe A_2



C'est-à-dire choisissons la jauge $\Lambda = -A_1$; dans cette jauge, les potentiels A^T sont $A_1^T = 0$, $A_2^T = A_2 - A_1$.

$$\begin{aligned} &\iint dA_1 dA_2 \mathcal{M}(A_1, A_2) \exp \frac{i}{\hbar} S(A_1, A_2) \\ &= \iiint dA_1 dA_2 d\Lambda \delta(A_1 + \Lambda) \mathcal{M}(A_1, A_2) \exp \frac{i}{\hbar} S(A_1, A_2) \\ &= \iiint dA_1 dA_2 d\Lambda' \delta(A_1^\wedge) \mathcal{M}(A_1, A_2) \exp \frac{i}{\hbar} S(A_1, A_2) \end{aligned}$$

et en raison de l'invariance de jauge

$$\begin{aligned}
 &= \int d\Lambda' \iint dA_1^{\Lambda'} dA_2^{\Lambda'} \delta(A_1^{\Lambda'}) \mathcal{M}(A_1^{\Lambda'}, A_2^{\Lambda'}) \exp \frac{i}{\hbar} S(A_1^{\Lambda'}, A_2^{\Lambda'}) \\
 &= \int d\Lambda' \iint dA_1 dA_2 \delta(A_1) \mathcal{M}(A_1, A_2) \exp \frac{i}{\hbar} S(A_1, A_2) \\
 &= \int d\Lambda' \int dA_2 \mathcal{M}(0, A_2) \exp \frac{i}{\hbar} S(0, A_2)
 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, comme dans le cas du champ électromagnétique, le groupe de transformations est abélien. C'est dans le cas des groupes non abéliens que les termes nouveaux apparaissent dans l'intégrale de Feynman. Nous allons traiter l'exemple du champ Yang Mills qui possède un groupe de transformation non abélien et qui est plus simple que le champ de gravitation.

CHAMPS INVARIANTS DANS UN PSEUDO-GROUPE DE TRANSFORMATION; CAS NON ABÉLIEN : CHAMP YANG-MILLS; PARTICULES FICTIVES

Nous allons introduire les notations, en récapitulant les propriétés des pseudo-groupes de Lie [17]. Soit \mathfrak{L} un pseudo-groupe de Lie.

Soit $\bar{x} \in \mathfrak{L}$, \bar{x} est une fonction de x point d'espace-temps; \bar{x} est un point d'un espace infini dimensionnel Ω ; $\bar{x}(x)$ est la valeur de \bar{x} à x .

$\bar{x}^\alpha, \bar{y}^\beta$, etc., désignent les coordonnées de \bar{x}, \bar{y} dans la variété du groupe.
 x^μ, x'^ν , etc., désignent les coordonnées de x, x' dans l'espace-temps.

Groupe Yang-Mills.

$\mathfrak{L} = G \otimes G \otimes \dots \otimes G$ est le produit infini d'un groupe de Lie compact G dit groupe générateur défini pour chaque point x d'espace-temps.

$\bar{x}(x), \bar{y}(x) \in G$, si l'indice α des coordonnées de x, y , peut prendre n valeurs, G est n -dimensionnel.

Soit $C_{\beta\gamma}^\alpha$ les constantes de structure de G .

$c_{\beta,\gamma}^\alpha = c_{\beta\gamma}^\alpha \delta(x, x') \delta(x, x'')$ les constantes de structure de \mathfrak{L} .

Réalisation du groupe : \mathfrak{L} est homomorphique aux groupes des transformations d'un espace sur lui-même. Soit φ les points de cet espace; soit $D[\bar{x}]$

une représentation de \mathcal{L} dans l'espace des φ . Pour satisfaire à la condition de continuité, l'élément de matrice relatif aux indices continus est égal à :

$$\langle x | D[\bar{x}] | x' \rangle = D(\bar{x}(x))\delta(x, x')$$

où $D(\bar{x}(x))$ est la matrice correspondant à $\bar{x}(x)$ dans la représentation D de G . La transformation correspondante de $\varphi(x)$ est donnée par

$$\varphi'(x) = \int \langle x | D[\bar{x}] | x' \rangle \varphi(x') dx' = D(\bar{x}(x))\varphi(x)$$

et la transformation de $\varphi_{,\mu}$ par :

$$\varphi'_{,\mu} = D_{,\mu}\varphi + D\varphi_{,\mu}$$

Pour construire une action invariante dans le groupe des transformations, il est nécessaire d'introduire un deuxième champ auxiliaire Ω_μ tel que :

$$\varphi_{\bullet,\mu} \equiv \varphi_{,\mu} + \Omega_\mu\varphi$$

tel que

$$\varphi'_{\bullet,\mu} = D\varphi_{\bullet,\mu}$$

On montre que :

$$\Omega_\mu = G_\alpha A^z_\mu$$

où G_α sont les générateurs de la représentation D du groupe G et A^z_μ est un champ (appelé aussi champ auxiliaire) dont la loi de transformation est [17] :

$$A'^z_\mu = A^z_\mu - \delta\zeta^z_{,\mu} + c^\alpha_{\gamma\beta} A^\beta_\mu \delta\zeta^\alpha_\nu$$

pour les transformations infinitésimales :

$$A^z_\mu = A^z_\mu - \delta\zeta^z_{,\mu} + c^\alpha_{\gamma\beta} A^\beta_\mu \delta\zeta^\alpha_\nu$$

Suivant la nature de G , A^z_μ est le potentiel du champ électromagnétique, du champ Yang-Mills ou tout autre champ que l'on peut construire à partir d'un groupe de Lie compact G .

La nullité des constantes de structure pour le champ électromagnétique est un cas trop particulier pour notre étude. Le champ Yang-Mills est l'exemple le plus simple de la situation que nous voulons étudier.

G	$c^{\alpha}_{\beta'\gamma'}$	Réalisation	Champ associé	Groupes de transformation
SO (2) (abélien)	0	$\varphi' = e^{-ie\bar{x}(x)}\varphi$ où e est la charge	Électro- magnétique	$A'_\mu = A_\mu - \bar{x}(x)_{,\mu}$
SO (3)	$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta(x, x')\delta(x, x'')$	$\varphi' = G_{\alpha}\bar{x}^{\alpha}(x)\varphi$	Yang-Mills	voir ci-dessus
Pas de groupe générateur	$\delta^{\mu}_{\nu}\delta_{,\sigma}(x, x')\delta(x, x'')$ $-\delta^{\mu}_{\sigma}\delta_{,\nu}(x, x'')\delta(x, x')$	$\delta\varphi = -\varphi_{,\mu}\delta\xi^{\mu}$ $+G^{\mu}_{\nu}\varphi\delta\xi^{\mu}_{,\nu}$ G_{μ} sont les géné- rateurs de la repré- sentation de GL (4).	Gravitation	$g'_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \bar{x}^{\nu}} g_{\sigma\tau}(x)$

Soit $\int \exp iS[A]\mathcal{M}[A]dA$ l'intégrale fonctionnelle de Feynman pour le champ Yang-Mills

$$dA \equiv \prod_{\alpha,\mu,x} dA^{\alpha}_{\mu}(x)$$

Étant donné l'invariance de jauge de l'action $S[A] = S[A']$, il s'ensuit que

$$\mathcal{M}[A'] \frac{\partial[A']}{\partial[A]} = \mathcal{M}[A]$$

Il suffit de calculer $\frac{\partial[A']}{\partial[A]}$ pour les transformations infinitésimales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[A']}{\partial[A]} &= \det \left(\frac{\delta A'^{\alpha}_{\mu}}{\delta A^{\beta'}_{\nu'}} \right) = \det [(\delta^{\alpha}_{\beta} + c^{\alpha}_{\gamma\beta}\delta\xi^{\gamma})\delta_{\mu}^{\nu}\delta(x, x')] \\ &= 1 + \prod_x c^{\alpha}_{\gamma\alpha}\delta\xi^{\gamma}(x) \end{aligned}$$

le groupe générateur a été supposé compact, donc

$$\begin{aligned} c^{\alpha}_{\gamma\alpha} &= 0 & \text{et} & & \frac{\partial[A']}{\partial[A]} &= 1 \\ \mathcal{M}[A] &= \mathcal{M}[A'] & \text{et} & & dA &= dA' \end{aligned}$$

$\mathcal{M}[A]$ et dA sont des invariants du groupe de transformation. Choisissons

une jauge et désignons par $A^{\beta\mu T}$ les potentiels dans cette jauge. Nous allons faire le calcul avec la jauge de Landau définie par

$$A^{\beta\mu T}_{,\mu} = 0$$

Poursuivant l'idée introduite dans l'exemple primitif, à savoir, que l'intégrale est le produit de l'intégrale calculée dans une jauge particulière, multipliée par le volume du pseudo-groupe, nous décomposons l'intégrale fonctionnelle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int e^{iS[A]} \mathcal{D}A &= \int \mathcal{D}A \int_{\text{pseudo-groupe}} d\bar{x}' \delta[A^{a\mu\bar{x}'}, \mu] \Delta[A] e^{iS[A]} \\ &= \int_{\text{pseudo-groupe}} d\bar{x} \int \mathcal{D}A \delta[A^{a\mu}, \mu] \Delta[A] e^{iS[A]} \end{aligned}$$

en reproduisant la séquence d'équations de l'exemple primitif et en utilisant $\Delta[A] = \Delta[A']$.

$d\bar{x}$ est l'élément de volume invariant du pseudo-groupe

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \prod_x \det L^{-1}(\bar{x}) \prod_{\alpha} d\bar{x}^{\alpha}(x) \\ \delta[A^{a\mu}, \mu] &= \prod_{\alpha, x} \delta(A^{a\mu}, \mu(x)) \\ \Delta^{-1}[A] &= \int_{\text{pseudo-groupe}} \delta[A^{a\mu\bar{x}'}, \mu] d\bar{x}' \end{aligned}$$

Calcul de $\Delta^{-1}[A]$.

Étant donné une valeur arbitraire fixe de A, à chaque élément du groupe \bar{x}' correspond une valeur $A^{\bar{x}'}$ donnée par la loi de transformation de jauge.

En intégrant $\int \delta[A^{a\mu\bar{x}'}, \mu] d\bar{x}'$ sur toutes les valeurs de \bar{x}' , $A^{\bar{x}'}$ décrira une orbite complète. Étant donné que $d\bar{x}'$ est l'élément de volume invariant du groupe, tout point A de cette orbite peut servir de valeur initiale pour le calcul de l'intégrale et $\Delta[A]$ est invariant dans les transformations de jauge. Toutefois pour simplifier le calcul nous prendrons pour point initial A^T tel que $A^{T a\mu}, \mu = 0$. Étant donné la relation

$$\int \delta(f^{\alpha}(\bar{x})) d\bar{x} = \left[\frac{\partial(f^{\alpha})}{\partial(\bar{x}^{\beta})} \right]^{-1} \text{ à } \bar{x}_0 \text{ tel que } f^{\alpha}(\bar{x}_0) = 0$$

Le calcul de $\Delta^{-1}[A]$ demande de calculer $A^{\alpha\mu}_{,\mu}$, la valeur \bar{x}_0 telle que $A^{\alpha\mu}_{,\mu}(\bar{x}_0) = 0$ (autrement dit la valeur \bar{x}_0 telle que $A^{\alpha}_{,\mu}(\bar{x}_0) \equiv A^{\text{T}\alpha}_{\mu}$) et le déterminant $\frac{\partial[A^{\alpha\mu}_{,\mu}]}{\partial[\bar{x}^{\beta}]}$

$$A^{\alpha\mu}_{,\mu} = -L^{-1\alpha}_{\beta,\gamma}(\bar{x})\bar{x}^{\beta,\mu}\bar{x}^{\gamma}_{,\mu} - L^{-1\alpha}_{\beta}(\bar{x})\bar{x}^{\beta,\mu} + L^{-1\epsilon}_{\gamma}c^{\alpha}_{\epsilon\delta}D^{\delta}_{\alpha\beta}(\bar{x})A^{\text{T}\beta\mu}\bar{x}^{\gamma}_{,\mu}$$

où D_a est la représentation adjointe et L la fonction auxiliaire gauche du groupe.

Nous travaillons en coordonnées canoniques où $\bar{x}^{\alpha} = 0$ sont les coordonnées de l'unité du groupe $\bar{x} = 1$. De plus \bar{x}^{α} ($x = \pm \infty$) = 0 car nous supposons qu'asymptotiquement les champs ont une valeur donnée fixe (en appliquant $\bar{x}^{\alpha} \neq 0$ à ces champs, on obtiendrait d'autres valeurs que les valeurs choisies comme conditions aux limites).

L'équation $A^{\alpha\mu}_{,\mu} = 0$ est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre du type hyperbolique, c'est une équation d'ondes dont la solution s'annule aux limites, la solution est nulle partout

$$A^{\alpha\mu}_{,\mu}(\bar{x}^{\alpha} = 0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial[A^{\alpha\mu}_{,\mu}]}{\partial[\bar{x}^{\beta}]} \right|_{\bar{x}=1} = \det [\delta^{\alpha}_{\beta} \square^2 \delta(x, x') - c^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\text{T}\gamma\mu} \delta_{,\mu}(x, x')]$$

Or, le déterminant d'une matrice continue ne peut être calculé que pour les matrices « peu différentes de l'unité » grâce à la formule :

$$\begin{aligned} \det(1 + K) &= \exp [\text{tr} \log(1 + K)] \\ &= \text{tr}K + 1/2 (\text{tr}K)^2 - 1/2 \text{tr}K^2 + \dots \end{aligned}$$

Nous pouvons mettre la matrice dont nous cherchons le déterminant sous la forme voulue en la multipliant par $g(x, x')$ fonction indépendante de A telle que $\square^2 g = -\delta$, ce qui n'aura d'autre effet sur $\Delta[A]$ que de le multiplier par une constante.

En définitive, à une constante près, on obtient :

$$\Delta[A] = \det [\delta^{\alpha}_{\beta} \delta(x, x') - c^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\text{T}\gamma\mu} g_{,\mu}(x, x')]^{-1}$$

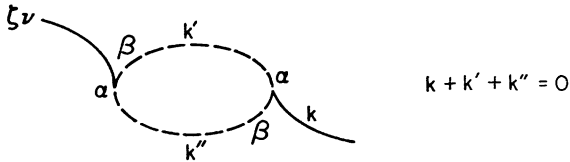
Lorsque les constantes de structure sont nulles (groupe abélien), $\Delta[A] = 1$.

Pour la jauge que nous avons choisie dans le champ Yang-Mills $\text{tr}K = 0$ et le premier terme non nul dans le développement du déterminant est :

$$\text{tr} K^2 = \int dx \int dx' c^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\text{T}\gamma\mu}(x) G_{,\mu}(x, x') c^{\beta}_{\alpha\epsilon} A^{\text{T}\epsilon\nu}(x) g_{,\nu}(x', x)$$

Particules fictives.

Suivant la technique habituelle des diagrammes de Feynman, ce terme correspond au diagramme suivant :



- les lignes pleines représentent les propagateurs du champ $A^{\tau\mu}$ soit, dans les transformées de Fourier, les termes du type $(\eta^{\gamma\mu} - k^\gamma k^\mu k^{-2})k^2$;
- les lignes en pointillé représentent les propagateurs des fameuses particules fictives de Feynman soit, dans les transformées de Fourier, les termes du type $\delta^{\alpha}_{\beta} k'^{-2}$;
- les vertex représentent les constantes de structure soit, dans les transformées de Fourier, les termes du type $ic^{\alpha}_{\beta\gamma}(k'_{\mu} + k''_{\mu})$.

Revenons à l'origine du terme $\Delta[A]$, responsable de l'apparence des particules fictives. Il a été introduit pour compenser l'introduction du terme $\delta[A^{\alpha\mu}_{,\mu}]$ dans l'intégrale fonctionnelle de Feynman. Le terme $\delta[A^{\alpha\mu}_{,\mu}]$ réduit le domaine d'intégration des variables A à un sous-espace caractérisé par les équations :

$$A^{\alpha\mu}_{,\mu} = 0$$

ou dans les transformées de Fourier a de A

$$k_{\mu} a^{\alpha\mu}(k) = 0$$

La réduction à un sous-espace est nécessaire pour la raison suivante : le calcul de l'intégrale de Feynman fait apparaître une des inverses de la seconde dérivée fonctionnelle de l'action $S_{,ij}$ à savoir, le propagateur de Feynman. Il est donc nécessaire que $S_{,ij}$ ait une inverse; or, sa transformée de Fourier pour le champ Yang-Mills dans la jauge de Landau est du type :

$$k^2 a^*_{\alpha}{}^{\mu}(\eta_{\mu\nu} - k^2 k_{\mu} k_{\nu}) a^{\alpha\nu}$$

et l'opérateur $\eta_{\mu\nu} - k^2 k_{\mu} k_{\nu}$ n'a pas d'inverse dans l'espace complet des $a(k)$. Par contre, il a une inverse dans le sous-espace caractérisé par $k_{\mu} a^{\alpha\mu}(k) = 0$. Cette inverse est précisément le propagateur :

$$(\eta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu} k^{-2}) k^{-2}.$$

On vérifie facilement que $\eta_{\mu\nu} - k^2 k_\mu k_\nu$ est l'unité du sous-espace considéré et que, appliqué à un vecteur de l'espace complet il le projette dans ledit sous-espace.

Les particules fictives ont été découvertes par Feynman empiriquement (7) en cherchant un formalisme où la matrice S soit unitaire et où les termes soient manifestement covariants. Il est nécessaire de travailler avec des termes manifestement covariants afin de pouvoir manipuler correctement la technique délicate de la renormalisation qui demande d'isoler des termes infinis.

Les particules fictives ont aussi été découvertes par B. S. DeWitt (18, section 17 et équation 20.12) en développant un formalisme qui satisfasse aux critères suivants :

— covariance manifeste des termes dans le groupe de transformations du champ en particulier covariance manifeste des termes qui dépendent du champ classique φ (background field) ce qui permet de traiter le champ φ sur une variété pseudoriemannienne arbitraire;

— généralisation des critères utilisés par Feynman (unitarité tout en maintenant la covariance manifeste), c'est-à-dire extension des résultats obtenus par Feynman pour les boucles simples (non overlapping diagrams) aux boucles complexes (overlapping diagrams);

— invariance du formalisme vis-à-vis du choix de la condition supplémentaire nécessaire lorsque le champ possède un groupe de transformation (γ -invariance); cette dernière condition est incorporée dans une intégrale fonctionnelle et permet de prouver que les résultats, présentés ici, relatifs aux particules fictives tels qu'ils sont obtenus par Faddeev dans la jauge de Landau sont valables dans toutes les jauges.

Les particules fictives apparaissent aussi dans le travail de Mandelstam [24] [25] qui obtient par une voie différente, des résultats identiques.

Cet exposé est manifestement le rapport de travaux en cours [18] [21]; nous espérons pouvoir prochainement exposer les propriétés de l'intégrale de Feynman en théorie des champs non par « touches successives » mais de façon cohérente : étendre aux champs la mesure déterminée dans le cas des systèmes de particules, lui imposer les conditions nécessaires pour que les grandeurs physiques calculées par l'intégrale de Feynman soit hermitiennes, invariantes dans les changements de fonctions qui définissent le champ et, le cas échéant, invariantes dans les groupes de transformation du système; puis, la mesure étant connue, calculer les processus physiques. Les contributions de la mesure que nous venons de présenter : propagateurs de particules réelles dans les processus virtuels, particules fictives, sont « non physiques » uniquement parce qu'elles ne représentent qu'une partie de la

réalité, de même que les premiers termes calculés, dans les années 1948-1950, par l'intégrale de Feynman lorsque la mesure n'était qu'une quantité inconnue désignée par un symbole (*) ne représentent qu'une partie de la réalité. La réalité physique est la combinaison des premiers termes calculés et des termes introduits par la mesure, c'est-à-dire tout simplement le calcul des intégrales de Feynman correctement définies.

BIBLIOGRAPHIE

Livres.

- [1] R. P. FEYNMAN and A. R. HIBBS, *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [2] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON and M. SANDS, *The Feynman lectures on physics. Quantum Mechanics*, Vol. III. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.

Articles.

- [3] R. P. FEYNMAN, Space-Time approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, t. **20**, 1948, p. 367.
- [4] R. P. FEYNMAN, The Theory of Positrons. *The Physical Review*, t. **76**, 1949, p. 749.
- [5] R. P. FEYNMAN, Space-Time approach to Quantum Electrodynamics. *The Physical Review*, t. **76**, 1949, p. 769.
- [6] R. P. FEYNMAN, Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction. *The Physical Review*, t. **80**, 1950, p. 440.
- [7] R. P. FEYNMAN, *Acta Physica Polonica*, t. **24**, 1963, p. 697.
- [8] F. J. DYSON, The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman. *The Physical Review*, t. **75**, 1949, p. 486.
- [9] Cécile MORETTE, On the definition and approximation of Feynman's Path Integrals. *Physical Review*, t. **81**, 1951, p. 848.
- [10] W. PAULI, Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung. Notes de cours prises par U. Hochstrasser et M. F. Schafroth à E. T. H. Zurich, 1951, Appendix.
- [11] Ph. CHOQUARD, Traitement semi-classique des forces générales dans la représentation de Feynman. *Helvetica Physica Acta*, t. **28**, 1955, p. 89.
- [12] Bryce S. DEWITT, Dynamical Theory in Curved Spaces. I. A review of the classical and Quantum Action Principles. *Reviews of Modern Physics*, t. **29**, 1957, p. 377.
- [13] Conference on the role of gravitation in physics. Astia AD 118180, 1957.
- [14] H. LEUTWYLER, Gravitational Field : Equivalence of Feynman Quantization and Canonical Quantization. *The Physical Review*, t. **134**, 1964, p. B1155.
- [15] Edward NELSON, Feynman Integrals and the Schrodinger Equation. *Journal of Mathematical Physics*, t. **5**, 1964, p. 332.
- [16] M. CLUTTON-BROCK, Feynman's kernel and the classical path. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. **61**, 1965, p. 210.

(*) Elle avait un « nom » car on en sentait le besoin non seulement mathématiquement mais aussi physiquement.

- [17] Bryce S. DEWITT, Dynamical Theory of groups and fields. Documents on Modern Physics Gordon and Breach, 1965.
- [18] Bryce S. DEWITT, Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory. *The Physical Review*, t. **162**, 1967, p. 1195.
- [19] Mark KAC, *Lectures in Applied Mathematics*, vol. I, *Probability and Related Topics in Physical Science*. Summer Seminar Boulder, 1957, Interscience Publishers, 1950.
- [20] F. A. BEREZIN, *The method of Second Quantization*. Academic Press, 1966.
- [21] Ludwig D. FADDEEV and V. N. POPOV, Feynman diagrams for the Yang-Mills Field. *Physics Letters*, t. **25B**, 1967, p. 29.
- [22] L. D. FADDEEV and V. N. POPOV, *Perturbation theory for Gauge invariant Fields* (en russe).
- [23] L. D. FADDEEV, Communication Fifth International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity, Tbilisi, 1968.
- [24] S. MANDELSTAM, Feynman Rules for Electromagnetic and Yang-Mills Fields from the Gauge-Independent Field-Theoretic Formalism. *The Physical Review*, t. **175**, 1968, p. 1580.
- [25] S. MANDELSTAM, Feynman Rules for the Gravitational Field from the Coordinate-Independent Field-Theoretic Formalism. *The Physical Review*, t. **175**, 1968, p. 1604.
- [26] Lawrence S. SCHULMAN, A path integral for spin. *The Physical Review*, t. **176**, 1968, p. 1604.
- [27] V. S. BUSLAEV, Continuum Integrals and the Asymptotic Behaviour of the Solutions of Parabolic Equations as $t \rightarrow 0$. Applications to Diffraction. Topics in Mathematical Physics, series edited by M. Sh. Birman, vol. **2**, *Spectral Theory and Problems in Diffraction*. Plenum Publishing Corporation, 1967.
- [28] Jan TARSKI, Commutative Integration in Hilbert Spaces and Applications to Quantum Field Theory. *Acta Universitatis Wroclaviensis*, 88, t. I, 1968, p. 42, Wrocław.
- [29] Jan TARSKI, Functional Integrals in Quantum Fields Theory and Related Topics. *Lectures in Theoretical Physics*, vol. XA, A. O. Barut and W. E. Brittin, Ed., Gordon and Breach, 1968.

Autres références.

- [30] J. L. KELLEY, *General Topology*. D. Van Nostrand Inc., New York, 1955.
- [31] J. H. VAN VLECK, The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, t. **14**, 1928, p. 178.
- [32] William FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- [33] D. KERSHAW, Theory of Hidden Variables. *The Physical Review*, t. **136B**, 1964, p. 1850.
- [34] G. G. COMISAR, Brownian Motion Model of Non Relativistic Quantum Mechanics. *The Physical Review*, t. **138B**, 1965, p. 1332.
- [35] J. SCHWINGER, Exterior Algebra and the Action Principle. I. *Proc. National Academy of Science, U. S.*, t. **48**, 1952, p. 603.
- [36] J. SCHWINGER, Quantum Variables and the Action Principle. *Proc. National Academy of Science, U. S.*, t. **47**, 1961, p. 1075.
- [37] J. SCHWINGER, On the Green's Functions of Quantized Fields. I. *Proc. National Academy of Science, U. S.*, t. **37**, 1951, p. 452.
- [38] C. N. YANG and R. L. MILLS, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *The Physical Review*, t. **96**, 1954, p. 191.
- [39] F. BOPP and R. HAAG, Ueber die Möglichkeit von Spinmodellen. *Z. Naturforsch.*, t. **5a**, 1950, p. 644.

- [40] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966, p. 355.
- [41] J. M. GUELFAND et N. Y. VILENKIN, *Les Distributions*. Dunod, t. 4, 1967, chapitre 4.
- [42] B. S. DEWITT, *Quantum Theory of Measurement* (Preprint), p. 27.
- [43] L. S. SCHULMAN, *Relativistic Spin: Tops and Wave Equations* (Preprint).
- [44] Pierre CARTIER, Processus aléatoires généralisés. Séminaire Bourbaki, mai 1964, p. 272.
- [45] Paul LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, 1954.

(Manuscrit reçu le 21 mai 1969).
