ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MONIQUE SIGNORE

Rayonnement gravitationnel et problème des deux corps

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 1 (1969), p. 81-130
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_1_81_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 1, 1969, p. 81-130.

Section A :
Physique théorique.

Rayonnement gravitationnel et problème des deux corps

par

Mme Monique SIGNORE
Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.
Institut Henri Poincaré, Paris.

SOMMAIRE. — Dans ce travail, nous étudions la variation d'énergie par rayonnement gravitationnel d'un système de 2-corps dans le double cadre de la méthode d'approximation à vitesses quelconques de la Relativité Générale et d'une théorie Lorentz-invariante de la Gravitation. Si l'étude effectuée près des sources, à partir des équations de mouvement conduit à un gain d'énergie du système, au contraire, dans ces deux théories, loin des sources, nous obtenons, compte tenu de conditions asymptotiques, une énergie définie positive et une perte d'énergie, par rayonnement gravitationnel dans le problème des 2-corps.

SUMMARY. — In this paper we investigate the energy change of a 2-body system gravitationnel radiation using the fast approximation method and a Lorentz-invariant theory of gravitation. In both theories, near the sources, the calculations from the equations of motion, yield a gain in energy of the system. However, far from the sources both theories yield with some asymptotical conditions an opposite result. That is, a positive definite energy and a loss of energy by gravitationnal radiation.

INTRODUCTION

Deux des principales difficultés de la Relativité Générale concernent la définition de l'Énergie-impulsion et le choix d'une technique d'approximation. Dans ce travail, n ous précisons l'une et l'autre questions en choisissant l'étude particulière du problème des 2-corps dans le cadre des méthodes d'approximation de la Relativité Générale et dans le cadre d'une théorie « minkowskienne » de la Gravitation.

Considérons deux corps, telles les composantes d'une étoile double. Toute théorie du champ de gravitation, appliquée au calcul de la trajectoire des 2-corps, conduit, en première approximation, à l'ellipse newtonnienne; dans une approximation supérieure, la théorie doit mettre en évidence l'avance des périhélies observée expérimentalement. Enfin, si une solution radiative existe, la théorie doit introduire une modification de la trajectoire par « réaction de radiation »: la trajectoire du corps 1 par rapport au corps 2, par exemple, n'est pas une ellipse, mais une spirale; si elle est convergente (inward), les deux corps se rapprochent tandis que le système perd de l'énergie; si elle est divergente (outward), les deux corps s'éloignent l'un de l'autre et le système gagne de l'énergie.

Dans la première partie, nous reprenons les études du problème des 2-corps dans le cadre des méthodes d'approximation de la Relativité Générale. D'abord, nous rappelons brièvement les résultats obtenus dans les méthodes d'approximation à vitesses lentes des sources : les résultats du calcul de la variation d'énergie, par rayonnement gravitationnel, dans un système de 2-corps dépendent des solutions radiatives adoptées par les auteurs. Il faut noter qu'on ne tient pas compte du champ propre de chaque particule — en éliminant celui-ci par un artifice quelconque — et que le calcul se fait dans le voisinage des sources. Puis nous examinons l'approximation à vitesses non faibles, due à P. Havas et J. N. Goldberg [*1*]; le calcul de la variation d'énergie par radiation gravitationnelle d'un système de deux sources — calcul effectué sur les lignes d'univers des particules, compte tenu du champ propre de celles-ci — conduit à un gain d'énergie. Nous reprenons aussi, dans le cadre de cette approximation, le calcul du flux rayonné à travers une sphère, par un système de 2 particules, loin de celles-ci. P. Havas et S. F. Smith [*2*] trouvent aussi un gain d'énergie; mais nous pensons que le choix de l'énergie-impulsion du champ de gravitation, dans le cadre de cette méthode, est défectueux. Nous développons, à partir de la définition de l'énergie-impulsion pour la théorie exacte, une énergie-impulsion du champ approchée à l'ordre considéré, qui, modulo des conditions de rayonnement et de transversalité, est définie positive et qui conduit à une perte d'énergie, par rayonnement gravitationnel, pour un système de 2-corps, perte déjà trouvée par A. Einstein à partir de l'approximation linéaire de la Relativité Générale [*3*].

Dans la seconde partie, nous développons une théorie minkowskienne de la gravitation [*28*] [*30*], à partir d'une densité lagrangienne, homogène et de degré quelconque en fonction des vitesses, dont un terme représente les sources, un autre l'interaction champ-source, un troisième décrivant le champ pur. Les solutions radiatives sont celles de l'équation d'ondes. On reprend l'étude au voisinage des corps de Harish Chandra et Bhabha [*4*], étude qui apporte un terme supplémentaire aux équations de mouvement des sources : la réaction de radiation. Nous confrontons cette théorie avec les données expérimentales : nous calculons l'avance des périhélies des planètes; nous étudions l'interaction champ gravitationnel-champ électromagnétique et l'application à la courbure des rayons lumineux; nous calculons à partir de l'interaction champ gravitationnel-champ de Dirac, le déplacement vers le rouge des raies spectrales.

Dans la troisième partie, nous appliquons cette théorie à l'étude de la variation d'énergie d'un système de 2-corps par rayonnement gravitationnel [*30*]. Par analogie avec la mécanique classique, adoptant la démarche de S. F. Smith, nous calculons directement la variation d'énergie à partir des équations du mouvement modifiées par la réaction de radiation, des 2-corps. Nous effectuons cette étude, tout d'abord pour un degré d'homogénéité $h = 1$ du lagrangien par rapport aux quadrivitesses. Puis nous considérons le cas d'un degré d'homogénéité quelconque, les masses grave et inerte n'étant pas nécessairement, *a priori*, constantes.

Enfin, en quatrième partie, nous calculons, pour cette théorie Lorentz-invariante, le flux d'énergie rayonnée, par un système de deux sources, loin de celles-ci, à partir de la définition de l'énergie-impulsion du champ. Nous voyons que tenseur eulérien et tenseur canonique sont équivalents, dans la zone d'ondes; et même qu'ils sont égaux si on impose une condition de transversalité aux potentiels. Nous concluons que, moyennant des conditions de rayonnement, l'énergie est définie positive et qu'on obtient une perte d'énergie par rayonnement dans le cas particulier des 2-corps.

NOTATIONS

Les indices grecs : α, β, μ ..... prennent les valeurs ..... 0, 1, 2, 3.

Les indices latins : i, j .... prennent les valeurs ..... 1, 2, 3.

$x^0 =$ ct désigne la variable temporelle ; x^i, les variables spatiales.

$V_4 =$ variété riemannienne — ou euclidienne — à 4 dimensions.

$g_{\mu\nu} =$ métrique riemannienne — ou euclidienne quelconque — de signature hyperbolique normale $(+ - - -)$.

$\eta_{\mu\nu} =$ métrique minkowskienne $(- \delta_{pq};\ \delta_{\mu 0})$.

Forme quadratique fondamentale : $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Dérivée partielle : $\partial_\rho \equiv \partial/\partial x^\rho \equiv \quad , \rho$.
Dérivée co-variante : $\nabla_\rho \equiv \quad ; \rho \qquad (\mathrm{D} \equiv dx^\rho \nabla_\rho)$.
Dérivée variationnelle : $\dfrac{\delta}{\delta p_{\mu\nu}} \equiv \dfrac{\partial}{\partial p_{\mu\nu}} - \partial_\rho \dfrac{\partial}{\partial(\partial_\rho p_{\mu\nu})}$.

PREMIÈRE PARTIE

LES MÉTHODES D'APPROXIMATION DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

En Relativité Générale, le problème du mouvement implique le calcul du champ gravitationnel et réciproquement. Il en résulte pour le problème des 2-corps en particulier, la nécessité d'une technique d'approximation.

Les méthodes d'approximation utilisées par différents auteurs consistent à développer le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ en séries de puissances d'un paramètre λ, la métrique de Minkowski étant l'approximation d'ordre zéro :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \underset{n}{g}_{\mu\nu} \tag{1}$$

La « méthode des singularités » (E. I. H.) a été surtout développée par les travaux de A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman [*5*]; elle utilise seulement les équations du champ écrites dans le cas extérieur : les sources sont alors considérées comme des singularités du champ. Cette méthode permet le calcul du champ gravitationnel et le calcul du mouvement des singularités animées de vitesses petites par rapport à la vitesse de la lumière, le paramètre λ étant égal à $\dfrac{1}{c}$.

Puis, avec les mêmes hypothèses de vitesses lentes des sources $\left(\lambda = \dfrac{1}{c}\right)$, V. Fock [*6*], A. Papapetrou [*7*], Petrova [*8*] élaborèrent la méthode dite du « tenseur d'énergie-impulsion ». Les lois du mouvement déduites de la conservation de l'énergie-impulsion matérielle s'appliquent à des corps étendus, doués d'une certaine structure.

Enfin, P. Havas et J. N. Goldberg [*1*] ont récemment indiqué, par un processus analogue au précédent, une méthode d'approximation qui conduit aussi au calcul du champ et au calcul du mouvement des sources du champ, mais celles-ci étant animées de vitesses quelconques, le paramètre λ étant relié à la constante de gravitation.

I. — Approximations à vitesses lentes des sources.

Ainsi la « méthode des singularités » ou la « méthode du tenseur d'énergie-impulsion » qui toutes deux supposent des vitesses lentes des sources, appliquées au mouvement des planètes, conduisent l'une et l'autre à l'avance des périhélies expérimentalement observées; cela est en accord avec les résultats de l'étude de Pham Tan Hoang [*9*] sur l'équivalence des deux méthodes aux approximations non radiatives tout au moins.

Plusieurs auteurs ont développé les processus d'approximation jusqu'à des ordres élevés en vue d'une application à l'étude du rayonnement : L. Infeld [*10*], A. E. Scheidegger [*11*], N. Hu [*12*], A. Pérès [*13*] et A. Trautman [*14*] en particulier. Rappelons l'application faite par A. Trautman de la méthode originale E. I. H. au calcul de la réaction de radiation dans un système de 2-corps et les résultats de l'étude de A. Pérès qui est un développement de la méthode du « tenseur d'énergie-impulsion » de V. A. Fock.

1. Définition des solutions radiatives

On sait que les équations d'Einstein, à l'approximation linéaire, modulo une condition des coordonnées :

$$\partial^{\nu}\gamma_{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

$$\left(\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\right),$$

s'écrivent :

$$\Box\gamma_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu} \qquad (c = 1, G=1) \tag{3}$$

En tenant compte de l'hypothèse de faibles vitesses des sources, on a en particulier pour γ_{00} :

$$\nabla \underset{m}{\gamma_{00}} = \underset{m-2}{\ddot{\gamma}_{00}} \tag{4}$$

dont une solution est l'onde retardée sphérique :

$$\gamma_{00} = \frac{a_{00}(t-r)}{r} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m\,!)^{-1}r^{1-m}\frac{d^m}{dt^m}a_{00}(t) \tag{5}$$

Par analogie avec l'électromagnétisme, les termes pairs représentent les ondes stationnaires. L. Infeld en 1938, a introduit aussi les termes impairs, appelés « termes de rayonnement », le premier étant $\underset{3}{\gamma_{00}} = -\dddot{a}_{00}(t)$.

On considère une décomposition semblable pour γ_{ik}, tandis que les rôles des termes pairs et impairs s'intervertissent pour le développement des γ_{0k}.

2. EXISTENCE DES SOLUTIONS RADIATIVES

La réalité des termes de rayonnement fut contestée dès 1951 par L. Infeld et A. E. Scheidegger [*11*] qui essayèrent de les éliminer par des transformations de coordonnées. J. N. Goldberg [*15*], en 1955, a trouvé de façon heuristique, des solutions radiatives qui ne peuvent pas être éliminées. Enfin A. Trautman [*14*] en 1958 a généralisé ces résultats : étant donné une transformation de coordonnées :

$$x^0 = x'^0 + \lambda^0(x'^0); \qquad x^k = x'^k + \lambda^k(x'^k)$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions λ^0_{n+1} et λ^k_n telles que $g'_{n\,ik} = g'_{n+1\,0k} = g'_{n+2\,00} = 0$, compte tenu des équations de champ et des conditions de coordonnées aux ordres n, $n+1$, $n+2$ est :

$$\left.\begin{aligned} \underset{n+2}{g_{00,ik}} + \underset{n}{g_{ik,00}} - \underset{n+1}{g_{i0,k0}} - \underset{n+1}{g_{k0,i0}} &= 0 \\ \underset{n+1}{g_{0m,ik}} + \underset{n}{g_{ik,0m}} - \underset{n+1}{g_{0i,km}} - \underset{n}{g_{km,0i}} &= 0 \\ \underset{n}{g_{im,kl}} + \underset{n}{g_{kl,im}} - \underset{n}{g_{il,km}} - \underset{n}{g_{km,il}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

A. Trautman a montré ainsi que $\underset{3}{g_{ik}}, \underset{4}{g_{0k}}, \underset{5}{g_{00}}$ ne représentent qu'un champ radiatif apparent tandis que $\underset{5}{g_{ik}}, \underset{6}{g_{0k}}, \underset{7}{g_{00}}$, non éliminables, constituent le 1^{er} groupe radiatif qui intervient dans les équations de mouvement du 9^e ordre.

3. RÉSULTATS DE A. TRAUTMAN

Après étude de la méthode E. I. H. appliquée au problème des 2-corps de même masse M, A. Trautman [*14*] montre qu'au 9^e ordre les équations de mouvement sont de la forme :

$$M(\ddot{z}^k + 2\alpha\dot{z}^k + \omega^2 z^k) = 0$$

Il calcule le terme de « freinage » $\alpha M\dot{z}^k$ à l'aide d'un groupe de solutions radiatives $\underset{5}{g^{ik}}, \underset{6}{g^{0k}}, \underset{7}{g^{00}}$ et il obtient une perte d'énergie du système (R étant le diamètre du cercle newtonien) :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{3}{10}\frac{M^5}{R^5} \tag{7}$$

4. Résultats de A. Pérès

A. Pérès [13] développe la méthode du tenseur d'énergie-impulsion qui conduit :

— aux équations de champ :

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 h^{\mu\nu} - \ddot{h}^{\mu\nu} &= -16\pi\sqrt{-g}\,\tau^{\mu\nu} \\ \nabla^2 s^{\mu\nu} - \ddot{s}^{\mu\nu} &= \Theta^{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

où $\Theta^{\mu\nu}$ est une densité tensorielle du second ordre, fonction quadratique de $(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})$; $g^{\mu\nu}$ est telle que

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + s^{\mu\nu} \tag{9}$$

— aux équations de mouvement :

$$\left.\begin{aligned} \underset{n}{\dot{m}} + \sum_{p=0}^{p=n-1} \underset{n-p-1}{m}\, b_p^0 &= 0 \\ \underset{n}{\dot{m}\dot{z}^k} + \sum_{p=0}^{n} \underset{n-p}{m}\, b_p^k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

où

- $b_n^\mu = a_n^\mu + \underset{n+2}{\overline{\mathrm{F}}^\mu_{00}} + 2\dot{z}^k \underset{n+1}{\overline{\mathrm{F}}^\mu_{0k}} + \dot{z}^k\dot{z}^l \underset{n}{\overline{\mathrm{F}}^\mu_{kl}}$
- $\mathrm{M} = \underset{1}{m} + \underset{2}{m} + m \ldots$
- $\ddot{z}^k = a^k + a_1^k + a_2^k + \ldots$
- $\mathrm{F}^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\alpha \Gamma^\gamma_{\beta\gamma} + \delta^\mu_\beta \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}\right)$

($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$: coefficients de connexion affine).

$\overline{\mathrm{F}}^\mu_{\alpha\beta}$ indique qu'on calcule $\mathrm{F}^\mu_{\alpha\beta}$ à la posititition z_i^ρ de la particule en éliminant les termes propres infinis à l'aide de la distribution δ.

A. Pérès calcule effectivement a_5^k — qui intervient dans les équations de mouvement (10) du 9e ordre — pour le cas particulier de deux particules en mouvement circulaire à l'approximation newtonienne. Si on choisit un système de référence par rapport auquel le centre des masses est au repos, l'énergie rayonnée est par définition :

$$\mathrm{U} = -\Sigma m a^k \dot{z}^k$$

Dans un premier travail, A. Pérès ne tenant compte que de la partie linéaire des équations du champ (i. e. des $h^{\mu\nu}$), pour un groupe de solutions radiatives $\underset{5}{g}^{00}$, $\underset{5}{g}^{kl}$, $\underset{6}{g}^{0k}$, trouve un gain d'énergie :

$$-\frac{dE}{dt} = U = -\frac{16}{5}\frac{M^5}{R^5} \tag{11}$$

Les solutions radiatives ne sont pas celles qu'adopte A. Trautman et sont éliminables.

Dans un second travail, à côté des solutions radiatives en $h^{\mu\nu}$, A. Pérès introduit la partie non linéaire des équations du champ : il cherche des solutions radiatives $s_{\mu\nu}$ de $\nabla^2 s_{\mu\nu} = 0$ et obtient alors une perte d'énergie pour le système

$$-\frac{dE}{dt} = U = \frac{64}{5}\frac{M^5}{R^5} \tag{12}$$

On remarque que c'est précisément la valeur trouvée par A. Einstein dans le cadre de l'approximation linéaire de la Relativité Générale [*3*]. Pourtant ce dernier résultat de A. Pérès est lié à la partie non linéaire des équations de champ.

5. Conclusion

Ces méthodes d'approximation à vitesses lentes qui supposent un calcul des équations de mouvement au 9e ordre, ne sont pas bien adaptées au problème du rayonnement. Les solutions radiatives, si elles existent — i. e. non éliminables — ne sont pas uniques, et on doit pour les déterminer, faire des hypothèses supplémentaires plus ou moins justifiées. Nous retenons cependant les résultats de A. Trautman : son étude se réduit à la partie linéaire des équations de champ mais les solutions radiatives adoptées ne sont pas éliminables et conduisent à un résultat raisonnable.

Nous allons examiner une méthode d'approximation de la Relativité Générale, à vitesses quelconques des sources.

II. — **Approximation à vitesses non faibles des sources.**

Cette méthode due à P. Havas et J. N. Goldberg [*1*] développe de façon systématique l'approximation linéaire d'A. Einstein [*3*]. Les champs sont supposés faibles, les vitesses des particules ne sont plus supposées petites. Les coordonnées d'espace et de temps ont ici, un rôle parfaitement symétrique.

1. La méthode

On développe, en séries de puissances par rapport à un paramètre λ quelconque, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, l'énergie-impulsion de la matière

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} p_i^{\mu\nu} \delta^4(x^\rho - z_i^\rho) d\tau_i \tag{13}$$

où δ^4 est la « 4-distribution de Dirac », N, le nombre des particules

$$\delta\tau_i^2 = \eta_{\mu\nu} dz_i^\mu dz_i^\nu \tag{14}$$

A partir de la loi de conservation de l'énergie-impulsion, on obtient par la méthode de Mathisson [*16*] :

— les équations de mouvement à la $n^{\text{ème}}$ approximation :

$$\frac{d}{d\tau_i} \underset{(n)}{(m_i \dot{z}_i^\mu)} + \sum_{m=1}^{n-1} \lambda^m \underset{(m)}{\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}} \dot{z}_i^\alpha \dot{z}_i^\beta \underset{(n-m)}{m_i} = 0 \tag{15}$$

— la détermination de la forme des $p_i^{\mu\nu}$ à l'approximation d'ordre (n) :

$$\underset{(n)}{p_i^{\mu\nu}} = \underset{(n)}{m} \dot{z}_i^\mu \dot{z}_i^\nu. \tag{16}$$

On écrit les équations d'Einstein, compte tenu des développemenfs de $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$; il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \{ \Box \underset{(n)}{\gamma_{\mu\nu}} - \eta^{\rho\sigma}(\partial_{\nu\sigma} \underset{(n)}{\gamma_{\mu\rho}} - \partial_{\mu\rho} \underset{(n)}{\gamma_{\nu\sigma}}) - \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\alpha}\eta^{\sigma\beta}\partial_{\alpha\beta} \underset{(n)}{\gamma_{\sigma\rho}} \} = \dots$$

$$= -16\pi G \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \underset{(n)}{\mathfrak{T}_{\mu\nu}} - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \underset{(n)}{U_{\mu\nu}}(\underset{(1)}{\gamma_{\alpha\beta}} \dots \underset{(n-1)}{\gamma_{\alpha\beta}}) \tag{17}$$

où

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}.$$

Dans cette méthode, il faut souligner encore que l'expression : « équation à l'approximation d'ordre n » veut dire : une *seule* équation contenant *tous les termes sommés jusqu'à l'ordre* n; en particulier, les équations de mouvement imposées à l'ordre n sont rejetées à l'ordre $n + 1$!

Ainsi, à la première approximation (15) et (16) s'écrivent :

$$\frac{d}{d\tau_i}(m_i v_i^\mu) = 0 \quad , \quad \underset{1}{\mathfrak{T}_i^{\rho\sigma}} = m_i v_i^\rho v_i^\sigma \tag{18}$$

Les équations de champ (17) modulo la condition de coordonnées : $\partial^\nu \underset{1}{\gamma_{\mu\nu}} = 0$, s'écrivent :

$$\Box \underset{1}{\gamma_{\mu\nu}} = -16\pi\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\underset{1}{\mathfrak{T}^{\rho\sigma}}. \tag{19}$$

Pour passer à l'approximation suivante, on garde la forme de $\underset{1}{\mathfrak{T}^{\rho\sigma}} = m_i v_i^\rho v_i^\sigma$, on rejette les équations de mouvement précédentes pour adopter :

$$\left.\begin{aligned} m_i \frac{d}{d\tau_i}\left\{ v_i^\rho\left[1 - \frac{1}{2}\underset{1}{g_{\alpha\beta}} v_i^\alpha v_i^\beta + \underset{2}{c_i}\right]\eta_{\mu\rho} + \underset{1}{g_{\mu\rho}} v_i^\rho\right\} &= \frac{1}{2} m_i \partial_{i\mu} g_{\alpha\beta} v_i^\alpha v_i^\beta \\ \underset{2}{\mathfrak{T}_i^{\rho\sigma}} &= \underset{2}{\mathrm{M}_i} v_i^\rho v_i^\sigma \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ces équations de mouvement impliquent seulement des potentiels $\underset{1}{g_{\mu\nu}}$ donc des $\underset{1}{\gamma_{\mu\nu}}$ solutions de (19). A cette approximation correspond une autre condition de coordonnées : $\partial^\nu(\underset{1}{\gamma_{\mu\nu}} + \underset{2}{\gamma_{\mu\nu}}) = 0$, et d'autres équations de champ. Les équations (19) sont des équations d'ondes qui peuvent être intégrées à l'aide des fonctions de Green.

2. Mouvement du périhélie des trajectoires des planètes

Les équations de mouvement (20) pour une solution statique à symétrie sphérique des équations de champ (19) conduisent à une avance du périhélie des trajectoires des planètes égale aux 7/6 de l'avance observée expérimentalement.

D'autre part, on remarque que c'est le temps propre minkowskien qui intervient dans la définition (13) de $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ et donc dans les équations de mouvement (20). Pour que la théorie soit parfaitement correcte il faudrait introduire l'élément linéaire de la Relativité Générale, donc la métrique inconnue. Indépendamment E. Von Schmützer [*17*] et G. Roemhild [*18*] ont repris le travail de P. Havas et J. N. Goldberg en utilisant une méthode d'approximation invariante dans une transformation générale de coordonnées, à chaque ordre d'approximation : en particulier, à l'ordre 1 pour les équations du champ, ils définissent à la place de (14) :

$$d\underset{1}{\tau_i^2} = (\eta_{\alpha\beta} + \underset{1}{g_{\alpha\beta}})dz_i^\alpha dz_i^\beta \tag{21}$$

Ils sont conduits, alors, à l'avance correcte des périhélies.

3. Définition du champ de rayonnement d'une particule. Terme de rayonnement dans les équations de mouvement

Par analogie avec les hypothèses de P. A. M. Dirac [19] sur le champ électromagnétique d'une particule chargée, on considère le potentiel $g_{\mu\nu}$ auquel est soumise la $j^{\text{ème}}$ particule comme la somme du potentiel ${}^j g_{\mu\nu}$ dû à toutes les particules autres que la $j^{\text{ème}}$ et du potentiel $\underset{j}{g_{\mu\nu}}$, dû à la $j^{\text{ème}}$ particule. Ce dernier étant la somme du potentiel propre $\underset{j}{g^{\text{self}}_{\mu\nu}}$ et du potentiel de rayonnement $\underset{j}{g^{\text{ray}}_{\mu\nu}}$ définis par :

$$\underset{1}{g^{\text{self}}_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\underset{1}{g^{\text{ret}}_{\mu\nu}} + \underset{1}{g^{\text{av}}_{\mu\nu}})_0 \quad ; \quad \underset{1}{g^{\text{ray}}_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\underset{1}{g^{\text{ret}}_{\mu\nu}} - \underset{1}{g^{\text{av}}_{\mu\nu}})_0 \tag{22}$$

où les indices « zéro » indiquent que ces quantités sont calculées au point $x^\rho = z_j^\rho$ où se trouve la $j^{\text{ème}}$ particule.

Bhabha et Harish Chandra [4] ont calculé les potentiels (22) et leurs dérivées premières. P. Havas et J. N. Goldberg ont écrit les équations de mouvement (20) en introduisant le potentiel total :

$$g_{\mu\nu} = {}^j g_{\mu\nu} + \underset{j}{g^{\text{self}}_{\mu\nu}} + \underset{j}{g^{\text{ray}}_{\mu\nu}}.$$

Par un choix convenable de la constante $\underset{2}{C_j}$, ils éliminent les termes provenant du champ propre $\underset{j}{g^{\text{self}}_{\mu\nu}}$ qui sont infinis sur la ligne d'Univers de la $j^{\text{ème}}$ particule, et les équations de mouvement (20) deviennent :

$$m_j \frac{d}{\partial\tau_j}\left[(\eta_{\mu\rho} + {}^j\underset{1}{g^{\text{ret}}_{\mu\rho}})v_j^\rho - \frac{1}{2}\eta_{\mu\rho}v_j^\rho {}^j\underset{1}{g^{\text{ret}}_{\alpha\beta}}v_j^\alpha v_j^\beta\right]$$
$$= \frac{1}{2}m_j\underset{j}{\partial_\mu}{}^j g^{\text{ret}}_{\alpha\beta}v_j^\alpha v_j^\beta - \frac{11}{3}Gm_j^2\eta_{\mu\rho}(\ddot{v}_j^\rho - v_j^\rho\eta_{\alpha\beta}v_j^\alpha\ddot{v}_j^\beta) \tag{23}$$

4. Énergie rayonnée par un système de 2-corps : étude près des sources

P. Havas et S. F. Smith [2] ont mis en évidence, par analogie avec la mécanique classique, l'énergie mécanique totale d'un système de 2-corps à partir des composantes zéro de leurs équations de mouvement (23).

Ils ont montré l'absence de rayonnement dipolaire. Explicitant ce calcul pour 2 particules identiques de masses M, en mouvement circulaire uniforme à l'approximation newtonienne, P. Havas et S. F. Smith ont trouvé que le système gagne de l'énergie :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{224}{5} \frac{GM^2}{2\rho} \left(\frac{\rho\dot{\Phi}}{c}\right)^5 \dot{\Phi} \tag{24}$$

où ρ est le rayon du cercle orbite et $\beta = \rho \frac{\dot{\Phi}}{c}$, la vitesse du mouvement. Pour comparer ce résultat à ceux de A. Trautman et A. Pérès, faisons : $2\rho = R$, $\dot{\Phi}^2 R^3 = 2GM$, il vient :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{56}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^5}{R^5} \tag{25}$$

5. Énergie rayonnée, a travers une sphère de rayon ρ par un système de 2 particules : étude loin des sources

On a vu que les équations de champ linéarisées s'écrivent sous la forme (17) où $\underset{n}{U}_{\mu\nu}$ représente tous les termes non linéaires en $\underset{n-1}{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\underset{n-2}{\gamma}_{\alpha\beta}\ldots$

La divergence du 1[er] membre de (17) s'annulant identiquement pour une solution satisfaisant à la condition de coordonnées, on a :

$$\sum_m \lambda^m \eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda (16\pi G \underset{m}{\mathcal{T}}_{\mu\nu} - \underset{m}{U}_{\mu\nu}) = 0 \tag{26}$$

P. Havas et S. F. Smith [2] ont effectivement écrit (26) pour le système des 2 particules. Ils obtiennent :

- $\underset{1}{U}_{\mu\nu} = 0$
- $-\underset{2}{U}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}$

où

— $C_{\mu\nu}$ est tel que $\partial^\nu C_{\mu\nu} = 0$

— $B_{\mu\nu}$ est tel que $\partial B_{\mu\nu} = 0$ si $\partial^\nu \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} = 0$

— $A_{\mu\nu}$ est tel que $\partial^\nu (A_{\mu\nu} + \underset{2}{P}_{\mu\nu} + \underset{1}{P}_{\mu\nu}) = 0$ (27)

qui sont les équations de mouvement à l'ordre considéré. P. Havas et S. F. Smith interprètent l'intégrale de cette expression non covariante comme le flux d'énergie du système, A_μ^ν jouant le rôle de l'énergie-impulsion du champ de gravitation. Ils écrivent alors la loi (27) sous forme intégrale, appliquent le théorème de Gauss au temps $x^0 = ct$ et calculent ainsi la « variation d'énergie » à travers une sphère de rayon R ($R \to \infty$). Pour un système de 2 particules identiques animées d'un mouvement circulaire uniforme, en se limitant à la 1^{re} approximation non nulle en $\beta = \rho\dot{\Phi}/c$, ils trouvent un gain d'énergie précisément donné par (24) ou (25).

Nous contestons cependant l'interprétation de A^ν_μ comme énergie-impulsion du champ gravitationnel : *A^0_α n'est pas une densité vectorielle invariante de jauge même avec un bon comportement asymptotique des $g^{\mu\nu}$.*

On sait qu'en Relativité Générale [*22*], les équations du champ gravitationnel, modulo les identités de Bianchi, entraînent les équations du mouvement formelles mais *exactes* d'une part et que d'autre part ces mêmes identités conduisent à une loi de conservation forte, *exacte* [*20*]. Reprenons, par exemple, celle de J. N. Goldberg [*23*] : nous pouvons écrire les équations d'Einstein :

$$- 2\mathcal{G}^\nu_\mu \stackrel{\text{def}}{=} - 2\sqrt{-g}\,G^\nu_\mu = \mathfrak{U}^{\nu\sigma}_{\mu,\sigma} - t^\nu_\mu = 16\pi G \mathcal{T}^\nu_\mu \qquad (28)$$

avec

$$\mathfrak{U}^{\nu\sigma}_\mu = g_{\mu\lambda}(g^{\lambda\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\lambda\sigma}g^{\rho\nu})_{,\rho}$$

$$t^\nu_\mu = - \frac{1}{8}\,\delta^\nu_\mu[2g^{\rho\sigma}g_{\lambda\iota}g_{k\tau} - g^{\rho\sigma}g_{\iota k}g_{\lambda\tau} - 4\delta^\sigma_k g^\rho_\lambda g_{\iota\tau}]g^{\iota k}{}_{,\rho}g^{\lambda\tau}{}_{,\sigma} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{4}\,[2g^{\nu\sigma}g_{\lambda\iota}g_{k\tau} - g^{\nu\sigma}g_{\iota k}g_{\lambda\tau} - 4\delta^\nu_\lambda\delta^\sigma_k g_{\iota\tau}]g^{\iota k}{}_{,\mu}g^{\lambda\tau}{}_{,\sigma}. \qquad (29)$$

A partir des lois de conservation forte $\mathfrak{U}^{\nu\sigma}_{\mu},{}_{\sigma\nu} \equiv 0$, on obtient :

$$\partial_\mu(\mathcal{T}^\mu_\nu + x t^\mu_\nu) = 0 \qquad (30)$$

t^α_0 est une densité vectorielle qui n'est pas invariante dans les transformations $\mathcal{G} \to \mathcal{G} + \partial_\alpha M^\alpha$, $\mathcal{G} = \sqrt{-g}\,G_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, par exemple. Toutefois, on peut introduire t^α_0 comme étant la densité de l'énergie-impulsion moyennant des hypothèses sur le comportement asymptotique des $g_{\mu\nu}$ [*21*] [*22*].

P. Havas et J. N. Goldberg ont développé, dans le cadre de la « fast approximation » les équations de mouvement exactes *jusqu'à* l'ordre 2 pour obtenir les équations de mouvement approchées (27). Nous développons, dans le cadre de la « fast approximation », les lois de conservation (30) *jusqu'à* l'ordre 2 :

$$\partial_\mu(\underset{1}{\mathcal{T}^\mu_\nu} + \underset{2}{\mathcal{T}^\mu_\nu} + x\underset{1}{t^\mu_\nu} + x\underset{2}{t^\mu_\nu}) = 0 \qquad (31)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{t}{}^{\nu}_{\mu} &= 0 \\ \chi \underset{2}{t}{}^{\nu}_{\mu} &= -\frac{1}{8}\,\delta^{\nu}_{\mu}\left\{ 2\underset{1}{g}_{\lambda\tau,\rho}\underset{1}{g}{}^{\lambda\tau,\rho} - \underset{1}{g}_{,\rho}\underset{1}{g}{}_{,}{}^{\rho} - 4\underset{1}{g}{}^{\sigma}_{\tau,\rho}\underset{1}{g}{}^{\rho\tau}{}_{,\sigma} \right\} + \dots \\ &+ \frac{1}{4}\left\{ 2\underset{1}{g}_{\lambda\tau,\mu}\underset{1}{g}{}^{\lambda\tau,\nu} - \underset{1}{g}_{,\mu}\underset{1}{g}{}_{,}{}^{\nu} - 4\underset{1}{g}{}^{\kappa}_{\tau,\mu}\underset{1}{g}{}^{\nu\tau}{}_{,\kappa} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Pour le problème particulier des 2-corps imposons une condition de transversabilité sur les potentiels : l'orbite étant dans le plan (OX^1, OX^2), les seuls potentiels non nuls sont $\underset{1}{g}_{11} = -\underset{1}{g}_{22}$, $\underset{1}{g}_{12}$ et les seules dérivées partielles non nulles sont $\partial_0 \neq 0$, $\partial_3 \neq 0$. On obtient alors :

$$\chi \underset{2}{t}{}^{k}_{0} = \frac{1}{2}\,\underset{1}{g}_{\alpha\beta,0}\,g^{\alpha\gamma,k} \tag{33}$$

Avec les conditions asymptotiques introduites par A. Trautman (21) qui sont une généralisation des conditions de rayonnement de Sommerfeld :

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1}{g}_{\alpha\beta} = 0(r^{-1}) \qquad ; \qquad \underset{1}{g}_{\alpha\beta,\gamma} = i_{\alpha\beta}k_{\gamma} + 0(r^{-2}) \\ \text{et} \qquad &\left(i_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}i_{\gamma\delta}\right)k^{\beta} = 0(r^{-2}) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

où $i_{\alpha\beta} = 0(r^{-1})$, $k_{\alpha} = u_{,\alpha}$, $u(x)$ étant un champ scalaire défini par le champ gravitationnel, on peut rendre les $\underset{2}{t}{}^{k}_{0}$ invariants de jauge et définis positifs.

Ces conditions (34) sont compatibles avec celles données par A. Lichnerowicz [*24*] qui concernent le rayonnement pur. Après intégration de (31) pour l'énergie-impulsion (33) et pour des potentiels transverses, on trouve comme énergie totale rayonnée, dans toutes les directions :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{G}{45c^5}\,\dddot{D}{}^{2}_{\alpha\beta} \tag{35}$$

où $D^{ij} = \int m_i(3x^ix^j - \delta^{ij}x^kx_k)dV$, moment quadrupolaire. C'est le résultat trouvé par A. Einstein en approximation linéaire (3). Pour deux masses M_1 et M_2 en mouvement circulaire à l'approximation newtonienne, leur distance mutuelle étant R, la fréquence de la rotation $\omega = 2\pi/T$ étant reliée à R par $\omega^2R^3 = G(M_1 + M_2)$ la perte d'énergie du système est

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\left(\frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 R^4\omega^6 \tag{36}$$

Pour deux masses identiques $M_1 = M_2 = M$ en introduisant $\rho = R/2$ et $\dot{\Phi} = \omega$ on a aussi :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{128}{5}\frac{GM^2}{\rho}\left(\frac{\rho\dot{\Phi}}{c}\right)^5\dot{\Phi} = \frac{-64}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^5}{R^5}. \tag{37}$$

Remarque. — Les conditions de transversalité conduisent à la même perte d'énergie (36) ou (37), quel que soit le « complexe » considéré : celui d'Einstein [3], celui de Landau-Lifshitz, celui de Goldberg.

6. Conclusion

Ce dernier résultat nous semble intéressant : l'approximation linéaire d'Einstein [3], à l'aide du pseudo-tenseur, conduit à une perte d'énergie par rayonnement mais implique pour les sources de ce rayonnement un mouvement à vitesse constante. Maintenant, dans le cadre de la « fast approximation » — théorie cohérente pour le mouvement des sources — nous pourrions aussi envisager une énergie définie positive. Mais alors, il y a désaccord avec le résultat obtenu près des sources (24), (25). C'est pourquoi nous envisageons ce problème des 2-corps dans le cadre d'une « théorie ouverte », d'une théorie phénoménologique de la Gravitation.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE MINKOWSKIENNE DE LA GRAVITATION. LOIS DU MOUVEMENT ET CONSÉQUENCES EXPÉRIMENTALES.

Dans un espace-temps minkowskien, repéré par une métrique lorentzienne : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ($\equiv -\delta_{\mu q}, \delta_{\mu 0}$; $\mu = 0, 1, 2, 3$) nous considérons N particules en interaction gravitationnelle. Le champ de gravitation est « phénoménologique ».

1. Le lagrangien de la théorie

Soient z_i^α, les coordonnées de la $i^{\text{ème}}$ particule et u_i, un scalaire arbitraire qui paramétrise la $i^{\text{ème}}$ ligne d'Univers. On pose $z'^\alpha_i = dz^\alpha_i/du_i$. Soit $\psi_{\mu\nu}$, un tenseur symétrique du second rang dont les composantes représentent les potentiels « phénoménologiques » de gravitation. En utilisant les méthodes de la théorie classique des champs, nous déduisons les équations de champ et les équations du mouvement à partir d'une densité lagrangienne [*28*]

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_c - \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (L_p + L_i)\delta^4(x^\rho - z_j^\rho)du_j \tag{38}$$

. où x^ρ sont les coordonnées du point courant et $\delta^4(x^\rho - z_j^\rho)$ sont les 4-distributions de Dirac,

. où $\mathfrak{L}_c$ est le terme relatif au champ pur. $L_p + L_i$ sont respectivement relatifs aux particules et à l'interaction champ-particule; ils sont homogènes et de degré h par rapport à z'^α_j :

$$L_p + L_i = \frac{2\mu_j c^2}{h}\left(1 + \frac{h}{2}\Omega_j^2\right)(g_{\rho\sigma}z'^\rho_j z'^\sigma_j)^{\frac{h}{2}} \quad ; \quad \Omega_j^2 = K\,\frac{M_j}{\mu_j}\,\frac{\psi_{\mu\nu}z'^\mu_j z'^\nu_j}{g_{\rho\sigma}z'^\rho_j z'^\sigma_j} \tag{39}$$

μ_j, M_j étant liés respectivement à la masse inerte et à la masse grave de la particule j et K étant une constante de couplage.

Nous allons écrire les équations du champ et les équations du mouvement pour un degré d'homogénéité h quelconque et en supposant :

$$M_j = M_j(u_j) \quad ; \quad \mu_j = \mu_j(u_j).$$

2. Équations du mouvement, h étant quelconque

Les équations du mouvement de la $j^{\text{ème}}$ particule sont les équations d'Euler-Lagrange, le paramètre u_j étant arbitraire :

$$\frac{\partial(L_p + L_i)}{\partial z_j^\alpha} - \frac{d}{du_j}\left[\frac{\partial(L_p + L_i)}{\partial z'^\alpha_j}\right] = 0 \tag{40}$$

La multiplication contractée de (40) par z'^α_j conduit à la condition :

$$\mu_j\left(1 + \frac{h}{2}\,\Omega_j^2\right)^{\frac{h-1}{h}}(g_{\alpha\beta}z'^\alpha_j z'^\beta_j)^{\frac{h-1}{2}} = m_j \tag{41}$$

m_j étant une constante.

Compte tenu de (41) les équations du mouvement (40) s'écrivent alors :

$$\frac{d}{du_j}\,\frac{2\overline{g_{\alpha\beta}}z'^\beta_j}{(g_{\gamma\delta}z'^\gamma_j z'^\delta_j)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{h}{2}\Omega_j^2\right)^{1-\frac{1}{h}}} - \frac{z'^\beta_j z'^\varepsilon_j \partial_\alpha \overline{g_{\beta\varepsilon}}}{(g_{\gamma\delta}z'^\gamma_j z'^\delta_j)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{h}{2}\Omega_j^2\right)^{1-\frac{1}{h}}} + \left(\frac{h}{2} - 1\right)\frac{(g_{\gamma\beta}z'^\gamma_j z'^\beta_j)\partial_\alpha\Omega^2}{\left(1 + \frac{h}{2}\,\Omega_j^2\right)^{1-\frac{1}{h}}} = 0 \tag{42}$$

avec

$$\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}\left[1 + \left(\frac{h}{2} - 1\right)\Omega_j^2\right] + \kappa \frac{M_j}{\mu_j}\psi_{\alpha\beta} \tag{43}$$

En introduisant le temps propre s_j de la $j^{\text{ème}}$ particule, et en posant $\dot{z}_j^\alpha = dz_j^\alpha/ds_j$ les équations de mouvement (40) s'écrivent aussi :

$$\frac{d}{ds_j}\frac{2\overline{g_{\alpha\beta}}\dot{z}_j^\beta}{\left(1+\frac{h}{2}\Omega_j^2\right)^{1-\frac{1}{h}}} - \frac{\dot{z}_j^\beta\dot{z}_j^\sigma\partial_\alpha\overline{g_{\beta\sigma}}}{\left(1+\frac{h}{2}\Omega_j^2\right)^{1-\frac{1}{h}}} + \left(\frac{h}{2}-1\right)\frac{\partial_\alpha\Omega_j^2}{\left(1+\frac{h}{2}\Omega_j^2\right)^{1-\frac{1}{h}}} = 0 \tag{44}$$

3. Équations du champ de gravitation, h étant quelconque

Si nous adoptons la densité lagrangienne de champ pur :

$$2\chi\mathcal{L}_c = \sqrt{-g}(\psi_{\mu\nu,\rho}\psi^{\mu\nu,\rho} + k\psi_{,\rho}\psi^{,\rho}) \tag{45}$$

un principe variationnel $\delta\int\sqrt{-g}\mathrm{L}d^4x = 0$ nous conduit, pour des variations $\delta\psi_{\alpha\beta}$, nulles à la limite du domaine d'intégration, aux équations du champ :

$$\Box(\psi^{\mu\nu} + kg^{\mu\nu}\psi) = -\chi k\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} M_j c^2\dot{z}_j^\mu\dot{z}_j^\nu\left(g_{\alpha\beta}z'^\alpha_j z'^\beta_j\right)^{\frac{h-1}{2}}\delta^4(x^\rho - z_j^\rho)ds_j \tag{46}$$

4. Étude du cas $h = 1$

a) *Équations du mouvement.*

Pour $h = 1$, la condition (41) impose : $\mu_j = m_j =$ cte et les équations de mouvement (44) s'écrivent :

$$\frac{d}{ds_j}(2\overline{g_{\alpha\beta}}\dot{z}_j^\beta) - \dot{z}_j^\beta\dot{z}_j^\varepsilon\partial_\alpha\overline{g_{\beta\varepsilon}} - \frac{1}{2}\partial_\alpha\Omega_j^2 = 0 \quad ; \quad \overline{g_{\alpha\beta}} = \left(1 - \frac{1}{2}\Omega_j^2\right)g_{\alpha\beta} + \mathrm{K}\frac{M_j}{\mu_j}. \tag{47}$$

En explicitant $\overline{g_{\alpha\beta}}$, elles s'écrivent encore :

$$\frac{d}{ds_j}\left\{(2\mu_j - \kappa M_j\psi_{\beta\varepsilon}\dot{z}_j^\beta\dot{z}_j^\varepsilon)\dot{z}_{j\alpha} + 2\kappa M_j\psi_{\alpha\beta}\dot{z}_j^\beta\right\} = \kappa\dot{z}_j^\beta\dot{z}_j^\varepsilon\partial_\alpha(M_j\psi_{\beta\varepsilon}) \tag{48}$$

b) *Équations du champ.*

Pour $h = 1$, les équations du champ (46) s'écrivent :

$$\Box(\psi^{\mu\nu} + k\eta^{\mu\nu}\psi) = -\chi\kappa\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} M_j c^2\dot{z}_j^\mu\dot{z}_j^\nu\delta^4(x^\rho - z_j^\rho)ds_j \tag{49}$$

Remarque. — Nous avons choisi $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ après variations, sans restreindre la généralité du problème.

Nous notons que pour le cas $h = 1$, la condition (41) impose : $\mu_j =$ cte mais *a priori* $M_j = M_j(u_j)$ reste arbitraire. Dans la suite de cette seconde partie, nous supposons que M_j *est constante.*

Alors les équations (49) admettent comme solutions, les potentiels retardés :

$$\psi^{\mu\nu} = -\frac{\chi c^2}{4\pi}\kappa \sum_{j=1}^{N}\left[M_j \frac{\left(\dot{z}_j^\mu \dot{z}_j^\nu - \frac{k}{1+4k}\eta^{\mu\nu}\right)}{\eta_{\rho\sigma}(x^\rho - z_j^\rho)v_i^\sigma}\right]_{\text{ret}} \tag{50}$$

Pour le cas statique à symétrie sphérique, les équations (49) admettent la solution :

$$\psi^{ij} = -\frac{\chi c^2}{4\pi}\kappa\frac{k}{1+4k}\frac{M}{r}\delta^{ij} \quad ; \quad \psi^{00} = -\frac{\chi c^2}{4\pi}\kappa\frac{1+3k}{1+4k}\frac{M}{r} \tag{51}$$

c) *Terme de rayonnement; terme de champ propre; renormalisation.*

Utilisant la méthode développée par P. A. M. Dirac [*19*] en électrodynamique et par P. Havas et J. N. Goldberg [*1*] dans la « fast approximation », nous considérons, dans les équations de mouvement (48) de la $j^{\text{ème}}$ particule, le potentiel $\psi_{\mu\nu}$ auquel est soumise la $j^{\text{ème}}$ particule, comme le potentiel $\psi_{\mu\nu} = {}^j\psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^{\text{ray}} + \psi_{\mu\nu}^{\text{self}}$, ${}^j\psi_{\mu\nu}$ étant le potentiel dû à toutes les particules autres que la $j^{\text{ème}}$ et le potentiel ${}_j\psi_{\mu\nu}$ dû à la $j^{\text{ème}}$ étant la somme du potentiel de rayonnement $\psi_{\mu\nu}^{\text{ray}}$ et du potentiel propre $\psi_{\mu\nu}^{\text{self}}$, définis par :

$$\psi_{\mu\nu}^{\text{ray}} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu\nu}^{\text{ret}} - \psi_{\mu\nu}^{\text{av}})_0 \quad ; \quad \psi_{\mu\nu}^{\text{self}} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu\nu}^{\text{ret}} + \psi_{\mu\nu}^{\text{av}})_0 \tag{52}$$

L'indice « zéro » indique que les valeurs sont prises au point $x^\rho = z_j^\rho$, position de la $j^{\text{ème}}$ particule. D'après l'expression (50), ils s'écrivent encore :

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{\text{ray}}^{\mu\nu} &= -\frac{\chi c^2}{8\pi}M_j\kappa\left[\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{ret}} + \left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{av}}\right]_{\substack{0\\K_j\to 0}} ;\\
\psi_{\mu\nu}^{\text{self}} &= -\frac{\chi c^2}{8\pi}M_j\kappa\left[\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{ret}} - \left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{av}}\right]_{\substack{0\\K_j\to 0}}\\
K_j = \eta_{\rho\sigma}(x^\rho - z_j^\rho)v_j^\sigma \quad &; \quad \dot{z}_{j\alpha} = v_{j\alpha} \quad ; \quad S_{\mu\nu} = v_{j\mu}v_{j\nu} - \frac{k}{1+4k}\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

D'autre part, Harish Chandra et Babha [4] ont montré que, pour $K_j \to 0$:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{K_j\to 0}\left[\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{ret}}+\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{av}}\right]_0 = -2\dot{S}_{j0}^{\mu\nu}\\
&\lim_{K_j\to 0}\left\{\partial_{j\sigma}\left[\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{ret}}+\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{av}}\right]\right\}\\
&\qquad = -\eta_{\rho\sigma}\left\{\frac{2}{3}S_j^{\mu\nu}(\ddot{v}_j^{\rho}-v_j^{\rho}\eta_{\lambda\varepsilon}\dot{v}_j^{\lambda}\dot{v}_j^{\varepsilon})+2\dot{v}_j^{\rho}\dot{S}_j^{\mu\nu}-2v_j^{\rho}\ddot{S}_j^{\mu\nu}\right\}_0\\
&\lim_{K_j\to 0}\left[\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{ret}}-\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{av}}\right]_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\,\frac{S_j^{\mu\nu}}{\varepsilon}\\
&\lim_{K_j\to 0}\left\{\partial_{j\sigma}\left[\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{ret}}-\left(\frac{S_j^{\mu\nu}}{K_j}\right)_{\text{av}}\right]\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S_j^{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\dot{v}_j^{\rho}}{\varepsilon}
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Puis nous explicitons le potentiel $\psi_{\mu\nu} = {}^j\psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^{\text{self}} + \psi_{\mu\nu}^{\text{ray}}$ dans les équations du mouvement (48), en tenant compte des expressions (53) et (54)

$$\frac{d}{ds_j}\left\{\left[\mu_i - \frac{1}{2}\,M_j\kappa\,{}^j\psi_{\mu\nu}^{\text{ret}}v_j^{\mu}v_j^{\nu}\right]v_{\alpha j} + M_j\kappa\,{}^j\psi_{\alpha\mu}^{\text{ret}}v^{\mu}\right\} = \frac{1}{2}\,M_j\kappa\,{}^j\psi_{\mu\nu,\alpha}v_j^{\mu}v_j^{\nu} + \dots$$
$$-M_j^2\,\frac{\kappa^2\chi c^2}{8\pi}\,\frac{5+21k}{3(1+4k)}\,(\ddot{v}_{j\alpha} - v_{j\alpha}(\ddot{v}v)) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{M_j^2\kappa^2}{\varepsilon}\,\frac{\chi c^2}{16\pi}\,\frac{1+3k}{1+4k}\,\dot{v}_{j\alpha}. \quad (55)$$

Pour éliminer le dernier terme — terme de champ propre — qui est infini sur la ligne d'Univers de la $j^{\text{ème}}$ particule, nous renormalisons la masse inerte en posant :

$$[\mu_j]_{\text{ren}} = \mu_j - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{M_j^2\kappa^2}{\varepsilon}\,\frac{\chi c^2}{16\pi}\,\frac{1+3k}{1+4k} \quad (56)$$

$[\mu_j]_{\text{ren}}$ est la masse inerte observable. La relation (56) est tout à fait comparable à la relation obtenue par Dirac [19] en électrodynamique. Admettons, maintenant une identité entre cette masse inerte observable $[\mu_j]_{\text{ren}}$ et la masse grave M_j.

5. Théorie et expérience. Mouvement du périhélie des planètes

Après renormalisation de la masse inerte et après assimilation de la masse inerte renormalisée à la masse grave, les équations du mouvement (55) s'écrivent en négligeant les termes en $1/c^5$:

$$\dot{v}_{j\alpha} + \kappa\,\frac{d}{ds_j}\left[{}^j\psi_{\alpha\beta}v_j^{\beta} - \frac{1}{2}\,{}^j\psi_{\mu\nu}v_j^{\mu}v_j^{\nu}v_{j\alpha}\right] = \frac{1}{2}\,\kappa\,{}^j\psi_{\mu\nu,\alpha}v_j^{\mu}v_j^{\nu} \quad (57)$$

Si la $j^{\text{ème}}$ particule est soumise au champ de la seule masse M, supposée statique à symétrie sphérique, les potentiels $\psi_{\mu\nu}$ sont donnés par (51). En utilisant un système de coordonnées rectangulaires d'origine M avec $z_j^\rho = x, y, z$, ct, les équations du mouvement (57) sont, pour $\alpha = 3$:

$$\ddot{z}\left\{1+\frac{\chi c^2\kappa^2}{4\pi}\frac{\mathrm{M}}{r}\left[\frac{k}{1+4k}+\frac{1}{2}\frac{1+3k}{1+4k}\right]\right\}$$
$$=-\frac{\chi c^2\kappa^2}{8\pi}\mathrm{M}\frac{z}{r^3}\left[\frac{1+3k}{1+4k}+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right]+\dots$$
$$+\frac{\dot{z}\dot{r}}{r^2}\frac{\chi c^2\kappa^2}{4\pi}\mathrm{M}\left[\frac{k}{1+4k}+\frac{1}{2}\frac{1+3k}{1+4k}\right] \tag{58}$$

D'autre part, l'approximation newtonienne impose :

$$\frac{\chi c^4\kappa^2}{8\pi}\frac{1+3k}{1+4k}=\mathrm{G} \tag{59}$$

Et l'équation (58) s'écrit aussi :

$$\ddot{z}\left\{1+\frac{2\mathrm{MG}}{c^2 r}\left[\frac{k}{1+3k}+\frac{1}{2}\right]\right\}=-\frac{\mathrm{MG}}{c^2}\frac{z}{r^3}$$
$$-\frac{\mathrm{MG}}{c^2}\frac{z}{r^3}\frac{1+4k}{1+3k}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{\dot{z}\dot{r}}{r^2}2\frac{\mathrm{MG}}{c^2 r}\left[\frac{k}{1+3k}+\frac{1}{2}\right] \tag{60}$$

D'après les études de ce type d'équation [*25*], la trajectoire est telle que le périhélie a une avance de :

$$2\pi\varepsilon=\frac{2\pi}{p}\left(\frac{1+5k}{1+3k}+\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{MG}}{c^2} \tag{61}$$

où p est le paramètre de l'ellipse newtonienne. L'avance observée expérimentalement implique que :

$$k=-\frac{3}{5} \tag{62}$$

résultat déjà signalé par A. Capella [*26*].

6. Théorie et expérience. Courbure des rayons lumineux

Nous reprenons l'étude de l'interaction champ gravitational-champ électromagnétique que M. Moshinsky [*27*] a développée dans le cadre de la théorie de Birkhoff (cf. [*25*]).

Pour ce faire, nous adoptons le Lagrangien :

$$L = L_g + T_e^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} + L_e$$

où

— $L_G = L_c + L_p + L_i$, Lagrangiens précédemment définis en (39) et (45),
— $T_e^{\mu\nu}$ est le tenseur de Maxwell :

$$T_{e\,\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\varphi_{\mu\rho}\varphi^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}\,\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu}\right)$$

$\varphi_{\mu\nu}$ étant le champ électromagnétique :

$$\varphi_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad ; \quad A_\mu, \text{ le 4-potentiel.}$$

— L_e étant le Lagrangien correspondant :

$$L_e = \frac{1}{16\pi}\,\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}.$$

Le principe variationnel $\delta\int\sqrt{-g}Ld^4x = 0$ pour des variations :

— $\delta\psi_{\mu\nu}$ nulles à la limite du domaine d'intégration, conduit aux équations du champ gravitationnel,

— δA_μ nulles à la limite du domaine d'intégration, conduit aux *équations du champ électromagnétique en présence de champ gravitationnel* :

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\varphi^{\mu\nu} - 2\psi^{\rho\nu}\varphi^{\mu}_{\rho} - 2\varphi^{\nu}_{\rho}\psi^{\mu\rho} + \psi^{\rho}_{\rho}\varphi^{\mu\nu}\right] = 0 \tag{63}$$

auxquelles on ajoute :

$$\partial_\rho\varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu\varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu\varphi_{\nu\rho} = 0 \tag{64}$$

(63) et (54) sont les équations de Maxwell modifiées par la présence du champ gravitationnel.

Si le champ gravitationnel est créé par une distribution sphérique de matière, les $\psi_{\mu\nu}$ sont donnés par (51) qui, compte tenu de (59), s'écrivent :

$$\psi_{ij} = -a_1 f\delta_{ij} \;;\; \psi_{00} = -a_2 f \;;\; f = \frac{MG}{c^2 r} \;;\; a_1 = \frac{2k}{1+3k}\frac{1}{\kappa} \;;\; a_2 = \frac{2}{\kappa}. \tag{65}$$

Et, en termes de vecteurs $\vec{E}(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{30})$, $\vec{B}(\varphi_{23}, \varphi_{31}, \varphi_{12})$ les équations de Maxwell modifiées (63) et (64) s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge [1 - (a_1 + a_2)f]\vec{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}[1 + (a_1 + a_2)f]\vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \end{cases} \tag{66}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \tag{67}$$

En introduisant

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = [1 + (a_1 + a_2)f]\vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu\vec{H} = \frac{\vec{H}}{1 - (a_1 + a_2)f},$$

nous pouvons dire que le champ gravitationnel — d'une étoile, par exemple— se comporte, du point de vue électromagnétique, comme un milieu matériel d'indice :

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\frac{1 + (a_1 + a_2)f}{1 - (a_1 + a_2)f}} \tag{68}$$

La lumière, passant dans le voisinage de l'étoile est donc courbée par le champ de gravitation de celle-ci. L'application du principe de Fermat aux rayons lumineux dans le champ gravitationnel d'une étoile permet de préciser la valeur de cette courbure. Pour que l'angle de déviation des rayons lumineux soit l'angle observé expérimentalement : $\alpha = \dfrac{4MG}{c^2 b}$, il faut que (cf. [25])

$$a_1 + a_2 = 2$$

soit

$$\frac{2}{\kappa}\left[1 + \frac{k}{1 + 3k}\right] = 2 \tag{69}$$

En choisissant pour les constantes arbitraires introduites, les valeurs $k = \dfrac{-3}{5}$, $\kappa = 7/4$ les deux premiers « effets » — avance du périhélie des planètes, courbure des rayons lumineux — sont interprétés par cette théorie.

7. Théorie et expérience. Le déplacement vers le rouge des raies spectrales

Nous adoptons encore la méthode de Moshinsky [*27*] [*25*] pour l'étude de l'interaction champ gravitationnel-champ de Dirac.

Exceptionnellement, dans le paragraphe 7, nous prenons comme variables :

$$x^1, x^2, x^3, x^4 = ict = ix^0.$$

La solution statique à symétrie sphérique (65) s'écrit alors :

$$\psi_{ij} = -a_1 f \delta_{ij} \;;\; \psi_{44} = -\psi_{00} = a_2 f \;;\; f = \frac{\mathrm{MG}}{c^2 r} \;;\; a_1 = \frac{2k}{1+3k}\frac{1}{\kappa} \;;\; a_2 = \frac{2}{\kappa}. \tag{70}$$

Nous considérons comme Lagrangien total :

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_g + \mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{Dirac}}\psi_{\mu\nu} + \mathrm{L}_{\mathrm{Dirac}}$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{G}} = \mathrm{L}_c + \mathrm{L}_p + \mathrm{L}_i \qquad \text{cf. (39), (45)}$$

$$-\mathrm{L}_{\mathrm{Dirac}} = -\frac{\hbar c}{2i}\left[\Psi^+\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Psi^+}{\partial x^\mu}\gamma_\mu\Psi\right] + i\mathrm{M}c^2\Psi^+\Psi$$

$$-\mathrm{T}^{\mathrm{Dirac}}_{\mu\nu} = \frac{\hbar c}{2i}\left[\Psi^+\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Psi^+}{\partial x^\mu}\gamma_\nu\Psi\right]$$

Le développement est le même que dans le cas de l'interaction champ gravitationnel-champ électromagnétique. Une étude détaillée a été effectuée en [*25*] [*27*] pour la théorie de Birkhoff. Nous rappelons ici les principales étapes de cette étude et les résultats pour notre théorie minkowskienne.

A partir des Lagrangiens ci-dessus et d'un principe variationnel pour des variations $\delta\Psi$, $\delta\Psi^+$, nulles aux limites du domaine d'intégration, nous obtenons les équations de Dirac modifiées par le champ gravitationnel. On montre qu'elles peuvent être déduites des équations de la particule libre de Dirac, à condition de substituer aux opérateurs $\mathrm{P}_\mu = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, les opérateurs :

$$\mathrm{P}_\mu - \psi_{\mu\nu}\mathrm{P}_\nu$$

D'autre part, par la méthode habituelle en mécanique quantique, on peut obtenir une équation de continuité en définissant une densité de courant pour le champ d'un électron en présence d'un champ de gravitation :

$$j_\mu = ec(\Psi^+\gamma_\mu\Psi - \psi_{\mu\nu}\Psi^+\gamma_\nu\Psi)$$

Pour tenir compte de l'interaction avec le champ électromagnétique on doit ajouter aux Lagrangiens ci-dessus, un terme de la forme : $-\frac{1}{c}j_\mu\mathrm{A}^\mu$.

A partir d'un principe variationnel, compte tenu de ce nouveau terme dans les Lagrangiens, on obtient l'*équation d'ondes de Dirac, en présence du champ « combiné » gravitationnel-électromagnétique* et à son équation adjointe. Il vient :

$$\gamma_\mu(\delta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu})\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{e}{c}A_\nu\right)\Psi - iMc\Psi = 0 \tag{71}$$

On peut d'ailleurs déduire ces équations de l'équation de la particule libre de Dirac en remplaçant les opérateurs $P_\mu = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ par l'opérateur :

$$\left(P_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) - \psi_{\mu\nu}\left(P_\nu + \frac{e}{c}A_\nu\right).$$

Si cette interaction gravitationnelle entre particules élémentaires est négligeable par rapport à l'interaction électromagnétique, l'effet d'un champ gravitationnel extérieur — comme celui d'une étoile sur les atomes, les électrons — peut donner lieu à des phénomènes observables.

Soit donc un atome d'hydrogène près de la surface d'une masse M — une étoile par exemple — de rayon R. L'atome est soumis aux potentiels $\psi_{\mu\nu}$ donnés en (70) avec $r = R$. De plus, il subit l'action d'un champ électromagnétique extérieur $A_\mu(A_i = 0;\ A_4 = i\varphi)$ qui, en présence d'une masse gravitationnelle est

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon r} = \frac{e}{[1 + (a_1 + a_2)f]r}$$

Multiplions par $\gamma_4[i\gamma_4\gamma_i = \alpha_i;\ \gamma_4 = \beta;\ \beta^2 = 1]$ puis par $(1+a_2f)^{-1}$ les équations de Dirac modifiées (71) dans lesquelles on a porté les valeurs de $\psi_{\mu\nu}$, A_μ données ci-dessus, il vient :

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c}\varphi\right)\Psi = \frac{1 - a_1f}{1 + a_2f}\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\Psi + \frac{Mc_\beta\Psi}{1 + a_2f}.$$

L'hamiltonien $\mathcal{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ peut se mettre ainsi en évidence :

$$\left(\frac{\mathcal{H}}{c} + \frac{e}{c}\varphi\right)^2 = \frac{(1 - a_1f)^2}{(1 + a_2f)^2}\left[\left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{i\hbar}{c}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})\right] + \frac{M^2c^2}{(1 + a_2f)^2}.$$

Soit encore

$$\mathcal{H} + e\varphi = \frac{Mc^2}{1 + a_2f} + \frac{(1 - a_1f)^2}{(1 + a_2f)^2 Mc}\left[\left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{i\hbar}{c}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})\right].$$

En omettant le terme en Mc^2, en portant la valeur de φ, pour $A = 0$, on a :

$$\mathcal{H} = -\frac{e'^2}{r} + \frac{1}{2M'}P^2 \quad ; \quad e'^2 = \frac{e^2}{1+(a_1+a_2)f} \quad ; \quad M' = M\frac{1+a_2 f}{(1-a_1 f)^2}. \tag{72}$$

Le $s^{\text{ème}}$ niveau d'énergie de l'atome d'hydrogène situé près de l'étoile de masse M a alors pour expression :

$$E'_S = \frac{M'e'^4}{2\hbar^2 s^2} = -\frac{1+a_2 f}{(1-a_1 f)^2}\frac{1}{[1+(a_1+a_2)f]^2}\frac{Me^4}{2\hbar^2 s^2}. \tag{73}$$

Or l'expérience nous indique que le champ gravitationnel a pour effet un déplacement, des longueurs d'ondes de la lumière émise, vers le rouge tel que :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\delta\nu}{\nu} = f$$

ou

$$\frac{E'_S}{E_S} = \frac{\nu'_{sp}}{\nu_{sp}} = 1 - f. \tag{74}$$

A partir de l'expression théorique (73), l'expérience donnant (74) on doit avoir :

$$\frac{1+a_2 f}{(1-a_1 f)^2}\frac{1}{[1+(a_1+a_2)f]^2} = 1 - f.$$

Comme $f \ll 1$, le 3e effet impose à la théorie : $a_2 = 1$ c'est-à-dire :

$$\kappa = 2. \tag{75}$$

8. Théorie et expérience. Conclusion

Nous avons vu que, pour que la théorie rende compte des deux premiers effets, il faut que :

$$k = -\frac{3}{5} \quad , \quad \kappa = \frac{7}{4}. \tag{76}$$

Pour qu'elle rende compte du 3e effet, il faudrait que : $\kappa \sim 2$.

Étant donné la précision des mesures des deux derniers effets, on peut admettre que pour $1{,}75 < \kappa < 2$, les prévisions théoriques sont conformes aux observations dans les limites de précision effectives, c'est-à-dire à $\frac{0{,}25}{2} \sim 12\ \%$ près pour le 2e et le 3e effet.

TROISIÈME PARTIE

THÉORIE MINKOWSKIENNE DE LA GRAVITATION. ÉTUDE PRÈS DES SOURCES : ÉNERGIE RAYONNÉE PAR UN SYSTÈME DE 2-CORPS

A. — Étude du cas où $h = 1$.

1. Définitions et hypothèses

a) *Définition d'un temps « simultané » dans le problème des 2-corps.*

Un système de deux particules ponctuelles est décrit par les 8 coordonnées des particules 1 et 2 : z_1^ρ, z_2^ρ. Nous convenons d'exprimer les 8 équations du mouvement correspondantes au temps simultané : $z_1^0 = z_2^0 = ct$ et de considérer toutes les valeurs retardées comme des fonctions du temps « simultané » t par la transformation :

$$[t] = t - \frac{[r]}{c}$$

où :

— le crochet [ ] indique qu'il s'agit de la valeur retardée,

— $[r] = \sqrt{\sum_k (z_1^k - z_2^k)^2}$ car, en effet, nous calculons au point z_1^k — position de la particule 1 — les effets de la particule 2 repérée par z_2^k.

b) *Hypothèse sur les vitesses.*

Nous supposons que les vitesses des particules sont petites par rapport à c, vitesse de la lumière : on pourra développer ainsi les solutions $\psi_{\mu\nu}$ par rapport à v/c et écrire celles-ci en termes de rayonnement multipolaire. Nous pouvons alors considérer les équations du mouvement comme des équations newtoniennes classiques auxquelles notre théorie ajoute des corrections relativistes développées par rapport à $\dot{z}/c$. Pour ce faire, nous allons exprimer les quantités retardées comme des fonctions de leurs valeurs simultanées, au moyen des développements de Lagrange [*29*]. C'est une des méthodes que P. Havas et S. F. Smith [*2*] ont appliquées en Relativité Générale (cf. 1re partie).

c) *Développements de Lagrange des solutions retardées.*

Soit [W] une fonction analytique de $[t]$ et de $[r_i] = \sqrt{\sum_k (x^k - [z_i^k])^2}$ où :

— x^k est le point courant où l'on calcule le champ ($k = 1, 2, 3$).
— z_i^k est la position de la source i à l'instant simultané.
— $[z_i^k]$ est la position retardée correspondante.

Le développement de Lagrange relatif à [W] s'écrit :

$$\frac{[\mathrm{W}]}{1 = \left[\frac{\vec{r}_i}{r_i} \cdot \frac{\dot{\vec{z}}_i}{c}\right]} = \mathrm{W}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial (x^0)^n} (r_i^n \mathrm{W}(t)) \tag{77}$$

où $r_i = \left(\sum_k (x^k - z_i^k(t))^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{d}{dct}$ dérivée *totale* par rapport à ct.

Remarques. — 1. Dans le paragraphe A) de la troisième partie : $\frac{d}{dt} = .$

2. La dérivée totale $\frac{\partial}{\partial x^0}$ ne joue que sur la source z_i^k.

Exprimons la solution retardée (50), compte tenu de la condition (59), au moyen des développements de Lagrange. Il vient pour la particule 2 :

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{\psi}^{00} &= -\frac{2\mathrm{G}}{c^2\kappa}\frac{1+4k}{1+3k}\mathrm{M}_2 \\
&\quad \left\{\frac{v_2^0}{r_2} - \frac{k}{1+4k}\frac{1}{r_2 v_2^0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial(x_0)^n}\left(r^{n-1}v_2^0 - \frac{k}{1+4k}\frac{r^{n-1}}{v_2^0}\right)\right\} \\
\underset{2}{\psi}^{0k} &= -\frac{2\mathrm{G}}{c^2\kappa}\frac{1+4k}{1+3k}\mathrm{M}_2\left\{\frac{\dot{z}_2^k}{c}\frac{v_2^0}{r_2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial(x_0)^n}\left(r^{n-1}v_2^0\frac{\dot{z}_2^k}{c}\right)\right\} \\
\underset{2}{\psi}^{kl} &= -\frac{2\mathrm{G}}{c^2\kappa}\frac{1+4k}{1+3k}\mathrm{M}_2\left\{\frac{\dot{z}_2^k}{c}\frac{\dot{z}_2^l}{c}\frac{v_2^0}{r_2} + \frac{k}{1+4k}\frac{\delta^{kl}}{r_2 v_2^0}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial(x^0)^n}\left(r^{n-1}v_2^0\frac{\dot{z}_2^k}{c}\frac{\dot{z}_2^l}{c} + \frac{k}{1+4k}\delta^{kl}\frac{r^{n-1}}{v_2^0}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

où

$$v_2^\mu = \frac{dz_2^\mu}{ds_2} = \frac{dz_2^\mu}{dct}\frac{dct}{ds_2} = \frac{\dot{z}_2^\mu}{c}\underset{0}{v_2}.$$

2. Énergie mécanique d'un système de deux particules en théorie Lorentz-invariante

Nous nous proposons ici, une étude près des sources : si l'énergie cinétique des deux particules est aisément formulable, il est plus difficile de définir le concept d'énergie potentielle des particules. C'est pourquoi nous adoptons la méthode que P. Havas et S. F. Smith [*2*] ont élaborée en Relativité Générale à partir de la définition de l'énergie mécanique en théorie classique [*30*].

a) *Énergie mécanique classique d'un système de deux particules.*

Les équations newtoniennes relatives à ces deux particules sont :

$$\frac{d}{dt}\left(M_1 \frac{dz_1^k}{dt}\right) = F_1^k \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(M_2 \frac{dz_2^k}{dt}\right) = F_2^k.$$

Le travail fourni par le système est alors :

$$\dot{z}_{1k}\frac{d}{dt}(M_1\dot{z}_1^k) + \dot{z}_{2k}\frac{d}{dt}(M_2\dot{z}_2^k) = \dot{z}_{1k}F_1^k + \dot{z}_{2k}F_2^k \tag{79}$$

Faisons apparaître dans (79) la quantité qui se présente comme une dérivée totale par rapport au temps. L'intégrale de cette quantité est, par définition, l'énergie mécanique totale du système. Il vient, alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M_1\dot{z}_{1k}\dot{z}_1^k + \frac{1}{2}M_2\dot{z}_{2k}\dot{z}_2^k + V\right) = \dot{z}_{1k}f_1^k + \dot{z}_{2k}f_2^k$$

où l'on a mis en évidence la partie conservatrice des forces :

$$F_1^k = -\frac{\partial V}{\partial z_{1k}} + f_1^k, \ldots$$

L'énergie mécanique totale du système est alors :

$$E = \frac{1}{2}M_1\dot{z}_{1k}\dot{z}_1^k + \frac{1}{2}M_2\dot{z}_{2k}\dot{z}_2^k + V$$

b) *Énergie mécanique du système de deux particules en théorie minkowskienne.*

Nous adoptons la même méthode dans notre théorie minkowskienne :

— l'analogue de (79) apparaît comme la somme des composantes-zéro des équations de mouvement des particules 1 et 2, au temps « simultané » arbitraire :

$$ct = z_1^0 = z_2^0 \,;$$

— puis, dans cette relation, nous mettons en évidence une dérivée totale par rapport au temps. La partie intégrale est, par définition, l'énergie mécanique totale du système.

Après renormalisation et après assimilation de la masse renormalisée $[\mu_1]_{\text{ren}}$ à la masse grave M_1, la composante-zéro des équations de mouvement (55) de la particule 1 dans le champ de la particule 2 s'écrit, compte tenu de (59) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds_1}\left\{ M_1 v_{10} - \frac{1}{2} M_1 \kappa \underset{2}{\psi}_{\mu\nu} v_1^\mu v_1^\nu v_{10} + M_1 \kappa \underset{2}{\psi}_{0\mu} v_1^\mu \right\} \\ + \frac{GM_1^2}{c^2} R \frac{d^2 v_{10}}{ds_1^2} = \frac{1}{2} M_1 v_1^\alpha v_1^\beta \kappa \frac{\partial \underset{2}{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial z_1^0} - \frac{GM_1^2}{c^2} R v_{10} \frac{dv_1^\mu}{ds_1} \frac{dv_{1\mu}}{ds}.\end{aligned} \tag{80}$$

$$R = \frac{5 + 21k}{3(1 + 3k)}. \tag{81}$$

L'équation (80) s'écrit après division par v_1^0 :

$$\frac{dP_1^0}{cdt} = \frac{1}{2v_1^0} M_1 \kappa v_1^\alpha v_1^\beta \frac{\partial \underset{2}{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial z_1^0} - \frac{GM_1^2}{c^2} R \frac{dv_1^\mu}{ds_1} \frac{dv_{1\mu}}{ds_1} \tag{82}$$

$$P_1^0 = M_1 v_{10} - \frac{1}{2} M_1 \kappa \underset{2}{\psi}_{\mu\nu} v_1^\mu v_1^\nu + M_1 \kappa \underset{2}{\psi}_{0\mu} v_1^\mu + \frac{GM_1^2}{c^2} R \frac{dv_{10}}{ds_1}. \tag{83}$$

Introduisons dans (82) les solutions $\underset{2}{\psi}_{\mu\nu}$, au point $x^\rho = z_1^\rho$, écrites sous forme de développements de Lagrange (78), en remarquant que les premiers termes sont négligeables et que $\dfrac{\partial}{\partial z_1^0}$ ne joue que sur les z_2^k et réciproquement il vient :

$$\begin{aligned}\frac{dP_1^0}{cdt} = -\frac{G}{c^2} M_1 M_2 \frac{1+4k}{1+3k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial (z_1^0)^{n+1}} \left\{ v_1^0 v_2^0 r^{n-1} \frac{\dot{z}_{2\alpha}}{c} \frac{\dot{z}_{2\beta}}{c} \frac{\dot{z}_1^\alpha}{c} \frac{\dot{z}_1^\beta}{c} \right\} + \dots \\ + \frac{G}{c^2} M_1 M_2 \frac{k}{1+3k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial (z_1^0)^{n+1}} \left\{ \frac{1}{v_1^0 v_2^0} r^{n-1} \right\} - \frac{GM_1^2}{c^2} R \frac{dv_1^\mu}{ds_1} \frac{dv_{1\mu}}{ds_1}.\end{aligned}$$

En tenant compte de $z_1^0 = z_2^0 = ct$, nous obtenons :

$$\frac{dP_1^0}{cdt} = \frac{GM_1M_2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial(x_0)^{n+1}} (r^{n-1} f_G) - \frac{GM_1^2}{c^2} R \frac{dv_1^\mu}{ds_1} \frac{dv_{1\mu}}{ds_1} \tag{84}$$

$$f_G = \frac{1+4k}{1+3k} v_1^0 v_2^0 \left(1 - \frac{\dot{\vec{z}}_1}{c} \cdot \frac{\dot{\vec{z}}_2}{c}\right)^2 - \frac{k}{1+3k} \frac{1}{v_1^0 v_2^0}. \tag{85}$$

Nous ajoutons à cette composante-zéro des équations de mouvement de la particule 1 la composante-zéro des équations de mouvement de la particule 2, puis nous cherchons à mettre en évidence des dérivées totales par rapport au « temps simultané ». Par récurrence, on peut montrer, en effet, que :

— Pour n pair :

$$\left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial(z_1^0)^{n+1}} + \frac{\partial^{n+1}}{\partial(z_2^0)^{n+1}}\right) = \frac{d}{cdt}\left\{\frac{\partial^n}{\partial(z_1^0)^n} + \frac{\partial^n}{\partial(z_2^0)^n} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial(z_1^0)^{\frac{n}{2}} \partial(z_2^0)^{\frac{n}{2}}} + \dots \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} (-1)^k \left(\frac{\partial^{n-2k}}{\partial(z_1^0)^{n-2k}} + \frac{\partial^{n-2k}}{\partial(z_2^0)^{n-2k}}\right) \frac{\partial^{2k}}{\partial(z_1^0)^k \partial(z_2^0)^k}\right\}.$$

— Pour n impair :

$$\left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial(z_1^0)^{n+1}} + \frac{\partial^{n+1}}{\partial(z_2^0)^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{d}{dct}\left\{\frac{\partial^n}{\partial(z_1^0)^n} + \frac{\partial^n}{\partial(z_2^0)^n} + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left(\frac{\partial^{n-2k}}{\partial(z_1^0)^{n-2k}} + \frac{\partial^{n-2k}}{(\partial z_2^0)^{n-2k}}\right)\right.$$
$$\left. \frac{\partial^{2k}}{\partial(z_1^0)^k \partial(z_2^0)^k} + 2(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\partial^{n+1}}{\partial(z_1^0)^{\frac{n+1}{2}} \partial(z_2^0)^{\frac{n+1}{2}}}\right\}.$$

Nous groupons alors dans l'expression dE/dct, les termes $\dfrac{d(P_1^0 + P_2^0)}{dct}$ et les termes $\dfrac{d}{cdt}\{\dots\}$ donnés par les expressions ci-dessus, nous obtenons alors pour *la variation de l'énergie mécanique totale du système de 2-corps* :

$$\frac{d}{dct}\frac{\mathrm{E}}{c^2} = \frac{2\mathrm{GM}_1\mathrm{M}_2}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial(z_1^0)^n\partial(z_2^0)^n}r^{2(n-1)}f_{\mathrm{G}}$$
$$-\frac{\mathrm{GR}}{c^2}\left(\mathrm{M}_1^2\frac{dv_{1\mu}}{ds_1}\frac{dv_1^\mu}{ds_1} + \mathrm{M}_2^2\frac{du_{2\mu}}{ds_2}\frac{dv_2^\mu}{ds_2}\right). \quad (86)$$

3. VARIATION, EN TERMES MULTIPOLAIRES, DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE D'UN SYSTÈME DE 2-CORPS

Nous développons l'expression (86) par rapport à $1/c$ afin de mettre en évidence, si elles existent, des variations dipolaires, quadrupolaires de l'énergie gravitationnelle.

Remarquons, avant le calcul, que $\frac{\partial}{\partial z_1^0}$ ne joue que sur z_2^k et réciproquement, que : $\vec{r} = \vec{z}_1 - \vec{z}_2$, que $v_1^\mu = \frac{\dot{z}_1^\mu}{c}\, v_1^0$, que $v_1^0 \neq 1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}$.

En faisant $n = 1, 2, 3$, nous obtenons à l'approximation désirée :

$$\frac{d}{dct}\frac{\mathrm{E}}{c^2} = \frac{2\mathrm{GM}_1\mathrm{M}_2}{c^2}$$
$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial(z_1^0)\partial(z_0^2)}\left[\frac{1+4k}{1+3k}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}\cdot\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{z}}_2}{c}\cdot\frac{\dot{\vec{z}}_2}{c}\right)\left(1-2\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}\cdot\frac{\dot{\vec{z}}_2}{c}+\left(\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}\cdot\frac{\dot{\vec{z}}_2}{c}\right)^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\ldots-\frac{k}{1+3k}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}\cdot\frac{\dot{\vec{z}}_1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{z}}_2}{c}\cdot\frac{\dot{\vec{z}}_2}{c}\right)\right]+\frac{1}{6}\frac{\partial^4}{\partial(z_1^0)^2\partial(z_2^0)^2}(r^2f_{\mathrm{G}})-$$
$$\left.\ldots-\frac{1}{120}\frac{\partial^6}{\partial(z_1^0)^3\partial(z_2^0)^3}(r^4f_{\mathrm{G}})\right\}+$$
$$\ldots+\sum_{i=1,2}\frac{\mathrm{RGM}_i^2}{c^2}\left\{\frac{1}{c^4}\ddot{\vec{z}}_i\cdot\ddot{\vec{z}}_i+\frac{1}{c^6}[2\dot{\vec{z}}_i\cdot\dot{\vec{z}}_i(\ddot{\vec{z}}_i\cdot\ddot{\vec{z}}_i)+(\dot{\vec{z}}_i\cdot\ddot{\vec{z}}_i)^2\right\}. \quad (87)$$

Posons

$$\frac{d}{dct}\frac{\mathrm{E}}{c^2} = \frac{\mathrm{G}}{c^6}\mathrm{A}_0 + \frac{\mathrm{G}}{c^8}[\mathrm{M}_1^2\mathrm{A}_1 + \mathrm{M}_2^2\mathrm{A}_2 + \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{K}]. \quad (88)$$

Et calculons les différents coefficients successivement : A_0, A_1, A_2, K en développant (87), il vient :

— pour A_0, compte tenu de la valeur de R — (81) — :

$$\frac{G}{c^6}A_0 = \frac{G}{c^6}R(M_1\ddot{\vec{z}}_1 + M_2\ddot{\vec{z}}_2)(M_1\ddot{\vec{z}}_1 + M_2\ddot{\vec{z}}_2). \tag{89}$$

Si nous remarquons qu'à l'approximation newtonienne la dérivée seconde du moment dipolaire est nulle :

$$M_1\ddot{\vec{z}}_1 + M_2\ddot{\vec{z}}_2 = 0,$$

nous retrouvons le résultat bien connu selon lequel :

Il n'y a pas de rayonnement gravitationnel dipolaire : $A_0 = 0$;

— pour A_1 et A_2 :

$$\frac{GM_1^2A_1}{c^8} = \frac{RGM_1^2}{c^8}[2\dot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_1(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_1) + (\dot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_1)^2], \tag{90}$$

$$\frac{GM_2^2A_2}{c^8} = \frac{RGM_2^2}{c^8}[2\dot{\vec{z}}_2\cdot\dot{\vec{z}}_2(\ddot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_2) + (\dot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_2)^2]. \tag{91}$$

— pour K :

$$\begin{aligned}
\frac{M_1M_2KG}{c^8}& \\
= B\frac{GM_1M_2}{c^8}\{ &- 2r^2\dddot{\vec{z}}_1\cdot\dddot{\vec{z}}_2 + 7(\vec{r}\cdot\dot{\vec{z}}_2)(\dddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2) - 7(\vec{r}\cdot\dot{\vec{z}}_1)(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\dddot{\vec{z}}_2) + \dots \\
&+ 16(\dot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_2)(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2) + 11(\dot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2)(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_2) + \dots \\
&+ 2(\dddot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_2)(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{z}}_2 - \dot{\vec{z}}_2\cdot\dot{\vec{z}}_2) - 2(\dot{\vec{z}}_1\cdot\dddot{\vec{z}}_2)(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{z}}_1 + \dot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_1) + \dots \\
&- (3\dot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_1 + \vec{r}\cdot\dddot{\vec{z}}_1)(3\dot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_2 - \vec{r}\cdot\dddot{\vec{z}}_2)\} + \dots \\
+ C\frac{GM_1M_2}{c^8}\{ &\; 2\ddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{z}}_1) + 4\dot{\vec{z}}_1\cdot\dddot{\vec{z}}_2(\dot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_1) + \dots \\
&+ 4\dot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_1(\dot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_2) - 4(\dot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2)(\dot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_1)\} + \dots \\
+ D\frac{GM_1M_2}{c^8}\{ &- (\dot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_1)(\dot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_2)\} + \dots \\
+ E\frac{GM_1M_2}{c^8}\{ &- \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2) + 4\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{z}}_2(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_2) - 4\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{z}}_1(\dot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2) \\
&+ 8(\dot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_2)(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2) - 2(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{z}}_2 - \dot{\vec{z}}_2\cdot\dot{\vec{z}}_2)(\dot{\vec{r}}\cdot\dddot{\vec{z}}_1 + \ddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_1) \\
&- 2(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{z}}_1 + \dot{\vec{z}}_1\cdot\dot{\vec{z}}_1)(\dot{\vec{r}}\cdot\dddot{\vec{z}}_2 - \ddot{\vec{z}}_2\cdot\ddot{\vec{z}}_2) + 4\vec{r}\cdot\dot{\vec{z}}_2(\dddot{\vec{z}}_1\cdot\ddot{\vec{z}}_2) \\
&- 4\vec{r}\cdot\dot{\vec{z}}_1(\ddot{\vec{z}}_1\cdot\dddot{\vec{z}}_2) - r^2\dddot{\vec{z}}_1\cdot\dddot{\vec{z}}_2\}.
\end{aligned} \tag{92}$$

avec :

$$B = \frac{2}{15} \quad ; \quad C = \frac{1 + 4k}{1 + 3k} \quad ; \quad D = -2 \quad ; \quad E = \frac{1}{3}\frac{1 + 5k}{1 + 3k}. \qquad (93)$$

Pour expliciter ces termes quadrupolaires, introduisons le centre d'inertie des 2 masses — au repos à l'approximation newtonienne —; on fait le changement de variables :

$$\left.\begin{aligned}
\vec{z}_1 &= \frac{M_2}{\overline{M}}\vec{r} \; ; \; \dot{\vec{z}}_1 = \frac{M_2}{\overline{M}}\dot{\vec{r}} \; ; \; \ddot{\vec{z}}_1 = -\frac{GM_2}{r^3}\vec{r} \; ; \; \dddot{\vec{z}}_1 = -\frac{GM_2}{r^3}\left(\dot{\vec{r}} - 3\frac{\vec{r}\cdot}{r}\dot{r}\right) \\
\vec{z}_2 &= -\frac{M_1}{\overline{M}}\vec{r} \; ; \; \dot{\vec{z}}_2 = -\frac{M_1}{\overline{M}}\dot{\vec{r}} \; ; \; \ddot{\vec{z}}_2 = \frac{GM_1}{r^3}\vec{r} \; ; \; \dddot{\vec{z}}_2 = +\frac{GM_1}{r^3}\left(\dot{\vec{r}} - 3\frac{\vec{r}\cdot}{r}\dot{r}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (94)$$

$$\overline{M} = M_1 + M_2.$$

Après un assez long calcul et des simplifications, nous mettons en évidence les termes en G^2, G^3, G^4. Finalement, on peut écrire

$$\frac{d}{dct}\frac{E'}{c^2} = \frac{G^3}{c^8}\frac{M_1^2M_2^2}{r^4}$$

$$\left\{ 2(A + B - C + 2E)\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} + \left(-11B - 2C + \frac{D}{2} - 17E\right)(\dot{r})^2 - 2E\frac{G\overline{M}}{r} \right\}. \qquad (95)$$

4. Calcul effectif de la variation d'énergie du système de 2 particules dans le cas ou l'orbite est l'ellipse newtonienne

Nous introduisons les variables du centre des masses :

$$\eta^k = \frac{M_1}{\overline{M}}z_1^k + \frac{M_2}{\overline{M}}z_2^k \quad ; \quad \xi^k = z_1^k - z_2^k,$$

puis les coordonnées polaires r, Φ :

$$\eta^k = 0 \quad , \quad \xi^1 = r\cos\Phi \quad , \quad \xi^2 = r\sin\Phi \quad , \quad \xi^3 = 0. \qquad (96)$$

Soit encore : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\Phi)$, p étant le paramètre et e l'excentricité de l'ellipse. A l'aide de (96) et de l'intégrale première du mouvement :

$$r^2\dot{\Phi} = (Gp\overline{M})^{\frac{1}{2}} \qquad (97)$$

nous trouvons que le terme prépondérant dans l'expression (95) est donné par :

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{G^4}{c^5}\frac{M_1^2M_2^2}{p^3}\frac{2}{r^3}(A + B - C + E) = \frac{G^4}{c^5}\frac{M_1^2M_2^2}{p^3}\frac{2}{r^2}\frac{17 + 76k}{15(1 + 3k)} \quad (98)$$

Dans le cas simple de 2 particules identiques ($M_1 = M_2 = M$) en mouvement circulaire et uniforme à l'approximation newtonienne ($2\rho = R$), la variation (98) s'écrit :

$$\frac{dE'}{dt} = 16\,\frac{17 + 76k}{15(1 + 3k)}\,\frac{GM^2}{2\rho}\left(\frac{\rho\dot{\Phi}}{c}\right)^5\dot{\Phi} = 4\,\frac{17 + 76k}{15(1 + 3k)}\,\frac{G^4}{c^5}\,\frac{M^5}{R^5}. \quad (99)$$

Remarque. — Pour $k = -\frac{1}{2}$, nous retrouvons les résultats de S. F. Smith (cas de la « fast approximation ») :

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{224}{5}\,\frac{GM^2}{3\rho}\left(\frac{\rho\dot{\Phi}}{c}\right)^5\dot{\Phi}.$$

5. DISCUSSION

Pour que le système perde de l'énergie, il faut que :

$$-\frac{1}{3} < k < -\frac{17}{76}. \quad (100)$$

En conclusion de la deuxième partie, nous avons vu que cette théorie minkowskienne interprète les trois « tests expérimentaux », si nous choisissons $k = -\frac{3}{5}$ et $1{,}75 < \kappa < 2$. Cette valeur de k implique, d'après (99), un gain d'énergie pour le système des 2-corps de :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{286}{15}\,\frac{GM^2}{\rho}\left(\frac{\rho\dot{\Phi}}{c}\right)^5\dot{\Phi} = \frac{143}{15}\,\frac{G^4}{c^5}\,\frac{M^5}{R^5}. \quad (101)$$

B. — Généralisation de l'étude du rayonnement dans un problème de deux corps pour $h \neq 1$.

Au début de cette étude minkowskienne (cf. deuxième partie) nous avons vu que les équations d'Euler contractées conduisent à la condition (41) sur les masses.

En effet, les équations d'Euler (40) :

$$L_{\alpha_j} \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta(L_p + L_i)}{\delta z^\alpha_j} = \frac{\partial(L_p + L_i)}{\partial z^\alpha_j} - \frac{d}{du_j}\left[\frac{\partial(L_p + L_i)}{\partial z'^\alpha_j}\right] = 0 \tag{40}$$

conduisent par contraction à :

$$z'^\alpha_j L_{\alpha_j} = (1 - h)\frac{d(L_p + L_i)}{du_j} - \frac{\partial(L_p + L_i)}{\partial \mu_j}\frac{d\mu_j}{du_j} - \frac{\partial(L_p + L_i)}{\partial M_j}\frac{dM_j}{du_j} \tag{102}$$

où — h est le degré d'homogénéité des Lagrangiens L_p, L_i,

— on n'a pas supposé, *a priori*, que les coefficients μ_j, M_j sont constants. Ils peuvent dépendre du paramètre u_j.

Dans le cas particulier où h est égal à 1, d'après (41), μ_j est constant. Si M_j est supposé aussi constant, alors (102) se réduit à une identité.

Dans le cas général où h est différent de 1, il faut tenir compte de la condition (41) sur les masses. C'est le cas de la Relativité Générale, par exemple, pour laquelle $h = 2$ (cf. première partie et cf. Tulczyjew [*31*]). La condition (41) s'écrit, en effet, dans ce cas :

$$\mu_j = M_j = m_j\left(g_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha_j}{du_j}\frac{dz^\beta_j}{du_j}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{103}$$

où μ_j est un paramètre arbitraire et m_j une constante.

Afin d'examiner toutes les possibilités offertes par une théorie minkowskienne, nous étudions le cas d'un degré d'homogénéité $h \neq 1$.

Nous avons considéré, au début de la 2e partie, des lagrangiens homogènes et de degré h par rapport aux $z'^\alpha_j = \dfrac{dz^\alpha_j}{du_j}$ (u_j paramètre arbitraire qui paramétrise la ligne d'Univers de la $j^{\text{ème}}$ particule et les z^α_j sont les coordonnées de celle-ci). Les coefficients μ_j, M_j, liés respectivement aux masses inerte et grave sont supposés, *a priori*, fonction de u_j.

Des principes variationnels nous ont conduits :

— aux équations du mouvement (44) exprimées en termes de z^α_j et $\dot{z}^\alpha_j = \dfrac{dz^\alpha_j}{ds_j}$ (s_j étant le temps propre de la $j^{\text{ème}}$ particule),

— aux équations du champ (46),

— à la condition (41).

Posons, et ceci n'est pas une hypothèse restrictive, mais une simple notation :

$$M'_j = M_j(g_{\alpha\beta}z'^\alpha_j z'^\beta_j)^{\frac{h-1}{2}} \quad ; \quad \mu'_j = \mu_j(g_{\alpha\beta}z'^\alpha_j z'^\beta_j)^{\frac{h-1}{2}}. \tag{104}$$

Les équations de champ (46) s'écrivent alors :

$$\square(\psi^{\mu\nu} + k\eta^{\mu\nu}\psi) = -\chi\sum_{j=1}^{N}\kappa\int_{-\infty}^{+\infty} M'_j c^2 \dot{z}^{\mu}_j \dot{z}^{\nu}_j \delta^4(x^{\rho} - z^{\rho}_j)ds_j \tag{105}$$

où

$$M'_j = M'_j(s_j) \quad ; \quad \dot{z}^{\mu}_j = \dot{z}^{\mu}_j(s_j).$$

La condition (41) s'écrit :

$$\left(1 + \frac{h}{2}\Omega^2_j\right)^{\frac{h-1}{h}} = \frac{m_j}{\mu'_j}. \tag{106}$$

De plus

$$\frac{M_j}{\mu_j} = \frac{M'_j}{\mu'_j} \quad , \quad \Omega^2_j = \kappa\frac{M'_j}{\mu'_j}\psi_{\mu\nu}\dot{z}^{\mu}_j\dot{z}^{\nu}_j$$

Et les équations du mouvement sont alors :

$$\frac{d}{ds_j}\frac{2\overline{g_{\alpha\beta}}u^{\beta}_j}{\frac{m_j}{\mu'_j}} - \frac{u^{\beta}_j u^{\varepsilon}_j \partial_{\alpha}\overline{g_{\beta\varepsilon}}}{\frac{m_j}{\mu'_j}} + \left(\frac{h}{2} - 1\right)\frac{\partial_{\alpha}\Omega^2_j}{\frac{m_j}{\mu'_j}} = 0 \tag{107}$$

$$\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}\left[1 + \left(\frac{h}{2} - 1\right)\Omega^2_j\right] + \kappa\frac{M'_j}{\mu'_j}\psi_{\alpha\beta}.$$

Tout se passe comme si μ'_j jouait le rôle d'une masse « inerte » variable polarisée par le champ $\psi_{\mu\nu}$. En l'absence de champ $\psi_{\mu\nu} = 0$: $\Omega^2_j = 0$, $\mu'_j = m_j =$ cte, d'après (106). M'_j joue alors le rôle d'une masse « grave », source du champ $\psi_{\mu\nu}$.

Dans le cas $h = 1$ et d'après la définition (104) : $M'_j = M_j$, $\mu'_j = \mu_j$. La condition (106) s'écrit : $\mu'_j = m_j =$ cte. La masse « inerte » est constante par rapport au paramètre s_j.

$M'_j = M_j$ n'est soumis à aucune condition. Si M_j est constant, nous retrouvons les conditions étudiées ci-dessus (cf. deuxième partie et début de la troisième partie) qui conduisent soit à l'avance expérimentale du périhélie, soit à une perte d'énergie par rayonnement gravitationnel, mais non aux deux résultats simultanément. Si M_j n'est pas constant, il faut, pour faire un calcul effectif, préciser sa forme.

Cherchons si l'on peut obtenir, à partir des potentiels retardés, des solutions radiatives susceptibles de conduire à des équations de mouvement différentes dans le cas d'un degré d'homogénéité $h \neq 1$.

Cas $h = 2$. — C'est le degré d'homogénéité du Lagrangien de la Relativité Générale. Cependant, l'interprétation de la condition sur les masses est différente suivant qu'elle intervient en Relativité Générale ou dans une théorie minkowskienne où $h = 2$. En effet, adoptons la terminologie — employée par A. Trautman [32] — de masse grave active, de masse grave passive, de masse inerte :

— la masse inerte μ^{I} est une constante associée à une particule telle qu'en théorie newtonienne on ait :

$$\vec{\mathrm{F}} \rightarrow \mu^{\mathrm{I}} \frac{\overrightarrow{d^2 r}}{dt^2}$$

— la masse grave active M^a de la particule se réfère à la faculté de produire un champ de force gravitationnelle; un potentiel newtonien peut s'écrire ainsi :

$$\Phi(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=} - \sum_i \frac{\mathrm{M}_i^{\mathrm{A}}}{(\vec{x} - \vec{z}_i)},$$

— la masse grave passive M^p traduit alors la réponse d'une particule à un champ de force gravitationnelle :

$$\vec{\mathrm{F}} \overset{\text{def}}{=} - \mathrm{M}^p \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, \Phi.$$

En Relativité Générale, l'égalité masse grave passive, masse inerte est *axiomatique*; la géométrie particulière introduite supplée à une « interaction » champ-particule que l'on se représente, en théorie minkowskienne par l'addition d'un lagrangien d'interaction aux lagrangiens de champ pur et de particule libre. Au contraire, l'égalité masse grave active et masse inerte est issue du problème de raccordement — dans la solution de Schwarzschild par exemple — (cf. Eddington [33]). La proportionnalité de ces deux masses appartient en fait à un schéma newtonien et finalement suppose que les champs gravitationnels sont faibles pour que les équations soient traitées de façon linéaire. Cela est aussi vrai en Relativité Générale qu'en théorie minkowskienne. Ainsi, les trois masses précitées se réduisent à une seule en Relativité Générale.

W. Tulczyjcw et L. Infeld [31] introduisent aussi les définitions de type (104). L'expression : $\mathrm{M}'_j = \mathrm{M}_j(g_{\alpha\beta} z'^{\alpha}_j z'^{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{M}_j \frac{ds_i}{du_j}$, que A. Pérès [13] nomme la

« masse effective », est la masse grave active qui intervient comme terme de source.

Dans le cadre de la théorie minkowskienne particularisée au cas $h = 2$ la condition (106) devient :

$$\mu_j'^2\left(1 + \kappa \frac{M_j'}{\mu_j'} \omega_j^2\right) - m_j^2 = 0 \quad ; \quad \omega_j^2 = \psi_{\mu\nu}\dot{z}_j^\mu \dot{z}_j^\nu \tag{108}$$

Les équations du mouvement (107) s'écrivent (¹) :

$$\frac{d}{ds}\frac{2\overline{g_{\alpha\beta}u^\beta}}{\frac{m}{\mu'}} - u^\beta u^\varepsilon \frac{\overline{\partial_\alpha g_{\beta\varepsilon}}}{\frac{m}{\mu'}} = 0 \tag{109}$$

$$\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta} + \kappa \frac{M}{\mu}\psi_{\alpha\beta}. \tag{110}$$

Remarque. — On ne peut pas supposer à la fois M′ et μ' constantes car (108) entraînerait ω^2 = cte, conséquence inacceptable de la théorie de N. Thirring [*34*] en interprétant celle-ci comme une théorie strictement minkowskienne (cf. M. A. Tonnelat et S. Lederer [*35*]). On est conduit alors, comme le fait W. Thirring, à interpréter les équations linéaires comme une approximation d'une théorie non linéaire. S. N. Gupta [*36*] a précisé la reconstruction, par étapes successives, de théories minkowskiennes non linéaires.

Nous considérons donc le cas le plus intéressant.

$\frac{M'}{\mu'} = \frac{M}{\mu}$ = cte = a; M′ et μ' étant variables, nous tirons de (108), ω^2 étant petit :

$$\mu' \sim m\left(1 - \frac{\kappa a \omega^2}{2}\right) \quad ; \quad M' \sim am\left(1 - \frac{\kappa a \omega^2}{2}\right). \tag{111}$$

Les équations du champ, d'après (111) et (105) sont non linéaires, M′ étant non constante :

$$\square(\psi^{\mu\nu} + k\eta^{\mu\nu}\varphi) = -\chi\kappa \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} amc^2\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu\left(1 - \kappa\frac{a\omega^2}{2}\right)\delta^4(x^\rho - z^\rho)ds. \tag{112}$$

(¹) Dans ce qui suit, pour alléger l'écriture, nous supprimerons les indices.
Quand nous sommerons sur toutes les particules, nous indiquerons seulement le signe $\sum$.

Mais $\omega^2 = \psi_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta$ est petit. Aussi, en 1re approximation, on retrouve les équations :

$$\square(\psi^{\mu\nu} + k\eta^{\mu\nu}\psi) = -\chi\kappa \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} amc^2 \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \delta^4(x^\rho - z^\rho)ds,$$

dont la solution est donnée par les potentiels de Lienard-Wiechert. Les développements de Lagrange de ces potentiels et par conséquent leur ordre de grandeur par rapport à $(1/c)^n$ sont donnés par (78).

Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d}{ds}\left\{ 2(\eta_{\alpha\beta} + \kappa a\psi_{\alpha\beta})\left(1 - \kappa a \frac{\omega^2}{2}\right)u^\beta \right\} = u^\beta u^\varepsilon \left(1 - \kappa \frac{a\omega^2}{2}\right) \mathrm{K} a \partial_\alpha \psi_{\beta\varepsilon}. \tag{113}$$

Les équations approchées peuvent s'écrire pour $\alpha = p$:

$$\frac{d}{ds}\left\{ 2\eta_{p\beta}u^\beta - a\kappa\omega^2\eta_{p\beta}u^\beta + 2\kappa a\psi_{p\beta}u^\beta + \mathrm{O}\left(\frac{1}{c^5}\right)\right\}$$
$$\sim u^\beta u^\varepsilon \kappa a \partial_p \psi_{\beta\varepsilon} + \mathrm{R}\left(\frac{1}{c^5}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{c^6}\right). \tag{114}$$

Équations de même forme que celles étudiées précédemment en (48) pour $h = 1$, M et μ constantes. Elles conduisent aux mêmes conclusions puisque l'ordre de grandeur des premiers termes de rayonnement est en $\frac{1}{c^5}$ d'après (80).

Cette conclusion utilise la 1re approximation de (112) et de (113). L'approximation suivante de (112) conduit à des $\psi_{\mu\nu}$ qui sont au plus en $\frac{1}{c^4}$. Leur contribution dans (114) ne modifiera pas cette dernière équation — et par conséquent la conclusion précédente — car $\psi_{p\beta}\mu^\beta$ est au plus en $\frac{1}{c^5}$ d'après (78).

Pour *h quelconque*, la condition (106) s'écrit alors :

$$\left(1 + \frac{h}{2}\kappa \frac{\mathrm{M}'}{\mu'}\right)^{\frac{h-1}{h}} = \frac{m}{\mu'} \tag{115}$$

et les équations de mouvement (107) deviennent :

$$\frac{d}{ds}\left\{ 2\mu'\left[1 + \left(\frac{h}{2} - 1\right)\kappa \frac{\mathrm{M}'}{\mu'}\omega^2\right] g_{\alpha\beta}u^\beta + 2\kappa \mathrm{M}'\psi_{\beta\alpha}u^\beta \right\} = u^\beta u^\varepsilon \mu' \kappa \partial_\alpha \frac{\mathrm{M}'}{\mu'}\psi_{\beta\varepsilon}.$$

Si $\dfrac{M'}{\mu'} = a$, $M' \neq$ cte, $\mu' \neq$ cte, la condition (115) équivaut à :

$$\mu' \sim m\left(1 + \kappa \frac{1-h}{2} a\omega^2\right) \quad , \quad M' \sim am\left(1 + \kappa \frac{1-h}{2} a\omega^2\right).$$

On peut, comme dans le cas $h = 2$, linéariser à une approximation suffisante les équations de champ et montrer aussi que les équations du mouvement sont indépendantes de h : elles sont identiques à celles obtenues pour $h = 2$.

Conclusion

Nous avons déterminé l'énergie gravitationnelle rayonnée par un système de 2-corps au voisinage de ceux-ci. La réaction de radiation évaluée conduit à un gain d'énergie du système. Ce résultat a été obtenu pour un Lagrangien homogène et de degré $h = 1$ par rapport aux quadrivitesses.

Pour un degré d'homogénéité h quelconque les équations du champ sont non linéaires. Leur étude jusqu'à une approximation suffisante (solutions en $\dfrac{1}{c^4}$) conduit au même résultat paradoxal : un système de 2-corps gagne de l'énergie par rayonnement gravitationnel.

QUATRIÈME PARTIE

CALCUL DE L'ÉNERGIE RAYONNÉE LOIN DES SOURCES DANS UN PROBLÈME DE 2-CORPS

L'étude précédente, effectuée au voisinage des sources, tient compte de la partie finie du champ propre des particules, partie associée au champ de rayonnement. Elle nous a conduit à examiner les équations du mouvement des sources jusqu'à l'approximation en $1/c^5$, ordre de grandeur de la réaction de radiation. Du calcul de la variation d'énergie d'un système de deux particules identiques en mouvement approximativement circulaire uniforme — calcul effectué sur les lignes d'Univers des particules — résulte un gain d'énergie par radiation gravitationnelle.

Dans cette quatrième partie, nous nous proposons d'étudier l'énergie rayonnée, à travers une sphère située à l'infini par ce même système de deux particules identiques.

1. Énergie-impulsion d'un système de particules en interaction gravitationnelle

On sait [*21*] que dans toute théorie de champ il existe quatre identités qui lient

— les équations de champ :

$$\mathrm{L}^r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \psi_r} = 0,$$

— les équations de mouvement :

$$\Lambda_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta z^\alpha} = 0,$$

— les lois de conservations locales :

$$(\tau_\alpha^\beta - \mathrm{L}^r \mathrm{F}_{r\alpha}{}^{s\beta} \psi_s)_{;\beta} - \mathrm{L}^r \psi_{r;\alpha} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_\alpha \delta^4(x - z) ds = 0 \qquad (116)$$

où — $\tau^{\alpha\beta}$ est la densité d'énergie-impulsion totale :

$$\tau^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{\alpha\beta}} = 2 \frac{\delta(\mathfrak{L}_c + \mathfrak{L}_p + \mathfrak{L}_i)}{\delta g_{\alpha\beta}},$$

— $\mathrm{F}_{r\alpha}^{s\beta}$ ainsi défini : pour une transformation infinitésimale des coordonnées, la variation induite pour le champ tensoriel ψ_r peut être mise sous la forme :

$$\delta \psi_r = \mathrm{F}_{r\alpha}{}^{s\beta} \psi_s \delta x^\alpha{}_{,\beta}.$$

Si les équations de champ $\mathrm{L}^r = 0$, les équations du mouvement $\Lambda_\alpha = 0$ sont satisfaites, les identités (116) entraînent les lois de conservation locale :

$$\tau_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = 0 \qquad (117)$$

où : $\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta}$ champ $+ \ \tau^{\alpha\beta}$ particules $+ \ \tau^{\alpha\beta}$ interaction.

Avec les valeurs (39) et (45) des Lagrangiens, nous obtenons (¹) :

$$\begin{aligned}
\chi\tau^{\alpha\beta}\ \text{champ} \quad &= \partial^\alpha \psi_{\mu\nu} \partial^\beta \psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial^\sigma \psi_{\mu\nu} \partial_\sigma \psi^{\mu\nu} - \partial_\pi [\psi_\nu^\beta \partial^\alpha \psi^{\pi\nu} + \dots \\
&\dots + \psi_\nu^\alpha \partial^\beta \psi^{\pi\nu} - \psi^{\pi\nu} (\partial^\alpha \psi_\nu^\beta + \partial^\beta \psi_\nu^\alpha)] + \dots \\
&\dots + k \left(\partial^\alpha \psi \partial^\beta \psi - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial^\gamma \psi \partial_\gamma \psi \right) + \dots \\
&\dots - \psi^{\nu\beta} (\Box \psi_\nu^\alpha + k \eta_\nu^\alpha \psi) - \psi^{\nu\alpha} \Box (\psi_\nu^\beta + k \eta_\nu^\beta \psi).
\end{aligned} \qquad (118)$$

(¹) Nous supposons en outre que le degré d'homogénéité h des Lagrangiens par rapport aux quadrivitesses des particules est $h = 1$.

$$\tau^{\alpha\beta} \text{ particules } = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \mu_i c^2 \dot{z}_i^\alpha \dot{z}_i^\beta \delta^4(x^\lambda - \dot{z}_i^\lambda) ds_i \tag{119}$$

$$\tau^{\alpha\beta} \text{ interaction} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_j \mathrm{M}_j \psi_{\lambda\sigma} \dot{z}_j^\lambda \dot{z}_j^\sigma \dot{z}_j^\alpha \dot{z}_j^\beta \delta^4(x^\lambda - z_j^\lambda) ds_j. \tag{120}$$

Remarque. — S. Mavrides [1] a montré que dans le vide et dans le cas d'ondes planes ($\partial_1 \neq 0$, $\partial_0 \neq 0$; $\partial_2 = \partial_3 = 0$ avec $\psi_{22} = -\psi_{33}$) t^{00}_{champ} est toujours défini positif (χ étant positif).

Il y a donc équivalence entre les équations du mouvement utilisées dans l'étude faite près des sources et la loi de conservation (117) qui va permettre le calcul de la variation d'énergie par rayonnement gravitationnel du système de 2-corps loin de ceux-ci.

2. Flux rayonné a travers une sphère située a l'infini, par un système de deux particules identiques

Par intégration appliquée à tout l'espace-temps de la condition de conservation (117) en appliquant le théorème de Gauss pour l'hypersurface $x^0 = \text{cte}$ entourant tout l'espace tridimensionnel, on obtient la variation d'énergie d'un système à travers la sphère infinie :

$$\frac{d}{dct} \int_v d\mathrm{V} \tau^{00} = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{R}^2 \sin\theta d\theta d\Phi \frac{x_k}{\mathrm{R}} \tau^{0k} \tag{121}$$

en passant aux coordonnées polaires R, θ, Φ.

Le calcul effectif de la variation d'énergie rayonnée — sous forme d'ondes gravitationnelles — requiert la détermination du champ gravitationnel dans la « zone d'ondes », c'est-à-dire à des distances grandes par rapport aux longueurs d'ondes du rayonnement gravitationnel.

Les tenseurs d'énergie-impulsion des particules et des interactions champ-particules n'ont un sens que sur la ligne d'Univers des particules (cf. (119) et (120)) : τ^{0k} se réduit donc à la composante $(0k)$ de l'énergie-impulsion « eulérienne » du champ gravitationnel τ^{00}_{champ}.

a) *Détermination des potentiels* $\psi_{\mu\nu}$ *pour* R *très grand.*

Supposons que les deux particules du système aient un mouvement cir-

[1] Communication privée.

culaire uniforme en première approximation, dans le plan $x^3 = 0$. Nous calculons d'abord le potentiel $\underset{2}{\psi}^{\mu\nu}$ dû à la particule 2 au point P(R, θ, Φ), sachant qu'il est donné par (50), compte tenu de (59) :

$$\underset{2}{\psi}^{\mu\nu} = -\frac{2G}{c^2\kappa}\,\frac{1+4k}{1+3k}\,M_2\,\frac{\left[v_2^\mu v_2^\nu - \dfrac{k}{1+4k}\eta^{\mu\nu}\right]}{[\eta_{\rho\sigma}(x^\rho - z_2^\rho)v_2^\sigma]} \tag{122}$$

où les crochets indiquent qu'il s'agit de « valeurs retardées ».

Nous exprimons (122) à l'aide de coordonnées polaires; pour alléger les écritures nous posons : $\breve{\chi} = \Phi - \frac{\beta}{\rho}[ct] - \frac{\pi}{2}$. De sorte qu'introduisant :

$$\breve{\psi} = \Phi - \beta\frac{ct}{\rho} - \frac{\pi}{2} + \frac{R}{\rho}\beta,$$

on passe directement des expressions en temps retardé aux expressions en temps « présent » par la transformation :

$$\breve{\psi} = \breve{\chi} - \beta \sin\theta \sin\breve{\chi}\,; \qquad \left(\rho = \text{rayon de l'orbite}\,;\ \beta = \rho\,\frac{\dot{\Phi}}{c}\right). \tag{123}$$

Puis, de même, on calcule les potentiels $\underset{1}{\psi}^{\mu\nu}$, en remplaçant $\breve{\psi}$ par $\breve{\psi} + \pi$.

Finalement, pour le champ total dû aux deux particules identiques, nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{00} &= -2\lambda\left(\frac{1+3k}{1+4k} + \frac{k}{1+4k}\beta^2\right)\Big\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_0C_{2n}(2n\beta\sin\theta)\cos 2n\breve{\psi}\Big\}\\
\psi^{01} &= -2\lambda\beta\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\cos\Phi_1 C_{2n}(2n\beta\sin\theta)\cos 2n\breve{\psi}\\
&\qquad\qquad + \sin\Phi_1 B_{2n}(2n\beta\sin\theta)\sin 2n\breve{\psi}\Big\}\\
\psi^{02} &= -2\lambda\beta\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\sin\Phi_1 C_{2n}(2n\beta\sin\theta)\cos 2n\breve{\psi}\\
&\qquad\qquad - \cos\Phi_1 B_{2n}(2n\beta\sin\theta)\sin 2n\breve{\psi}\Big\}\\
\psi^{11} &= -\lambda\,\frac{2k+\beta^2(1+2k)}{1+4k}\Big\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_0C_{2n}(2n\beta\sin\theta)\cos 2n\breve{\psi}\\
&\qquad - \lambda\beta^2\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\cos 2\Phi_2 C_{2n}(2n\beta\sin\theta)\cos 2n\breve{\psi}\\
&\qquad + \sin 2\Phi_2 B_{2n}(2n\beta\sin\theta)\sin 2n\breve{\psi}\Big\}
\end{aligned}\right| \quad (123)$$

$$\psi^{22} = -\lambda \frac{2k+\beta^2(1+2k)}{1+4k} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_0C_{2n}(2n\beta \sin \theta) \cos 2n\breve{\psi} \right.$$
$$+ \lambda\beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \cos 2\Phi_2 C_{2n}(2n\beta \sin \theta) \cos 2n\breve{\psi}$$
$$+ \sin 2\Phi_2 B_{2n}(2n\beta \sin \theta) \sin 2n\breve{\psi} \}$$

$$\psi^{12} = -\lambda\beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \sin 2\Phi_2 C_{2n}(2n\beta \sin \theta) \cos 2n\breve{\psi}$$
$$- \cos 2\Phi_2 B_{2n}(2n\beta \sin \theta) \sin 2n\breve{\psi} \}$$

$$\lambda = \frac{1}{\kappa} \frac{1+4k}{1+3k} \frac{2G}{c^2} \frac{M}{R} \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$${}_pB_{2n} = J_{2n-p}\{ 2n\beta \sin \theta \} - J_{2n+p}\{ 2n\beta \sin \theta \}$$
$${}_pC_{2n} = J_{2n-p}\{ 2n\beta \sin \alpha \} + J_{2n+p}\{ 2n\beta \sin \theta \}$$
$$J_{2n}(y) = \frac{(y/2)^{2n}}{2n!} \left(1 - \frac{(y/2)^2}{1.(2n+1)} + \frac{(y/4)^2}{1.2.(2n+1)(2n+2)} - \dots \right.$$

b) *Calcul effectif de l'énergie rayonnée par un système de 2-corps.*

L'expression du flux rayonné à travers une sphère infinie est donnée par (121) où τ^{0k} est la composante $(0k)$ de $\tau_c^{\mu\nu}$ (cf. (118)), et où les $\psi^{\mu\nu}$ sont écrits en (123), la constante χ étant (cf. (59)) :

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4 K^2} \frac{1+4k}{1+3k}. \tag{124}$$

On obtient, après intégration, comme énergie rayonnée par le système de 2-particules :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{1+4k}{1+3k} \frac{GM^2}{2\rho} \beta^5 \dot{\Phi} = \frac{8}{5} \frac{1+4k}{1+3k} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^5}{R^5} \tag{125}$$

ρ étant le rayon du cercle orbite, $R = 2\rho$.

Remarque. — Pour $k = \frac{1}{2}$ qui correspond à la Relativité Générale linéarisée, nous obtenons un gain :

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{64}{5} \frac{GM^2}{2\rho} \beta^5 \dot{\Phi} = \frac{16}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^5}{R^5}$$

qui n'est pas le gain d'énergie trouvé par S. F. Smith en « fast approximation ».

c) *Discussion.*

Pour que le système perde de l'énergie, il faut que :

$$-\frac{1}{3} < k < -\frac{1}{4}. \tag{126}$$

Le résultat (125) diffère de celui trouvé en (99) où le calcul est effectué près des sources. Toutefois les conditions (100) et (126) sont sensiblement les mêmes.

Pour la valeur $k = -\frac{3}{5}$ — valeur de k qui permet de rendre compte des résultats expérimentaux : avance des périhélies, courbure des rayons lumineux — nous trouvons encore d'après (125) que le système gagne de l'énergie :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{56}{5} \frac{GM^2}{2\rho} \beta^5 \dot{\Phi} = \frac{14}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^5}{R^5}. \tag{127}$$

3. *Notion d'énergie.*

Jusqu'à présent, nous avons défini une énergie et calculé sa variation par rayonnement d'un système de deux-corps, près et loin des sources. Les résultats paradoxaux (gain d'énergie par radiation gravitationnelle) et discordants (valeurs absolue différente) dans les deux études nous ramènent à la question fondamentale de la définition même de cette énergie.

Nous avons rappelé — en début de cette quatrième partie — que c'est le tenseur « eulérien » ou « métrique » qui représente l'énergie-impulsion du champ de gravitation et que la composante (00) est définie positive pour des ondes planes, c'est-à-dire transverses. Cependant le tenseur « métrique » dans cette théorie minkowskienne n'est pas invariant de jauge et n'est pas défini positif pour des ondes quelconques.

Si nous considérons le tenseur canonique $\theta_\alpha{}^\beta$ donné par :

$$x\sqrt{-g}\theta_\beta^\gamma = \delta_\beta^\gamma(\sqrt{-g}2L) - \partial_\beta\psi_{\alpha\delta}\frac{\partial(\sqrt{-g}2L)}{\partial(\partial_\gamma\psi_{\alpha\delta})}$$

qui s'écrit, compte tenu des valeurs (39) et (45) des Lagrangiens :

$$\chi\theta_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\psi_{\mu\nu}\partial_\beta\psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\gamma\psi_{\mu\nu}\partial^\gamma\psi^{\mu\nu} + k\left(\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\gamma\psi\partial^\gamma\psi\right),$$

nous pouvons écrire le tenseur « métrique » (118) ainsi :

$$\tau_m^{\alpha\beta} = \theta_{\text{can}}^{\alpha\beta} - 2\psi_\nu^\beta A^{\alpha\nu} + \partial_\lambda \mathcal{B}_{\smile}^{\lambda\alpha,\beta} = \theta_{\text{can}}^{\alpha\beta} - 2\psi_\nu^\alpha A^{\beta\nu} + \partial_\lambda \mathcal{B}_{\smile}^{\lambda\beta,\alpha} \tag{128}$$

où ici :

$$A_{\mu\nu} \equiv \Box(\psi_{\mu\nu} + k\eta_{\mu\nu}\psi)$$

et :

$$\mathcal{B}_{\smile}^{\lambda\alpha,\beta} = \psi^{\lambda\nu}\partial^\alpha\psi_\nu^\beta - \psi^{\alpha\nu}\partial^\lambda\psi_\nu^\beta + \psi^{\beta\nu}(\partial^\lambda\psi_\nu^\alpha - \partial^\alpha\psi_\nu^\lambda) + \psi^{\lambda\nu}\partial^\beta\psi_\nu^\alpha - \psi^{\alpha\nu}\partial^\beta\psi_\nu^\lambda.$$

Et loin des sources, les équations de champ s'écrivent :

$$A_{\mu\nu} \equiv (\Box(\psi_{\mu\nu} + k\eta_{\mu\nu}\psi)) = 0. \tag{129}$$

D'autre part, nous supposons valable, loin des sources, la condition d'isothermie :

$$\partial^\nu(\psi_{\mu\nu} + k\eta_{\mu\nu}\psi) \equiv \partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = 0. \tag{130}$$

Les équations (129) et (130) sont invariantes dans la transformation de jauge :

$$\psi_{\alpha\beta} \to \overset{*}{\psi}_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta} + \partial_\alpha a_\beta + \partial_\beta a_\alpha - \frac{1+2k}{1+4k}\eta_{\alpha\beta}\partial_\rho a^\rho \tag{131}$$

si $\Box a\mu = 0$, quel que soit k.

Si de plus $k = -\frac{1}{2}$, les équations (129) et (130) sont invariantes dans la transformation réduite :

$$\psi_{\alpha\beta} \to \overset{*}{\psi}_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta} + \partial_\alpha a_\beta + \partial_\beta a_\alpha. \tag{132}$$

A partir de la transformation (131) nous pouvons choisir un système lorentzien tel que les seules composantes $\psi_{\mu\nu}$ non nulles, associées à des ondes planes à l'infini soient

$$\psi_{11} = \psi_{22} \quad \text{et} \quad \psi_{12}.$$

Et, la condition d'isothermie jointe à la transversalité des ondes entraînent que, loin des sources :

$$\partial_\lambda \mathcal{B}^{\lambda 0,k} = 0 \tag{133}$$

(128), (129) et (133) impliquent que, loin des sources

$$\theta_{\text{can}}^{0k} = \tau_{\text{met}}^{0k}. \tag{134}$$

L n'est pas invariant de jauge dans cette théorie. Le tenseur canonique ne l'est pas davantage. La notion d'énergie dans cette théorie minkowskienne se heurte donc aux difficultés que A. Trautman [*21*] a rencontrées pour définir l'énergie en théorie linéaire de la gravitation. Afin de s'assurer que seules les ondes sortantes existent nous imposerons aux solutions de (129) et (130) les conditions de rayonnement de Sommerfeld :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} &= O(r^{-1}) \quad , \quad \varphi_{\alpha\beta,\gamma} = i_{\alpha\beta}k_\gamma + O(r^{-2}) \\ i_{\alpha\beta} &= O(r^{-1}) \quad , \quad k_\alpha = \partial_\alpha u \quad , \quad u = t - r \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

r étant la distance d'un point P (loin des sources) au centre de la trajectoire des 2 particules.

Nous avons vu que les équations (129) et (130) sont invariantes dans la transformation de jauge (131) si a_μ est solution retardée de l'équation d'ondes $\Box a_\mu = 0$. On peut alors écrire :

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha,\beta\gamma} &= c_\alpha k_\beta k_\gamma + O(r^{-2}) \\ c_\alpha &= O(r^{-1}) \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

et la transformation de jauge (131) impose :

$$i_{\alpha\beta} \to \overset{*}{i}_{\alpha\beta} = i_{\alpha\beta} + c_\alpha k_\beta + c_\beta k_\alpha.$$

Le tenseur canonique $\theta_{\alpha\beta}$, qui n'est pas invariant de jauge, a une partie principale pour $r \to \infty$, que l'on peut écrire compte tenu de (130) et (135)

$$\left.\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} &= \gamma k_\alpha k_\beta + O(r^{-3}) \\ \lambda &= \frac{1}{\chi} i^{\alpha\beta}\left(i_{\alpha\beta} - \frac{k}{1+4k}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}i_{\gamma\delta}\right) = O(r^{-2}) \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

où λ est invariant de jauge et non négatif pour $k < -\frac{1}{3}$; $k > -\frac{1}{4}$, donc en particulier pour $k = -\frac{1}{2}$; $k = -\frac{3}{5}$.

Il en résulte que la puissance rayonnée totale calculée à partir du flux θ^{0k} — équivalent aux flux de $\tau^{0k}_{\text{métrique}}$ — à travers la surface d'une sphère infinie n'est pas négative et ne dépend pas de la jauge.

De plus, la condition de transversalité des ondes — qui implique (133) et donc l'équivalence $\theta^{0k} \sim \tau^{0k}_{\text{métrique}}$ — détermine les potentiels $\psi_{\mu\nu}$ de façon unique.

Après intégration de (121) pour des potentiels *transverses*, on trouve comme énergie totale rayonnée dans toutes les directions :

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1+4k}{1+3k}\frac{G}{90c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} \tag{138}$$

$$D_{ij} = \int m_i(3x_ix_j - \delta_{ij}(x^kx_k))dV.$$

Soit encore

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{128}{5}\frac{1+4k}{1+2k}\frac{GM^2}{2\rho}\beta^5\dot{\Phi} = \frac{32}{5}\frac{1+4k}{1+3k}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^5}{R^5}. \tag{139}$$

La variation d'énergie est une perte d'énergie pour le système si

$$k < -\frac{1}{3} \quad , \quad k > -\frac{1}{4}. \tag{140}$$

Remarque. — Pour $k = -\frac{1}{2}$, la perte d'énergie est :

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{128}{5}\frac{GM^2}{\rho}\beta^5\dot{\Phi} = \frac{64}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^5}{R^5}.$$

On retrouve le résultat (37) que nous avions obtenu, dans le cadre de la « fast approximation » à partir des conditions de transversalité, de rayonnement, de coordonnées analogues à celles que nous avons introduites ici.

Pour la valeur $k = -\frac{3}{5}$ — valeur qui nous permet de rendre compte des « effets expérimentaux » — nous trouvons aussi une perte d'énergie donnée par

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{112}{5}\frac{GM^2}{\rho}\left(\frac{\rho\dot{\Phi}}{c}\right)^5\dot{\Phi} = \frac{56}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^5}{R^5}. \tag{141}$$

CONCLUSION

Loin des sources, en adoptant une condition d'isothermie, et en supposant la transversalité des ondes, nous pouvons pour l'étude de l'énergie rayonnée faire intervenir indifféremment la composante θ^{0k}_{can} du tenseur canonique ou la composante $\tau^{0k}_{\text{mét}}$ du tenseur métrique dans cette théorie minkowskienne de la Gravitation. De plus, la transversalité des ondes nous permet une détermination unique des potentiels à l'infini. Les conditions de rayonnement de Sommerfeld, dans la zone d'ondes, permettent alors de rendre la partie principale de l'énergie-impulsion, à l'infini invariante et non négative. Cette exigence conduit à une perte d'énergie par rayonnement gravitationnel dans le problème particulier des 2-corps.

En première partie, nous avions montré, que ce même ensemble de conditions — conditions de coordonnées, transversalité des potentiels, condition de rayonnement — utilisé en Relativité Générale, dans la méthode d'approximation à vitesses rapides, conduit aux mêmes conclusions. La perte d'énergie est identique à celle obtenue à l'aide du pseudo-tenseur d'Einstein, mais la méthode d'approximation est plus satisfaisante. Elle est identique aussi à celles obtenues à partir des différents complexes d'énergie, impulsion gravitationnelle proposés par différents auteurs.

Mais ces résultats, dans chacune des théories, ne sont pas en bon accord avec ceux qui résultent de l'étude effectuée près des sources. Pourtant, la méthode utilisée en électromagnétisme permet un calcul correct près et loin des sources. Il faut cependant remarquer que, dans le cas de la théorie minkowskienne de la gravitation, *les équations de mouvement ne sont pas invariantes de jauge* : ne pouvant supposer une condition d'isothermie en présence de sources, il semble difficile d'attacher un sens à l'énergie mécanique définie sur les tubes d'Univers.

Nous concluons que si l'étude effectuée dans la zone d'ondes, loin des sources, aussi bien en Relativité Générale qu'en théorie minkowskienne, conduit à un résultat satisfaisant, l'étude près des sources reste à faire. Peut-être que aussi le champ gravitationnel ne devrait pas être envisagé seul sur les lignes d'Univers des particules : il faudrait faire intervenir aussi le champ mésique et le champ électromagnétique, il faudrait envisager une théorie du champ *total.*

Je voudrais exprimer à Mlle S. Mavridès — Maître de Recherche au C. N. R. S. — ma profonde gratitude pour toute l'attention, la patience, la bienveillance qu'elle m'a témoignées tout au long de l'élaboration de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] P. Havas et J. N. Goldberg, *Phys. Rev.*, t. **128**, n° 1, 1962, p. 398.
[2] P. Havas et S. F. Smith, *Phys, Rev.*, t. **138-2B**, 1965, p. 495.
S. F. Smith, Thèse Lehigh. University, 1960.
[3] A. Einstein, *Sitzber. preuss. Akad. Wiss.*, 1916, p. 688.

[*4*] H. J. Bhabha, Harish Chandra, *Proc Soc. Roy.* (London), t. A **185**, 1946, p. 250. Harish Chandra, *Proc. Roy. Soc.* (London), t. A **185**, 1946, p. 269.
[*5*] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, *Ann. Math.*, t. **39**, 1938, p. 66-100.
[*6*] V. A. Fock, *J. Phys. Acad. U. R. S. S.*, t. **1**, 1939, p. 81-116.
[*7*] A. Papapetrou, *Proc. Phys. Soc.*, t. A **64**, 1951, p. 57 et 302.
[*8*] Petrova, *J. Phys. Ext. et Théo. Akad. Math.*, t. **39**, 1938, p. 101.
[*9*] Pham Tan Hoang, Thèse, Paris, 1957.
[*10*] L. Infeld, *Phys. Rev.*, t. **53**, 1938, p. 836 ; *Ann. of Phys.*, t. **6**, 1959, p. 341.
[*11*] L. Infeld, A. E. Scheidegger, *Can. J. Math.*, t. **3**, 1951, p. 195. A. E. Scheidegger, *Phys. Rev.*, t. **999**, 1955, p. 1883.
[*12*] N. Hu, *Proc. Roy. Irish Acad.*, t. A **51**, 1947, p. 87.
[*13*] A. Pérès, *Nuovo Cimento*, t. **11**, 1959, p. 617 et 664; t. **13**, 1959, p. 437; t. **15**, 1960, p. 36.
[*14*] A. Trautman, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, t. **6**, 1958, p. 627.
[*15*] H. N. Goldberg, *Phys. Rev.*, t. **99**, 1955, p. 1873.
[*16*] M. Mathisson, *Acta Phys. Polon.*, t. **6**, 1937, p. 163.
[*17*] E. Von Schmütser, *Ann. de Phys.*, t. **7**, 1966, p. 17 et 107.
[*18*] G. Roemhild, Thèse Lehigh. University, 1965.
[*19*] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London), t. A **167**, 1938, p. 148.
[*20*] C. Cattaneo, *Conservation laws*. Int. Conf. Rel. Th., London, 1965.
[*21*] A. Trautman, *Gravitation*, p. 184. Witten (J. Wiley, N. Y., 1962).
[*22*] A. Trautman, Conférences données au Collège de France, 1963.
[*23*] J. N. Goldberg, *Gravitation*, p. 102. Witten (J. Wiley, N. Y., 1962).
[*24*] A. Lichnerowicz, *C. R. Acad. Sc.*, t. **246**, 1958, p. 893.
[*25*] M. Poyet, Thèse 3e cycle, Paris, 1963.
[*26*] A. Capella, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **260**, 1965, p. 1341.
[*27*] M. Moshinsky, *Phys. Rev.*, t. **80**, 1950, p. 514.
[*28*] S. Mavridès, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **261**, 1965, p. 3549.
[*29*] L. Page, Li. Adams, *Electrodynamics* (D. Van Nostrand, 1940), chap. 4.
[*30*] M. Signore-Poyet, *C. R. Acad. Sc.*, t. **264**, 1967, p. 829.
[*31*] W. Tulczyjew, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, CI, III, t. **5** 1957, p. 279.
[*32*] A. Trautman, *Lecture on General Relativity*, Brandeis Summer Institute, 1964.
[*33*] A. J. Eddington, *The mathematical theory of relativity*, Cambridge, 1962.
[*34*] W. Thirring, *Ann. Physics*, t. **16**, 1961, p. 96.
[*35*] S. Lederer, M. A. Tonnelat, *Nuovo Cimento*, t. **34**, 1964, p. 833.
[*36*] S. N. Gupta, *Rev. Mod. Phys.*, t. **29**, n° 3, 1957, p. 334.

Manuscrit reçu le 5 mai 1969.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1649*a* IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5895. 10-1969.