

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

TOCH KHAM DOEUN

Comparaison entre la méthode d'approximation d'Einstein-Infeld-Hoffmann et celle de Havas-Goldberg

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, n° 4 (1969), p. 431-444

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_4_431_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Comparaison entre la méthode d'approximation d'Einstein-Infeld-Hoffmann et celle de Havas-Goldberg

par

TOCH KHAM DOEUN

Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.,
Institut Henri Poincaré, Paris

RÉSUMÉ. — On montre que le prétendu désaccord existant entre la valeur de l'avance du périhélie obtenue par la méthode d'approximation d'Einstein-Infeld-Hoffmann et celle obtenue par la méthode d'approximation dite « rapide » de Havas-Goldberg (rapport des 2 valeurs = $7/6$) disparaîtra quand on identifie la masse approchée d'ordre deux à la masse observée. Des justifications de cette identification sont données.

ABSTRACT. — It is showed that the pretended difference between the value for the advance of the periastron predicted from the approximation method of Einstein-Infeld-Hoffmann and that predicted from the approximation method of Havas-Goldberg, the « fast » approximation method, (difference in the ratio = $7/6$) will disappear when the approached mass to the second order is identified with the observed mass. Justifications are given for this identification.

I. INTRODUCTION

On a établi [1] que la méthode d'approximation dite « rapide » de Havas-Goldberg (que nous noterons par HG) conduit à la valeur de l'avance du périhélie qui est le $7/6$ de celle donnée par la méthode d'approximation d'Einstein-Infeld-Hoffmann habituelle.

Ce désaccord qui subsiste même dans le cas où l'on applique les deux méthodes au cas d'un corps d'épreuve en mouvement lent autour d'un corps central de masse finie au repos nous amène à nous demander s'il ne provient pas d'une assimilation des grandeurs physiques aux mêmes grandeurs de la première approximation.

Par exemple, nous avons eu l'occasion de montrer que si, à l'approximation post-newtonienne, on assimilait l'angle physique avec l'angle coordonnée qui ne représente l'angle physique qu'en première approximation, on trouverait que la valeur de l'avance du périhélie prévue par la Relativité Générale dépend du système de coordonnées utilisé [2].

Nous tiendrons donc compte du fait qu'à chaque grandeur physique devront correspondre, puisque la métrique varie d'un ordre à l'autre, aux différents ordres d'approximation, des valeurs différentes.

Et justement, nous allons montrer que si, à chaque ordre d'approximation, on introduit la masse approchée à l'ordre correspondant, on pourra établir que le désaccord signalé en haut disparaîtra.

Pour cela, nous allons rappeler d'abord chacune des deux méthodes d'approximation en nous plaçant uniquement dans le cas de deux corps dont l'un (1) est d'épreuve en mouvement lent autour de l'autre (2) au repos dont la valeur *observée* de la masse sera toujours désignée par : $\overset{2}{M}$.

II. RAPPEL

1. La méthode EIH [3]

Dans cette méthode, on se base essentiellement sur les hypothèses suivantes dites hypothèses quasi-statiques :

a) les vitesses des corps sont faibles vis-à-vis de celle de la lumière c ; le paramètre du développement est $\lambda = 1/c$;

b) l'ordre de grandeur par rapport à λ de la dérivée temporelle $\partial_0 = \lambda \frac{\partial}{\partial t}$ est supérieur d'une unité à celui des dérivées $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x} p$.

On définit les équations du mouvement par les conditions d'intégrabilité des équations du champ du cas extérieur.

C'est une méthode qui détermine à la fois la solution approchée pour la métrique, celle pour le mouvement et — ce qu'on ne doit pas oublier — celle pour la masse des corps. Et nous allons voir que cette dernière va jouer un rôle essentiel dans la suite.

En seconde approximation, les équations du champ donnent la solution approchée pour la métrique, relative à un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ et au point (1) $x^s = \frac{1}{\xi^s}$, telle que :

$$g_{\mu\omega} = \eta_{\mu\omega} + h_{\mu\omega} \quad ; \quad \gamma_{\mu\omega} = h_{\mu\omega} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\omega} \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}$$

$$(2-1-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{00} = \gamma_{00}^{(2)} + \gamma_{00}^{(4)} + 0(\lambda^6) \\ \gamma_{0i} = \gamma_{0i}^{(3)} + \gamma_{0i}^{(5)} + 0(\lambda^6) \\ \gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(4)} + 0(\lambda^6) \end{array} \right. \quad (n) \text{ indique l'ordre de grandeur par rapport à } \lambda = 1/c$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{00}^{(2)} = -\frac{4Gm^2}{c^2 r} \quad ; \quad \gamma_{00}^{(4)} = -\frac{3(Gm^2)^2}{c^4 r^2} \\ \gamma_{0i}^{(3)} = 0 \quad ; \quad \gamma_{0i}^{(5)} = 0 \\ \gamma_{ij}^{(4)} \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \gamma_{ss}^{(4)} = -\frac{2Gm\ddot{r}}{c^4} + \frac{7(Gm^2)^2}{c^4 r^2} \quad ; \quad \ddot{r} = \frac{Gm^2}{r^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) ; \\ p = \text{const.} \end{array} \right.$$

et

$$G = \text{const. newt. de gravit.}, \quad r^2 = \frac{1}{\xi^s \xi^s}$$

m^2 , const. d'ordre zéro, est la solution approchée pour la masse M^2 de (2), à l'approximation newtonienne qui est la première approximation dans la méthode EIH.

(2-1-1) a été obtenue en faisant dans les expressions correspondantes de $\gamma_{\mu\omega}^{(n)}$ données par EIH pour le cas de deux corps de masses finies en mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \text{coord. de (1)} = \frac{1}{\xi^k} \quad ; \quad \xi = \text{coord. de (2)} = \frac{2}{\xi^k} \\ \dot{\xi}^k = 0 \quad ; \quad \dot{m} = 0 \end{array} \right.$$

(corps (1) est d'épreuve; corps (2) est au repos).

Les équations du mouvement de (1) à l'approximation post-newtonienne s'écrivent :

$$(2-1-2) \quad \ddot{\xi}^k - Gm^2 \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{Gm^2}{c^2} \left[\left(\dot{\xi}^l \dot{\xi}^l - 4 \frac{Gm^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{1}{r} \right) - 4 \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

où $\dot{}$ indique la dérivation totale par rapport à $t = x^0/c$.

Il y a lieu de préciser ici que (2-1-2) décrit le mouvement dans le champ (2-1-1).

Quant à la solution approchée en seconde approximation pour la masse de (2), soit $\overset{2}{\mathcal{M}}$, elle est donnée par :

$$(2-1-3) \quad \overset{2}{\mathcal{M}} = \overset{2}{m} + \overset{2}{m}_{(2)}$$

avec, dans le cas de deux corps de masses comparables en mouvement (voir [3], relations (12-5))

$$(2-1-4) \quad \overset{2}{m}_{(2)} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \left(m_{\xi^s \xi^s}^{\cdot 2} - \frac{Gmm}{r} \right)$$

qui s'annule dans notre cas.

Par suite, (2-1-3) se réduit dans notre cas à :

$$(2-1-5) \quad \overset{2}{\mathcal{M}} = \overset{2}{m}$$

Et comme à l'approximation envisagée (seconde approximation), la masse physique $\overset{2}{M}$ s'identifie à $\overset{2}{\mathcal{M}}$, $\overset{2}{M} = \overset{2}{\mathcal{M}}$, on a donc :

$$(2-1-6) \quad \overset{2}{M} = \overset{2}{m}$$

Par conséquent, dans la méthode EIH, la masse physique $\overset{2}{M}$ se confond avec la solution newtonienne $\overset{2}{m}$.

On peut, par suite, remplacer $\overset{2}{m}$ par $\overset{2}{M}$ dans (2-1-2) :

$$(2-1-7) \quad \overset{\cdot\cdot}{\xi^k} - G\overset{2}{M} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{G\overset{2}{M}}{c^2} \left[\left(\overset{\cdot}{\xi^l} \overset{\cdot}{\xi^l} - 4 \frac{G\overset{2}{M}}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{1}{r} \right) - 4 \overset{\cdot}{\xi^l} \overset{\cdot}{\xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

(2-1-7) est équivalente à [4] :

$$u'' + u - \frac{G\overset{2}{M}}{J^2} = \frac{G\overset{2}{M}}{c^2} \left(u^2 - 7u'^2 + 4 \frac{G\overset{2}{M}}{J^2} u \right)$$

où

$$u = 1/r \quad u'' = \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \quad u' = \frac{du}{d\varphi}; \quad J = \text{const. d'intégration}$$

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi \quad x^3 = r \cos \theta$$

En résolvant l'équation précédente par la méthode des approximations successives habituelles, on obtient comme solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{P} (1 + e \cos \chi) \quad ; \quad \chi = (1 - \varepsilon)\varphi \\ \frac{1}{P} = \frac{1}{p} + \frac{5GM^2}{c^2 p^2} \qquad \qquad \frac{1}{p} = \frac{GM^2}{J^2} \\ \varepsilon = \frac{3GM^2}{c^2 p} \end{array} \right.$$

De la valeur de ε , on déduit que l'avance du périhélie par révolution σ est en fonction de la valeur *observée* M :

$$(2-1-8) \qquad \qquad \qquad \sigma = \frac{6\pi GM^2}{c^2 p}$$

valeur compatible avec l'observation.

2. La méthode H. G. [5].

Dans cette méthode, pour obtenir les équations du mouvement, on n'a pas besoin de faire les hypothèses quasi-statiques. Les vitesses des corps peuvent être comparables à celle de la lumière. Le paramètre de développement est, au lieu de $\lambda = 1/c$, $k = \chi M/R$ où χ est la « constante einsteinienne de gravitation » $\chi = G/c^2$; M étant la masse moyenne et R étant la distance moyenne entre les corps.

On définit les équations du mouvement par les conditions d'intégrabilité des équations du champ du cas intérieur avec le tenseur matériel relatif aux points matériels.

C'est aussi une méthode qui détermine à la fois la solution approchée pour la métrique, celle pour le mouvement et celle pour la masse.

Havas-Smith [1] ont explicité le passage au cas des vitesses faibles à partir des solutions obtenues en seconde approximation par H. G. Et ce sont donc plutôt ces solutions de Havas-Smith que nous considérerons.

En seconde approximation, les équations du champ donnent la solution approchée relative à un système de coordonnées $\{x^{\mu*}\}$ telle que, dans le

cas de n corps de masses finies en mouvement lent ⁽¹⁾ (voir relation (27) dans [1]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{00*} = -4 \frac{Gm^j}{c^2} \left\{ \frac{v_j^{0*}}{r_j^*} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^{0*n}} (r_j^{*n-1} v_j^{0*}) \right\} \\ \gamma^{0k*} = -4 \frac{Gm^j}{c^2} \left\{ \frac{v_j^{0*}}{r_j^*} \frac{\dot{\xi}^{k*}}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^{0*n}} \left(r_j^{*n-1} v_j^{0*} \frac{\dot{\xi}^{k*}}{c} \right) \right\} \\ \gamma^{lk*} = -4 \frac{Gm^j}{c^2} \left\{ \frac{v_j^{0*}}{r_j^*} \frac{\dot{\xi}^{l*}}{c} \frac{\dot{\xi}^{k*}}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^{0*n}} \left(r_j^{*n-1} v_j^{0*} \frac{\dot{\xi}^{l*}}{c} \frac{\dot{\xi}^{k*}}{c} \right) \right\} \end{array} \right\}$$

où

$$\gamma^{\mu\omega*} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\omega\sigma} \gamma_{\rho\sigma}^* \quad ; \quad r_j^{*2} = (x^{s*} \dot{\xi}^{s*})(x^{s*} - \dot{\xi}^{s*}) \quad ;$$

$\dot{\xi}^{s*}$ coordonnées du corps j dans $\{x^{\mu*}\}$

$$x^{0*} = \dot{\xi}^{0*} = ct^* \quad ; \quad v_j^{0*} = \frac{d\dot{\xi}^{0*}}{dt_j^*} \quad ; \quad (d\tau_j^*)^2 = \eta_{\rho\sigma} d\dot{\xi}^{\rho*} d\dot{\xi}^{\sigma*}$$

$\frac{\partial}{\partial x^{0*}}$ indique la dérivation totale par rapport à ct^* sur $\dot{\xi}^{s*}$ seuls et non sur x^{s*} ; $\dot{\xi}^{s*}$ indique la dérivation totale par rapport à t^* . m^{j*} , constantes appelées masses des corps j par Havas-Smith, ne sont en fait que les solutions approchées pour ces masses en *première* approximation.

Dans notre cas de deux corps dont l'un (1) est d'épreuve autour de l'autre au repos, la métrique précédente se réduit, au point (1) $x^{s*} = \dot{\xi}^{s*}$:

$$\gamma^{00*} = -\frac{4Gm^2}{c^2 r^*} \quad ; \quad \gamma^{0k*} = 0 \quad ; \quad \gamma^{lk*} = 0 \quad \text{où} \quad r^{2*} = \dot{\xi}^{s*} \dot{\xi}^{s*}$$

Soit en passant aux $\gamma_{\mu\omega}^*$:

$$(2-2-1) \quad \gamma_{00}^* = -\frac{4Gm^2}{c^2 r^*} \quad ; \quad \gamma_{0k}^* = 0 \quad ; \quad \gamma_{lk}^* = 0$$

(1) Nous attacherons des astérisques aux expressions données par Havas-Smith car $\{x^{\mu}\}$ ne sont pas nécessairement les mêmes que $\{x^{\mu*}\}$. De même, nous changerons quelques notations de ces auteurs afin de nous rapprocher de nos notations utilisées dans le chapitre II, paragraphe I.

En portant $\gamma^{\mu\omega}$ dans les équations du mouvement en seconde approximation de H. G., Havas-Smith ont obtenu les équations du mouvement (équation (28) de [I]) pour le cas de deux corps de masses comparables ayant des vitesses faibles. Ces équations se réduisent dans notre cas à :

$$(2-2-2) \quad \ddot{\xi}^{k*} - Gm^* \frac{\partial}{\partial \xi^{k*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) = \frac{Gm^*}{c^2} \left[\left(\dot{\xi}^{l*} \dot{\xi}^{l*} - \frac{3Gm^*}{r^*} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^{k*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) - 4 \dot{\xi}^{l*} \dot{\xi}^{k*} \frac{\partial}{\partial \xi^{l*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right]$$

Nous précisons encore que (2-2-2) décrit le mouvement de (1) dans le champ (2-2-1).

Quant à la solution approchée pour la masse de (2) en seconde approximation, soit $\overset{2}{\mathcal{M}}^*$, elle est telle que :

$$(2-2-3) \quad \overset{2}{\mathcal{M}}^* = \overset{2}{m}^* + \overset{2}{m}^*$$

avec, dans le cas de n corps de masses comparables en mouvement (voir H. G. [5], relation (46)) :

$$\overset{2}{m}^* = -\frac{1}{2} \overset{2}{m}^* g_{\alpha\beta}^* v_2^{\alpha*} v_2^{\beta*} + \overset{2}{C} \quad ; \quad \overset{2}{C} = \text{const. d'intégration}$$

On peut vérifier que dans notre cas la relation précédente se réduit à :

$$(2-2-4) \quad \overset{2}{m}^* = \frac{G(\overset{2}{m}^*)^2}{c^2 r^*} + \overset{2}{C}$$

Par suite (2-2-3) se réduit à :

$$(2-2-5) \quad \overset{2}{\mathcal{M}}^* = \overset{2}{m}^* + \frac{G(\overset{2}{m}^*)^2}{c^2 r^*} + \overset{2}{C}$$

Et comme à l'approximation envisagée (seconde approximation), la masse physique $\overset{2}{M}$ s'identifie à $\overset{2}{\mathcal{M}}^*$, on devra avoir :

$$(2-2-6) \quad \overset{2}{M} = \overset{2}{m}^* + \frac{G(\overset{2}{m}^*)^2}{c^2 r^*} + \overset{2}{C}$$

Cependant Havas-Smith, peut-être par analogie avec m^2 de EIH, ont fait comme si :

$$(H-1) \quad \overset{2}{M} = \overset{2}{m^*}$$

C'est ainsi qu'en remplaçant m^2 par $\overset{2}{M}$ dans (2-1-2), ils ont obtenu :

$$(2-2-7) \quad \ddot{\xi}^{k*} - \overset{2}{GM} \frac{\partial}{\partial \xi^{k*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) \\ = \frac{\overset{2}{GM}}{c^2} \left[\left(\dot{\xi}^{l*} \dot{\xi}^{l*} - \frac{3\overset{2}{GM}}{r^*} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^{k*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) - 4 \dot{\xi}^{l*} \dot{\xi}^{k*} \frac{\partial}{\partial \xi^{l*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right]$$

qui diffère de (2-1-7) par la présence du coefficient $3\overset{2}{GM}/r^*$ au lieu de $4\overset{2}{GM}/r$.

Ce coefficient entraîne que la valeur de l'avance du périhélie par révolution σ^* déduite de (2-2-7) est en fonction de la valeur observée de la masse $\overset{2}{M}$:

$$(2-2-8) \quad \sigma^* = \frac{7\pi\overset{2}{GM}}{c^2 p} \quad \text{soit} \quad \frac{\sigma^*}{\sigma} = 7/6$$

c'est le désaccord annoncé.

III. L'ABANDON DE (H-1) ET SES CONSÉQUENCES

1. La non-justification de (H-1).

Nous avons vu que, d'après (2-2-6), admettre (H-1) revient à négliger la contribution des termes d'ordre deux par rapport à $\lambda = 1/c$:

$$\frac{G(m^*)^2}{c^2 r^*} + \overset{2}{C} = \frac{G(m^*)^2}{c^2 r^*} + \overset{2}{C}_{(2)}$$

C'est pourquoi nous pensons qu'elle n'est pas correcte. Nous devons la

remplacer par la relation (2-2-6) que nous appellerons désormais (H-1*) :

$$(H-1^*) \quad \overset{2}{M} = \overset{2}{m^*} + \frac{G(\overset{2}{m^*})^2}{c^2 r^*} + \overset{2}{C} \quad \text{ou} \quad \overset{2}{m^*} = \overset{2}{M} - \frac{G(\overset{2}{M})^2}{c^2 r} - \overset{2}{C} \quad (2)$$

D'ailleurs, nous allons montrer que (H-1) conduit à une certaine difficulté qui n'existera pas avec (H-1*).

En effet, nous avons déjà fait remarquer dans le rappel que l'équation du mouvement (2-1-2) est relative au champ (2-1-1) alors que (2-2-2) est relative au champ (2-2-1). La comparaison entre ces deux équations du mouvement n'a donc de sens que si l'on est dans un même champ.

Or les deux champs (c'est-à-dire les deux métriques (2-1-1) et (2-2-1)) ne seront les mêmes que s'il existe une transformation : $\{x^\mu\} \rightarrow \{x^{\mu^*}\}$ satisfaisant aux relations :

$$g_{\mu\omega} = g_{\rho\sigma}^* \frac{\partial x^{\rho^*}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma^*}}{\partial x^\omega}$$

qui se traduisent par les relations entre $\gamma_{\mu\omega}$ et $\gamma_{\mu\omega}^*$ suivantes :

$$(3-1-1) \quad \begin{aligned} \gamma_{\mu\omega} = & \gamma_{\mu\omega}^* + \eta_{\mu\sigma} a_{|\omega}^\sigma + \eta_{\mu\sigma} a_{|\mu}^\sigma + \eta_{\rho\sigma} a_{|\mu}^\rho a_{|\omega}^\sigma + \gamma_{\mu\sigma}^* a_{|\omega}^\sigma + \gamma_{\mu\sigma}^* a_{|\mu}^\sigma \\ & + \gamma_{\rho\sigma}^* a_{|\mu}^\rho a_{|\omega}^\sigma - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^* (\eta_{\mu\sigma} a_{|\omega}^\sigma + \eta_{\omega\sigma} a_{|\mu}^\sigma + \eta_{\rho\sigma} a_{|\mu}^\rho a_{|\omega}^\sigma) \\ & - \frac{1}{2} \eta_{\mu\omega} (2a_{|\alpha}^\alpha + \gamma_{\rho\alpha}^* \eta^{\rho\sigma} a_{|\sigma}^\sigma - \eta^{\beta\sigma} \gamma_{\beta\sigma}^* a_{|\alpha}^\alpha + \eta^{\rho\sigma} \eta_{\alpha\beta} a_{|\rho}^\alpha a_{|\sigma}^\beta \\ & + \eta^{\rho\sigma} \gamma_{\alpha\beta}^* a_{|\rho}^\alpha a_{|\sigma}^\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\lambda\delta} \gamma_{\lambda\delta}^* a_{|\rho}^\alpha a_{|\sigma}^\beta \eta^{\rho\sigma}) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(3-1-2) \quad \begin{aligned} a_{|\mu}^\sigma &= \frac{\partial a^\sigma}{\partial x^\mu}; \\ x^{\mu^*} &= x^\mu + a^\mu(x^\rho) \end{aligned}$$

$a^\mu(x^\rho)$ étant des fonctions de x^ρ .

Nous allons montrer que si l'on admet (H-1), il n'existera pas de fonctions $a^\mu(x^\rho)$ satisfaisant à (3-1-1).

Pour cela, développons $a^\mu(x^\rho)$ en une série de puissances de $\lambda = 1/c$:

$$(3-1-3) \quad a^\mu = a^\mu + a^\mu + \dots + a^\mu + \dots$$

(1) (2) (n)

En portant cette série dans (3-1-1), en considérant $\gamma_{\mu\omega}^*$ donnés par (2-2-1) comme un développement sur λ et en égalisant les termes du même ordre de grandeur par rapport à λ de chaque côté de l'expression obtenue, on constate que la condition (3-1-1) peut se décomposer en :

$$(3-1-4) \left\{ \begin{array}{l} a_{(1)s}^s = 0 \\ a_{(1)i}^0 = 0 \\ a_{(1)j}^i + a_{(1)i}^j = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} a_{(1)0}^0 = a_{(2)s}^s + \frac{1}{2} a_{(1)(1)s}^l a_{(1)s}^l \\ a_{(1)i}^0 = a_{(2)i}^0 \\ a_{(2)j}^i + a_{(2)i}^j + a_{(1)(1)s}^s a_{(1)s}^s = \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} a_{(2)0}^0 = a_{(3)s}^s + a_{(1)(2)s}^l a_{(1)s}^l + a^s \overline{\gamma_{00|s}^*} \\ a_{(3)i}^0 = a_{(2)i}^0 + a_{(1)(1)s}^s a_{(1)s}^s \\ a_{(3)j}^i + a_{(3)i}^j + a_{(3)s}^s a_{(1)(2)s}^l + a_{(1)(2)s}^l a_{(1)s}^s = \end{array} \right.$$

$$\delta_{ij} \left(a_{(1)0}^0 + a_{(2)s}^s + \frac{1}{2} a_{(1)(1)s}^l a_{(1)s}^l \right) \quad \delta_{ij} \left(a_{(2)0}^0 + a_{(3)s}^s + a_{(1)(2)s}^l a_{(1)s}^l \right)$$

$$(3-1-5) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{(4)00} - \overline{\gamma_{(4)00}^*} = a_{(3)0}^0 - a_{(4)s}^s + \frac{1}{2} \overline{\gamma_{(2)00}^*} a_{(1)0}^0 + \frac{1}{2} a_{(1)0}^0 a_{(1)0}^0 - \frac{1}{2} a_{(1)0}^s a_{(1)0}^s - \frac{1}{2} (a_{(1)s}^s \overline{\gamma_{00}^*} \\ - a_{(2)s}^0 a_{(2)0}^0 + 2a_{(1)(3)s}^l a_{(1)s}^l + a_{(2)(2)s}^l a_{(2)s}^l - \frac{1}{2} \overline{\gamma_{(2)00}^*} a_{(1)(1)s}^l a_{(1)s}^l) + a^s \overline{\gamma_{(2)00}^*} \\ + \frac{1}{2} a^i a^j \overline{\gamma_{(1)(1)(2)0}^*} + a^0 \overline{\gamma_{(1)00}^*} \\ a_{(4)i}^0 = a_{(3)0}^i - \frac{1}{2} \overline{\gamma_{(2)00}^*} a_{(1)i}^0 - a_{(1)0}^i \overline{\gamma_{(1)00}^*} - a_{(1)0}^0 a_{(1)i}^0 + a_{(1)0}^s a_{(1)s}^i ; \\ - (\gamma_{(4)ij} - \overline{\gamma_{(4)ij}^*}) = a_{(4)j}^i + a_{(4)i}^j - \frac{1}{2} (a_{(2)j}^i + a_{(2)i}^j) \overline{\gamma_{(2)00}^*} - a_{(2)0}^i a_{(2)j}^0 + a_{(1)(3)s}^s a_{(1)s}^i + a_{(1)(2)s}^l a_{(1)s}^s \\ - \frac{1}{2} a_{(1)(1)(2)s}^s \overline{\gamma_{(2)00}^*} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left[2a_{(3)0}^0 + 2a_{(4)s}^s + (a_{(1)0}^0 + a_{(1)s}^s) \overline{\gamma_{(2)00}^*} + a_{(1)0}^0 a_{(1)0}^0 \right. \\ \left. - a_{(1)0}^s a_{(1)0}^s - a_{(1)s}^0 a_{(1)s}^0 + 2a_{(1)(3)s}^l a_{(1)s}^l + a_{(2)(2)s}^l a_{(2)s}^l - \frac{1}{2} \overline{\gamma_{(2)00}^*} a_{(1)(1)s}^l a_{(1)s}^l \right] \end{array} \right.$$

$$0 = a_{(4)0}^0 - a_{(5)s}^s + \frac{1}{2} \overline{\gamma_{(2)00}^*} a_{(1)0}^0 + a_{(1)0}^0 a_{(1)0}^0 - a_{(1)0}^s a_{(1)0}^s - \frac{1}{2} \left[\overline{\gamma_{(4)00}^*} a_{(1)0}^0 - \frac{1}{2} (a_{(1)0}^0 + a_{(1)s}^s) \overline{\gamma_{(2)00}^*} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} a_{(1)(1)(4)s}^l (\overline{\gamma_{(2)00}^*} - \overline{\gamma_{(4)ss}^*}) + a_{(1)0}^0 a_{(1)0}^0 - a_{(1)(4)s}^l a_{(1)s}^l - a_{(1)(2)s}^l a_{(1)s}^l + \frac{1}{2} \overline{\gamma_{(2)00}^*} a_{(1)(1)s}^l a_{(1)s}^l \right] \\ + a^s \overline{\gamma_{(1)(4)00}^*} + a^s \overline{\gamma_{(3)(2)00}^*} + a^i a^j \overline{\gamma_{(1)(2)(2)0}^*} + \frac{1}{2} a^0 a^i \overline{\gamma_{(1)(1)(2)0}^*}$$

$$a_{(5)i}^0 = a_{(4)0}^i + \dots$$

$$(3-1-6) \left\{ \begin{array}{l} 0 = a_{(5)j}^i + a_{(5)i}^j - \overline{\gamma_{(4)00}^*} a_{(4)j}^i - \overline{\gamma_{(4)00}^*} a_{(4)i}^j - \frac{1}{2} (a_{(3)j}^i + a_{(3)i}^j) \overline{\gamma_{(2)00}^*} \\ - \frac{1}{2} (a_{(1)j}^s a_{(1)s}^i + a_{(2)(1)j}^s a_{(2)(1)s}^s) \overline{\gamma_{(2)00}^*} - a_{(2)(3)j}^0 a_{(2)0}^i - a_{(3)(2)j}^0 a_{(3)0}^i + a_{(3)(2)s}^s a_{(3)s}^i + a_{(4)(1)j}^s a_{(4)0}^i \\ + a_{(1)(4)s}^s a_{(1)s}^i + a_{(2)(3)s}^s a_{(2)s}^i - \delta_{ij} \left[a_{(4)0}^0 + a_{(5)s}^s + a_{(2)(2)0}^0 \overline{\gamma_{(2)00}^*} + a_{(1)0}^0 a_{(1)0}^0 \right. \\ \left. - a_{(1)0}^s a_{(1)0}^s - \overline{\gamma_{(4)00}^*} a_{(4)s}^l + a_{(1)(4)s}^l a_{(1)s}^l + a_{(2)(3)s}^l a_{(2)s}^l - \frac{1}{2} \overline{\gamma_{(2)00}^*} a_{(1)(2)s}^l a_{(1)s}^l \right] \\ + \frac{1}{2} (a_{(2)0}^0 + a_{(3)s}^s) \overline{\gamma_{(2)00}^*} + \frac{1}{2} a_{(1)(4)s}^l (\overline{\gamma_{(2)00}^*} - \overline{\gamma_{(4)ss}^*}) - a_{(2)(3)0}^0 a_{(2)0}^0 \left. \right] + a^s \overline{\gamma_{(1)(4)0}^*} \end{array} \right.$$

où

$$\overline{A}^* = (A)_{x^\mu}{}^* = x^\mu$$

Nous allons voir qu'il est inutile d'aller au-delà de l'ordre λ^5 et aussi d'expliciter le second membre de la 2^e relation de (3-1-6).

Ceci étant, on peut maintenant vérifier que (3-1-4) et (3-1-5) (2^e relation) entraînent que :

$$(3-1-7) \quad \begin{matrix} a^\mu = 0 & ; & a^0 = 0 & ; & a^1 = \alpha x^2 + \beta x^3 & ; & a^2 = -\alpha x^1 + \gamma x^3 & ; & a^i = 0 & ; \\ (1) & & (2) & & (2) & (2) & (2) & (2) & (3) & \end{matrix}$$

$$a^3 = -\beta x^1 - \gamma x^2 & ; & \alpha, \beta, \gamma = \text{const.} \\ (2) & (2) & (2) & (2)(2)(2)$$

$$(3-1-8) \quad \begin{matrix} a^0 = f(t) \\ (3) & (3) \end{matrix}$$

où f est soit une fonction explicite de t , soit une constante ;
(3)

$$(3-1-9) \quad \begin{matrix} a^0 = f(t) \\ (4) & (4) \end{matrix}$$

où f est soit une fonction explicite de t , soit une constante.
(4)

(3-1-7) et (3-1-8) entraînent à leur tour que la 1^{re} et la 3^e relation de (3-1-5) se réduisent à :

$$(3-1-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{00} - \bar{\gamma}_{00}^* = a_{|0}^0 - a_{|s}^s + \text{Cte} \\ -(\gamma_{ij} - \bar{\gamma}_{ij}^*) = a_{|j}^i + a_{|i}^j - \delta_{ij}(a_{|0}^0 + a_{|s}^s - \text{Cte}) \end{array} \right.$$

qui donnent :

$$(3-1-11) \quad \begin{matrix} a_{|0}^0 \\ (3) \end{matrix} = \frac{1}{c} \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{4} \left[(\gamma_{ss} + \gamma_{00}) - (\bar{\gamma}_{ss}^* + \bar{\gamma}_{00}^*) \right] + \text{Cte}$$

C'est sur cette dernière relation que le maintien de (H-1) ou son remplacement par (H-1*) entraîne une conséquence.

En maintenant (H-1), on aura :

$$(3-1-12) \quad \begin{matrix} m \\ (3) \end{matrix} = \begin{matrix} M \\ (3) \end{matrix} = \begin{matrix} m^* \\ (3) \end{matrix}$$

Par suite, on aura :

$$(3-1-13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{00}^* = -\frac{4Gm^*}{c^2 r^*} = -\frac{4Gm}{c^2 r^*} \Rightarrow \bar{\gamma}_{00}^* = -\frac{4Gm}{c^2 r} & ; & \bar{\gamma}_{00}^* = 0 \\ \gamma_{ij}^* = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{ij}^* = 0 & ; & \bar{\gamma}_{ss}^* = 0 \end{array} \right.$$

En portant cette dernière relation dans (3-1-11), on obtiendra alors :

(3-1-14)

$$a_{(3)}^0 = \frac{1}{c} \frac{df}{dt} = \frac{1}{4} (\gamma_{ss} + \gamma_{00}) = \frac{1}{2} \frac{(Gm)^2}{c^4 r^2} \left(3 - \frac{p}{r}\right) \approx \frac{(Gm)^2}{c^4 p^2} + \frac{3}{2} \frac{(Gm)^2}{c^4 p^2} e \cos \varphi + \text{Cte}$$

où l'on a remplacé $1/r$ par la solution newtonienne $\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}$ en négligeant e^n , $n \geq 2$.

A cause du terme en $\cos \varphi$, le second membre de (3-1-14) ne peut être ni une fonction explicite de t , ni une constante comme son premier membre. Ce qui prouve que la relation (3-1-14) est impossible et que, par conséquent, il n'existera pas de $a_{(3)}^0$, par suite de a^μ , satisfaisant à (3-1-1) quand on admet (H-1).

En admettant par contre (H-1*), on aura à la place de (3-1-12), (3-1-13) et (3-1-14) :

$$(3-1-12') \quad m^* = M - \frac{G(M)^2}{c^2 r^*} - \frac{C}{(2)} = m - \frac{G(m)^2}{c^2 r^*} - \frac{C}{(2)}$$

$$(3-1-13') \quad \begin{cases} \gamma_{00}^* = -\frac{4G}{c^2 r^*} \left[m - \frac{G(m)^2}{c^2 r^*} - \frac{C}{(2)} \right] \Rightarrow \bar{\gamma}_{00}^* = \frac{4(Gm)^2}{c^4 r^2} + \frac{4GC}{c^2 r} \\ \gamma_{ij}^* = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{ij}^* = 0 \quad ; \quad \bar{\gamma}_{ss}^* = 0 \end{cases}$$

$$(3-1-14') \quad a_{(3)}^0 \approx -\frac{GC}{c^2 p} - \frac{G}{c^2 p} \left[\frac{1}{2} \frac{G(m)^2}{c^2 p} + \frac{C}{(2)} \right] e^* \cos \varphi + \text{Cte}$$

En choisissant la constante $\frac{C}{(2)}$ telle que $\frac{C}{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{G(m)^2}{c^2 p}$, on peut réduire cette fois le second membre de (3-1-14') à une constante :

$$(3-2-14'') \quad a_{(3)}^0 = \frac{1}{2} \frac{(Gm)^2}{c^4 p^2} + \text{Cte}$$

Par suite, cette fois, $a_{(3)}^0$ existera et sera égale à :

$$(3-1-15) \quad a_{(3)}^0 = \left(\frac{1}{2} \frac{(Gm)^2}{c^3 p^2} + \text{const.} \right) t$$

Regardons maintenant s'il existe $a_{(4)}^0$ satisfaisant à (3-1-1).

On remarque, à cet effet, que (3-1-7) réduit la 1^{re} et la 3^e relation de (3-1-6) à :

$$(3-1-16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{(4)0}^0 = a_{(5)s}^s \\ a_{(5)j}^i = a_{(5)i}^j = \delta_{ij}(a_{(4)0}^0 + a_{(5)s}^s) \end{array} \right.$$

qui donnent :

$$(3-1-17) \quad a_{(4)0}^0 = 0$$

Par suite, compte tenu d'autre part de (3-1-9), $a_{(4)}^0$ sera une constante qu'on peut choisir nulle :

$$(3-1-18) \quad a_{(4)}^0 = 0$$

Il est inutile de chercher à déterminer $a_{(p)}^0$ pour $p \geq 5$ et $a_{(q)}^i$ pour $q \geq 4$ satisfaisant à (3-1-1), car on sait que les coordonnées $\{x^\mu\}$ de EIH ne sont définies qu'aux transformations : $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ suivantes près [4] :

$$(3-1-19) \quad x^{0'} = x^0 + a_{(5)}^0 \quad ; \quad x^{i'} = x^i + a_{(4)}^i$$

L'existence de $a_{(p)}^0$ avec $p \leq 4$ et celle de $a_{(q)}^i$ avec $q \leq 3$ satisfaisant à (3-1-1) suffisent donc à prouver celle de a^μ .

L'équivalence des métriques considérées par chacune des deux méthodes d'approximation exigeant l'hypothèse (H-1*), la masse $\overset{2}{M}^*$ que nous considérons dans la méthode H. G. correspond bien à $\overset{2}{M}$ de EIH qui est elle-même égale à la masse astronomique $\overset{2}{m}$ de la théorie newtonienne habituelle.

2. (H-1*) et ses conséquences sur les équations du mouvement de H. G.

Si au lieu de remplacer $\overset{2}{m}^*$ par $\overset{2}{M}$ dans (2-1-2), on la remplace par sa valeur en fonction de $\overset{2}{M}$ donnée par (H-1*), c'est-à-dire :

$$(3-2-1) \quad \overset{2}{m}^* = \overset{2}{M} - \frac{G(\overset{2}{M})^2}{c^2 r^*} - \overset{2}{C} \quad (2)$$

on obtiendra à la place de (2-2-7) :

$$(3-2-2) \quad \begin{aligned} & \ddot{\xi}^{k*} - GM \frac{\partial}{\partial \xi^{k*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) \\ &= \frac{GM}{c^2} \left[\left(\overset{\cdot}{\xi}^{i*} \overset{\cdot}{\xi}^{i*} - \frac{4GM}{r^*} - A \right) \frac{\partial}{\partial \xi^{k*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) - 4 \overset{\cdot}{\xi}^{i*} \overset{\cdot}{\xi}^{k*} \frac{\partial}{\partial \xi^{i*}} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right] \end{aligned}$$

en posant

$$\overset{2}{A} = \frac{c^2}{2} \frac{\overset{2}{C}}{\overset{2}{M}} \quad (2)$$

On remarque qu'au terme constant $\overset{2}{A}$ près, (3-2-2) est la même que l'équation (2-1-7) de EIH. Cette constante $\overset{2}{A}$ n'intervient d'ailleurs pas dans le calcul de la valeur de l'avance du périhélie comme on peut le voir en résolvant (3-2-2) par la méthode des approximations successives habituelle.

La solution de (3-2-2) est en effet :

$$(3-2-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{P^*} (1 + e \cos \chi^*) \quad ; \quad \chi^* = (1 - \varepsilon^*)\varphi^* \\ \frac{1}{P^*} = \frac{1}{p} + \left(\frac{5GM^2}{c^2 p^2} - \frac{\overset{2}{A}}{c^2 p} \right) \\ \varepsilon^* = \frac{3GM^2}{c^2 p} \end{array} \right.$$

La constante $\overset{2}{A}$ n'étant pas présente dans ε^* qui est égale à ε , la valeur de l'avance du périhélie σ^* est cette fois égale à :

$$(3-2-4) \quad \sigma^* = \sigma = \frac{6\pi GM^2}{c^2 p}$$

Donc si l'on adopte (H-1*) qui assimile la solution approchée d'ordre deux pour la masse à la masse physique elle-même au lieu de (H-1), il n'y aura pas désaccord entre les deux méthodes d'approximation en ce qui concerne la valeur de l'avance du périhélie.

Ce travail doit son origine à M. Kichenassamy qui a suivi avec intérêt et attention son élaboration. Je le remercie profondément.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAVAS-SMITH, *Phys. Rev.*, t. **138**, 1965, p. 495.
- [2] K. D. TOCH, Thèse Doct. 3^e Cycle, Paris, 1964.
- [3] EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN, *Can. Journ. Math.*, vol. I, 1949.
- [4] J. N. GOLDBERG, *Gravitation*. Édit. Louis Witten, N. Y., p. 102.
- [5] HAVAS-GOLDBERG, *Phys. Rev.*, t. **128**, n^o 1, 1962, p. 398.

Manuscrit reçu le 26 mars 1969.