ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. LE DENMAT

Contribution à l'étude des solutions radiatives approchées des équations d'Einstein à partir d'une base non minkowskienne

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, nº 4 (1969), p. 445-464

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_4_445_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. X, n° 4, 1969, p. 445-464. *Physique théorique.*

Contribution à l'étude des solutions radiatives approchées des équations d'Einstein à partir d'une base non minkowskienne

par

G. LE DENMAT
Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.,
Institut Henri Poincaré, Paris

SUMMARY. — Approximated radiative solutions of Einstein's equations are examinated with metrics the form of which point out $\frac{\text{oscillatory}}{r}$ terms as deviations of the metric tensor from a non-minkowskian background $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$. When this investigation is based on metrics defined modulo a transformation of the conformal group, we examine the case where $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$ is conformally flat; a physical interpretation of this situation is proposed according to the C-equivalence Principe.

NOTATIONS

Indice grec = 0, 1, 2, 3.
Indice latin = 1, 2, 3.
$S_{\mu\nu}$, tenseur d'Einstein.
Diag. $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.
La dérivation ordinaire est indiquée par une virgule.
La dérivation covariante est indiquée par ∇, $\overline{\nabla}$, ou $\underset{0}{\nabla}$ suivant que la métrique est, respectivement, $g_{\mu\nu}$, $\bar{g}_{\mu\nu}$ ou $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$.

∇^2 : laplacien relatif à la métrique tridimensionnelle g_{ij}.
$\overline{\nabla}^2$: laplacien relatif à la métrique tridimensionnelle $\overline{g}_{ij}$.
$\underset{0}{\nabla^2}$: laplacien relatif à la métrique tridimensionnelle $\underset{0}{g_{ij}}$.
∇^2_M : laplacien relatif à la métrique tridimensionnelle η_{ij}.
Toute quantité et tout symbole relatifs à la métrique $\overline{g}_{\mu\nu}$ sont surlignés.
Toute quantité et tout symbole relatifs à la métrique $\underset{0}{g_{\mu\nu}}$ portent l'indice 0.
K_{ij}, seconde forme fondamentale des hypersurfaces $x^0 = \text{const.}$; g_{ij} est la métrique interne d'une telle hypersurface et $K_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij,0}$ ($K_{0i} = 0$).
$f(r) = 0\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$: il existe une constante A telle que, pour r assez grand, on ait $|f(r)| < \frac{A}{r^\alpha}$ pour t quelconque ($\alpha \geqslant 0$).
$f(r) \sim 0\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$: α est la plus grande valeur de λ telle que $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\lambda} |f(r)|$ reste plus petite que l'infini.
$\frac{\text{oscillatoire}}{r^\alpha}$ désigne des fonctions, telle $f(r) = \frac{\sin kr}{r^\alpha}$, dont les intégrales et les dérivées successives sont du même ordre en $\frac{1}{r}$ que la fonction elle-même.

INTRODUCTION

L'étude des solutions radiatives approchées des équations d'Einstein $S_{\mu\nu} = 0$ se fait habituellement sous les hypothèses d'un champ gravitationnel faible et d'un comportement euclidien à l'infini de l'espace-temps; cette étude est fondée sur les analogies avec les théories de type linéaire, telle la théorie électromagnétique.

L'approximation linéaire et les approximations d'ordre supérieur sont étudiées à partir de développements asymptotiques soit des composantes du tenseur de courbure, soit des composantes du tenseur métrique; dans ce dernier cas, on utilise des développements suivant $\frac{1}{r}$ où r est une distance de type spatial. Lorsqu'on introduit les hypothèses, directement issues de l'analogie électromagnétique, $h_{\mu\nu}$ en $\frac{1}{r}$ et $h_{\mu\nu,\rho}$ en $\frac{1}{r}$ également, les développements usuels de la métrique sont de la forme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ mettant en évidence les écarts $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ de la métrique par rapport à la base minkowskienne.

Les résultats obtenus laissent subsister certaines difficultés d'interprétation, principalement lorsqu'on examine le comportement asymptotique des solutions radiatives dans une direction du genre espace. C'est ainsi que l'équation $S_{00} = 0$, écrite sur une hypersurface du genre espace $x^0 =$ constante, fait apparaître dans la métrique des termes en $\frac{\ln r}{r}$ dont l'interprétation demeure peu convaincante. Il peut être intéressant d'examiner brièvement dans quelle mesure une partie de ces difficultés provient des conceptions linéaires plus ou moins explicites dans les méthodes employées (première partie).

Dans la deuxième partie, la recherche d'une solution radiative approchée des équations $S_{\mu\nu} = 0$ sur un domaine non borné est entreprise en postulant l'existence de métriques dont la forme met en évidence des termes du type $\frac{\text{oscillatoire}}{r}$ représentant les écarts de la métrique complète par rapport à une métrique de base $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$ *a priori* non minkowskienne.

On est alors conduit (troisième partie) à postuler le caractère conformément plat de cette métrique de base $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$. L'interprétation physique de cette hypothèse est envisagée dans le cadre du principe de la C-équivalence tel qu'il a été formulé par S. Kichenassamy. Dans ce but, il a paru possible de considérer les métriques de la forme $g_{\mu\nu} = \Phi^{-4}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, définies modulo une transformation du groupe conforme et de ramener le problème posé à la détermination du facteur conforme $\Phi(r)$ dans le cas du champ gravitationnel en $\frac{1}{r}$ jusqu'à l'infini spatial.

La quatrième partie propose une interprétation des résultats obtenus, en conformité avec la C-équivalence.

1. RAPPEL SUR LES MÉTHODES USUELLES

L'étude du champ gravitationnel radiatif, dans le cas d'une distribution énergétique isolée ($T_{\mu\nu} = 0$ à l'extérieur d'un tube d'univers spatialement borné), s'effectue généralement sous les hypothèses suivantes (Cf. Einstein, Fock, Trautmann, Deser, Arnowitt, Misner...).

a) CHAMP FAIBLE

Il existe des systèmes de coordonnées correspondant à la métrique

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1-1}$$

où $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$, habituellement $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$.

b) CONDITIONS AUX LIMITES

Les hypothèses physiques admises (espace asymptotiquement plat, analogie EM, propagation d'ondes exclusivement sortantes...) suggèrent de compléter (1-1) par des conditions sur le comportement du champ aux limites, par exemple

$$h_{\mu\nu,\rho} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1-2}$$

ou encore, en prenant des conditions généralisant la condition de radiation de Sommerfeld (ce qui correspond à l'hypothèse des ondes sortantes) [*14*],

$$g_{\mu\nu,\rho} = l_{\mu\nu}k_\rho + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

où $l_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$, $k_\rho = u_{,\rho}$, u temps retardé, r « distance-luminosité » définie par $\nabla_\rho(r^{-2}k^\rho) = 0$.

c) CONDITIONS DE COORDONNÉES

En l'absence de coordonnées privilégiées, on réduit l'ensemble des systèmes de coordonnées permis à l'ensemble de ceux satisfaisant aux conditions de coordonnées, lesquelles détruisent la covariance générale (*i. e.* apportent des restrictions sur la façon dont sont disposées, dans V_4, les hypersurfaces x^0 = const.). Ces conditions n'entraînent, contrairement aux précédentes, aucune restriction sur les propriétés physiques de l'espace-temps et jouent un rôle assez semblable aux conditions de jauge de l'Électromagnétisme. Précisément l'analogie EM conduit souvent à poser ces conditions sous la forme de conditions d'harmonicité ou d'harmonicité asymptotique [*14*] telles que

$$\left(l_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}l_{\rho\sigma}\right)k^\nu = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{1-3}$$

Le plus souvent l'ensemble des conditions ci-dessus énoncées sont discutées concurremment. Compte tenu de la façon dont elles sont ici présentées, il convient d'examiner la compatibilité de (1-1), (1-2) et (1-3).

On sait que le champ gravitationnel sur une hypersurface du genre espace plongée dans V_4 est déterminé par les composantes purement spatiales g_{ij} de la métrique de V_4 et par la seconde forme fondamentale K_{ij}. Si l'on écrit alors l'équation $S_{00} = 0$ sur une hypersurface σ, x^0 = const. ($S_{00} = 0$ quel que soit x^0, le système des équations d'Einstein étant en involution), elle prend la forme connue [*15*] [*16*].

$$^3\mathrm{R} = \mathrm{K}^2 - \mathrm{K}_{ij}\mathrm{K}^{ij} \tag{1-4}$$

où $\mathrm{K} = \mathrm{K}_i^i$ et $^3\mathrm{R} = {}^3g^{ij}\,{}^3\mathrm{R}_{ij}$ est la courbure scalaire de σ ($^3g^{ij}$, inverse de g_{ij} relativement à g_{ij}; dans toute la suite on le notera $\underline{g}^{ij}$).

En explicitant $^3\mathrm{R}$ en fonction des Γ^h_{ij} et de leurs dérivées premières et en tenant compte des conditions (1-1), (1-2), (1-3), un calcul simple permet de mettre l'équation (1-4) sous la forme

$$-\frac{1}{2}\,\nabla^2_{\mathrm{M}}h = \mathrm{D}^h{}_{,h} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) + 0\left(\frac{1}{r^{3+\beta_n}}\right) \tag{1-5}$$

où $\beta_n \geqslant 1$.

La résolution de (1-5), équation du type Poisson, montre que, pour r tendant vers l'infini, le terme en divergence $\left(\text{où } \mathrm{D}^h = \underline{g}^{ij}\Gamma^l_{ij} \sim 0\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$ fournit bien une contribution en $\frac{1}{r}$; il en est de même pour les termes en $0\left(\frac{1}{r^{3+\beta_n}}\right)$. Par contre, les termes cubiques sont responsables d'une contribution en $\frac{\ln r}{r}$, en contradiction avec (1-1).

Par suite, les équations d'Einstein ne possèdent pas, sur un domaine spatialement non borné, de solutions radiatives compatibles avec $\mathrm{S}_{00} = 0$ sous les conditions (1-1), (1-2) et (1-3) qui, considérées dans leur ensemble, se révèlent donc inadéquates sur un tel domaine.

On peut alors envisager de modifier certaines de ces conditions.

Le théorème du front d'onde.

Une modification de ces conditions a été proposée par Arnowitt, Deser et Misner dans leur « théorème du front d'onde » [*2*], [*3*], [*5*], [*12*]. La condition (1-1) est conservée, tandis que les conditions aux limites et les conditions de coordonnées sont discutées conjointement. Selon ce qui précède, pour que h reste en $\frac{1}{r}$ quand r tend vers l'infini, il apparaît que le comportement en $\frac{1}{r}$ de $h_{ij,\nu}$ ne peut être maintenu jusqu'à l'infini spatial quand la partie droite $\rho(r)$ de l'équation (1-6) est définie positive. Si $\rho(r)$ est asymptotiquement positive, c'est-à-dire si $\rho(r) > 0$ pour $r > R$, où R est aussi grand que l'on veut mais fini, le comportement de $h_{ij,\nu}$ peut être en $\frac{1}{r}$ pour $r \leqslant R$ et doit être modifié, donc perdre son caractère radiatif, pour $r > R$. En d'autres termes, on est conduit à envisager l'existence d'un rayon R variable au-delà duquel les composantes de la métrique qui décrivent la radiation tendent vers zéro plus vite que $\frac{1}{r}$. Physiquement, cela signifie que l'on impose aux solutions compatibles avec $S_{00} = 0$ sur un domaine non borné la condition d'un *front d'onde* limitant la zone d'onde, quand on suit une direction du genre espace, et garantissant ainsi que l'énergie gravitationnelle dans la zone d'onde est finie.

Mathématiquement, ce point de vue exige de nouvelles conditions de coordonnées capables d'assurer la convergence des intégrales dans la région asymptotique (R, ∞) lors de la résolution de l'équation (1-5). De telles conditions ont été établies sous la forme du théorème du front d'onde :

Dans un espace asymptotiquement plat où $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$, *il existe toujours des coordonnées* $\{ x^{\nu} \}$ *préservant cette condition asymptotique telles que, sur chaque hypersurface* $x^0 = \text{const.}$, *on ait, pour r tendant vers l'infini,*

$$h_{ij,k} \sim 0\left(\frac{1}{r^{3/2+\varepsilon}}\right)$$

$$\Pi^{ij} \sim 0\left(\frac{1}{r^{3/2+\varepsilon'}}\right) \qquad \varepsilon, \varepsilon' > 0$$

où

$$\Pi^{ij} = -\sqrt{|g|}\,(K^{ij} - \underline{g}^{ij}K).$$

En outre, dans tout repère défini par une transformation de coordonnées de la forme $x'^{\nu} = x^{\nu} + \xi^{\nu}(x)$, *avec* $\xi^{\nu}_{,\mu} \sim 0\left(\frac{1}{r^{\alpha}}\right)$ *où* $\alpha \geqslant 1$ *et* $\lim_{r\to\infty} r^{-\lambda}\xi^{\nu} = 0$ *où* $\lambda > 0$ *pour* $\mu = i$ *et* $\lambda \geqslant 0$ *pour* $\mu = 0$, *on a*

$$\overset{tt}{h}_{ij,k} \sim 0\left(\frac{1}{r^{3/2+\varepsilon}}\right)$$

$$\overset{tt}{\Pi}{}^{ij} \sim 0\left(\frac{1}{r^{3/2+\varepsilon}}\right) \qquad \varepsilon > 0$$

Selon l'analyse liée au formalisme canonique [1], ces termes $h^{tt}_{ij,k}$ et $\overset{tt}{\Pi}{}^{ij}$ (parties transverses à trace nulle) décrivent précisément la radiation gravitationnelle. La partie longitudinale de h_{ij} et la partie transverse $\overset{t}{\Pi}{}^{ij}$ de Π^{ij} peuvent rester en $\frac{1}{r}$ quand r tend vers l'infini; elles décrivent des « ondes de coordonnées ».

En conclusion, « l'existence du *front d'onde* signifie que l'on a toujours à faire à des systèmes gravitationnels isolés, même s'ils rayonnent. On peut toujours se placer à l'infini spatial et examiner de tels systèmes à partir de l'extérieur, c'est-à-dire à partir de l'espace plat, par rapport auquel ne se manifeste aucun effet non-Newtonien tel que la production d'ondes gravitationnelles » (The wave front theorem, chap. Ier).

Nous avons donné un bref aperçu sur des méthodes directement inspirées par l'analogie électromagnétique, et sur les tentatives faites pour lever certaines difficultés relatives au comportement asymptotique des solutions radiatives compatibles avec l'équation $S_{00} = 0$. Spécifiquement, ces recherches visent les solutions pour lesquelles la métrique et ses dérivées ne tendent asymptotiquement vers leurs valeurs minkowskiennes pas plus vite que $\frac{1}{r}$ dans une direction du genre espace. Comme telles ces recherches concernent les métriques de la forme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, avec $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$. Notons que le choix de $h_{\mu\nu}$ en $\frac{1}{r}$ n'assure une énergie finie quand r tend vers l'infini, que si l'on entend « énergie » au sens linéaire du terme, quelle que soit l'approximation considérée.

Par ailleurs, cette forme des $g_{\mu\nu}$ entraîne, lorsqu'on explicite l'équation $S_{00} = 0$, l'apparition du laplacien ordinaire (partie gauche de l'équation (1-5)). Ce laplacien opère sur le potentiel; si l'on veut garder son sens physique à cette équation, il convient par conséquent d'interpréter sa partie droite comme une densité d'énergie gravitationnelle. On résout

---

[1] Les auteurs cités utilisent la décomposition orthogonale d'un tenseur symétrique t_{ij} (six composantes indépendantes) en termes de coordonnées cartésiennes : $t_{ij} = t^{\mathrm{T}}_{ij} + t^{\mathrm{L}}_{ij}$ avec $t^{\mathrm{T}}_{ij,j} = 0$ et $t^{\mathrm{L}}_{ij} = t_{i,j} + t_{j,i}$; dans la partie transverse t^{T}_{ij}, la partie à trace nulle est mise en évidence par $t^{\mathrm{T}}_{ij} = t^{tt}_{ij} + t^{t}_{ij}$, avec $t^{tt}_{ij,j} = 0$ et $t^{tt}_{ii} = 0$ et $t^{t}_{ij,j} = 0$.

ainsi l'équation $S_{00} = 0$, sous sa forme (1-5), relativement à la métrique η_{ij} (présence du laplacien ordinaire) et non relativement à g_{ij}, bien que la densité d'énergie gravitationnelle ne soit pas strictement égale à zéro. L'emploi de la métrique minkowskienne en présence d'un champ gravitationnel non nul nous écarte de l'un des traits spécifiques de la Relativité Générale, à savoir que la métrique est variable en chaque point de l'espace-temps.

En tout état de cause, le problème présent fournit des motifs particuliers d'examiner la validité de l'approximation faite, $g_{ij} \sim \eta_{ij}$. En effet si, dans le cadre de la théorie complète, on étudie le champ gravitationnel radiatif et son comportement asymptotique, il faut tenir compte de ses effets linéaires et *non linéaires*, tout à la fois.

Lorsqu'on fait l'approximation $g_{ij} \sim \eta_{ij}$, cela entraîne que, pour r assez grand, on néglige la contribution de « l'énergie gravitationnelle » à la métrique, et, partant, les effets non linéaires. Or les équations de champ, en particulier l'équation $S_{00} = 0$, montrent que la contribution de ces effets est, asymptotiquement, plus importante que celle des effets linéaires. Donc, dans le cas du champ gravitationnel radiatif en $\frac{1}{r}$ jusqu'à l'infini spatial, l'approximation considérée paraît difficilement recevable; en fait, elle semble restreindre le problème, dès que r est assez grand, à l'étude d'un champ linéaire $h_{\mu\nu}$ dans un espace euclidien.

Il ressort de ce qui précède que les conditions (1-1) nous maintiennent dans une perspective linéaire. Elles traduisent, certes, les hypothèses initiales d'un espace asymptotiquement plat, mais il faut remarquer que, eu égard aux caractéristiques non linéaires du champ gravitationnel, un espace plat à l'infini est simplement tel que son tenseur de courbure satisfait la relation $[R_{\alpha\beta\gamma\delta}]_\infty = 0$. Il demeure donc possible d'envisager la modification des conditions (1-1).

2. INTRODUCTION D'UNE MÉTRIQUE DE BASE NON MINKOWSKIENNE

Si, selon les conditions (1-1) et (1-2), on a à la fois $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$ et $h_{\mu\nu,\rho} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$, il est clair que les $h_{\mu\nu}$ contiennent nécessairement des termes du type $\frac{\text{oscillatoire}}{r}$, mais peuvent également contenir des termes du type

$\dfrac{\text{oscillatoire}}{r^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ et du type $\dfrac{\text{non oscillatoire}}{r^\beta}$ $(\beta \geqslant 1)$. Seuls les termes $h^*_{\mu\nu} = \dfrac{\text{oscillatoire}}{r}$ présentent le comportement caractéristique des termes radiatifs. Ils se manifestent par rapport à une base qui, de toute évidence, n'est pas nécessairement minkowskienne mais plus généralement asymptotiquement minkowskienne.

Désignant cette métrique de base par $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$, on peut, sans présumer de sa forme, la définir par

$$g_{\mu\nu} - h^*_{\mu\nu} \overset{\text{déf}}{=} \underset{0}{g}_{\mu\nu} \tag{2-1}$$

La condition (1-1) se présente comme un cas particulier de (2-1); elle suppose que l'on se limite à l'emploi de développements de la métrique $g_{\mu\nu}$ analytiques en $\dfrac{1}{r}$. Or il est mathématiquement possible que les développements de $g_{\mu\nu}$ comportent aussi des termes, préservant la condition $g_{\mu\nu,\rho} \sim 0\left(\dfrac{1}{r}\right)$, non analytiques en $\dfrac{1}{r}$, termes qu'il n'y a pas de raison physique d'écarter *a priori.*

On se propose de substituer à la condition usuelle (1-1) la nouvelle condition (2-1) où $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$ est seulement supposée de type hyperbolique normal et suffisamment différentiable; son inverse $\underset{0}{g}^{\mu\nu}$ est défini par $\underset{0}{g}^{\mu\nu}\underset{0}{g}_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\sigma$.

L'introduction de cette métrique de base $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$ permet d'écrire les $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sous la forme

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \underset{0}{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + t^\alpha{}_{\beta\gamma}$$

où $t^\alpha_{\beta\gamma}$ est un tenseur symétrique qui se comporte asymptotiquement comme $h^*_{\mu\nu}$, puis de définir le tenseur de courbure

$$\mathrm{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \underset{0}{\mathrm{R}}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + l^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$$

Par suite, les équations $\mathrm{R}_{\mu\nu} = 0$ s'écrivent $\underset{0}{\mathrm{R}}_{\mu\nu} = - l_{\mu\nu}$, où $l^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ s'exprime à l'aide des $t^\alpha{}_{\beta\gamma}$ et de ses dérivées covariantes relativement à $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$. Par là se trouve posé le problème de la détermination des $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$; en d'autres termes (et c'est l'aspect que nous retiendrons), il convient de résoudre les équations de champ relativement à la métrique $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$. En particulier, les opérateurs utilisés dans les calculs (qui, ici, ne concerneront que la contrainte $S_{00} = 0$) devront, en toute rigueur, être définis relativement à $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$.

L'hypothèse d'une métrique de base non minkowskienne doit être maintenant confrontée avec le problème de la recherche d'une solution radiative approchée des équations d'Einstein telle que son comportement asymptotique soit compatible avec l'équation de contrainte $S_{00} = 0$ sur un domaine spatialement non borné. Nous nous limitons, dans cette partie, à dégager les aspects essentiels d'une telle étude.

Les considérations précédentes permettent de reformuler les hypothèses initiales *a)*, *b)*, *c)* de la partie 1 de la façon suivante :

a')
$$g_{\mu\nu} = \underset{0}{g}_{\mu\nu} + h^*_{\mu\nu}$$

avec
$$h^*_{\mu\nu} = \frac{\text{oscillatoire}}{r} \qquad \text{et} \qquad [\underset{0}{g}_{\mu\nu}]_\infty = \eta_{\mu\nu}$$

b')
$$g_{\mu\nu,\rho} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$$

c')
$$\Gamma^\rho = g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Remarquons qu'en *b')* et *c')* on se borne à reprendre les conditions (1-2) et (1-3); l'intérêt de *c')* n'est, ici, que de simplifier notablement les calculs.

Sous ces hypothèses, l'équation $S_{00} = 0$, écrite sur une hypersurface du genre espace $x^0 = \text{const.}$, prend la forme ${}^3\mathrm{R} \sim 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Puisque l'on s'intéresse essentiellement au comportement asymptotique des $g_{\mu\nu}$, on ne restreindra pas la généralité du problème en prenant, pour les dérivées par rapport au temps des composantes spatiales g_{ij} des $g_{\mu\nu}$, une condition légèrement plus forte que *b')*, à savoir $g_{ij,0} = 0\left(\frac{1}{r}\right)$. Ceci permet d'écrire $S_{00} = 0$ sous la forme

$${}^3\mathrm{R} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{2-2}$$

Après avoir explicité la courbure scalaire de l'hypersurface $x^0 = \text{const.}$ sous la forme

$${}^3\mathrm{R} = -\Gamma^{ik}_{ik,} + \frac{1}{4}\underline{g}^{ij,k}g_{ij,k} - \frac{1}{2}\underline{g}^{ij,k}g_{jk,i} + \mathrm{D}^h{}_{,h} + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

avec $\underset{=}{g}^{ij}$, inverse de g_{ij} relativement à g_{ij} et $D^h \sim 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$; on obtient pour (2-2), l'équation

$$-\frac{1}{2}\underset{0}{\nabla}^2 f = t^i{}_{ik,}{}^k - D^h{}_{,h} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{2}\underset{0}{g}_{hk}(\Gamma^h_{ij}\underset{0}{g}^{ij,k} - \Gamma^i_{ij}\underset{0}{g}^{hk,j})$$

où l'on a posé

$$^3\underset{0}{g} = \text{dét}\,\{\underset{0}{g}_{ij}\} \qquad \text{et} \qquad f = \ln|\,^3\underset{0}{g}\,|.$$

Désignons par $M(\underset{0}{g}_{pq}, \underset{0}{g}^{pq,s})$ le dernier terme de l'équation précédente (partie droite); nous considérons cette équation écrite modulo $M(\underset{0}{g}_{pq}, \underset{0}{g}^{pq,s})$ et résolvons donc, en première approximation,

$$-\frac{1}{2}\underset{0}{\nabla}^2 f = t^i{}_{ik,}{}^k - D^h{}_{,h} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{2-3}$$

Ce qui donne

$$f = f_0 + \int \underset{0}{G}(r, r')\rho(r')\sqrt{|\,^3\underset{0}{g}\,|}\,dv'$$

où $f_0 =$ const. et où $\rho(r)$ désigne la partie droite de (2-3), $\underset{0}{G}(r, r')$ étant la fonction de Green associée à l'opérateur $\underset{0}{\nabla}^2$.

On aura une estimation convenable du comportement maximal de f en remplaçant $\underset{0}{G}(r, r')$ par la fonction de Green minkowskienne, dont elle diffère peu pour r assez grand [*1*].

Dans ces conditions, nous avons obtenu

$$|\,^3\underset{0}{g}\,| \leqslant k_0 \exp\left(1 + k_1\frac{\ln r}{r} + \frac{k_2}{r}\right) \tag{2-4}$$

avec $k_i =$ const.

Du fait des hypothèses simplificatrices introduites, l'étude précédente doit être considérée comme une tentative en vue de dégager certains traits caractéristiques du comportement asymptotique possible des $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$. Il resterait entre autres, à évaluer le comportement asymptotique du terme $M(\underset{0}{g}_{pq}, \underset{0}{g}^{pq,s})$ et de préciser sa contribution dans la solution de l'équation (2-2). Toutefois, muni dès lors des indications fournies par (2-4), il paraît opportun d'examiner le cas où la métrique de base non minkowskienne est conformément plate, cas dont l'interprétation physique semble acceptable (intégrant, en particulier, la présence des termes en $\left.\frac{\ln r}{r}\right)$.

3. EMPLOI DE MÉTRIQUES DÉFINIES MODULO UNE TRANSFORMATION DU GROUPE CONFORME

Nous référant à (2-4), il est possible de postuler l'existence d'une métrique de base $\underset{0}{g_{\mu\nu}}$, non minkowskienne, par

$$g_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} = \underset{0}{g_{\mu\nu}} \tag{3-1}$$

sans avoir à distinguer, dans $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$, partie oscillatoire et partie non oscillatoire, distinction qui était *a priori* nécessaire pour autant que l'on ne pouvait prévoir la présence du terme en $\frac{\ln r}{r}$.

On sait que dans les conditions usuelles (1-1), la métrique fondée sur les développements asymptotiques en $\frac{1}{r}$ est définie modulo une transformation de Lorentz avec la condition $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$. Dans les nouvelles conditions (3-1), on supposera $\underset{0}{g_{\mu\nu}}$ conformément plate, $\underset{0}{g_{\mu\nu}} = \Phi^{-4}\eta_{\mu\nu}$ et la métrique complète $g_{\mu\nu}$ sera caractérisée à partir de la proposition suivante :

Si $\{ x_0^\nu \}$ *est un système de coordonnées défini sur un domaine* D *non nécessairement borné et correspondant à la métrique* $\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$ *où* $\bar{h}_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$, *l'ensemble des systèmes de coordonnées admissibles* $\{ x_n^\nu \}$ *sur* D *est l'ensemble des systèmes de coordonnées correspondant aux métriques définies modulo une transformation du groupe conforme, préservant la condition* $h_{\mu\nu} \ll \Phi^{-4}\eta_{\mu\nu}$ (Φ, *facteur conforme*).

Ainsi, nous emploierons des métriques de la forme

$$g_{\mu\nu} = \Phi_{(r)}^{-4}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3-2}$$

On traite alors de l'équation $S_{00} = 0$ sous les hypothèses suivantes :

a'') $g_{\mu\nu}$ définie par (3-2) avec $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$ et $h_{\mu\nu} \ll \Phi_{(r)}^{-4}\eta_{\mu\nu}$, *b''*) $g_{\mu\nu,\rho} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$

c'') coordonnées asymptotiquement harmoniques (cf. *c'*) de la partie 2).

Concernant l'hypothèse *b''*), on constate que la détermination du facteur conforme doit préserver $g_{\mu\nu,\rho} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$. Dans le but de clarifier nos calculs, nous admettrons pour les composantes spatiales de la métrique, que

$$g_{ij,0} = 0\left(\frac{1}{r}\right).$$

Alors, sur l'hypersurface σ, $x^0 = \text{const.}$, l'équation $S_{00} = 0$ s'écrit, comme ci-dessus

$$^3R = 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

La métrique interne de σ,

$$g_{ij} = \Phi_{(r)}^{-4}\eta_{ij} + h_{ij},$$

peut s'écrire

$$g_{ij} = \Phi_{(r)}^{-4}(\eta_{ij} + \Phi_4^{(r)}h_{ij}) = \Phi_{(r)}^{-4}(\eta_{ij} + \lambda_{ij})$$

La courbure scalaire ^3R relative à g_{ij} et la courbure scalaire $^3\overline{R}$ relative à $\overline{g}_{ij} = \eta_{ij} + \lambda_{ij}$ sont liées par la relation connue [*4*]

$$^3R = \Phi^{-4}\,{}^3\overline{R} + 8\Phi^{-5}\overline{\nabla}^2\Phi$$

Il s'agit d'exprimer $^3\overline{R}$. On ne perd rien en généralité si l'on admet que le facteur Φ est défini à une constante près, et si on le recherche sous la forme $\Phi(r) = \Phi_0 + F(r)$, où $\Phi_0 = \text{const.}$, et où $F(r)$ tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Dans ces conditions λ_{ij} (respect. $\lambda_{ij,k}$) se comporte asymptotiquement comme h_{ij} (respect. $h_{ij,k}$). On trouve alors, pour $^3\overline{R}$, l'expression

$$^3\overline{R} = -\frac{1}{2}\nabla_M^2\lambda + D^h{}_{,h} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) + 0\left(\frac{1}{r^{3+\beta}}\right) \quad \text{avec} \quad \beta \geqslant 1$$

Finalement l'équation $S_{00} = 0$ s'écrit, sur σ,

$$-\frac{1}{2}\nabla_M^2\lambda + D^h{}_{,h} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) + 0\left(\frac{1}{r^{3+\beta}}\right) + 8\Phi^{-1}\overline{\nabla}^2\Phi = \Phi^4 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

On aura

$$\frac{1}{2}\nabla^2_{\mathrm{M}}\lambda = \mathrm{D}^h{}_{.h} + 0\left(\frac{1}{r^{3+\beta}}\right),$$

c'est-à-dire, conformément aux hypothèses,

$$\lambda \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$$

si

$$\overline{\nabla}^2\Phi = \Phi(r)\left(0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) + \Phi^5(r)0\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{3-3}$$

Cette équation permet de déterminer le comportement asymptotique du facteur Φ; le résultat obtenu (1) est

$$|\,\Phi(r)\,| \leqslant 1 + k\,\frac{\ln r}{r}, \qquad k = \text{const.} \tag{3-4}$$

Ce résultat ne fait pas apparaître de termes en $\frac{1}{r}$; ceci est en accord avec l'hypothèse $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$ où, ici, figurent à la fois partie oscillatoire et partie non oscillatoire.

Remarque. — Le résultat (3-4) permet de calculer $|\,{}^3\underset{0}{g}\,|$:

$$|\,{}^3\underset{0}{g}\,| \leqslant 1 + k\,\frac{\ln r}{r} + k'\left(\frac{\ln r}{r}\right)^2 + \ldots,$$

qui est à rapprocher de (2-4). Par ailleurs, avec $\underset{0}{g_{\mu\nu}} = \Phi^{-4}(r)\eta_{\mu\nu}$, on peut évaluer le terme $\mathrm{M}(\underset{0}{g_{pq}}, \underset{0}{g^{pq,s}})$ dans l'équation issue de (2-2); on constate que son comportement asymptotique apporte, dans la solution de cette équation, une contribution qui est précisément en $\left(\frac{\ln r}{r}\right)^2$.

4. INTERPRÉTATION DANS LE CADRE DE LA C-ÉQUIVALENCE

Les conclusions des parties précédentes 2 et 3 tendent à prouver que, dans l'étude des solutions radiatives compatibles avec l'équation de contrainte

(1) Voir Annexe.

$S_{00} = 0$, l'approximation initiale minkowskienne peut être utilement remplacée par une approximation non minkowskienne. La métrique minkowskienne $\eta_{\mu\nu}$ peut en particulier être remplacée par la métrique $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$ conformément plate, à savoir $\underset{0}{g}_{\mu\nu} = \Phi^{-4}(r)\eta_{\mu\nu}$, où $\Phi(r) \sim 1 + k\dfrac{\ln r}{r}$, de telle sorte que la métrique complète s'écrit $g_{\mu\nu} = \underset{0}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, avec $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\dfrac{1}{r}\right)$, quel que soit x^0, aussi loin que l'on aille vers l'infini spatial $\left(\dfrac{\ln r}{r}\right.$ tend vers zéro moins vite que $\dfrac{1}{r}$ quand r tend vers l'infini).

En vue de leur interprétation possible, ces conclusions appellent quelques remarques. On sait que dans les conditions usuelles (1-1), le choix de la base minkowskienne sous-entend, en conformité avec le Principe de l'Équivalence forte, que l'espace de base par rapport auquel se manifestent les écarts $h_{\mu\nu}$ de la métrique complète est rapporté à un système d'inertie. Si l'on maintient ce point de vue, il est clair que nos résultats font apparaître des écarts $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ en $\dfrac{\ln r}{r}$ et non plus seulement en $\dfrac{1}{r}$, ce qui implique que, sur un domaine non borné, l'énergie du cas linéaire serait infinie. On est ainsi conduit à l'hypothèse d'un espace de base muni d'une métrique non minkowskienne et qui, par suite, n'est plus rapporté à un système d'inertie.

Cette hypothèse peut être envisagée dans le cadre du Principe de la C-équivalence énoncé par S. Kichenassamy [9]. La C-équivalence exprime que la structure riemannienne et la Relativité Restreinte ne sont compatibles, localement, que de façon approchée. Elle met en évidence le fait qu'en un point A de la variété riemannienne V_4, l'identification de l'espace riemannien avec l'espace de Minkowski osculateur n'est justifiée que modulo des termes d'ordre supérieur à deux en dx^ν.

Désignons par

ds l'intervalle élémentaire correspondant à la métrique riemannienne, donc en présence de champ gravitationnel ($g_{\mu\nu}$, métrique riemannienne),

$d\tilde{s}$ l'intervalle élémentaire correspondant à la métrique minkowskienne, donc en l'absence de champ gravitationnel ($\tilde{g}_{\mu\nu}$, métrique minkowskienne).

On peut, par un changement de coordonnées, obtenir au point A l'égalité $(g_{\mu\nu})_A = \tilde{g}_{\mu\nu}$; mais, sur une région infiniment petite entourant A (dx^ν effectivement mesurables), ceci n'entraîne pas l'égalité stricte $ds_A^2 = \tilde{ds}^2$. En réalité, on a, de façon rigoureuse

$$ds_A^2 = \tilde{ds}^2 + \psi_3$$

où ψ_3 est au moins d'ordre 3 en dx^ν.

Pour tenir compte de ces termes ψ_3, la C-équivalence exprime que, lorsque les dx^ν ne sont pas infiniment petits, ds_A^2 et $\tilde{ds}^2$ sont proportionnels :

$$ds_A^2 = \Lambda_A^2 ds^2 \qquad (4\text{-}1)$$

où le facteur de proportionnalité Λ_A dépend du champ gravitationnel présent au point A.

En conséquence, si l'espace osculateur au point A de V_4 est assimilé à un système d'inertie (donc, est identifiable à l'espace de la Relativité Restreinte, $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), son identification sur une région infiniment petite avec l'espace riemannien ne peut se faire que si celui-ci est rapporté à un repère pseudo-inertial dont les étalons de longueur et de durée sont, de par la présence du champ gravitationnel, différents de ceux du système d'inertie. La relation (4-1) postule précisément que ces étalons sont proportionnels à ceux du système d'inertie.

L'interprétation physique d'un tenseur défini au point A est alors obtenue en considérant la métrique osculatrice en A à la métrique riemannienne comme conforme à la métrique $\eta_{\mu\nu}$:

$$(g_{\mu\nu})_A = \Lambda_A^2 \eta_{\mu\nu}$$

Le facteur Λ varie avec le point A et traduit la modification du comportement des appareils standard quand on passe d'un point de V_4 à un autre. Il apparaît donc lié à la jauge locale. Par ailleurs, puisqu'il peut exister une infinité de métriques osculatrices en A à la métrique riemannienne, ce facteur demeure indéterminé au point A, ce qui est physiquement satisfaisant eu égard au caractère arbitraire de la jauge locale. Il convient de remarquer que si sa valeur en un point A_0 est effectivement arbitraire, ses valeurs en d'autres points de V_4 dépendent du choix de sa valeur en A_0; on voit ainsi que la C-équivalence rend la jauge relative.

Nous plaçant dans l'optique de la C-équivalence, nous constatons, si l'on se réfère à (3-1), que les écarts $h_{\mu\nu}$ de la métrique complète $g_{\mu\nu}$ se manifestent par rapport à un espace de base muni d'une métrique $\underset{0}{ds^2} = \underset{0}{g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu$ variable en chaque point. Cet espace de base conserve donc un caractère riemannien. On peut l'identifier en un point à l'espace minkowskien osculateur; or, nous venons de voir que, sur une région infiniment petite entourant le point considéré, cette identification ne peut se faire en toute rigueur qu'en rapportant l'espace riemannien (ici l'espace de base) à un système de référence muni d'étalons différant, du fait du champ gravitationnel présent, de ceux d'un système d'inertie.

C'est précisément ce qu'exprime la relation trouvée en (3-4) qui permet d'écrire

$$\underset{0}{ds^2} = \Phi^{-4}(r)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \Phi^{-4}(r)d\tilde{s}^2$$

où $\Phi(r) \sim 1 + k\dfrac{\ln r}{r}$ traduit, lorsqu'un champ gravitationnel en $\dfrac{1}{r}$ est présent, la différence de comportement des appareils standard selon que l'on est en présence de ce champ $(\underset{0}{ds^2})$ ou en l'absence de ce champ $(d\tilde{s}^2)$, ainsi bien entendu que la modification de ce comportement suivant r.

En d'autres termes, les écarts $h_{\mu\nu} \sim 0\left(\dfrac{1}{r}\right)$ de la métrique $g_{\mu\nu} = \underset{0}{g_{\mu\nu}} + h_{\mu\nu}$ se manifestent par rapport à un espace de base dont la structure, loin des sources matérielles, est déterminée par la distribution d'énergie gravitationnelle rayonnée par le champ gravitationnel en $\dfrac{1}{r}$.

ANNEXE

L'équation (3-3) s'écrit

$$\overline{\nabla}^2 F = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) + F\left(0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) + F^2\left(0\left(\frac{1}{r^2}\right)\right) + \cdots$$

On procède par itérations :

$$\overline{\nabla}^2 F_0 = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{A-1}$$

$$\overline{\nabla}^2 F_1 = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right) + F_0\left(0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) + \cdots$$

Examinons $| F_1 - F_0 |$:

$$\overline{\nabla}^2 | F_1 - F_0 | = F_0\left(0\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) + \cdots$$

D'où

$$| F_1 - F_0 | = \int \overline{G}(r, r')\left[F_0(r')\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right) + \cdots\right]\sqrt{| g |}\, dv',$$

en désignant par $\overline{G}(r, r')$ la fonction de Green associée à l'opérateur $\overline{\nabla}^2$.

Posons $\overline{G}(r, r') = G_M(r, r') + a(r)b(r')$, où $a(r)$ et $b(r)$ sont définies et continues sur le domaine d'intégration. Il vient

$$| F_1 - F_0 | = \int G_M(r, r')\left[F_0(r')\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right) + \cdots\right]\sqrt{| g |}\, dv'$$
$$+ a(r)\int b(r')\left[F_0(r')\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right) + \cdots\right]\sqrt{| g |}\, dv'$$

On aura $| F_1 - F_0 | = 0$ et l'on pourra arrêter l'itération dès le premier tour, si

$$a(r) = - \frac{\int G_M(r, r')\left[F_0(r')\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right) + \cdots\right]\sqrt{| g |}\, dv'}{\int b(r')\left[F_0(r')\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right) + \cdots\right]\sqrt{| g |}\, dv'}$$

soit

$$a(r) \sim - \frac{\frac{1}{r}\int \left[F_0(r')\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right) + \cdots\right]\sqrt{| g |}\, dv'}{\int b(r')\left[F_0(r')\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right) + 0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right) + \cdots\right]\sqrt{| g |}\, dv'}$$

en ne retenant que la partie principale du numérateur.

Donc $a(r)$ se comporte asymptotiquement comme $0\left(\frac{1}{r}\right)$ pour $b(r) \sim 0(1)$. (Pour r grand, $\overline{G}(r, r')$ est proche de $G_M(r, r')$, ce qui impose, dans l'inégalité $| a(r) | < \frac{A}{r}$, que $A \ll 1$).

Dans ces conditions, on peut déterminer F_0 par la relation (A-1). La partie principale de $F_0(r)$ se comporte comme

$$\frac{1}{r}\int\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right)+0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right)\sqrt{|g|}\,dv' + 0\left(\frac{1}{r}\right)\int\left(0\left(\frac{1}{r'^2}\right)+0\left(\frac{1}{r'^3}\right)\right)\sqrt{|g|}\,dv'$$

Pour une fonction $h(r) \sim 0\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$ l'intégrale $\int 0\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)dv$ a le comportement asymptotique

$$I(r) \leqslant \int_{v_\infty} |h(r)|\,dv \leqslant A' \int_0^r \frac{1}{r^\alpha}\,dr$$

($A' = 4\pi A$ où A provient de $0\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$, cf. « Notations »).

Ici ($\alpha = 2, 3$), nous obtenons

$$|F_0(r)| \leqslant k' + k\frac{\ln r}{r} \qquad k, k' \text{ constantes.}$$

Finalement, en posant $\Phi_0 + k' = 1$, on obtient le résultat (1) annoncé (3-4).

---

(1) Les calculs qui précèdent s'inspirent d'une méthode itérative proposée par Guy, Salès, Brami et Joly [7] [8].

RÉFÉRENCES

[1] ARAKI, *Ann. Phys.*, t. **7**, 1959, p. 456.

[2] ARNOWITT, *Asymptotic coordinate conditions, wave front theorem.* Conférence Intern. de Varsovie, 1964.

[3] ARNOWITT, DESER et MISNER, *The dynamics of General Relativity.* Gravitation, L. Witten, 1962; *The wave front theorem,* chap. I *(preprint).*

[4] CHOQUET-BRUHAT, *The Cauchy problem.* Gravitation, L. Witten, 1962.

[5] DESER, Méthode canonique en Relativité Générale, 1965 (polycopié).

[6] FOCK, *The theory of space, time and gravitation,* 1959; Sur les équations de mouvement et les conditions pour les coordonnées. Colloque de Royaumont, 1959; Einsteinian statics in conformal space. *Recent developments in General Relativity,* Varsovie, 1962.

[7] GUY, SALÈS, BRAMI et JOLY, *C. R. Acad. Sc. Paris,* t. **265**, 1967, p. 109-111.

[8] GUY, SALÈS et JOLY, Sur une méthode itérative de résolution de certaines équations intégrales. *Journ. de Phys.*, t. **26**, 1965, p. 335-338.

[9] KICHENASSAMY, *Ann. Inst. Henri Poincaré,* A, vol. 1, nº 2, 1964; *Ann. Inst. Henri Poincaré,* A, vol. 4, nº 2, 1966; *C. R. Acad. Sc. Paris,* t. **263**, 1966, p. 705-707; Remarks on the present state of General Relativity. *Symposia on theoretical physics,* vol. 5, Plenum Press, 1967.

[10] LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en Relativité Générale. Inst. des Hautes Études Scientifiques, publ. mathém., nº 10, 1961.

[11] LICHNEROWICZ et FOURÈS-BRUHAT, Problèmes mathématiques en Relativité. *Recent developments in G. R.*, Varsovie, 1962.

[*12*] MISNER, *Waves, Newtonian fields and coordinate functions*. Conf. Intern. de Varsovie, 1964.
[*13*] TONNELAT, *Radiation gravitationnelle et mouvement des sources*. Paris, 1967.
[*14*] TRAUTMANN, *Bull. Acad. Polonaise des Sc.*, vol. 6, n° 6, 1958; *Conservation laws in G. R.* Gravitation, L. Witten, 1962.
[*15*] SACHS, *Gravitational radiation*. Relativity Groups and Topology, École d'été des Houches, 1963.
[*16*] SCHOUTEN, *Ricci Calculus*. Springer, Berlin, 1954.

Manuscrit reçu le 27 mars 1969.