ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JAN TARSKI

Description fonctionnelle de certaines théories non relativistes de champs

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 2 (1969), p. 131-151
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_2_131_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 2, 1969, p. 131-151.

Section A :
Physique théorique.

Description fonctionnelle de certaines théories non relativistes de champs

par

Jan TARSKI
(Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies (*),
Faculté des Sciences de Paris).

SOMMAIRE. — La fonctionnelle génératrice des fonctions de Wightman pour des temps égaux est construite comme une intégrale fonctionnelle. La construction est applicable à une classe de théories ayant l'invariance par translation. La limite du volume infini est obtenue par extraction de sous-suites. Pour un modèle, on obtient des résultats plus satisfaisants en utilisant la théorie des espaces de Banach. La théorie d'intégration de Guelfand et Vilenkin fournit la base mathématique de cette étude.

ABSTRACT. — The generating functional of equal-time Wightman functions is construted as a functional integral. The construction is for a class of translation invariant field theories. The limit of infinite volume is obtained by extraction of subsequences. For one model, Banach space methods give more satisfactory results. The integration theory of Gelfand and Vilenkin provides the mathematical basis for this investigation.

1. INTRODUCTION

Cette note décrit une étude sur l'application des méthodes fonctionnelles à la théorie quantique des champs. Nous considérons certaines situations dans lesquelles apparaissent des représentations étranges, ou myriotiques. Alors on s'attend à rencontrer des intégrales fonctionnelles définies par des mesures non équivalentes aux mesures gaussiennes.

(*) Laboratoire associé au C. N. R. S.

Nous donnons ici une formulation rigoureuse des idées présentées par Coester et Haag [*1*] il y a quelques années. En particulier, nous considérons une classe de modèles possédant l'invariance par translation. Pour ces modèles, nous construisons la fonctionnelle génératrice des valeurs moyennes sur le vide, pour les temps égaux. Nos résultats s'appliquent également aux variantes du modèle modifié de théorie euclidienne de champs, étudié par Symanzik [*2*] [*3*].

La théorie d'intégration fonctionnelle de Guelfand et Vilenkin [*4*] (augmentée par les constructions plus spéciales de Friedrichs et Shapiro et de Wiener) fournit une base commode pour nos besoins. Pour prendre la limite du volume infini, nous employons la méthode de Jaffe et Powers [*5*], où l'on extrait une sous-suite convergente des états d'une C*-algèbre. Alors, le théorème de Bochner nous permet de retourner aux intégrales fonctionnelles. Cette méthode a l'inconvénient de ne pas donner d'unicité, et l'on ne sait pas si une suite donnée des états est en fait convergente.

D'ailleurs, nous présentons un modèle où l'on peut obtenir une limite bien définie quand $V \to \infty$. Notre analyse n'est qu'un développement d'un travail plus récent de Symanzik [*6*] [*7*]. Ce dernier est une adaptation des études des fonctions de corrélation en mécanique statistique [*8*] [*9*], où l'on utilise les espaces banachiques. En outre, nous pouvons noter d'autres méthodes qui donnent de telles limites, qu'on appelle limites thermodynamiques. Elles s'appliquent aussi à la mécanique statistique, en particulier à la théorie de la supraconductivité [*10*] et aux systèmes de spins [*11*].

Nous présentons quelques propriétés simples de nos solutions, par exemple, l'analyticité des fonctionnelles génératrices. Cependant, des questions diverses restent non résolues, par exemple, celles concernant l'unicité de l'état de plus basse énergie, et le « clustering ».

Dans la section 2 nous décrivons la classe de modèles considérés. La section 3 résume certaines propriétés des intégrales fonctionnelles. Dans la section 4 nous établissons l'existence des fonctionnelles génératrices par l'extraction de sous-suites. Nous étudions ces fonctionnelles dans la section 5. Le modèle ayant une limite thermodynamique est présenté dans la section 6 et dans l'appendice A. L'appendice B comprend une courte discussion heuristique de la propriété de clustering.

L'auteur voudrait remercier les Professeurs J. Ginibre, O. Lanford et K. Symanzik des discussions qu'il a pu avoir avec eux, et le Professeur P. Renouard d'avoir lu ce travail. Il est très reconnaissant aux Professeurs R. Vinh Mau et M. Lévy de l'accueil qu'ils lui ont réservé dans leur laboratoire.

2. DESCRIPTION DES MODÈLES

Soit φ un champ scalaire, généralement non relativiste. Nous supposons les relations canoniques de commutation pour les temps égaux,

$$[\pi(u), \varphi(v)] = i^{-1}\delta(u - v), \tag{2.1a}$$

où $\pi = \dot{\varphi}$. Ces relations peuvent se réaliser en faisant agir φ et π sur les fonctionnelles (dans un espace convenable) de la manière suivante,

$$\varphi(u)\mathrm{F}\{\eta\} = \eta(u)\mathrm{F}\{\eta\}, \quad \pi(v)\mathrm{F}\{\eta\} = i^{-1}\delta\mathrm{F}\{\eta\}/\delta\eta(v). \tag{2.1b}$$

Dans la suite on suppose que l'espace a trois dimensions (sauf dans la section 6, où l'on modifiera aussi certaines autres conventions), et l'on se donne un instant fixé, une fois pour toutes.

Nous considérons un hamiltonien total :

$$\mathrm{H}_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}\int d^3u\pi^2 + \mathrm{H}_1\{\varphi\}, \tag{2.2}$$

comme dans [*1*]. (Et dans [*12*]. Pour les termes de renormalisation, voir ci-dessous.) Il faut faire une autre hypothèse, qui simplifiera les manipulations. A savoir, nous supposons qu'il existe une fonctionnelle $\Lambda\{\varphi\}$ telle que

$$\mathrm{H}_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}\int d^3u\left[\pi(u) + i\frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi(u)}\right]\left[\pi(u) - i\frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi(u)}\right]. \tag{2.3}$$

Alors l'hamiltonien est non négatif (au moins formellement), et dans la représentation (2.1*b*) il a pour état fondamental

$$\Psi_0 = (\mathrm{cte})\exp(-\Lambda\{\eta\}), \tag{2.4}$$

satisfaisant $\mathrm{H}_{\mathrm{tot}}\Psi_0 = 0$.

Si l'on a une fonctionnelle polynomiale pour Λ, on peut trouver $\mathrm{H}_{\mathrm{tot}}$ par

$$\mathrm{H}_1\{\varphi\} = \frac{1}{2}\int d^3u\left[\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi(u)}\right)^2 - \frac{\delta^2\Lambda}{\delta(\varphi(u))^2}\right]. \tag{2.5}$$

Cependant, si l'on choisit H_1, il n'y a pas en général d'expression simple donnant la fonctionnelle Λ correspondante.

Nous considérons maintenant les fonctionnelles Ψ_0 et Λ comme les objets d'intérêt principal. Nous ne nous occuperons qu'exceptionnellement

des structures précises de H_1 et H_{tot} (i. e. leurs domaines, contre-termes, etc.).
Nous supposons ainsi que

$$\Lambda = \Lambda^{(0)} + \Lambda', \tag{2.6a}$$

$$\Lambda' = L_1 + L_2 + \ldots + L_m L_{m+1} + \ldots + (L_n \ldots L_{n+k}), \tag{2.6b}$$

où $\Lambda^{(0)}$ donne l'énergie cinétique, et chaque L_j est une fonctionnelle monôme de la forme

$$L_j\{\varphi\} = \int d^3u_1 \ldots d^3u_p \lambda_j(u_1 - u_2, \ldots, u_{p-1} - u_p)\varphi(u_1) \ldots \varphi(u_p). \tag{2.6c}$$

Ici $\lambda_j \in \mathcal{S}$ comme fonction des différences, et λ_j est symétrique comme fonction de $u_1, \ldots, u_p$. (L'invariance par rotations ne pose aucun problème et nous l'ignorons.) La présence des produits comme $L_m L_{m+1}$ pourrait donner une théorie sans la propriété de clustering.

Nous supposons, d'ailleurs, que Λ' est positif semi-défini,

$$\Lambda'\{\eta\} \geqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad \eta \in \mathcal{S}. \tag{2.7}$$

Cette condition n'est pas valable pour plusieurs couplages intéressants, et nous la commenterons dans la section 4. Elle est vérifiée, par exemple, par le monôme suivant,

$$L\{\varphi\} = \int d^3u[(\varphi * h)(u)]^{2n} \qquad \text{où} \qquad h \in \mathcal{S}. \tag{2.8}$$

En fait, nous utiliserons une condition plus forte. Nous supposerons, à savoir, que chaque noyau $\bar{\lambda}$ pour un produit des monômes est tel que

$$\int d^3u_1 \ldots d^3u_{2n}[\eta_1(u_1)\eta_1(u_2)] \ldots [\eta_n(u_{2n-1})\eta_n(u_{2n})]\bar{\lambda}(u_1, \ldots, u_{2n}) \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Ici $\bar{\lambda}$ doit être symétrisé, et $\eta_j \in \mathcal{S}$. Cette condition-ci est vérifiée par L de l'équation (2.8).

Quant à $\Lambda^{(0)}$, observons que

$$\Lambda^{(0)}\{\varphi\} = \frac{1}{2}\int d^3v_1 d^3v_2 \lambda^{(0)}(v_1 - v_2)\varphi(v_1)\varphi(v_2) \tag{2.10a}$$

donne la contribution suivante à H_1, selon (2.5),

$$H_1^{(0)}\{\varphi\} = \frac{1}{2}\int d^3p \tilde{\lambda}^{(0)2}(p)\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p) + (\text{ren.}). \tag{2.10b}$$

Le tilde indique la transformée de Fourier, et le dernier terme est en général infini.

Pour un champ relativiste libre, $\tilde{\lambda}^{(0)}$ plutôt que $\tilde{\lambda}^{(0)2}$ est l'énergie cinétique. Ainsi, soit $\tilde{\lambda}^{(0)}(p) = (p^2 + m^2)^{1/2}$, et la transformée inverse $\lambda^{(0)}$ définit un opérateur A,

$$(\mathrm{A}\xi)(u) = \int d^3v\lambda^{(0)}(u - v)\xi(v) \qquad \text{pour} \qquad \xi \in \mathcal{S}. \tag{2.11a}$$

Cet opérateur est pseudo-différentiel, voir e. g. [*13*]. L'opérateur $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ est celui de localisation (C dans [*3*], sec. 5). Introduisons

$$\mathrm{B} = (2\mathrm{A})^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{avec le noyau} \qquad b(u - v)\,; \tag{2.11b}$$

B est un opérateur borné sur L_2, et b, une fonction définie pour $u \neq v$. (On trouve b et $\lambda^{(0)}$ explicitement dans [*14*].)

Nous achevons cette section par un rappel de quelques faits sur le modèle de Symanzik [*2*] [*6*]. Là Λ est presque le lagrangien ; on prend

$$\Lambda^{(0)}\{\varphi\} = \frac{1}{4}\langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle + \frac{1}{4}m^2\langle \varphi, \varphi \rangle \tag{2.12a}$$

(on peut aussi modifier $\Lambda^{(0)}$ par régularisation). La contribution correspondante à l'hamiltonien est :

$$\mathrm{H}_1^{(0)}\{\varphi\} = \frac{1}{8}\int d^4u[(-\Delta + m^2)\varphi(u)]^2 + (\text{ren.}), \tag{2.12b}$$

pour un espace-temps euclidien de quatre dimensions.

La discussion qui suit s'applique directement à de tels $\Lambda^{(0)}$. Cependant, l'hamiltonien total n'a qu'une signification formelle, à savoir, il sert à spécifier l'état fondamental Ψ_0 pour prendre les valeurs moyennes.

3. RÉSUMÉ CONCERNANT LES INTÉGRALES FONCTIONNELLES

Il y a plusieurs façons d'aborder l'intégration fonctionnelle. Pour nous, d'abord, il est convenable d'employer l'intégrale canonique sur l'espace hilbertien, telle qu'elle fut construite par Friedrichs et Shapiro [*2*] [*3*] [*15*] (ou bien par Segal [*16*]). Nous utiliserons, plus généralement, la théorie d'intégration sur les espaces duals des espaces nucléaires [*4*]. D'ailleurs, on aura besoin de la théorie particulière de l'intégrale de Wiener (voir e. g. [*8*]).

L'intégrale de Friedrichs et Shapiro (FS) est définie par des règles spéciales. Cependant, elle coïncide avec un cas particulier d'intégrales de Guelfand et Vilenkin, définies par mesures, au moins pour une large classe de fonctionnelles. Nous dénotons la mesure correspondante à l'intégrale de FS, avec la variance unité, par $\mu^{(0)}$.

Nous rappelons le théorème de Bochner [*4*, sec. 4.2], selon lequel : Étant donné une fonctionnelle $S\{f\}$ sur $\mathcal{S}$, qui est continue, de type positif, et normalisée, alors il existe une mesure μ sur $\mathcal{S}'$, telle que

$$S\{f\} = \int_{\mathcal{S}'} d\mu(\eta) e^{i(\eta, f)}. \tag{3.1}$$

L'unicité de μ est une conséquence de l'unicité dans le cas de dimension finie [*4*, chap. 2] et du fait que μ est fixée par la mesure cylindrique. Une telle mesure μ satisfait la condition de continuité [*4*, sec. 1.4], aussi que la normalisation $\int d\mu = 1$.

L'espace $\mathcal{S}$ est d'ailleurs un groupe additif et commutatif. Considérons les représentations unitaires de $\mathcal{S}$ qui se composent des opérateurs $e^{i\varphi(f)}$ agissant sur un espace hilbertien séparable, et où la dépendance des $e^{i\varphi(f)}$ en f est (fortement) continue, pour $f \in \mathcal{S}$.

Il résulte du théorème de Bochner que, pour une telle représentation avec un vecteur cyclique x, il existe une mesure μ sur $\mathcal{S}'$, qui satisfait [*4*, sec. 5.4]

$$\langle x, e^{i\varphi(f)} x \rangle = \int d\mu(\eta) e^{i(\eta, f)}. \tag{3.2}$$

Cette équation-ci nous donne $L_2(\mathcal{S}', \mu)$ comme espace de représentation. (On peut aussi noter que nous avons maintenant une identification entre les fonctionnelles S et les états de la C^*-algèbre engendrée par les $e^{i\varphi(f)}$.)

Si nous avions une mesure ν, équivalente, nous pourrions poser

$$y = (d\nu/d\mu)^{1/2} \in L_2(\mathcal{S}', \mu), \tag{3.3a}$$

et

$$\int d\nu(\eta) e^{i(\eta, f)} = \langle y, e^{i\varphi(f)} y \rangle. \tag{3.3b}$$

On voit qu'en employant des mesures équivalentes, on ne sort pas de l'espace de représentation originale.

La discussion précédente concernait le groupe $\mathcal{S}$, plutôt que les relations canoniques, mais elle s'y applique. En particulier, pour le cas de la représentation standard, et si x est le vide, μ dans l'équation (3.2) devient la mesure canonique $\mu^{(0)}$, modifiée par une transformation linéaire. Nos remarques maintenant suggèrent que, pour obtenir les représentations myriotiques de ces relations, il faut trouver des mesures non équivalentes à la transformée de $\mu^{(0)}$ (cf. [*17*]).

En général, pour deux mesures finies μ et ν, définies pour les mêmes sous-ensembles d'un espace, on peut écrire [*18*, théorème III.4.14]

$$\nu = \nu_c + \nu_\perp, \tag{3.4}$$

où ν_c est continue par rapport à μ, et $\nu_\perp$ est singulière ou perpendiculaire à μ.

Si l'on a une fonctionnelle F non négative, mesurable, et telle que

$$0 < \int d\mu \mathrm{F} < \infty,$$

on peut poser

$$d\nu(\eta) = d\mu(\eta)\mathrm{F}\{\eta\} \Big/ \int d\mu \mathrm{F},$$

et $\nu = \nu_c$. Cependant, si $\int d\mu \mathrm{F} = 0$, il pourrait être possible de construire ν ayant $\nu_\perp \neq 0$ comme une limite des mesures μ_n définies par

$$d\mu_n = d\mu \mathrm{F}_n \Big/ \int d\mu \mathrm{F}_n \qquad \text{où} \qquad \int d\mu \mathrm{F}_n > 0, \tag{3.5}$$

et où $\mathrm{F}_n \to \mathrm{F}$ dans un sens commode (qui entraînerait $\int d\mu \mathrm{F}_n \to 0$). Nous examinerons des exemples dans la section 4.

Retournons au cas de l'interaction nulle, $\Lambda = \Lambda^{(0)}$. Alors il s'agit de l'espace de Fock, et l'on a, en général, si F est une fonctionnelle intégrable et $\Psi^{(0)}$ le vide,

$$\langle \Psi^{(0)}, \mathrm{F}\{\varphi\}\Psi^{(0)} \rangle = \int d\mu^{(0)}(\xi)\mathrm{F}\{\mathrm{B}\xi\} \tag{3.6a}$$

(cf. [*16*] [*3*]). On peut ainsi exprimer ces quantités, en employant $\eta = \mathrm{B}\xi$ et une transformée de la mesure $\mu^{(0)}$,

$$\langle \mathrm{F}\{\varphi\} \rangle_{\Psi^{(0)}} = \int d\mu_{\mathrm{B}}^{(0)}(\eta)\mathrm{F}\{\eta\} = \int \mathfrak{D}(\eta)e^{-2\Lambda^{(0)}\{\eta\}}\mathrm{F}\{\eta\}. \tag{3.6b}$$

La dernière notation a une valeur heuristique. On note aussi que

$$\mathcal{H}_{\text{Fock}} = L_2(\mathcal{S}', \mu_B^{(0)}). \tag{3.7}$$

Pour l'application de ces intégrales, il faut connaître l'intégrabilité des fonctionnelles. Nous nous limitons ici à l'intégrale de FS et à la mesure $\mu^{(0)}$.

L'intégrale de FS est définie pour certaines fonctionnelles, dites invariantes, sur un espace hilbertien séparable. Il y a des critères simples et effectifs [*2*] [*3*] [*15*] pour l'invariance des fonctionnelles polynomiales $P\{\eta\}$ et de celles de la forme $e^{-P\{\eta\}}$. En particulier, si χ_V est la fonction caractéristique pour une région ayant le volume fini V (nous notons la région par le même symbole), et $\mathcal{H} = L_2$, alors

$$\Lambda'_V\{B\xi\} \equiv \Lambda'\{B(\chi_V\xi)\} \quad \text{et} \quad \exp\left(-\Lambda'_V\{B\xi\}\right) \tag{3.8}$$

sont invariantes. [Cette conclusion dépend sur l'inégalité (2.9), qu'on emploie pour démontrer que certains opérateurs sont à trace. Mais on peut facilement remplacer (2.9) par des autres conditions suffisantes.]

L'intégrale de FS a l'avantage de ne pas donner de complications pour des fonctions discontinues comme χ_V. D'ailleurs, l'intégrabilité-FS mène directement à l'intégrabilité par rapport à $\mu^{(0)}$. Cette sorte de comportement est décrite dans [*15*] [*16*], et nous présentons ici une idée pertinente.

Choisissons une base orthonormale $\{\xi_j\}$ pour $\mathcal{H} = L_2$, telle que $\xi_j \in \mathcal{S}$ pour $\forall j$. Soit $\{P_j\}$ le système fondamental des projecteurs correspondants (i. e., P_n projette sur l'espace $\{\Sigma_1^n c_j\xi_j\}$). Alors, la définition de $P_n\eta$ s'étend de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{S}'$, avec $P_n\eta \in \mathcal{S}$ pour $\forall\eta \in \mathcal{S}'$. Soit F invariante sur L_2. Par définition de μ pour les ensembles cylindriques,

$$\int d\mu^{(0)} F\{P_n\cdot\} = I_{\mathcal{H}}^{FS}(F\{P_n\cdot\}), \tag{3.9}$$

le dernier symbole dénotant l'intégrale de FS.

Ensuite, on extrait une sous-suite des fonctionnelles $F\{P_n\cdot\}$ convergeant presque partout vers une fonctionnelle mesurable f sur $\mathcal{S}'$ (e. g. [*18*, sec. III.6]), qui satisfait

$$\int d\mu^{(0)} f = I_{\mathcal{H}}^{FS}(F). \tag{3.10}$$

Nous résumons nos conclusions.

LEMME 1. — *Étant donné une fonctionnelle* F *invariante sur* L_2, *la construction précédente produit une fonctionnelle* f *sur* $\mathcal{S}'$, *qui est déterminée par* F *presque partout.*

L'unicité de f (presque partout) provient de l'invariance de F.

Dans la suite, nous ne distinguons pas entre l'intégrale de FS et celle par rapport à $\mu^{(0)}$, et nous dénotons les fonctionnelles respectives, comme F et f, par le même symbole.

4. LA LIMITE V $\rightarrow \infty$ PAR EXTRACTION DES SOUS-SUITES

Nous revenons aux fonctionnelles $\Lambda = \Lambda^{(0)} + \Lambda'$, qui définissent des interactions. Soit Λ' un monôme L, ou un produit de k tels monômes. Supposons d'abord que Λ' est modifiée par un cut-off spatial, comme dans (3.8). Alors, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} N_V^2 \equiv \int d\mu^{(0)}(\xi) e^{-2\Lambda'_V\{B\xi\}} &\geqslant \exp\left[-2\int d\mu^{(0)}(\xi)\Lambda'_V\{B\xi\}\right] \\ &\geqslant \exp\left[-(\text{cte})V^k\right] > 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'inégalité généralisée des moyennes arithmétiques et géométriques a été employée. On voit que (4.1) s'adapte aisément au cas général (2.6*b*). Or, il s'ensuit qu'il y a un vecteur normalisé

$$\begin{aligned} \Psi_{V0}\{\eta\} &= N_V^{-1} \exp(-\Lambda'_V\{\eta\} - \Lambda^{(0)}\{\eta\}) \\ &= N_V^{-1} \exp(-\Lambda'_V\{\varphi\})\Psi^{(0)}\{\eta\} \in \mathcal{H}_{\text{Fock}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nous voulons étudier maintenant la fonctionnelle

$$\begin{aligned} S_V\{f\} &= \langle \Psi_{V0}, e^{i\varphi(f)}\Psi_{V0} \rangle \\ &= N_V^{-2}\int d\mu^{(0)}(\xi) e^{-2\Lambda'_V\{B\xi\}} e^{i(B\xi,f)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

et sa continuité, à la limite V $\rightarrow \infty$. On trouve, en utilisant $|\sin x| \leqslant |x|$,

$$\begin{aligned} |S_V\{f\} - S_V\{g\}| \leqslant N_V^{-2} &\int d\mu^{(0)}(\xi) e^{-2\Lambda'_V\{B\xi\}} \\ &\times |\langle B\xi, f-g\rangle| \equiv Q. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Le quotient Q est la valeur moyenne d'une fonctionnelle $|\langle \eta, h\rangle|$ croissant comme $\eta \rightarrow c\eta$ si $c > 1$ avec le poids $N_V^{-2}e^{-2\Lambda'_V}$. Celui-ci est décroissant parce que Λ'_V est une somme de produits positifs de monômes. Ces remarques suggèrent que (B étant symétrique)

$$|S_V\{f\} - S_V\{g\}| \leqslant Q \leqslant \int d\mu^{(0)}(\xi) |\langle \xi, B(f-g)\rangle| = 2^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}} \| B(f-g)\|_2. \tag{4.5}$$

L'inégalité $Q \leqslant \int d\mu^{(0)} \ldots$ ainsi que (5.1*b*) et (5.3*a*) seront démontrées dans la suite de ce travail. Pour l'instant nous ne notons que, dans le cas de l'intégrale d'une dimension, de telles inégalités sont triviales pour les sommes finies approximatives. E. g. si $a_1 \leqslant a_2$, $b_\pm = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$ avec $\varepsilon \geqslant 0$, alors

$$a_1 b_+ + a_2 b_- \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

On obtient ainsi, comme dans [*5*], le résultat suivant.

LEMME 2. — *Il existe une sous-suite* $\{ V_n \}$ *de volumes et une fonctionnelle* $S\{f\}$ *telles que*

$$S_{V_n}\{f\} \to S\{f\} \qquad \text{pour} \qquad \forall f \in \mathcal{S} \tag{4.6}$$

et que $S\{f\}$ *soit continue en f. En fait,* S *s'étend à une fonctionnelle continue sur* L_2 *(espace réel). Cette fonctionnelle définit, d'après l'équation* (3.1), *une mesure* ν *sur* $\mathcal{S}'$.

L'extension à L_2 provient de l'inégalité (4.5) et du fait que B est un opérateur borné sur L_2.

Ce lemme ne dit rien quant à l'unicité. Nous ajoutons quelques autres observations.

Premièrement, la condition $\Lambda' \geqslant 0$ fournit des simplifications considérables. En fait, on peut majorer des grandeurs diverses par les grandeurs correspondantes pour le champ libre, comme dans l'inégalité (4.5). Cependant, cette condition pourrait être trop restrictive pour plusieurs cas intéressants. Nous pouvons donner une analogie avec l'hamiltonien, où on suppose

$$H^{(0)} + H_{\text{int}} + (\text{cte}) \geqslant 0,$$

mais en général, H_{int} n'a pas de borne inférieure [*19*]. Voir aussi [*5*], où la borne inférieure de H_{int}, et la constante, dépendent de V, et la démonstration de la continuité de $S\{f\}$ est plus délicate qu'ici.

Deuxièmement, supposons que les volumes V_n soient croissants et tels que chaque région bornée appartient à tous V_m pour m suffisamment grand. Alors, on s'attend à ce que $S\{f\}$ soit invariante par translations T_w. Mais on peut assurer cette invariance en commençant avec $f \in \mathcal{D}$, et si $\operatorname{supp} f \subseteq V$, par la construction des moyennes

$$\bar{S}_V\{f\} = \int_R d^3w S_V\{T_w f\} \Big/ \int_R d^3w, \tag{4.7a}$$

où

$$R = \{ w \in R^3 : \operatorname{supp} T_w f \subseteq V \}. \tag{4.7b}$$

Une sous-suite convergente de telles fonctionnelles donnera $\bar{S}\{f\}$ qui sera certainement invariante.

Troisièmement, il ne semble pas facile à établir si la mesure ν déterminée par S est $\perp \mu^{(0)}$. Ceci ne semble même pas simple à montrer, si $N_V \to 0$ quand $V \to \infty$ (sauf pour les couplages Λ' de quatrième degré, voir [*2*] [*3*]).

5. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONNELLES S

Nous continuons ici l'étude de $S\{f\}$, construite dans (4.6), et de la mesure correspondante ν. Nous dénotons les mesures correspondant aux fonctionnelles approximatives S_n par μ_n. (On peut noter que nos remarques s'appliquent aussi bien à $\bar{S}$.)

D'abord, quant à l'intégrabilité des fonctionnelles par rapport à ν, le fait suivant nous suffit. Si

$$F\{\eta\} = \prod_{j=1}^{n} \int d^3u_j \eta(u_j) h_j(u_j), \qquad \forall h_j \in \mathcal{S}, \tag{5.1a}$$

on a un problème pour un nombre fini de dimensions. Alors la fonctionnelle F est ν-mesurable, par définition de ν pour les ensembles cylindriques. D'ailleurs, on montre que pour $\forall N$ (cf. la section 4; c_n une constante),

$$\int d\mu_N \, | F | \leqslant c_n \int d\mu^{(0)} \, | F | \equiv C < \infty. \tag{5.1b}$$

Il s'ensuit facilement que

$$\left| \int d\nu F \right| \leqslant C. \tag{5.1c}$$

Alors, pour φ comme opérateur de multiplication, on trouve

$$W \equiv \langle \varphi(h_1) \ldots \varphi(h_n) \rangle_0 = \left[\prod_{j=1}^{n} \int d^3u_j h_j \frac{\delta}{i\delta g} \right] S\{g\} |_{g=0}, \tag{5.2}$$

avec $| W | \leqslant C$. L'état fondamental Ψ_0 pour les valeurs moyennes est l'unité dans $L_2(\mathcal{S}', \nu)$. (Sur la convergence des mesures et la permutation des opérations, voir e. g. [*18*], sec. IV.9 et théorème III.6.20.) Nous voyons que $S\{f\}$ est en fait une fonctionnelle génératrice. Dans le cas de théorie euclidienne, elle fut appelée [2] la *fonctionnelle de Schwinger.*

L'argument précédent et celui cité dans la section 4 nous donnent

$$\left| \left(\int d^3uf \frac{\delta}{i\delta g} \right)^n S\{g\} |_{g=0} \right| = \left| \int d\nu(\eta) \langle \eta, f \rangle^n \right|$$
$$\leqslant \int d\mu^{(0)} \,|\, \langle \eta, Bf \rangle \,|^n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dve^{-\frac{1}{2}v^2} \,|\, av \,|^n, \quad (5.3a)$$

où $a = \| Bf \|$. Alors,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \left(\int d^3uf \frac{\delta}{i\delta g} \right)^n S\{g\} |_{g=0} \right| \leqslant \frac{2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} dve^{-\frac{1}{2}v^2} e^{av} < \infty. \quad (5.3b)$$

Ici, comme dans le lemme 2, la discussion reste valable pour f réelle dans L_2. Pour f complexe, la convergence de la série est assurée par des estimations semblables à celles-ci, et la continuité dans f s'ensuit d'une étude facile de cette série. Nous résumons.

LEMME 3. — *La fonctionnelle* $S\{f\}$ *a une expansion de Volterra convergeant,* $\forall f \in L_2$ *(espace complexe), et est continue dans la topologie de norme de* L_2.

Pour le champ libre, l'ordre de $S\{zf\}$ comme fonction de z égale 2. Pour Λ' du quatrième degré, cet ordre pourrait être $\frac{4}{3}$ [2].

Les dérivées de S nous donnent les valeurs moyennes des polynômes en φ. Cependant, certaines autres valeurs moyennes peuvent être exprimées directement en termes de S. Nous suivons ici réf. [12]. Les commutateurs suivants

$$[H, \varphi] = i^{-1}\pi \qquad \text{et} \qquad [\pi, \varphi] = i^{-1}\delta, \quad (5.4a)$$

[le premier provient de la forme (2.2) pour H], et l'équation $H\Psi_0 = 0$, déterminent la valeur moyenne suivante,

$$\langle e^{i\varphi(f_1)} H e^{i\varphi(f_2)} \rangle_0 = -\frac{1}{2} \langle f_1, f_2 \rangle S\{f_1 + f_2\}. \quad (5.4b)$$

Ces équations peuvent, en fait, définir l'hamiltonien pour la théorie finale, spécifiée par S. Les expressions formelles de la section 2 n'étaient définies qu'avec un cut-off.

Quant à l'opérateur $\pi(h)$, son domaine n'est pas *a priori* fixé, et ainsi

$e^{i\pi(h)}$ reste ambigu. Cependant, les valeurs moyennes suivantes de π sont bien déterminées,

$$\langle e^{i\varphi(f_1)}\pi(h)e^{i\varphi(f_2)}\rangle_0 = \frac{1}{2}\langle f_2 - f_1, h\rangle S\{f_1 + f_2\}. \tag{5.5}$$

La démonstration dans [*12*] de la dernière équation dépend de l'introduction de l'opérateur T de renversement du temps. Dans le formalisme fonctionnel, la démonstration peut s'effectuer par l'intégration par parties. En fait, on emploie

$$\langle e^{i\varphi(f)}\pi(h)\rangle_0 = \langle Te^{i\varphi(f)}\pi(h)\Psi_0, T\Psi_0\rangle = -\langle \pi(h)e^{i\varphi(f)}\rangle_0, \tag{5.6a}$$

et ce résultat est équivalent (au moins pour un volume fini) à

$$\int \mathfrak{D}(\eta)e^{-\Lambda_V}e^{i(\eta,f)}\frac{\delta e^{-\Lambda_V}}{\delta\eta} = -\int \mathfrak{D}(\eta)\left(\frac{\delta}{\delta\eta}e^{-\Lambda_V}e^{i(\eta,f)}\right)e^{-\Lambda_V}, \tag{5.6b}$$

dans la notation de (3.6*b*), et avec $\Lambda_V = \Lambda^{(0)} + \Lambda'_V$. On prend $\pi = i^{-1}\delta/\delta\eta$. La dérivée fonctionnelle doit être comprise de la façon suivante. Soit h telle que $A^{\frac{1}{2}}h \in L_2$ [voir l'équation (2.11*a*)] : on remplace

$$\delta/\delta n \qquad \text{par} \qquad \int d^3u h(u)\delta/\delta\eta(u). \tag{5.6c}$$

Quant à l'intégration par parties, nous ne pouvons pas étendre les remarques de [*3*] pour l'intégrale de Friedrichs et Shapiro.

6. THÉORIE EUCLIDIENNE A UNE DIMENSION

Comme nous avons déjà souligné, les solutions des sections 4 et 5 sont peu satisfaisantes, pour plusieurs raisons. Maintenant, nous allons présenter un exemple où l'on obtient au moins l'unicité.

Il s'agit de la théorie euclidienne pour le couplage φ^4, dans l'espace-temps à une dimension. La solution de ce modèle fut obtenue par l'emploi des méthodes de la mécanique statistique et des espaces banachiques [*6*]. Nous n'ajoutons à cette solution que quelques détails.

Ce modèle est essentiellement le seul pour lequel telle sorte d'étude soit possible à présent (sauf pour le cas trivial d'espace-temps de dimension nulle). Pour le couplage φ^{2n}, en général, on devrait employer les équations de Kirkwood et Salsburg, pour potentiels dépendant de plus que deux particules. Ces équations ont été à peine étudiées [*20*]. Pour le couplage φ^4 et l'espace-temps de dimension deux ou plus, on ne peut résoudre les équations qu'avec une régularisation assez spéciale [*6*, p. 519].

Introduisons le modèle. Ceux de [*6*] (et de [*7*]) sont pour les théories avec une charge. Nous considérons une théorie neutre, avec un cut-off. Nous commençons avec $\Lambda^{(0)}$ comme dans l'équation (2.12*a*) (avec $m > 0$), mais pour une dimension, et nous posons,

$$S_L\{f\} = N_L^{-2}\int \mathfrak{D}(\eta)e^{-2\Lambda^{(0)}}e^{-2\Lambda'_L}e^{i(\eta,f)}, \tag{6.1a}$$

où

$$2\Lambda'_L\{\eta\} = \frac{1}{4}\gamma\int_{-L}^{+L} du\eta^4(u), \qquad 0 \leqslant \gamma < 4\left(\frac{1}{3}m^2\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{6.1b}$$

et $S_L\{0\} = 1$ définit N_L. (On peut poser $\alpha = 0$, voir [*6*], pour une dimension. Les constantes dans (6.1*b*) et (2.10*a*) sont choisies afin que $2\Lambda^{(0)} + 2\Lambda'_L$ soit le lagrangien total, dans une forme usuelle.) Nous dénotons ce modèle-ci par $(\varphi^4)^{(L)}_{1E}$.

Vérifions d'abord la validité de l'expression (6.1*a*) pour S_L, si $\gamma \geqslant 0$ et $L < \infty$. Soit

$$G^{(0)} = (-d^2/du^2 + m^2)^{-1}, \qquad B_1 = (G^{(0)})^{\frac{1}{2}}. \tag{6.2}$$

Nous voulons établir d'abord que $\Lambda'_L\{B_1\xi\}$ est invariante, cf. [*3*], ce qui entraînera en particulier que

$$J \equiv \int d\mu^{(0)}(\xi)\Lambda'_L\{B_1\xi\} < \infty. \tag{6.3a}$$

Mais B_1 a la transformée de Fourier de $(p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}}$ pour noyau b_1, ainsi $b_1 \in L_2$. La positivité de l'opérateur associé à Λ'_L, et le fait que

$$\int_{-L}^{L} du \int dv_1 dv_2[b_1(u - v_1)b_1(u - v_2)]^2 < \infty, \tag{6.3b}$$

établissent l'invariance de Λ'_L (alors, $\frac{3}{8}\int du \ldots = J$). La fonctionnelle $e^{-2\Lambda'_L}e^{i(B\xi, f)}$ est, par conséquent, invariante. D'ailleurs, on obtient comme dans (4.1),

$$N_L > 0. \tag{6.4}$$

L'expression pour S_L est ainsi non ambiguë. Sa forme nous permet d'utiliser les arguments et résultats des sections 4 et 5.

La borne supérieure sur γ dans (6.1*b*) est utilisée dans l'appendice A pour l'étude de la limite $L \to \infty$. Nous y établissons le résultat suivant.

LEMME 4. — *Les valeurs moyennes de l'état fondamental vérifient la relation*

$$\mathrm{Lim}_{L\to\infty} S_L^{2m}(u_1, \ldots, u_{2m}) = S_\infty^{2m}(u_1, \ldots, u_{2m}). \tag{6.5}$$

La convergence a lieu en chaque point, et les fonctions S_∞^{2m} sont invariantes par translation.

On s'attend à ce que les fonctions S_L^{2m}, ainsi que S_∞^{2m}, soient en fait continues (cf. [*8*], I, lemme 9).

Dans [*6*] on démontra l'existence des fonctionnelles n, qui sont analogues aux densités de probabilité en mécanique statistique, et qui donnent (essentiellement) les fonctions S_∞^{2m}. Cependant, grâce à la connaissance du comportement (6.5), et aux sections 4 et 5, on obtient directement :

THÉORÈME. — *La fonctionnelle génératrice $S_L\{f\}$ [pour le modèle $(\varphi^4)_{1E}^{(L)}$] satisfait*

$$\mathrm{Lim}_{L\to\infty} S_L\{f\} = S_\infty\{f\} \qquad \text{pour} \qquad \forall f \in L_2. \tag{6.6}$$

La fonctionnelle S_∞ est invariante par translations, continue dans la topologie de la norme de L_2, et a un développement de Volterra convergent.

L'invariance de S_∞ provient de celle des fonctions S_∞^{2m}, et l'artifice de la section 4 pour assurer l'invariance n'est pas nécessaire.

Nous allons résumer les manipulations pour résoudre le modèle $(\varphi^4)_{1E}^{(L)}$. L'équation (6.1*a*) nous donne

$$S_L\{f\} = N_L^{-2} \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma[\delta^4/\delta f^4]_L\right) S^{(0)}\{f\}, \tag{6.7}$$

où $S^{(0)}\{f\} = S_L\{f\}|_{\gamma=0}$, et $[\ldots]_L$ indique l'intégration sur $[-L, L]$. L'opérateur $\exp(-.\gamma\ldots)$ définit une série formelle. On ne s'attend pas à ce que cette série converge en raison de la nécessité de $\gamma \geqslant 0$ pour la théorie. On obtient, en termes d'un champ fictif ψ,

$$\begin{aligned} S_L\{f\} = N_L^{-2} \exp(-\gamma[\delta^2/\delta\psi^2]_L) \exp&\left[\frac{1}{2}f(G^{(0)-1} - \psi)^{-1}f\right]_\infty \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathrm{Log}\,[(G^{(0)-1} - \psi)/G^{(0)-1}]\right)\Bigg|_{\psi=0}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Ensuite, on introduit le temps propre, la représentation employant l'intégrale de Wierner, et l'on développe en série, d'après [*6*]. Il en résulte,

$$S_L^{2g}(u_1, \ldots, u_{2g}) = \sum_{\pi \in \text{perm}} S_L^{2g}(u_{\pi(1)}u_{\pi(2)} ; \ldots ; u_{\pi(2g-1)}u_{\pi(2g)}), \quad (6.9a)$$

$$S_L^{2g}(u_1v_1 ; \ldots ; u_gv_g) = \frac{1}{g\,!\,2^{2g}}\left[\prod_{j=1}^{g}\int_0^\infty ds_j e^{-\frac{1}{2}m^2 s_j}\int P_{u_jv_j}^{s_j}(d\omega_j)\right] \times n_L^g\{\omega_1, s_1, \ldots, \omega_g, s_g\}, \quad (6.9b)$$

$P_{uv}^s(d\omega)$ étant la mesure conditionnelle de Wiener. On introduit de plus la notation

$$b = (\omega, s), \qquad \bar{b} = (\bar{\omega}, t), \quad (6.10a)$$

$$\int Q(d\bar{b}) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\frac{1}{2}m^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int P_{zz}^t(d\bar{\omega}), \quad (6.10b)$$

et les fonctionnelles n_L^g sont données par

$$n_L^g\{b_1, \ldots, b_g\} = (\text{cte}) \exp(-\gamma[\delta^2/\delta\psi^2]_L)$$
$$\times \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{g}\int_0^{s_j} d\sigma\psi(\omega_j(\sigma)) + \frac{1}{2}\int Q(d\bar{b}) \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\psi(\bar{\omega}(\tau))\right)\right]\Bigg|_{\psi=0}. \quad (6.11)$$

Enfin, soit χ_L la fonction caractéristique pour $[-L, L]$. Le potentiel effectif V_L et la fonction de Mayer K_L deviennent pour ce modèle

$$V_L\{b, \bar{b}\} = \frac{1}{2}\gamma\int_0^s d\sigma\int_0^t d\tau\delta(\omega(\sigma) - \bar{\omega}(\tau))\chi_L(\omega(\sigma)), \quad (6.12a)$$

$$K_L\{b, \bar{b}\} = 1 - \exp(-V_L\{b, \bar{b}\}). \quad (6.12b)$$

Les équations de Kirkwood et Salsburg prennent ici la forme

$$n_L^{g+1}\{b ; b_1, \ldots, b_g\} = \exp\left(-\frac{1}{2}V_L\{b, b\} - \sum_j V_L\{b, b_j\}\right)$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k\,!}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\int Q(d\bar{b}_1)K_L\{b, \bar{b}_1\} \ldots \int Q(d\bar{b}_k)K_L\{b, \bar{b}_k\}$$
$$\times n_L^{g+k}\{b_1, \ldots, b_g, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k\}. \quad (6.13)$$

Nous y retournerons dans l'appendice A.

APPENDICE

A. SUITE DE LA THÉORIE EUCLIDIENNE

Nous allons établir le lemme 4, en suivant [*8*, I]. Comme on peut s'y attendre, il y a des différences de détail entre la théorie euclidienne ici et la théorie du gaz quantique dans [*8*], et les résultats que celle-ci contient ne s'appliquent pas directement. Par exemple, on trouve un remplacement des sommes par des intégrales, et la structure du potentiel est différente.

Nous employons la notation (d'après [*7*] [*8*])

$$b^g = (b_1, \ldots, b_g), \quad \text{et de même pour} \quad \omega^g, \text{ etc.} \tag{A.1}$$

Soit E l'espace vectoriel des suites N de fonctionnelles mesurables (pour la mesure de Wiener) et symétriques,

$$\mathrm{N} = (\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1 \{ b^1 \}, \mathrm{N}_2 \{ b^2 \}, \ldots). \tag{A.2}$$

Les calculs dans [*6*] indiquent l'introduction de l'espace banachique $\mathrm{E}_\xi \subset \mathrm{E}$, défini par la norme

$$\| \mathrm{N} \|_\xi = \sup_g \operatorname*{ess\,sup}_{b_1, \ldots, b_g} \left[\Pi_j \xi(s_j) \right]^{-1} | \mathrm{N}_g \{ b^g \} |, \tag{A.3a}$$

$$\xi(s) = (4\gamma^{-1}) \left(\frac{1}{3} m^2 \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{1}{3} s m^2 \right). \tag{A.3b}$$

Nous posons

$$\mathrm{K}_\mathrm{L} \{ b, \bar{b}^n \} = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{K}_\mathrm{L} \{ b, \bar{b}_j \}, \tag{A.4}$$

$$\int \widehat{\mathrm{Q}}(d\bar{b}^n, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \int \mathrm{Q}(d\bar{b}_1) \ldots \int \mathrm{Q}(d\bar{b}_n). \tag{A.5}$$

Alors, les équations de Kirkwood et Salsburg (6.13) peuvent s'écrire dans la forme (où L est supprimé, et $\mathrm{L} = \infty$ est admis)

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}^0 + \overline{\mathrm{K}}\mathrm{N}, \tag{A.6a}$$

$$\mathrm{N}^0 = (0, e^{-\frac{1}{2}\mathrm{V}\{b_1, b_1\}}, 0, 0, \ldots), \tag{A.6b}$$

et l'opérateur $\overline{\mathrm{K}}$, agissant sur $h \in \mathrm{E}$, donne

$$(\overline{\mathrm{K}}h)_0 = 0,$$

$$(\overline{\mathrm{K}}h)_1 \{ b \} = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{V}\{b,b\}} \left[\int \widehat{\mathrm{Q}}(d\bar{b}^n, n) \left(-\frac{1}{2} \right)^n \mathrm{K} \{ b, \bar{b}^n \} h_n \{ \bar{b}^n \} - 1 \right],$$

$$(\overline{\mathrm{K}}h)_{p+1} \{ b, b^p \} = e^{-\mathrm{F}\{b, b^p\}} \int \widehat{\mathrm{Q}}(d\bar{b}^n, n) \left(-\frac{1}{2} \right)^n \mathrm{K} \{ b, \bar{b}^n \} h_{p+n} \{ b^p, \bar{b}^n \}, \tag{A.6c}$$

où $p \geqslant 1$. Un produit vide est égal à 1. On a posé

$$\mathrm{F}\{b, b^p\} = \frac{1}{2}\mathrm{V}\{b, b\} + \sum_{j=1}^{p} \mathrm{V}\{b, b_j\}. \tag{A.7}$$

Nous commençons avec quelques estimations. Il s'ensuit de la positivité de V que

$$0 \leqslant \mathrm{K} = 1 - e^{-\mathrm{V}} \leqslant \mathrm{V}, \tag{A.8}$$

et on voit que

$$|(\overline{\mathrm{K}}h)_{p+1}\{b, b^p\}| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{p} \xi(s_j)\right) \|h\|_\xi \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{Q}(d\bar{b})\mathrm{V}_\infty\{b, \bar{b}\}\xi(t)\right]. \tag{A.9}$$

La dernière intégrale se calcule explicitement,

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \int \mathrm{P}^t_{uu}(d\bar{\omega})\mathrm{V}_\infty\{\omega, \bar{\omega}\} = \frac{1}{2}\gamma \int \mathrm{P}^t_{00}(d\bar{\omega})\int_0^s d\sigma \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du \times \delta(\omega(\sigma) - \bar{\omega}(\tau) + u) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\gamma s t^{\frac{1}{2}}, \tag{A.10}$$

$$\int \mathrm{Q}(d\bar{b})\mathrm{V}_\infty\{b, \bar{b}\}\xi(t) = \frac{2}{3}m^2 s. \tag{A.11}$$

Maintenant, on peut confirmer facilement qu'en fait

$$\|\overline{\mathrm{K}}\|_\xi \equiv k < 1 \tag{A.12}$$

[pour $\gamma < 4\left(\frac{1}{3}m^2\right)^{\frac{3}{2}}$]. Il existe, alors, une solution et une seule à l'équation (A.6*a*).

Pour le problème de la limite $\mathrm{L} \to \infty$, on regarde d'abord

$$\|\mathrm{X}_\mathrm{L}\overline{\mathrm{K}}\mathrm{X}_{\mathrm{L}+\Delta'} - \mathrm{X}_\mathrm{L}\overline{\mathrm{K}}\mathrm{X}_{\mathrm{L}+\Delta}\|_\xi \tag{A.13}$$

où $\overline{\mathrm{K}}$ correspond à $\mathrm{L} = \infty$; d'ailleurs, $\Delta' > \Delta > 0$, et X_L est l'opérateur de multiplication par les fonctionnelles caractéristiques $\chi_\mathrm{L}\{\omega^n\}$. Pour $n = 1$, celle-ci est égale à 1 si $|\omega(\sigma)| \leqslant \mathrm{L}$ pour $\forall\sigma$ et égale à zéro autrement. On emploie

$$\chi_{\mathrm{L}+\Delta'}\{\omega^n\} - \chi_{\mathrm{L}+\Delta}\{\omega^n\} \leqslant \sum_{j=1}^{n}(1 - \chi_{\mathrm{L}+\Delta}\{\omega_j\}). \tag{A.14}$$

Les contributions de tous les j sont égales, et comme en haut, on trouve une exponentielle,

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &\equiv |\mathrm{X}_\mathrm{L}\overline{\mathrm{K}}(\mathrm{X}_{\mathrm{L}+\Delta'} - \mathrm{X}_{\mathrm{L}+\Delta})h_{p+1}\{b, b^p\}| \\ &\leqslant \mathrm{A}\exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{Q}(d\bar{b})\mathrm{K}_\infty\{b, \bar{b}\}\xi(t)\right]\int \mathrm{Q}(d\bar{b}')\mathrm{K}_\infty\{b, \bar{b}'\}\xi(t)(1 - \chi_{\mathrm{L}+\Delta}\{\bar{\omega}'\}), \end{aligned} \tag{A.15a}$$

où

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\chi_\mathrm{L}\{\omega\}\left[\prod_{j=1}^{p}\xi(s_j)\right]\|h\|_\xi. \tag{A.15b}$$

L'emploi de $K \leqslant V$ et de l'équation (A.11) nous donne

$$D \leqslant A \exp\left(\frac{1}{3} m^2 s\right) \int_{C(L+\Delta)} Q(d\bar{b}) V_\infty \{ b, \bar{b} \} \xi(t). \tag{A.16}$$

Ici, $C(L + \Delta)$ désigne la restriction de l'intégration aux fonctions $\bar{\omega}(\tau)$ telles, qu'il existe $\tau_0 \in [0, t]$ avec $|\bar{\omega}(\tau_0)| \geqslant L + \Delta$. Cependant, la fonction δ dans V_∞ ne contribue pas sauf s'il existe $\tau_1 \in [0, t]$ avec $|\bar{\omega}(\tau_1)| \leqslant L$.

La dernière intégrale est majorée par

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\frac{1}{2}m^2 t} \xi(t) \left(\max_{\bar{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} du V_\infty \{ \omega, s, \bar{\omega} + u, t \} \right) \left(\max_u \int_{C(L+\Delta)} P^t_{uu}(d\bar{\omega}) \right). \tag{A.17}$$

Nous supposons la condition supplémentaire $|\bar{\omega}(\tau_1)| \leqslant L$ pour la dernière intégrale de (A.17). Celle-ci est alors majorée, d'après [*8*], I, l'équation (A1.7), par

$$P^t_{xy}[K'(\Delta, t)] \leqslant 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \sigma\left(\frac{1}{4}\Delta, t\right), \tag{A.18a}$$

$$\sigma\left(\frac{1}{4}\Delta, t\right) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{4}\Delta t^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} du e^{-u^2}. \tag{A.18b}$$

L'intégrale $\int du\, V_\infty$ donne $\frac{1}{2}\gamma s t$, cf. l'équation (A.10), et l'on obtient

$$D \leqslant A \exp\left(\frac{1}{3} m^2 s\right) \gamma s 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}m^2 t} \xi(t) \sigma\left(\frac{1}{4}\Delta, t\right). \tag{A.19}$$

Vu la borne $\sigma \leqslant 1$ et la convergence uniforme en Δ de la dernière intégrale,

$$\lim_{\Delta\to 0} A \ldots = A \ldots \int dt \ldots \lim_{\Delta\to 0} \sigma\left(\frac{1}{4}\Delta, t\right) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta\to\infty} D = 0. \tag{A.20}$$

D'après [*8*], I [*9*], on trouve maintenant que

$$\| X_L(1 - X_{L+\Delta}\bar{K})^{-1} X_{L+\Delta} - X_L(1 - \bar{K})^{-1} \|_\xi \leqslant \zeta(n, \Delta), \tag{A.21a}$$

où, en choisissant d'abord n et après Δ, on peut avoir ζ arbitrairement petit. D'ailleurs, il s'ensuit des équations (6.12) que

$$X_l \bar{K}_l = X_l \bar{K}_{l+\delta} \tag{A.21b}$$

pour $0 \leqslant \delta \leqslant \infty$, et l'on peut vérifier que (A.21*a*) reste valable si l'on remplace $(1 - \bar{K})^{-1}$ par $(1 - \bar{K}_{L+\Delta'})^{-1}$, $\Delta' \geqslant \Delta$. Alors

$$\| X_L(1 - \bar{K}_{L+\Delta'})^{-1} - X_L(1 - \bar{K})^{-1} \|_\xi \leqslant 2\zeta(n, \Delta), \tag{A.21c}$$

et la solution N de l'équation (A.6*a*) vérifie

$$\| X_L N_{L+\Delta'} - X_L N_\infty \|_\xi \leqslant 2\zeta(n, \Delta). \tag{A.22}$$

Maintenant, on peut démontrer notre lemme 4 comme le lemme 2 de [*8*, I]. Les intégrales $\int ds_j \ldots$ dans l'équation (6.9*b*) ne donnent aucun problème, cf. la borne (A.19). L'invariance des S_∞^{2m} par translation s'ensuit de celle de N_∞^0 et de $\bar{K}_\infty$.

B. LA PROPRIÉTÉ DE CLUSTERING

Cette propriété-ci est vitale pour les théories physiques. Par exemple, dans la théorie quantique des champs, cette propriété se rapporte à l'unicité du vide [*12*] (ou, de l'état fondamental). Dans le contexte des modèles discutés ici, nous avons déjà noté que la présence de termes comme L_1L_2 dans Λ' pourrait détruire sa validité.

Nous n'avons aucun résultat concret à offrir ici. Néanmoins, il nous semblait qu'il vaut la peine de résumer quelques points pertinents.

Premièrement, on s'attend à trouver pour les fonctions tronquées du modèle $(\varphi^4)_{1E}$, comme dans [*8*], que

$$\int du_2 \ldots du_{2m} \left| {}^{T}S_\infty^{2m}(u_1, u_2, \ldots, u_{2m}) \right| < \infty. \tag{B.1}$$

Il est probable qu'une démonstration peut être construite d'après [*8*]. Cependant, en raison de la difficulté des manipulations et de la portée assez limitée de cette hypothèse, nous omettons la vérification des détails. Deuxièmement, un développement comme dans [*9* (2[e] réf.), p. 111] suggère un rapport direct entre les propriétés de factorisation du couplage (e. g. de $e^{-\Lambda'}$), et celles des fonctions tronquées.

Nous voudrions maintenant donner un simple argument heuristique concernant la propriété de clustering, si $e^{-2\Lambda}$ factorise. Considérons deux fonctions $f_\pm \in \mathfrak{D}$ dont les supports satisfont $u^1 \geqslant 0$ (pour f_+) et $u^1 \leqslant 0$. Soient $R_\pm \subset R^3$ deux régions telles que $R_\pm \subset \{ u : u^1 \gtrless 0 \}$, que $\operatorname{supp} f_\pm \subset R_\pm$, et que les $\operatorname{supp} f_\pm$ soient loin des frontières des $R_\pm$. Posons

$$S_{R_\pm} \{ f_\pm \} = \int \mathfrak{D}(\eta) e^{-2\Lambda_\pm} e^{i(\eta, f_\pm)} \Big/ \int \mathfrak{D}(\eta) e^{-2\Lambda_\pm}. \tag{B.2a}$$

D'autre part, si $\Lambda \approx \Lambda_+ + \Lambda_-$, alors

$$S_{R_+ \cup R_-} \{ f_+ + f_- \} \approx S_{R_+} \{ f_+ \} S_{R_-} \{ f_- \}. \tag{B.2b}$$

Supposons que dans ces conditions, $R_+ \cup R_- \to R^3$ et que les séparations entre les $\operatorname{supp} f_\pm$ et le plan $u^1 = 0$ tendent vers l'infini. Alors

$$S_{R_\pm} \{ f_\pm \} \to S \{ f_\pm \}. \tag{B.2c}$$

Si, de plus, l'égalité approximative (B.2*b*) devenait exacte, on trouverait la relation de clustering

$$S \{ f_+ + f_- \} \to S \{ f_+ \} S \{ f_- \}. \tag{B.3}$$

Cet argument ne suggère pas l'absence de clustering s'il y a des produits comme $\Lambda' = L_1L_2$. En fait, il existe un modèle [*21*] ayant de tels produits dans le couplage et possédant la propriété de clustering (mais dont la structure est assez différente par ailleurs).

RÉFÉRENCES

[1] F. COESTER et R. HAAG, *Phys. Rev.*, t. **117**, 1960, p. 1137.

[2] K. SYMANZIK, dans *Analysis in function space*, édité par W. T. MARTIN et I. E. SEGAL. MIT Press, Cambridge, Mass., U. S. A., 1964, p. 197 *ff*, et New York University report IMM-NYU 327, 1964.

[3] J. TARSKI, Conférences à l'École d'hiver de Karpacz, *Acta Universitatis Wratislaviensis*, n° 88, Wroclaw, t. **1**, 1968, p. 42 *ff*.

[4] I. M. GUELFAND et N. Y. VILENKIN, *Les distributions*. Dunod, Paris, t. **4**, 1967, surtout chapitre 4. Les sections notées dans le texte sont celles de ce chapitre.

[5] A. M. JAFFE et R. T. POWERS, *Commun. math. Phys.*, t. **7**, 1968, p. 218; A. JAFFE, dans *Proceedings of the conference on functional integration and constructive quantum field theory*, édité par I. Segal. MIT, avril 1966, p. 50 *ff*.

[6] K. SYMANZIK, *J. Math. Phys.*, t. **7**, 1966, p. 510 et conférences de Varenna, 1968 *(à paraître)*.

[7] J. GINIBRE, conférences de Karpacz (réf. 3, p. 134 *ff*) et preprint, *Seminar notes on Euclidean quantum field theory*, Orsay, 1966.

[8] J. GINIBRE, *J. Math. Phys.*, t. **6**, 1965, p. 238, p. 252, p. 1432 et thèse, Orsay, 1965. On note l'article de la page 238 par « I ».

[9] D. RUELLE, *Ann. Phys.* (New York), t. **25**, 1963, p. 109 et conférences de Boulder, 1963, dans *Lectures in theoretical physics*, t. VI, 1964, p. 73 *ff*.

[10] N. N. BOGOLUBOV, Jr., Institute of Theoretical Physics preprint, ITF-67-1, Kiev, 1967.

[11] D. W. ROBINSON, *Commun. math. Phys.*, t. **7**, 1968, p. 337.

[12] H. ARAKI, *J. Math. Phys.*, t. **1**, 1960, p. 492.

[13] B. MALGRANGE, conférences de Varenna, 1968 *(à paraître)*.

[14] I. M. GUELFAND et G. E. CHILOV, *Les distributions*, t. I. Dunod, Paris, 1962.

[15] K. O. FRIEDRICHS et H. N. SHAPIRO, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (U. S.), t. **43**, 1957, p. 336. FRIEDRICHS, SHAPIRO *et al.*, *Integration of functionals* (Courant Institute, New York University, notes des conférences, 1957).

[16] I. E. SEGAL, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **81**, 1956, p. 106.

[17] I. E. SEGAL, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **88**, 1958, p. 12.

[18] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, part I (Interscience Publ., New York, 1957), surtout chapitre III.

[19] E. NELSON, dans *Mathematical theory of elementary particles*, édité par R. Goodman et I. Segal (MIT Press, Cambridge, Mass., U. S. A., 1966), p. 69 *ff*.

[20] G. GALLAVOTTI et S. MIRACLE-SOLE, *Commun. math. Phys.*, t. **7**, 1968, p. 274.

[21] J. R. KLAUDER, *J. Math. Phys.*, t. **6**, 1965, p. 1666.

(Manuscrit reçu le 13 mai 1969).