ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GÉRARD PETIAU

Sur un modèle général de théorie des particules fondamentales et la quantification des masses propres

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, nº 4 (1969), p. 381-417

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_4_381_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. X, n° 4, 1969, p. 381-417. *Physique théorique.*

Sur un modèle général de théorie des particules fondamentales et la quantification des masses propres

par

Gérard PETIAU
(Institut Henri Poincaré, Paris)

SOMMAIRE. — Étude d'un modèle général de description unifiée des particules fondamentales incorporant les champs propres de divers types et notamment électromagnétiques et gravifiques dans la description même de la particule. La théorie quantique des champs conduit ici directement à la quantification des masses propres.

En appendice, une extension des équations d'ondes des particules de spin $2\hbar$ associées à la description du champ gravifique propre est discutée.

Dans une série de publications antérieures [*1*], j'ai construit et discuté les propriétés de divers modèles d'extensions non linéaires de la théorie des particules fondamentales susceptibles de nous conduire à une représentation plus complète et plus satisfaisante de ces particules.

J'ai notamment admis comme principe constitutif de ces modèles que la description d'un corpuscule ou élément fondamental de la microphysique doit contenir simultanément et d'une façon inséparable les caractères qui définissent et les caractères qui séparent sa nature de celles des autres éléments.

Par suite cette description ne doit pas isoler, sinon d'une façon formelle par des processus de passage à la limite purement mentaux, les caractères que l'on qualifie généralement d' « actifs » ou de « passifs » suivant les circonstances. Ce point de vue exclut notamment que la description des états d'évolution d'une particule dont la définition associe des états de masse et de charge propres bien déterminés ne contiennent pas la description de l'évolution temporelle et spatiale d'un champ de gravité et d'un champ électromagnétique associés, réduits à des champs propres lorsque la « trajectoire » est rectiligne et uniforme, la « vitesse » de l'ensemble étant constante. L'association de ces champs avec d'autres caractères constitue l'essence même de l'être étudié.

La séparation ou l'omission de l'un ou de plusieurs des caractères dans la description d'un être défini par leur association ne peut être qu'artificielle et constitue une modification de la catégorie de l'être. Ceci revient encore à rejeter *a priori* toutes les conceptions de particules « nues » et de champs « libres » dont les notions sont contradictoires avec celles des particules fondamentales et appartiennent à une classe de concepts fictifs situés hors de la connaissance.

Ce principe me conduit à admettre que la description des particules fondamentales doit s'effectuer à partir d'un *support d'information* rassemblant un nombre suffisant d'êtres mathématiques pour apporter à chaque instant à un observateur extérieur à la fois des informations de type cinématique ou mécanique et des informations sur l'état de grandeurs du type éléments de champs, électromagnétiques et gravifiques, associés à l'ensemble particule active et passive, ces notions n'étant pas dissociées.

La possibilité de réaliser une description répondant à ces principes m'a semblé pouvoir être obtenue tout au moins dans une large mesure et schématiquement par des extensions convenables d'une part de la théorie quantique des particules à spin et d'autre part de la théorie quantique des champs.

Je vais ici examiner quelques propriétés de modèles de structures volontairement simplifiées et par là même encore loin de la description des particules réelles.

Les modèles présentés ici essaient de décrire des particules de types fermions ou bosons, actives d'une façon inséparable de leur existence du point de vue d'un champ de spin $\hbar$ (mésique vectoriel) et d'un champ de spin $2\hbar$, assimilables tout au moins par certains de leurs caractères à des champs électromagnétiques et gravifiques propres. L'existence et les états de l'aspect particule seront ici inséparables de l'existence et des états des aspects champs propres et leurs évolutions seront inséparables.

Dans ces modèles construits par des extensions de la théorie quantique usuelle, il est nécessaire d'élargir le cadre interprétatif de la théorie quantique linéaire.

Je désignerai encore sous le nom de « fonctions d'ondes » un système d'éléments, fonctions ou distributions, constituant par définition un *support d'information probabiliste maximal* et ceci pour la description complète de la structure particule-champs associés.

Le cadre interprétatif de la mécanique quantique linéaire se retrouvera partiellement dans des états particuliers qui se préciseront plus loin.

L'intervention de la théorie quantique des champs se montrera ici nécessaire pour introduire les notions de masses propres séparées attribuées aussi bien à la particule en tant qu'ensemble qu'aux éléments constituant la résolution éventuelle en particules de ses champs propres.

J'admettrai dans ce qui suit le cadre spatio-temporel de la relativité restreinte en limitant toutefois les changements de coordonnées associées à différents observateurs équivalents aux transformations du groupe de Lorentz orthochrone propre.

Je noterai x^μ les coordonnées $x^4 = ct$, x^p $(p = 1, 2, 3)$ et je poserai

$$g^{\mu\nu} : g^{44} = +1, \qquad g^{pp} = -1, \qquad g^{4p} = g^{pq} = 0,$$
$$(p, q = 1, 2, 3, \quad p \neq q).$$

Je noterai

$$p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Les éléments constitutifs de la fonction d'onde au sens généralisé précédent seront des spineurs ou des tenseurs-spineurs de Van der Waerden et par suite les éléments tensoriels seront rattachés seulement au groupe de Lorentz orthochrone propre. Des transformations complémentaires correspondant à des symétries et éventuellement des antilinéarités conduiront à divers types de conjugaisons entre états qui sont souvent introduits soit par le groupe de Lorentz complet, soit par des opérations qualifiées de « symétries internes ».

La fonction d'onde générale ne sera pas constituée par une représentation du groupe de Lorentz ou du groupe spinoriel, mais par un *ensemble de représentations associées.*

Cet ensemble sera choisi suffisamment large de façon à conduire à la description des différents caractères que l'on attribue généralement soit aux *particules* proprement dites, soit aux *champs propres* de diverses natures dont la *réunion* et les *valeurs relatives* définissent les êtres physiques considérés comme *entités définies séparées* ou *particules fondamentales.*

La structure *non linéaire choisie* pour les équations d'évolution de l'être global rendra inséparable (irréductible) l'association de ces caractères.

Le modèle et ses variantes que je vais examiner maintenant rassemblent d'une part les éléments spinoriels attachés dans la description des théories linéaires à une particule de spin 0 ou $\hbar/2$ et d'autre part les éléments par lesquels on décrit un champ propre de spin $\hbar$ (champ mésique vectoriel et éventuellement champ électromagnétique) et un champ propre de spin $2\hbar$ (assimilable par certains états à un champ de gravité propre).

La fonction d'ondes complexe (support d'information maximale) sera donc constituée dans le modèle et ses variantes que nous allons examiner ici :

a) soit par *un* spineur de Dirac $\Psi_i(x^\lambda)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, *réunion* de *deux* spineurs de Van der Waerden que j'écrirai

$$\Psi_l^{(1)}(x^\lambda), \qquad \Psi_l^{(2)}(x^\lambda) \qquad (l = 1, 2),$$

soit par *deux* éléments susceptibles de décrire une particule de spin 0 (de type scalaire ou pseudoscalaire, ces états étant indiscernables dans les transformations du groupe orthochrone propre).

Ces éléments

$$\mathrm{I}(x^\lambda) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}^\mu(x^\lambda)$$

complexes, correspondent à *deux* spineurs de Van der Waerden

$$\mathrm{I}^{\underset{\smile}{lm}} = -\,\mathrm{I}^{\underset{\smile}{ml}}, \qquad \mathrm{S}^{\dot{l}m},\ (\dot{l}, m = 1, 2)$$

b) De *deux* éléments complexes susceptibles isolément et à l'approximation linéaire de décrire un champ mésique vectoriel ou électromagnétique : Un vecteur

$$\Phi^\mu(x^\lambda),$$

un tenseur antisymétrique du second ordre

$$\Phi^{\mu\nu}(x^\lambda) = -\,\Phi^{\nu\mu}(x^\lambda).$$

Ces éléments sont associés à *trois* spineurs de Van der Waerden

$$\Phi_{(1)}^{\underline{m_1 m_2}} = \Phi_{(1)}^{\underline{m_2 m_1}} \quad ; \quad \Phi_{(2)}^{\dot{l}m} \quad ; \quad \Phi_{(3)}^{\underline{\dot{l}_1 \dot{l}_2}} = \Phi_{(3)}^{\underline{\dot{l}_2 \dot{l}_1}}.$$

c) De *deux* tenseurs susceptibles isolément et à l'approximation linéaire de décrire un champ de spin $2\hbar$ et par suite susceptible d'être interprété par certains éléments comme un champ gravifique propre.

Ces tenseurs *complexes*

$$\Phi^{\mu\nu,\rho}(x^\lambda) \qquad \text{et} \qquad \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}(x^\lambda),$$

présentent les symétries traduites par les relations

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = -\,\Phi^{\nu\mu,\rho} = \Phi^{\rho,\mu\nu} = -\,\Phi^{\rho,\nu\mu},$$
$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \Phi^{\rho\sigma,\mu\nu} = -\,\Phi^{\nu\mu,\rho\sigma} = -\,\Phi^{\mu\nu,\sigma\rho}.$$

Ces tenseurs sont représentatifs de *cinq* tenseurs-spineurs de Van der Waerden que j'écrirai

α) $$\Phi_{(1)}^{m_1 m_2 m_3 m_4} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{(5)}^{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{l}_3 \dot{l}_4}$$

symétriques par rapport à tous les indices m ou $\dot{l}$ et par suite chacun à 5 composantes (complexes) ;

β) $$\Phi_{(2)}^{\dot{l}_1 m_2 m_3 m_4} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{(4)}^{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{l}_3 m_4},$$

symétriques indépendamment en indices m et en indices $\dot{l}$ et chacun à *8 composantes* complexes ;

γ) $$\Phi_{(3)}^{\dot{l}_1 \dot{l}_2 m_3 m_4},$$

symétriques en $\dot{l}$ et en m et par suite à *9 composantes* complexes.

Sous forme tensorielle, $\Phi_{(2)}^{\dot{l}_1 m_2 m_3 m_4}$ et $\Phi_{(4)}^{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{l}_3 m_4}$ se rassemblent dans $\Phi^{\mu\nu,\rho}$. Il en résulte que ce tenseur *sous cette notation* est astreint *aux contraintes*

$$\Phi^{\mu\lambda,}{}_{,\lambda} = 0,$$
$$\Phi_{[\mu\nu,\rho]} \equiv \Phi_{[\mu\lambda]^{\mathrm{D}},}{}^{\lambda} \equiv \Phi_{\mu\nu,\rho} + \Phi_{\nu\rho,\mu} + \Phi_{\rho\mu,\nu} = 0.$$

Ces huit contraintes réduisent à $24 - 8 = 16$ le nombre des composantes linéairement indépendantes de $\Phi^{\mu\nu,\rho}$.

Les spineurs $\Phi_{(1)}^{m_1 m_2 m_3 m_4}$, $\Phi_{(5)}^{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{l}_3 \dot{l}_4}$ et $\Phi_{(3)}^{\dot{l}_1 \dot{l}_2 m_3 m_4}$ se rassemblent dans un tenseur du type $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ à 21 composantes. Les neuf composantes de $\Phi_{(3)}^{\dot{l}_1 \dot{l}_2 m_3 m_4}$ correspondent à la trace

$$\Phi_{\mu,}{}^{\rho} \equiv \Phi_{\mu\lambda,}{}^{,\rho\lambda},$$

soumise à la *contrainte*

$$\Phi_{\mu,}{}^{\mu} = 0.$$

Les 10 composantes de $\Phi_{(1)}$ et $\Phi_{(5)}$ correspondent au tenseur de trace nulle extrait de $\Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}$ soit $\chi_{\mu\nu,\rho\sigma}$ avec $\chi_{\mu\lambda,}{}^{\rho\lambda} = 0$.

Cette origine spinorielle impose à $\Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}$ les contraintes

$$\Phi_{\mu\nu,}{}^{\mu\nu} = 0$$

et

$$\Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} + \Phi_{\mu\rho,\sigma\nu} + \Phi_{\mu\sigma,\nu\rho} = 0,$$

qui ramènent à 19 le nombre des composantes de $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ linéairement indépendantes.

L'ensemble des spineurs et tenseurs définis en (*a*), (*b*), (*c*) est associé dans un système d'équations d'évolution qui constitue un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre pour lequel j'ai *choisi* la *forme constitutive* suivante.

$$(A_1) \qquad (p_\mu \gamma^\mu)\Psi_i(x^\lambda) + \Omega_1(x^\lambda)\Psi_i(x^\lambda) = 0\ ;$$

ou

$$(A_2) \qquad \begin{aligned} p_\mu \mathrm{I} + \Omega_1(x^\lambda)\mathrm{S}_\mu &= 0, \\ p_\mu \mathrm{S}^\mu + \Omega_1(x^\lambda)\mathrm{I} &= 0\ ; \end{aligned}$$

$$(B) \qquad \begin{aligned} p_\mu \Phi_\nu - p_\nu \Phi_\mu + \Omega_2(x^\lambda)\Phi_{\mu\nu}(x^\lambda) &= 0, \\ p_\lambda \Phi^{\lambda\mu} + \Omega_2(x^\lambda)\Phi^\mu(x^\lambda) &= 0\ ; \end{aligned}$$

$$(C) \qquad \begin{aligned} p_\mu \Phi_{\nu,\rho\sigma} - p_\nu \Phi_{\mu,\rho\sigma} + p_\rho \Phi_{\mu\nu,\sigma} - p_\sigma \Phi_{\mu\nu,\rho} + \Omega_3(x^\lambda)\Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} &= 0, \\ p_\lambda \Phi^{\lambda\mu,}{}_{,\rho\sigma} + \kappa(p_\rho \Phi^{\lambda\mu,}{}_{,\lambda\sigma} - p_\sigma \Phi^{\lambda\mu}{}_{,\lambda\rho}) + \Omega_3(x^\lambda)\Phi^{\mu,}{}_{,\rho\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Pour $\Omega_1(x^\lambda)$, $\Omega_2(x^\lambda)$, $\Omega_3(x^\lambda)$, *réduits à des constantes et non associés* aux autres équations, les systèmes partiels (A_1), (A_2), (B), (C) se ramènent aux systèmes linéaires par lesquels on décrit généralement les particules libres (sans interaction) de spin $\frac{\hbar}{2}$ ou 0, $\hbar$ et $2\hbar$.

Toutefois pour le système (C) associé au champ de particules libres de spin $2\hbar$ (pour Ω_3 constant), nous avons introduit dans l'équation un facteur numérique κ. Celui-ci est dans les différents modèles généralement utilisés pris égal à 1 ou à 0.

En effet, ces équations (pour Ω_3 constant) admettent des solutions de type ondes planes que nous préciserons rattachées à deux « états de masse propre », le facteur κ permet un ajustement des valeurs de ces « masses propres » et permet notamment pour $\kappa = -\frac{1}{2}$ d'avoir une même valeur pour cette masse propre dans les deux états.

Les termes $\Omega_1(x^\lambda)$, $\Omega_2(x^\lambda)$, $\Omega_3(x^\lambda)$, seront dans le modèle considéré ici des *densités tensorielles invariantes*, construites à partir des tenseurs-spineurs ou des tenseurs autres que ceux qui à l'approximation Ω_j constants interviennent dans le système partiel (A), (B) ou (C) considéré.

Je poserai donc comme *hypothèses de structure* :

Pour le système (A_1), (B), (C)

$$\begin{aligned}\Omega_1(x^\lambda) &= \Omega_1(\Phi^\mu, \Phi^{\mu\nu} ; \Phi^{\mu\nu,\rho}, \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}),\\ \Omega_2(x^\lambda) &= \Omega_2(\Psi_l^{(1)}, \Psi_l^{(2)} ; \Phi^{\mu\nu,\rho}, \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}),\\ \Omega_3(x^\lambda) &= \Omega_3(\Psi_l^{(1)}, \Psi_l^{(2)} ; \Phi^\mu, \Phi^{\mu\nu}).\end{aligned}$$

Pour le système (A_2), (B), (C)

$$\begin{aligned}\Omega_1(x^\lambda) &= \Omega_1(\Phi^\mu, \Phi^{\mu\nu} ; \Phi^{\mu\nu,\rho}, \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}),\\ \Omega_2(x^\lambda) &= \Omega_2(\mathrm{I}, \mathrm{S}^\mu ; \Phi^{\mu\nu,\rho}, \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}),\\ \Omega_3(x^\lambda) &= \Omega_3(\mathrm{I}, \mathrm{S}^\mu ; \Phi^\mu, \Phi^{\mu\nu}).\end{aligned}$$

Dans deux variantes de ces modèles, je ferai un choix différent pour la structure des facteurs $\Omega_j(x^\lambda)$, $(j = 1, 2, 3)$. Mais ces *deux choix conduiront à la même quantification des masses propres.*

Pour préciser la structure choisie des facteurs $\Omega_j(x^\lambda)$, je vais introduire pour les systèmes partiels (A_1), (A_2), (B), (C) différentes densités tensorielles. Celles-ci prolongeront les densités correspondantes de l'approximation linéaire dans laquelle les Ω_j sont constants.

Je poserai

$$\Omega_j = \hbar\omega_j.$$

Le système (A_1) se réduit, pour Ω_1 constant, à l'équation de Dirac décrivant une particule de spin $\frac{\hbar}{2}$ soit

$$\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) + i\omega_1(x^\lambda)\Psi = 0,$$

avec l'équation adjointe

$$(\partial_\mu\Psi^+)\gamma^\mu - i\omega_1(x^\lambda)\Psi^+ = 0.$$

La fonction adjointe $\Psi^+(x^\lambda)$ est associée à $\Psi(x^\lambda)$ par

$$\Psi^+(x^\lambda) = \overline{\Psi}(x^\lambda)\gamma^4.$$

A ces deux équations correspond une densité de courant

$$j^{\mu}_{(1)} = \Psi^{+}\gamma^{\mu}\Psi$$

vectorielle et les densités invariantes et pseudoinvariantes

$$\Lambda_1(x^{\lambda}) = \Psi^{+}\gamma^{0}\Psi \equiv \Psi^{+}\Psi,$$
$$\Lambda_1'(x^{\lambda}) = \Psi^{+}\gamma^{5}\Psi.$$

La densité tensorielle

$$T^{(1)}_{\mu,\nu} = (-i\hbar)\frac{1}{2}[\Psi^{+}\gamma_{\mu}(\partial_{\nu}\Psi) - (\partial_{\nu}\Psi^{+})\gamma_{\mu}\Psi]$$

conduit à la relation

$$T^{(1)\,\mu}_{\mu\;\;,} + \Omega_1(\Psi^{+}\Psi) = 0.$$

Au système partiel (A_2) qui se réduit pour Ω_1 constant à l'équation d'ondes des particules de spin 0, soit encore

$$\partial_{\mu}I + i\omega_1(x^{\lambda})S_{\mu} = 0,$$
$$\partial_{\mu}S^{\mu} + i\omega_1(x^{\lambda})I = 0,$$

nous associerons le courant

$$j^{\mu}_{(1)} = \bar{I}S^{\mu} + \bar{S}^{\mu}I,$$

et la densité invariante

$$\Lambda_1 = \bar{I}I + \bar{S}_{\mu}S^{\mu}.$$

Le tenseur du second ordre

$$T^{(1)}_{\mu,\nu} = (-i\hbar)\frac{1}{2}[\bar{I}(\partial_{\nu}\bar{S}_{\mu}) + \bar{S}_{\mu}(\partial_{\nu}I) - (\partial_{\nu}\bar{S}_{\mu})I - (\partial_{\nu}\bar{I})S_{\mu}],$$

conduit ici encore à la relation

$$T^{(1)\,\mu}_{\mu\;\;,} + \Omega_1\Lambda_1 = 0.$$

Au système partiel (B), soit

$$\partial_{\mu}\Phi_{\nu} - \partial_{\nu}\Phi_{\mu} + i\omega_2\Phi_{\mu\nu} = 0,$$
$$\partial_{\lambda}\Phi^{\lambda\mu} + i\omega_2\Phi^{\mu} = 0,$$

nous associerons la densité de courant vectorielle

$$j^{\mu}_{(2)} = \bar{\Phi}^{\mu\lambda}\Phi_{\lambda} + \bar{\Phi}_{\lambda}\Phi^{\mu\lambda}$$

et la densité invariante

$$\Lambda_2 = \overline{\Phi}_\lambda \Phi^\lambda + \overline{\Phi}_{(\mu\nu)} \Phi^{(\mu\nu)}.$$

(Je noterai d'une façon générale

$$\overline{\Phi}_{(\mu\nu)} \Phi^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \overline{\Phi}_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu},$$

la sommation sur $(\mu\nu)$ portant sur les paires distinctes d'éléments $\mu\nu = -\nu\mu$).

On introduit également la densité tensorielle du second ordre

$$T_{(2)\mu,\nu} = (-i\hbar)\frac{1}{2}[\overline{\Phi}_{\mu\lambda}(\partial_\nu \Phi^\lambda) + \overline{\Phi}^\lambda(\partial_\nu \Phi_{\mu\lambda}) - (\partial_\nu \overline{\Phi}_{\mu\lambda})\Phi^\lambda - (\partial_\nu \overline{\Phi}^\lambda)\Phi_{\mu\lambda}]$$

et l'on a encore ici

$$T_{(2)\mu,}{}^{\mu} + \Omega_2 \Lambda_2 = 0.$$

Ce tenseur peut être considéré comme combinaison à poids égaux des deux tenseurs

$$T'_{(2)\mu,\nu} = \frac{1}{2}[\overline{\Phi}^\lambda(p_\nu \Phi_{\mu\lambda}) - (p_\nu \overline{\Phi}_{\mu\lambda})\Phi^\lambda]$$

avec

$$T'_{(2)\mu,}{}^{\mu} + \Omega_2 \overline{\Phi}_\lambda \Phi^\lambda = 0,$$

et

$$T''_{(2)\mu,\nu} = \frac{1}{2}[\overline{\Phi}_{\mu\lambda}(p_\nu \Phi^\lambda) - (p_\nu \overline{\Phi}^\lambda)\Phi_{\mu\lambda}]$$

avec

$$T''_{(2)\mu,}{}^{\mu} + \Omega_2 \overline{\Phi}_{(\mu\nu)} \Phi^{(\mu\nu)} = 0.$$

Le système partiel (C) est plus complexe. Nous en étudierons certains aspects plus en détail en annexe.

Considérons ce système écrit

$$p_\mu \Phi_{\nu,\rho\sigma} - p_\nu \Phi_{\mu,\rho\sigma} + p_\rho \Phi_{\mu\nu,\sigma} - p_\sigma \Phi_{\mu\nu,\rho} + \Omega_3 \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0,$$

$$p_\lambda \Phi^{\lambda\mu,}{}_{,\rho\sigma} + \kappa(p_\rho \Phi^{\mu,}{}_{,\sigma} - p_\sigma \Phi^{\mu,}{}_{,\rho}) + \Omega_3 \Phi^{\mu,}{}_{,\rho\sigma} = 0$$

(avec $\Phi^{\mu,}{}_{,\rho} \equiv \Phi^{\mu\lambda,}{}_{,\rho\lambda}$)

Nous introduirons ici encore la densité de courant vectorielle.

$$j^\mu_{(3)} = \overline{\Phi}^{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Phi_{\nu,(\rho\sigma)} + \Phi^{\mu\nu,(\rho\sigma)} \overline{\Phi}_{\nu,(\rho\sigma)}.$$

Nous pouvons ici construire *trois* densités tensorielles du second ordre.

$$T'_{(3)\mu,\nu} = \frac{1}{2}\,[\bar{\Phi}^{\lambda,(\rho\sigma)}(p_\nu\Phi_{\mu\lambda,(\rho\sigma)}) - (p_\nu\bar{\Phi}_{\mu\lambda,(\rho\sigma)})\Phi^{\lambda,(\rho\sigma)} + x(\bar{\Phi}_{\mu\lambda,\rho}(p_\nu\Phi^{\lambda,\rho}) - p_\nu\bar{\Phi}^{\lambda,\rho}\Phi_{\mu\lambda,\rho})],$$

$$T''_{(3)\mu,\nu} = \frac{1}{2}\,[\bar{\Phi}_{\mu\lambda,(\rho\sigma)}(p_\nu\Phi^{\lambda,(\rho\sigma)}) - (p_\nu\bar{\Phi}^{\lambda,(\rho\sigma)})\Phi_{\mu\lambda,(\rho\sigma)}],$$

$$T'''_{(3),\mu\nu} = \frac{1}{2}\,[\bar{\Phi}^{\rho,\sigma}(p_\nu\Phi_{\mu\rho,\sigma})-(p_\nu\bar{\Phi}_{\mu\rho,\sigma})\Phi^{\rho,\sigma}].$$

Nous en déduisons par contraction

$$T'_{(3)\mu,}{}^{\mu} + \Omega_3\bar{\Phi}^{\lambda,(\rho\sigma)}\Phi_{\lambda,(\rho\sigma)} = 0,$$

$$T''_{(3)\mu,}{}^{\mu} + \Omega_3\,\frac{1}{2}\,\bar{\Phi}_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 0,$$

$$T'''_{(3)\mu,}{}^{\mu} + \Omega_3\,\frac{1}{2}\,\bar{\Phi}_{\rho,\sigma}\Phi^{\rho,\sigma} = 0.$$

Nous pouvons adopter *a priori* une combinaison linéaire de ces trois tenseurs, mais nous verrons qu'il y a équivalence du point de vue des ondes planes entre

$$T'_{(3)\mu,}{}^{\mu} \qquad \text{et} \qquad T''_{(3)\mu,}{}^{\mu} - \kappa T'''_{(3)\mu,}{}^{\mu}.$$

Ceci nous conduit à adopter pour tenseur principal

$$T_{(3)\mu,\nu} = T'_{(3)\mu,\nu} + (T''_{(3)\mu,\nu} - \kappa T'''_{(3)\mu,\nu})$$

et nous aurons alors

$$T_{(3)\mu,}{}^{\mu} + \Omega_3\left[\bar{\Phi}^{\lambda,(\rho\sigma)}\Phi_{\lambda,(\rho\sigma)} + \frac{1}{2}\,(\bar{\Phi}_{(\mu\nu)(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu)(\rho\sigma)} - \kappa\bar{\Phi}_{\rho,\sigma}\Phi^{\rho,\sigma})\right].$$

Ceci nous conduit à considérer la densité invariante

$$\Lambda_3 = \bar{\Phi}^{\lambda,(\rho\sigma)}\Phi_{\lambda,(\rho\sigma)} + \frac{1}{2}\,(\bar{\Phi}_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} - \kappa\bar{\Phi}_{\rho,\sigma}\Phi^{\rho,\sigma}).$$

Le système (A_1), (B), (C), ou (A_2), (B), (C), *sera défini en associant les systèmes partiels au moyen des densités invariantes* pour lesquelles je considérerai soit l'une, soit l'autre des *deux structures* suivantes.

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \Omega_1(x^\lambda) &= j_{(2)}{}^{\mu} j_{(3)\mu}, \\ \Omega_2(x^\lambda) &= j_{(1)}{}^{\mu} j_{(3)\mu}, \\ \Omega_3(x^\lambda) &= j_{(1)}{}^{\mu} j_{(2)\mu}, \end{aligned}$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \Omega_1(x^\lambda) &= \Lambda_2(x^\lambda)\Lambda_3(x^\lambda), \\ \Omega_2(x^\lambda) &= \Lambda_1(x^\lambda)\Lambda_3(x^\lambda), \\ \Omega_3(x^\lambda) &= \Lambda_1(x^\lambda)\Lambda_2(x^\lambda). \end{aligned}$$

On voit sur ces constructions que, dans les équations (A_1) ou (A_2), le terme $\Omega_1(x^\lambda)$ qui remplace le terme de masse propre constante du cas linéaire est constitué à partir du produit, soit des courants $j_{(2)}{}^\mu$, $j_{(3)}{}^\mu$, soit des densités invariantes Λ_2, Λ_3 associés dans les théories linéaires aux champs de particules de spin $\hbar$ et $2\hbar$. Pour chaque élément de type particule ou champ, le terme de masse de la théorie linéaire est donc construit par combinaison des densités des autres particules ou champs. Dans une image classique on aurait ici par exemple l'équivalent d'un électron dont la masse propre serait obtenue à partir de grandeurs associées au champ électromagnétique *et* au champ gravifique propres, ceux-ci étant eux-mêmes définis à partir du champ de l'électron.

Nous allons montrer pour les systèmes non linéaires (A_1, B, C) ou (A_2, B, C) l'existence d'un *système de solutions particulières* du type *ondes planes* en *propagation* avec une *vitesse déterminée.*

Ces ondes planes seront définies comme fonctions de la variable unique

$$u = n_\mu x^\mu,$$

n^μ étant un vecteur unité *du genre temps* caractérisant la propagation :

$$n^\mu n_\mu = 1,$$

$$n^\mu : n^4, \vec{n} ; \qquad \vec{v} = \frac{\vec{n}}{n^4}.$$

A ce vecteur n^μ, nous associerons *trois* autres vecteurs *du genre espace*

$$n_{(a)}{}^\mu \quad , \quad n_{(b)}{}^\mu \quad , \quad n_{(c)}{}^\mu$$

orthogonaux entre eux et avec n^μ, l'ensemble

$$n^\mu \quad , \quad n_{(a)}{}^\mu \quad , \quad n_{(b)}{}^\mu \quad , \quad n_{(c)}{}^\mu,$$

constituant ce que l'on appelle généralement une *tétrade* :

$$n^\mu n_{(a)\mu} = 0 \quad , \quad n_{(a)}{}^\mu n_{(a)\mu} = -1,$$

$$n_{(a)}{}^\mu n_{(b)\mu} = g_{(ab)}$$

$$(g^{(aa)} = g^{(bb)} = g^{(cc)} = -1 \quad , \quad g^{(ab)} = \ldots = 0).$$

Je rechercherai alors pour le système général (A), (B), (C) avec les formes (I) ou (II) des Ω_j, des *solutions particulières* de la forme

$$(A_1) \qquad \text{soit} \quad \Psi_i = a_i e^{-i\mu_1 u},$$

$$(A_2) \qquad \text{soit} \begin{cases} I = I_0 e^{-i\mu_1 u}, \\ S^\mu = s^\mu e^{-i\mu_1 u}; \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} \Phi^\mu = \varphi^\mu e^{-i\mu_2 u} \\ \Phi^{\mu\nu} = \varphi^{\mu\nu} e^{-i\mu_2 u}; \end{cases}$$

$$(C) \qquad \begin{cases} \Phi^{\mu\nu,\rho} = \varphi^{\mu\nu,\rho} e^{-i\mu_3 u} \\ \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma} e^{-i\mu_3 u}, \end{cases}$$

avec ici

$$\Phi_{\mu,}{}^\rho \equiv \Phi_{\mu\lambda,}{}^{\rho\lambda} = \varphi_{\mu,}{}^\rho e^{-i\mu_3 u}$$

$$\varphi_{\mu,}{}^\rho \equiv \varphi_{\mu\lambda,}{}^{\rho\lambda}$$

μ_1, μ_2, μ_3 *sont des constantes pour l'instant indéterminées.*

$$a_i\,;\; I_0,\, s^\mu\,;\; \varphi^\mu,\, \varphi^{\mu\nu}\,;\; \varphi^{\mu\nu,\rho},\, \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma},\, \varphi^{\mu,\rho},$$

sont des amplitudes indépendantes de u mais dépendant de la tétrade.

La structure particulière de ces ondes planes *dont chaque élément ne dépend que d'une seule exponentielle* et la construction adoptée en (I) ou (II) pour les $\Omega_j = \hbar\omega_j$ va nous conduire à des expressions ω_j indépendantes de x^λ *et ne dépendant que des amplitudes.*

Ceci *nous conduira à une détermination des constantes* μ_1, μ_2, μ_3 *à partir des amplitudes.* Nous verrons alors que *la quantification au sens de la théorie quantique des champs des amplitudes indépendantes conduira à une quantification des masses propres.*

Nous allons préciser d'abord la forme des solutions ondes planes et la liaison entre les constantes μ_j et les amplitudes.

1° Pour le système (A_1), on *voit immédiatement la condition*

$$\mu_1 = \omega_1.$$

Les amplitudes a_i se représenteront à partir de *deux amplitudes* particulières $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ déduites de a_i par les projecteurs $\frac{1 \pm i\gamma^5}{2}$. On a alors

$$a = a^{(1)} + a^{(2)}$$

$$\Psi = a e^{-i\mu_1 u}$$

$$a^{(2)} = (n_\lambda \gamma^\lambda) a^{(1)}.$$

Avec une représentation matricielle convenable, les amplitudes $a^{(1)}$ s'expriment directement au moyen de *deux constantes indépendantes* associées aux *deux états de chiralité* de la particule de spin $\hbar/2$.

Désignant par A_1, A_2, des constantes avec une norme convenable, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{(1)} &= a^{+}\gamma^{\mu}a \\ &= a^{(1)+}\gamma^{\mu}a^{(2)} + a^{(2)+}\gamma^{\mu}a^{(1)} \\ &= 2n^{\mu}(a^{(1)+}a^{(1)}) \\ &= n^{\mu}\Big(\sum_{l=1,2}\overline{A}_l A_l\Big), \\ \Lambda_1 &= \Psi^{+}\Psi \\ &= 2(a^{(1)+}a^{(1)}) = \sum_{l=1,2}\overline{A}_l A_l. \end{aligned}$$

On a donc ici

$$j_{(1)}{}^{\mu} = n^{\mu}\Lambda_1.$$

De même, pour le système (A_2), on trouve immédiatement la condition

$$\mu_1 = \omega_1$$

et on a

$$s^{\mu} = n^{\mu}I_0.$$

On en déduit la représentation des ondes planes

$$I(x^{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2}}A_0 e^{-i\omega_1 u}$$

$$S^{\mu}(x^{\lambda}) = n^{\mu}\frac{A_0}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_1 u}$$

et ici

$$\begin{aligned} j_{(1)}{}^{\mu} &= \overline{I}S^{\mu} + \overline{S}^{\mu}I = n_{\mu}(\overline{A}_0 A_0) \\ \Lambda_1 &= \overline{I}I + \overline{S}^{\mu}S_{\mu} = \overline{A}_0 A_0, \\ j_{(1)}{}^{\mu} &= n^{\mu}\Lambda_1. \end{aligned}$$

2° Pour le système partiel (B) la substitution de

$$\Phi^{\mu} = \varphi^{\mu}e^{-i\mu_2 u} \quad , \quad \Phi^{\mu\nu} = \varphi^{\mu\nu}e^{-i\mu_2 u},$$

conduit à

$$\begin{aligned} \mu_2(n_{\mu}\varphi_{\nu} - n_{\nu}\varphi_{\mu}) &= \omega_2\varphi_{\mu\nu}, \\ \mu_2(n_{\lambda}\varphi^{\lambda\mu}) &= \omega_2\varphi^{\mu}. \end{aligned}$$

On en déduit :

la condition de transversalité

$$n_\lambda \varphi^\lambda = 0,$$

la condition

$$\mu_2 = \omega_2,$$

et l'expression de $\varphi^{\mu\nu}$ à partir de φ^μ :

$$\varphi_{\mu\nu} = n_\mu \varphi_\nu - n_\nu \varphi_\mu.$$

On obtient alors les *trois amplitudes* linéairement indépendantes

$$\varphi^\mu = n_{(a)}{}^\mu \quad , \quad n_{(b)}{}^\mu \quad , \quad n_{(c)}{}^\mu,$$

d'où

$$\varphi^{\mu\nu} = n^\mu n_{(a)}{}^\nu - n^\nu n_{(a)}{}^\mu, \qquad ((a), (b), (c))$$

L'amplitude φ^μ générale s'écrit donc à partir de *trois constantes arbitraires* B_r associées aux vecteurs $n_{(a)}{}^\mu$, $n_{(b)}{}^\mu$, $n_{(c)}{}^\mu$, que nous noterons ici $\eta_{(r)}{}^\mu$ soit

$$\varphi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r B_r n_{(r)}{}^\mu.$$

On en déduit

$$\varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_r B_r (n^\mu n_{(r)}{}^\nu - n^\nu n_{(r)}{}^\mu) \right].$$

L'onde plane solutions du système partiel (B) est alors

$$\Phi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_r B_r n_{(r)}{}^\mu \right) e^{-i\omega_2 u},$$

$$\Phi^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_r B_r (n^\mu n_{(r)}{}^\nu - n^\nu n_{(r)}{}^\mu) \right] e^{-i\omega_2 u}.$$

On en déduit

$$\overline{\Phi}^\lambda \Phi_\lambda = -\frac{1}{2} \left(\sum_r \overline{B}_{(r)} B_{(r)} \right),$$

$$\overline{\Phi}^{(\mu\nu)} \Phi_{(\mu\nu)} = -\frac{1}{2} \left(\sum_r \overline{B}_{(r)} B_{(r)} \right),$$

$$\Lambda_2 = -\left(\sum_r \overline{\mathrm{B}}_{(r)}\mathrm{B}_{(r)}\right),$$

$$j_{(2)}{}^{\mu} = -n^{\mu}\left(\sum_r \overline{\mathrm{B}}_{(r)}\mathrm{B}_{(r)}\right),$$

et ici encore on a

$$j_{(2)}{}^{\mu} = n^{\mu}\Lambda_2.$$

Pour le système partiel (C) nous devons considérer *deux types de solutions ondes planes* suivant que l'on a

soit

$$\Phi^{\mu,}{}_{\rho} \equiv \Phi^{\mu\lambda}{}_{,\rho\lambda} \neq 0,$$

soit

$$\Phi^{\lambda}{}_{,\rho} \equiv 0.$$

Dans le premier cas, la substitution de

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \Phi^{\mu\nu,\rho}e^{-i\mu_3 u} \quad , \quad \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma}e^{-i\mu_3 u},$$

nous conduit à

$$n_\mu\varphi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu\varphi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho\varphi_{\mu\nu,\sigma} - n_\sigma\varphi_{\mu\nu,\rho} = \frac{\omega_3}{\mu_3}\varphi_{\mu\nu,\rho\sigma}$$

$$n^{\lambda}\varphi_{\lambda\mu,\rho\sigma} + \kappa(n_\rho\varphi_{\nu,\sigma} - n_\sigma\varphi_{\nu,\rho}) = \frac{\omega_3}{\mu_3}\varphi_{\nu,\rho\sigma}.$$

L'on en déduit la condition de transversalité

$$n_\lambda\varphi^{\lambda,\rho} = 0$$

et

$$n_\lambda\varphi^{\lambda\rho,\sigma} = \frac{\omega_3}{2\mu_3}\varphi^{\rho,\sigma}$$

puis la *condition*

$$\mu_3^2 = \frac{\omega_3^2}{2(\kappa+1)}.$$

Avec celle-ci

$$\varphi_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\kappa+1)}(n_\mu\varphi_{\nu,\rho} - n_\nu\varphi_{\mu,\rho})$$

$$\varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} = n_\mu n_\rho\varphi_{\nu,\sigma} - n_\mu n_\sigma\varphi_{\nu,\rho} - n_\nu n_\rho\varphi_{\mu,\sigma} + n_\nu n_\sigma\varphi_{\mu,\rho}.$$

On vérifie ici que

$$\varphi_{\mu\lambda,}{}^{\rho\lambda} \equiv \varphi_{\mu,}{}^{\rho}.$$

On a donc

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\kappa+1)}(n^\mu \varphi^{\nu,\rho} - n^\nu \varphi^{\mu,\rho})e^{-i\frac{\omega_3}{\sqrt{2(\kappa+1)}}u},$$

$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma} e^{-i\frac{\omega_3}{\sqrt{2(\kappa+1)}}u}.$$

On en déduit en tenant compte de la transversalité $n_\lambda \varphi^{\lambda\mu} = 0$,

$$\overline{\varphi}^{(\mu\nu),\rho}\varphi_{(\mu\nu),\rho} = \frac{\kappa+1}{2}\overline{\varphi}_{\mu,\rho}\varphi^{\mu,\rho},$$

$$\overline{\varphi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\varphi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = \overline{\varphi}_{\mu,\rho}\varphi^{\mu,\rho},$$

et par suite

$$\Lambda_3 = \overline{\Phi}^{(\mu\nu),\rho}\Phi_{(\mu\nu),\rho} + \frac{1}{2}[\overline{\Phi}_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} - \kappa\overline{\Phi}_{\mu,\rho}\Phi^{\mu,\rho}]$$
$$= \overline{\varphi}_{\mu,\rho}\varphi^{\mu,\rho} = \frac{2}{\kappa+1}\overline{\Phi}_{(\mu\nu),\rho}\Phi^{(\mu\nu),\rho}.$$

De même, on a

$$j_{(3)}{}^{\mu} = \frac{\omega_3}{\mu_3} n^\mu(\overline{\varphi}_{\rho,\sigma}\varphi^{\rho,\sigma}) = 2n^\mu\sqrt{2(\kappa+1)}\,\overline{\varphi}_{\rho,\sigma}\varphi^{\rho,\sigma}$$
$$= n^\mu 2\sqrt{2(\kappa+1)}\Lambda_3.$$

Le système (C) admet aussi un *second type de solution* pour lesquelles

$$\varphi_{\mu,}{}^{\rho} \equiv 0.$$

Nous poserons ici

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \chi^{\mu\nu,\rho}e^{-i\mu_3 u},$$

$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \chi^{\mu\nu,\rho\sigma}e^{-i\mu_3 u},$$

avec

$$\chi^{\mu\lambda}{}_{,\rho\lambda} \equiv 0.$$

La substitution dans (C) conduit alors à

$$n_\mu \chi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \chi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \chi_{\nu,\sigma} - n_\sigma \chi_{\mu,\rho} = \frac{\omega_3}{\mu_3}\chi_{\mu\nu,\rho\sigma};$$

$$n^\lambda \chi_{\lambda\nu,\rho\sigma} = \frac{\omega_3}{\mu_3}\chi_{\nu,\rho\sigma}.$$

On en déduit les *conditions de transversalité*

$$n_\lambda \chi^{\lambda,\rho\sigma} = 0 \quad , \quad n_\lambda \chi^{\lambda\mu,\rho} = 0,$$

et la *condition*

$$\omega_3 = \mu_3.$$

L'amplitude $\chi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ se déduit alors de $\chi^{\mu\nu,\rho}$ telle que

$$\chi^{\mu\lambda,}{}_{\lambda} = 0 \quad , \quad \chi^{[\mu\nu,\rho]} = 0,$$
$$n_\lambda \chi^{\lambda,\rho\sigma} = 0 \quad , \quad n_\lambda \chi^{\lambda\mu,\rho} = 0,$$

par

$$\chi^{\mu\nu,\rho\sigma} = n^\mu \chi^{\nu,\rho\sigma} - n^\nu \chi^{\mu,\rho\sigma} + n^\rho \chi^{\mu\nu,\sigma} - n^\sigma \chi^{\mu\nu,\rho},$$
$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \chi^{\mu\nu,\rho} e^{-i\omega_3 u},$$
$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \chi^{\mu\nu,\rho\sigma} e^{-i\omega_3 u}$$

entraîne alors

$$\overline{\Phi}^{(\mu\nu),\rho} \Phi_{(\mu\nu),\rho} = \overline{\chi}^{(\mu\nu),\rho} \chi_{(\mu\nu),\rho},$$
$$\overline{\Phi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 2\overline{\chi}^{(\mu\nu),\rho} \chi_{(\mu\nu),\rho}$$

et

$$\Lambda_3 = 2\overline{\chi}^{(\mu\nu),\rho} \chi_{(\mu\nu),\rho},$$
$$j_{(3)}{}^\mu = 2n^\mu (\overline{\chi}^{(\rho\sigma),\nu} \chi_{(\rho\sigma),\nu}) = n^\mu \Lambda_3.$$

La solution onde plane générale est ici *une superposition des ondes des deux types* pour lesquelles le vecteur n^μ et par suite la vitesse est la même.

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \varphi^{\mu\nu,\rho} e^{-\frac{i\omega_3 u}{\sqrt{2(\kappa+1)}}} + \chi^{\mu\nu,\rho} e^{-i\omega_3 u},$$
$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma} e^{-\frac{i\omega_3 u}{\sqrt{2(\kappa+1)}}} + \chi^{\mu\nu,\rho} e^{-i\omega_3 u}.$$

En particulier, pour $\kappa = -\frac{1}{2}$, les facteurs de « masse propre »,

$$\omega_3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega_3}{\sqrt{2(\kappa+1)}} = \omega_3$$

sont les mêmes pour les deux ondes.

Les amplitudes des types $\varphi^{\mu\nu,\rho}$ et $\chi^{\mu\nu,\rho}$, $\varphi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ et $\chi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ sont orthogonales.

On vérifie facilement que les conditions de transversalité relatives à $\varphi^{\mu\nu,\rho}$ et à $\chi^{\mu\nu,\rho}$ entraînent les relations

$$\overline{\varphi}^{(\mu\nu),\rho} \chi_{(\mu\nu),\rho} = 0,$$
$$\overline{\varphi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \chi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 0,$$
$$\overline{\varphi}^{\mu\nu,(\rho\sigma)} \chi_{\nu,(\rho\sigma)} = 0.$$

Par suite, avec la solution générale, on aura

$$\bar{\Phi}^{(\mu\nu),\rho}\Phi_{(\mu\nu),\rho} = \bar{\varphi}^{(\mu\nu),\rho}\varphi_{(\mu\nu),\rho} + \bar{\chi}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(\mu\nu),\rho},$$

$$\bar{\Phi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = \bar{\varphi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\varphi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} + \bar{\chi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\chi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}$$

et

$$\Lambda_3 = \bar{\varphi}_{\mu,\rho}\varphi^{\mu,\rho} + 2\bar{\chi}_{(\mu\nu),\rho}\chi^{(\mu\nu),\rho},$$

$$j_{(3)}{}^{\mu} = n^{\mu}[\sqrt{2(\kappa+1)}\,\bar{\varphi}_{\mu,\rho}\varphi^{\mu,\rho} + 2\bar{\chi}_{(\mu\nu),\rho}\chi^{(\mu\nu),\rho}].$$

Alors, *mais seulement pour* $\kappa = -\frac{1}{2}$, on retrouvera la relation

$$j_{(3)}{}^{\mu} = n^{\mu}\Lambda_3.$$

Les amplitudes $\varphi^{\mu,\rho}$ et $\chi^{\mu\nu,\rho}$ se ramènent pour chaque type à *cinq amplitudes linéairement indépendantes* exprimées à partir des éléments de la tétrade

$$n^{\mu},\quad n_{(a)}{}^{\mu},\quad n_{(b)}{}^{\mu},\quad n_{(c)}{}^{\mu}.$$

Nous montrons en appendice que celles-ci s'écrivent

$$\varphi^{\mu,\rho}_{(ab)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\rho} + n_{(a)}{}^{\rho}n_{(b)}{}^{\mu}), \qquad (ab) = (12), (23), (31),$$

$$\varphi^{\mu,\rho}_{(\mathrm{A})} = \frac{1}{\sqrt{6}}(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(a)}{}^{\rho} + n_{(b)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\rho} - 2n_{(c)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\rho}),$$

$$\varphi^{\mu,\rho}_{(\mathrm{B})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(a)}{}^{\rho} - n_{(b)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\rho}).$$

Nous notons ces amplitudes $\varphi^{\mu}{}_{s}{}^{,\rho}$, avec $s = 1, 2, 3, 4, 5$ correspondant aux indices $(ab, (bc), (ca)$, A, B et l'on a par leur construction

$$\bar{\varphi}_{s}{}^{\mu,\rho}\varphi_{s'\,;\,\mu,\rho} = \delta_{ss'}.$$

Nous écrivons donc pour la forme générale de l'amplitude $\varphi^{\mu,\rho}$

$$\varphi^{\mu,\rho} = \sum_{s} C'_{s}\varphi_{s}^{\mu,\rho}.$$

Alors

$$\bar{\varphi}^{\mu,\rho}\varphi_{\mu,\rho} = \sum_{s} \bar{C}'_{s}C'_{s}.$$

Pour les amplitudes de seconde espèce, nous obtiendrons les trois amplitudes

$$\chi_{(a)}^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(b)}{}^{\mu})n_{(b)}{}^{\rho} + (n_{(c)}{}^{\mu}n_{(a)}{}^{\nu} - n_{(c)}{}^{\nu}n_{(a)}{}^{\mu})n_{(c)}{}^{\rho}]$$

$((a) : (a), (b), (c))$,
et les deux amplitudes

$$\chi_{(A)}^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(c)}{}^{\mu})n_{(b)}{}^{\rho} + (n_{(b)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu} - n_{(b)}{}^{\nu}n_{(c)}{}^{\mu})n_{(a)}{}^{\rho}],$$

$$\chi_{(B)}^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{6}}[2(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(b)}{}^{\mu})n_{(c)}{}^{\rho} + (n_{(a)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(c)}{}^{\mu})n_{(b)}{}^{\rho} + (n_{(c)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\nu} - n_{(c)}{}^{\nu}n_{(b)}{}^{\mu})n_{(a)}{}^{\rho}].$$

Si l'on désigne par

$$\chi_s^{\mu\nu,\rho},$$

$s = 1, 2, 3, 4, 5$ ou (a), (b), (c), (A), (B), on aura ici

$$\bar{\chi}_s^{(\mu\nu),\rho}\chi_{s'\,;\,(\mu\nu),\rho} = -\,\delta_{ss'}.$$

L'amplitude générale $\chi^{\mu\nu,\rho}$ s'écrira alors

$$\chi^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_s \mathbf{C}_s''\chi_s^{\mu\nu,\rho}$$

et nous aurons

$$2\bar{\chi}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(\mu\nu),\rho} = -\sum_s \bar{C}_s''C_s''.$$

Pour la solution onde plane générale associée à

$$u = n_\mu x^\mu,$$

nous aurons alors

$$\Lambda_3 = \sum_s(\bar{C}_s'C_s' - \bar{C}_s''C_s''),$$

$$j_{(3)}{}^{\mu} = n^\mu\left[\sqrt{2(\kappa+1)}\left(\sum_s \bar{C}_s'C_s'\right) - \sum_s \bar{C}_s''C_s''\right],$$

redonnant pour $\kappa = -\dfrac{1}{2}$

$$j_{(3)}{}^{\mu} = n^\mu\Lambda_3.$$

Si nous rassemblons les résultats obtenus avec les états d'ondes planes considérés, nous écrivons

1) Pour le système (A)

Dans le cas (A_1)

$$\Lambda_1 = \sum_l \overline{A}_l A_l \qquad (l = 1, 2),$$

$$j_{(1)}{}^{\mu} = n^{\mu}\Big(\sum_l \overline{A}_l A_l\Big) = n^{\mu}\Lambda_1.$$

Dans le cas (A_2)

$$\Lambda_1 = \overline{A}_0 A_0,$$

$$j_{(1)}{}^{\mu} = n^{\mu}(\overline{A}_0 A_0) = n^{\mu}\Lambda_1.$$

2) Pour le système (B)

$$\Lambda_2 = -\Big(\sum_r \overline{B}_r B_r\Big) \qquad (r = 1, 2, 3),$$

$$j_{(2)}{}^{\mu} = -\,n^{\mu}\Big(\sum_r \overline{B}_r B_r\Big) = n^{\mu}\Lambda_2.$$

3) Pour le système (C)

$$\Lambda_3 = \sum_s (\overline{C}'_s C'_s - \overline{C}''_s C''_s),$$

$$j_{(3)}{}^{\mu} = n^{\mu}\Big(\sqrt{2(\kappa+1)}\sum_s \overline{C}'_s C'_s - \sum_s \overline{C}''_s C''_s\Big) \qquad (s = 1, 2, 3, 4, 5)$$

avec encore pour $\kappa = -\dfrac{1}{2}$

$$j_{(3)}{}^{\mu} = n^{\mu}\Lambda_3.$$

La *combinaison de ces expressions va nous donner les densités* ω_1, ω_2, ω_3 *et par suite les coefficients de masses propres* μ_1, μ_2, μ_3.

On obtiendra ainsi :

Dans le cas (I) :

$$\omega_1 = j_{(2)}{}^{\mu} j_{(3)\mu} = -\Big(\sum_r \overline{B}_r B_r\Big)\Big[\sqrt{2(\kappa+1)}\Big(\sum_s \overline{C}'_s C'_s\Big) - \Big(\sum_s \overline{C}''_s C''_s\Big)\Big],$$

$\omega_2 = j_{(1)}{}^{\mu} j_{(3)\mu} =$

soit (cas A_1)

$$\Big(\sum_l \bar{A}_l A_l\Big)\Big[\sqrt{2(\kappa+1)}\Big(\sum_s \bar{C}'_s C'_s\Big) - \Big(\sum_s \bar{C}''_s C''_s\Big)\Big],$$

soit (cas A_2)

$$(\bar{A}_0 A_0)\Big[\sqrt{2(\kappa+1)}\Big(\sum_s \bar{C}'_s C'_s\Big) - \Big(\sum_s \bar{C}''_s C''_s\Big)\Big],$$

$$\omega_3 = j_{(1)}{}^{\mu} j_{(2)\mu} = \begin{cases} -\Big(\sum_l \bar{A}_l A_l\Big)\Big(\sum_r \bar{B}_r B_r\Big), & \text{(cas } A_1),\\ -(\bar{A}_0 A_0)\Big(\sum_r \bar{B}_r B_r\Big), & \text{(cas } A_2). \end{cases}$$

Dans le cas (II) :

$$\omega_1 = \Lambda_2 \Lambda_3 = -\Big(\sum_r \bar{B}_r B_r\Big)\Big[\sum_s (\bar{C}'_s C'_s - \bar{C}''_s C''_s)\Big],$$

$$\omega_2 = \Lambda_1 \Lambda_3 = \begin{cases} \Big(\sum_l \bar{A}_l A_l\Big)\Big[\sum_s (\bar{C}'_s C'_s - \bar{C}''_s C''_s)\Big], & \text{(cas } A_1),\\ (\bar{A}_0 A_0)\Big[\sum_l (\bar{C}'_s C'_s - \bar{C}''_s C''_s)\Big], & \text{(cas } A_2). \end{cases}$$

$$\omega_3 = \Lambda_1 \Lambda_2 = \begin{cases} -\Big(\sum_l \bar{A}_l A_l\Big)\Big(\sum_r \bar{B}_r B_r\Big), & \text{(cas } A_1),\\ -(\bar{A}_0 A_0)\Big(\sum_r \bar{B}_r B_r\Big), & \text{(cas } A_2). \end{cases}$$

Les coefficients μ_1, μ_2, μ_3 jouant le rôle de masse propre dans les exponentielles caractérisant la propagation

$$e^{-\mu_1 u} \quad , \quad e^{-\mu_2 u} \quad , \quad e^{-\mu_3 u}$$

sont déterminés à partir de ces expressions par

$$\mu_1 = \omega_1 \quad , \quad \mu_2 = \omega_2 \quad , \quad \mu_3 = \frac{\omega_3}{\sqrt{2(\kappa+1)}}$$

Le système *non linéaire considéré, définit donc les masses propres* μ_1, μ_2, μ_3 *à partir des amplitudes des champs associés* A_l ou A_0, B_r, C'_s, C''_s.

Les « masses propres » dépendent donc pour une large part des normalisations choisies pour les éléments partiels des systèmes (A), (B), (C) associés en un système total et *jusqu'à cette phase il n'y a pas quantification des masses propres.*

Toutefois, cette quantification des masses propres s'effectuera simplement, si nous introduisons dans la théorie développée jusqu'ici la *quantification des amplitudes* suivant les méthodes de la théorie quantique des champs usuelle.

L'assimilation des composantes partielles de la fonction d'ondes totales entrant dans les systèmes (A), (B), (C) à des champs d'oscillateurs harmoniques indépendants s'aperçoit ici immédiatement.

Nous passerons alors des constantes

$$A_0, \; A_l \; (l = 1, 2); \qquad B_r \; (r = 1, 2, 3);$$
$$C'_s, \; C''_s, \qquad (s = 1, 2, 3, 4, 5)$$

et des constantes conjuguées complexes

$$\overline{A}_0, \; \overline{A}_l, \; \overline{B}_r, \; \overline{C}'_s, \; \overline{C}''_s,$$

à des opérateurs de création ou de destruction

$$A_0, \; A_l, \; B_r, \; C'_s, \; C''_s,$$
$$A_0^+, \; A_l^+, \; B_r^+, \; C_s'^+, \; C_s''^+.$$

Ces opérateurs seront associés par des relations d'anticommutation pour les éléments fermioniques A_l, A_l^+, de commutation pour les éléments bosoniques

$$A_0, \; B_r, \; C'_s, \; C''_s$$

et

$$A_0^+, \; B_r^+, \; C_s'^+, \; C_s''^+.$$

Nous poserons donc, passant des amplitudes aux opérateurs associés

$$[A_l^+, A_{l''}]_+ = - l_0 \delta_{ll'} \qquad (l, l' = 1, 2),$$
$$[A_0^+, A_0]_- = - l_0,$$

ou

$$[B_r^+, B_{r'}]_- = - l'_0 \delta_{rr'} \quad , \quad (r, r' = 1, 2, 3),$$
$$[C_s'^+, C'_s]_- = - l''_0 \delta_{ss'},$$
$$[C_s''^+, C''_{s'}]_- = - l'''_0 \delta_{ss'} \quad , \quad (s, s' = 1, 2, 3, 4, 5),$$

l_0, l'_0, l''_0 étant trois constantes « de normalisation ».

L'indépendance des amplitudes de type (A_1) ou (A_2), (B) et (C) les unes par rapport aux autres conduira à leur commutation réciproque.

On ajoutera donc aux relations précédentes les relations de commutation

$$[A_l, B_r]_- = [A_l, C'_s]_- = [A_l, C''_s]_- = [B_r, C'_s]_- = [B_r, C''_s] = 0,$$
$$[A_0, B_r]_- = [A_0, C'_s]_- = [A_0, C''_s]_- = 0,$$
$$[A_0^+, B_r^+]_- = \ldots = 0.$$

Les opérateurs A_l, B_r, C_s nous conduisent à introduire des opérateurs « nombres d'occupation » que nous définirons ici comme dans la théorie quantique générale par

$$A_l^+ A_l = l_0 N_l^{(1)},$$

ou

$$A_0^+ A_0 = l_0 N_0^{(1)},$$
$$B_r^+ B_r = l'_0 N_r^{(2)},$$
$$\begin{cases} C_s'^+ C'_s = l''_0 N_s'^{(3)}, \\ C_s''^+ C''_s = l''_0 N_s''^{(3)}. \end{cases}$$

Avec ces expressions, les coefficients de masses propres

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3,$$

sont remplacés par des opérateurs nombres d'occupation.

Nous avons ainsi

$$a) \qquad \mu_1 = \omega_1 = -\, l'_0 l''_0 \Big(\sum_r N_r^{(2)}\Big)\Big(\sum_s N_s'^{(3)} - N_s''^{(3)}\Big),$$

$$b) \qquad \mu_2 = \omega_2 = \begin{cases} l_0 l''_0 \Big(\sum_l N_l^{(1)}\Big)\Big[\sum_s (N_s'^{(3)} - N_s''^{(3)})\Big] & \text{(cas } A_1\text{)}, \\ l_0 l''_0 (N^{(0)})\Big[\sum_s (N_s'^{(3)} - N_s''^{(3)}\Big] & \text{(cas } A_2\text{)}, \end{cases}$$

$$c) \qquad \mu'_3 = \frac{\omega_3}{\sqrt{2(\kappa + 1)}}$$

pour les termes déduits de $\varphi^{\mu,\nu}$,

$$\mu''_3 = \omega_3$$

pour les termes en $\chi^{\mu\nu,\rho}$, avec

soit pour le cas (A_1)

$$\omega_3 = -\, l_0 l'_0 \Big(\sum_l N_l^{(1)}\Big)\Big(\sum_r N_r^{(2)}\Big)$$

soit pour le cas (A_2)

$$\omega_3 = -\, l_0 l'_0 (N^{(0)}) \Big(\sum_r N_r^{(2)}\Big).$$

Les facteurs $e^{-i\mu_j u}$ ($j = 1, 2, 3$) caractérisant la propagation (avec une même vitesse $\vec{u}/u^4$) des différentes composantes font donc intervenir explicitement les opérateurs « nombres d'occupations » associés à la quantification des amplitudes pour l'ensemble de la « fonction d'ondes ».

On remarquera que la « masse propre » μ_1 de la partie (A), fermionique (A_1), ou bosonique scalaire (A_2) dépend ici du *produit des nombres d'occupations* associés aux composantes de la fonction d'ondes rattachées aux champs de spins $\hbar$ et $2\hbar$ et par suite, susceptibles d'être considérés comme champs propres électromagnétiques et gravifiques.

Le modèle construit ici généralise donc les modèles classiques où la masse propre était d'origine électromagnétique mais en considérant en outre un champ de gravité propre.

Les « masses propres » μ_2 et μ_3 des parties bosoniques de spins $\hbar$ et $2\hbar$ sont construites à partir des nombres d'occupation des états fermioniques. Si les nombres d'occupation fermionique $N_l^{(1)}$ sont nuls, Ω_2 et Ω_3 deviennent nuls simultanément. L'existence des états de particule est nécessaire pour l'existence des états de champs de spin $\hbar$ et $2\hbar$.

L'association des valeurs des coefficients μ_j à des opérateurs construits au moyen des nombres d'occupation conduit à des *valeurs constantes* des μ_j lorsque les nombres d'occupations sont constants; on retrouve alors les équations des différents champs de particules à spin dans les cas des champs considérés comme libres, *mais ici avec des propagations liées.*

Le modèle étudié jusqu'ici est susceptible de nombreuses variantes permettant de comprendre comment une « quantification » des masses, exacte ou approchée, peut résulter de schémas de couplages plus ou moins élaborés.

Une variante particulièrement simple et certainement incomplète nous permet peut-être de nous rapprocher d'une théorie des masses propres des particules physiques.

Pour construire celle-ci, nous reprendrons le modèle général précédent en associant dans la fonction d'ondes générales des tenseurs-spineurs rattachés dans les théories linéaires aux particules et champs de spin $\hbar/2$, 0 et $\hbar$, nous laisserons donc à part dans une première phase l'intervention de la partie rattachée au spin $2\hbar$.

Le système principal est maintenant la réunion des équations (A), (B), (C) suivantes :

$$\text{(A)} \qquad [p_\mu \gamma^\mu + \Omega_1(x^\lambda)]\Psi_i(x^\lambda) = 0 \, ;$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} p_\mu \mathrm{I} + \Omega_2(x^\lambda)\mathrm{S}_\mu = 0, \\ p_\mu \mathrm{S}^\mu + \Omega_2(x^\lambda)\mathrm{I} = 0 \, ; \end{cases}$$

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} p_\mu \Phi_\nu - p_\nu \Phi_\mu + \Omega_3(x^\lambda)\Phi_{\mu\nu} = 0, \\ p_\lambda \Phi^{\lambda\mu} + \Omega_3(x^\lambda)\Phi^\mu = 0. \end{cases}$$

Ici nous définissons les densités invariantes $\Omega_j = \hbar\omega_j$ ($j = 1, 2, 3$) soit par

$$\Omega_1 = j_{(2)}{}^\mu j_{(3)\mu},$$
$$\Omega_2 = j_{(1)}{}^\mu j_{(3)\mu},$$
$$\Omega_3 = j_{(1)}{}^\mu j_{(2)\mu},$$

soit par

$$\Omega_1 = \Lambda_1, \qquad \Omega_2 = \Lambda_2, \qquad \Omega_3 = \Lambda_3,$$

avec encore

$$j_{(1)}{}^\mu = \Psi^+\gamma^\mu\Psi, \qquad \Lambda_1 = \Psi^+\Psi,$$
$$j_{(2)}{}^\mu = \bar{\mathrm{I}}\mathrm{S}^\mu + \bar{\mathrm{S}}^\mu\mathrm{I}, \qquad \Lambda_2 = \bar{\mathrm{I}}\mathrm{I} + \bar{\mathrm{S}}^\mu\mathrm{S}_\mu,$$
$$j_{(3)}{}^\mu = \bar{\Phi}^{\mu\lambda}\Phi_\lambda + \bar{\Phi}_\lambda\Phi^{\mu\lambda}, \qquad \Lambda_3 = \bar{\Phi}^\lambda\Phi_\lambda + \bar{\Phi}^{(\mu\nu)}\Phi_{(\mu\nu)}.$$

Tous les résultats précédents se reprennent ici sans difficulté.

Une onde plane en propagation associée à un vecteur de propagation unitaire du genre temps n^μ par l'intermédiaire de l'invariant

$$u = n_\mu x^\mu$$

s'écrit encore

$$\Psi_i = a_i e^{-i\mu_1 u},$$
$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 e^{-i\mu_2 u} \quad , \quad \mathrm{S}^\mu = s^\mu e^{-i\mu_2 u},$$
$$\Phi^\mu = \varphi^\mu e^{-i\mu_3 u} \quad , \quad \Phi^{\mu\nu} = \varphi^{\mu\nu} e^{-i\mu_3 u},$$

Les amplitudes a_i, I_0, s^μ, φ^μ, $\varphi^{\mu\nu}$ se déterminent comme précédemment.

On obtient ici comme *conditions*

$$\mu_1 = \omega_1, \qquad \mu_2 = \omega_2, \qquad \mu_3 = \omega_3.$$

Les amplitudes a_i s'expriment au moyen de *deux constantes* A_l, ($l = 1, 2$), associées aux deux états de chiralité du fermion (ici d'énergie positive). Les amplitudes I_0 et s^μ s'expriment au moyen d'une *constante* A_0, les amplitudes du champ de spin $\hbar$, φ^μ et $\varphi^{\mu\nu}$ s'expriment encore au moyen de *trois constantes* B_r ($r = 1, 2, 3$) associées à l'état de chiralité longitudinale et aux deux états de chiralités transversales du boson de spin $\hbar$.

On obtient alors ici encore

$$\Lambda_1 = \sum_l \bar{A}_l A_l \quad , \quad \Lambda_2 = \bar{A}_0 A_0,$$

$$\Lambda_3 = -\left(\sum_r \bar{B}_r B_r\right) \quad , \quad (l = 1, 2 \,;\, r = 1, 2, 3)$$

et

$$j_{(1)}{}^\mu = n^\mu \Lambda_1 \quad , \quad j_{(2)}{}^\mu = n^\mu \Lambda_2 \quad , \quad j_{(3)}{}^\mu = n^\mu \Lambda_3.$$

Dans les deux choix de construction des Ω_j, on obtient alors

$$\mu_1 = -(\bar{A}_0 A_0)\left(\sum_r \bar{B}_r B_r\right),$$

$$\mu_2 = -\left(\sum_l \bar{A}_l A_l\right)\left(\sum_r \bar{B}_r B_r\right),$$

$$\mu_3 = \left(\sum_l \bar{A}_l A_l\right)(\bar{A}_0 A_0).$$

Ces masses ne sont pas encore quantifiées.

Le passage à la théorie quantique des champs introduit encore à la place des amplitudes

$$A_l, A_0, B_r \qquad \text{et} \qquad \bar{A}_l, \bar{A}_0, \bar{B}_r.$$

des opérateurs de création et de destruction.

On définit les opérateurs nombres d'occupation associés par

$$A_l^+ A_l = l_0 N_l^{(1)} \quad , \quad (l = 1, 2)$$

$$A_0^+ A_0 = l_0' N^{(2)} \quad ,$$

$$B_r^+ B_r = l_0'' N_r^{(3)} \quad , \quad (r = 1, 2, 3)$$

Les nombres $N_l^{(1)}$ sont 0 ou 1, les nombres $N^{(2)}$ et $N_r^{(3)}$ des entiers > 0 ou 0. l_0, l'_0, l''_0 sont encore trois constantes dimensionnelles.

On en déduit les *masses propres quantifiées*

$$\mu_1 = \omega_1 = - l'_0 l_0 N^{(2)} \left(\sum_r N_r^{(3)} \right),$$

$$\mu_2 = \omega_2 = - l_0 l''_0 \left(\sum_l N_l^{(1)} \right) \left(\sum_r N_r^{(3)} \right),$$

$$\mu_3 = \omega_3 = l_0 l'_0 \left(\sum_l N_l^{(1)} \right) N^{(2)}.$$

Les masses propres μ_1 de la partie fermionique sont alors proportionnelles à la fois au nombre d'occupation des états bosoniques de spin 0, soit $N^{(2)}$ et à la somme des nombres d'occupation $N_r^{(3)}$ de la partie bosonique de spin $\hbar$.

Ce modèle peut être rattaché au modèle précédent en introduisant une structure plus complexe de la fonction d'onde générale par l'adjonction des éléments tenseurs-spineurs associés à la description des particules de spin $2\hbar$.

Les Ω_j comportent alors un terme Λ_4 supplémentaire et les termes μ_j ($j = 1, 2, 3$) comportent un facteur

$$\sum_s (\overline{C}'_s C'_s - \overline{C}''_s C''_s) \to \sum_s (N'_s - N''_s)$$

supplémentaire.

Je remarquerai encore que la quantification des « masses propres » μ_j résultant de la théorie développée jusqu'ici *ne fait pas* apparaître l'équivalent d'états de rotation quantifiés que divers phénoménologistes ont essayé d'introduire pour obtenir une classification approchée des masses observées.

L'intervention par la méthode exposée ici dans les valeurs quantifiées d'expressions telles que par exemple

$$N^{(2)}(N^{(2)} + 1)$$

exigerait l'introduction dans la construction des Ω_j de *densités biquadratiques*.

Celles-ci ne peuvent pas être écartées *a priori*. Toutefois, elles correspondent à un degré de complexité de structure interne des modèles nettement plus élevé.

APPENDICE

Une extension des équations d'ondes des corpuscules de spin 2 $\hbar$ et les solutions du type ondes planes correspondantes.

Nous décrivons ici les champs de particules de spin $2\hbar$ par les équations tensorielles

$$(A_1) \qquad p_\mu \Phi_{\nu,\rho\sigma} - p_\nu \Phi_{\mu,\rho\sigma} + p_\rho \Phi_{\mu\nu,\sigma} - p_\sigma \Phi_{\mu\nu,\rho} + \Omega_0 \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0,$$

$$(A_2) \qquad p_\lambda \Phi^{\lambda\mu,}{}_{,\rho\sigma} + \chi\left(p_\rho \Phi^{\mu}{}_{,\sigma} - p_\sigma \Phi^{\mu}{}_{,\rho}\right) + \Omega_0 \Phi^{\mu,}{}_{,\rho\sigma} = 0.$$

Nous avons noté ici

$$\Phi_{\mu\lambda,}{}^{\rho\lambda} = \Phi_{\mu,}{}^{\rho}.$$

χ est une constante intermédiaire fixée *a priori.*

Les tenseurs $\Phi^{\mu\nu,\rho}$, $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ sont assujettis aux contraintes *venant de leur origine spinorielle*

$$\Phi^{\mu\lambda,}{}_{,\lambda} = 0 \quad , \quad \Phi^{\mu\nu,\rho} + \Phi^{\nu\rho,\mu} + \Phi^{\rho\mu,\nu} = \Phi^{[\mu\nu,\rho]} = 0,$$

$$\Phi^{(\mu\nu).}{}_{,(\mu\nu),} = 0 \quad , \quad \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} + \Phi^{\mu\rho,\sigma\nu} + \Phi^{\mu\sigma,\nu\rho} = 0,$$

$$\Phi^{\mu,}{}_{,\mu} = 0.$$

La contraction de (A_1) et de (A_2) donne

$$(A_3) \qquad p_\lambda(\Phi^{\lambda\mu,\rho} + \Phi^{\mu,\lambda\rho}) + \Omega_0 \Phi^{\mu,\rho} = 0$$

et

$$(\chi - 1) p_\lambda \Phi^{\lambda,\mu} = 0$$

Nous avons donc comme conséquences de (A_1) et (A_2), pour $\chi \neq 1$, la *condition* de *transversalité*

$$(A_4) \qquad p_\lambda \Phi^{\lambda\,\mu} = 0.$$

L'application de p_μ à (A_1) donne alors

$$(A_5) \qquad \Omega_0 p_\lambda \Phi^{\lambda,\mu\nu} = 0.$$

Il est commode pour l'étude du système $(A_1 - A_2)$ de séparer deux cas suivant que le champ $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ est de trace $\Phi^{\mu,}{}_{,\rho} = \Phi^{\mu\lambda,}{}_{,\rho\lambda}$ non nulle ou identiquement nulle.

I. — Nous considérons d'abord le cas du champ de trace $\Phi^{\mu,}{}_{,\rho}$ nulle. Nous noterons dans ce cas

$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \chi^{\mu\nu,\rho\sigma} \quad , \quad \Phi^{\mu\nu,\rho} \equiv \chi^{\mu\nu,\rho}$$

avec

$$\chi^{\mu\lambda}{}_{,\rho\lambda} = 0.$$

Le système (A_1), (A_2) s'écrit ici

$$(B_1)\qquad p_\mu \chi_{\nu,\rho\sigma} - p_\nu \chi_{\mu,\rho\sigma} + p_\rho \chi_{\mu\nu,\sigma} - p_\sigma \chi_{\mu\nu,\rho} + \Omega_0 \chi_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0,$$

$$(B_2)\qquad p_\lambda \chi^{\lambda\mu,\rho\sigma} + \Omega_0 \chi^{\mu,\rho\sigma} = 0$$

donnant par contraction

$$(B_3)\qquad p_\lambda\left(\chi^{\lambda\mu,\rho} + \chi^{\mu,\lambda\rho}\right) = 0$$

et par (B_2)

$$(B_4)\qquad p_\lambda \chi^{\lambda,\rho\sigma} = 0$$

Combinés avec

$$\chi^{\mu\nu,\rho} + \chi^{\nu\rho,\mu} + \chi^{\rho\mu,\nu} = 0$$

ces relations donnent alors

$$(B_5)\qquad p_\lambda \chi^{\lambda\mu,\rho} = 0.$$

L'application de p^μ à (B_1) en tenant compte de (B_2) et de (B_5) donne alors le système d'équations du second ordre

$$(B_6)\qquad \left(p_\lambda p^\lambda - \Omega_0^2\right)\chi^{\mu\nu,\rho} = 0.$$

Les fonctions $\chi^{\mu\nu,\rho}(x^\lambda)$ forment donc un système de solutions de l'équation de Klein-Gordon assujetties aux conditions

$$\chi^{\mu\lambda,}{}_{,\lambda} = 0 \quad , \quad \chi^{[\mu\nu,\rho]} = 0,$$

$$p_\lambda \chi^{\mu\nu,\lambda} = 0 \quad , \quad p_\lambda \chi^{\mu\lambda,\rho} = 0.$$

$\chi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ se déduit alors de ces fonctions par l'équation de définition (B_1).

II. — Dans le cas où $\Phi^{\mu,\rho}$ existe non identiquement nul, nous avons pour $\chi \neq 1$ la condition de transversalité

$$(A_4)\qquad p_\lambda \Phi^{\lambda,\mu} = 0.$$

La combinaison de

$$p_\lambda\left(\Phi^{\lambda\mu,\rho} + \Phi^{\mu,\lambda\rho}\right) + \Omega_0 \Phi^{\mu,\rho} = 0$$

et

$$\Phi^{[\mu\nu,\rho]} = 0$$

donne

$$(A_6)\qquad p_\lambda \Phi^{\lambda\mu,\rho} + \frac{\Omega_0}{2}\Phi^{\mu,\rho} = 0.$$

On déduit alors de (A_1)

$$\left(p_\lambda p^\lambda\right)\Phi_{\nu,\rho\sigma} - \frac{\Omega_0}{2}\left(p_\rho \Phi_{\nu,\sigma} - p_\sigma \Phi_{\nu,\rho}\right) + \Omega_0 p^\lambda \Phi_{\lambda\nu,\rho\sigma} = 0,$$

et par combinaison avec (A_2)

$$\left(p_\lambda p^\lambda - \Omega_0^2\right)\Phi_{\nu,\rho\sigma} = \Omega_0\left(\chi + \frac{1}{2}\right)\left(p_\rho \Phi_{\nu,\sigma} - p_\sigma \Phi_{\nu,\rho}\right),$$

Cette relation, compte tenu de (A_4) et de (A_5) donne alors

$$\left[p_\lambda p^\lambda - \frac{\Omega_0^2}{2(\chi + 1)}\right]\Phi^{\mu,\rho} = 0.$$

Sous la condition $2(\chi + 1) > 0$ (ou $\chi > -1$), les fonctions $\Phi^{\mu,\rho}$ vérifient l'équation du second ordre du type de Klein-Gordon

$$\left[p_\lambda p^\lambda - \frac{\Omega_0^2}{2(\chi + 1)}\right]\Phi^{\mu,\sigma} = 0$$

en étant assujetties en outre aux conditions

$$\Phi^{\mu,}{}_{,\mu} = 0 \quad , \quad p_\lambda \Phi^{\lambda,\mu} = 0.$$

Tenant compte de ces relations, on a maintenant $\Phi^{\mu\nu,\rho}$ et $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ déduits de $\Phi^{\mu,\rho}$ par

$$\Phi_{\mu,\rho\sigma} = -\frac{(\chi + 1)}{\Omega_0}\left(p_\rho \Phi_{\mu,\sigma} - p_\sigma \Phi_{\mu,\rho}\right),$$

$$\Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{2(\chi + 1)}{\Omega_0^2}\left(p_\mu p_\rho \Phi_{\nu,\sigma} - p_\mu p_\sigma \Phi_{\nu,\rho} - p_\nu p_\rho \Phi_{\mu,\sigma} + p_\nu p_\sigma \Phi_{\mu,\rho}\right).$$

Nous allons maintenant examiner les solutions de type ondes planes définies comme fonction de l'invariant associé à un vecteur de propagation n^μ, vecteur unitaire du genre temps:

$$n^\mu n_\mu = 1 \quad , \quad u = n_\mu x^\mu,$$

Nous poserons alors

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \varphi^{\mu\nu,\rho} Y_1(u), \qquad \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma} Y_2(u),$$
$$\Omega_0 = \hbar\omega_0,$$

et par suite

$$\Phi^{\mu,\rho} = \varphi^{\mu,\rho} Y_2(u).$$

Les symétries des fonctions $\Phi^{\mu\nu,\rho}$, $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ et $\Phi^{\mu,\rho}$ sont ici reportées sur les amplitudes constantes

$$\varphi^{\mu,\rho} \quad , \quad \varphi^{\mu\nu,\rho} \quad , \quad \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma}.$$

La substitution de ces fonctions dans le système (A_1), (A_2) donne alors

$$\left(n_\mu \varphi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \varphi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \varphi_{\mu\nu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu\nu,\rho}\right) Y_1' + i\omega_0 \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} Y_2 = 0,$$

$$\left[n^\lambda \varphi_{\lambda,\mu,\rho\sigma} + \chi\left(n_\rho \varphi_{\mu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu,\rho}\right)\right] Y_2' + i\omega_0 \varphi_{\mu,\rho\sigma} Y_1 = 0$$

Ce système se sépare en introduisant *deux constantes* λ_1, λ_2 pour l'instant arbitraires en nous donnant un système entre fonctions Y_1, Y_2,

$$Y_1' + \frac{i\omega_0}{\lambda_1} Y_2 = 0,$$

$$Y_2' + \frac{i\omega_0}{\lambda_2} Y_1 = 0,$$

et un système entre amplitudes

$$n_\mu \varphi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \varphi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \varphi_{\mu\nu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu\nu,\rho} = \lambda_1 \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma},$$

$$n^\lambda \varphi_{\lambda\mu,\rho\sigma} + \chi(n_\rho \varphi_{\mu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu,\rho}) = \lambda_2 \varphi_{\mu,\rho\sigma}.$$

Nous considérerons encore ici séparément les deux cas de trace $\varphi^{\mu,\rho}$ nulle et non nulle.

Dans le cas $\varphi^{\mu,\rho} \neq 0$, nous avons par contraction du système ci-dessus la condition de transversalité

$$n_\lambda \varphi^{\lambda,\rho} = 0$$

et la relation

$$n_\lambda(\varphi^{\lambda\mu,\rho} + \varphi^{\mu,\lambda\rho}) = \lambda_1 \varphi^{\mu,\rho}.$$

Par combinaison avec

$$\varphi^{[\mu\nu,\rho]} = 0,$$

cette dernière relation nous conduit à

$$n_\lambda \varphi^{\lambda\mu,\rho} = \frac{\lambda_1}{2} \varphi^{\mu,\rho}.$$

Par les combinaisons déjà considérées dans le cas général, on déduit alors de

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu,\rho\sigma} + \frac{\lambda_1}{2}(n_\rho \varphi_{\mu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu,\rho}) &= \lambda_1 n^\lambda \varphi_{\lambda\mu,\rho\sigma} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \varphi_{\mu,\rho\sigma} - \lambda_1 \chi(n_\rho \varphi_{\mu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu,\rho}),\end{aligned}$$

soit encore

$$(\lambda_1 \lambda_2 - 1)\varphi_{\mu,\rho\sigma} = \frac{\lambda_1}{2}(2\chi + 1)(n_\rho \varphi_{\mu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu,\rho}).$$

On en tire *la condition sur les constantes* λ_1, λ_2

$$\lambda_1 \lambda_2 = 2(\chi + 1).$$

Celle-ci étant vérifiée, il reste

$$\varphi_{\mu,\rho\sigma} = \frac{\lambda_1}{2}(n_\rho \varphi_{\mu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu,\rho}),$$

$$\varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} = n_\mu n_\rho \varphi_{\nu,\sigma} - n_\mu n_\sigma \varphi_{\nu,\rho} - n_\nu n_\rho \varphi_{\mu,\sigma} + n_\nu n_\sigma \varphi_{\mu,\rho}.$$

L'ensemble des amplitudes $\varphi^{\mu\nu,\sigma}$, $\varphi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ se déduit donc des seules amplitudes $\varphi^{\mu,\rho}$ telles que

$$\varphi^{\mu,}{}_{,\mu} = 0 \quad , \quad n_\lambda \varphi^{\lambda,\rho} = 0.$$

Le système est alors réduit à

$$Y_1' + \frac{i\omega_0}{\lambda_1} Y_2 = 0 \quad . \quad Y_2' + \frac{i\omega_0\lambda_1}{2(\chi + 1)} Y_1 = 0.$$

Les fonctions Y_1, Y_2 sont alors solutions de l'équation

$$Y_j'' + \mu_0^2 Y_j = 0, \qquad (j = 1.\ 2)$$

avec

$$\mu_0^2 = \frac{\omega_0^2}{2(\chi + 1)}.$$

La constante λ_1 est arbitraire et peut être fixée sans perte de généralité. Il sera commode de poser

$$\lambda_1 = 2.$$

On aura alors

$$\varphi^{\mu,\rho\sigma} = n^\rho \varphi^{\mu,\sigma} - n^\sigma \varphi^{\mu,\rho}.$$

Pour une solution onde plane particulière, pour laquelle n^μ est fixé, les fonctions Y_j s'écriront

$$Y_1(u) = Ce^{-i\mu_0 u},$$

$$Y_2(u) = \frac{i\lambda_1}{\omega_0} Y_1' = \frac{2C}{\sqrt{2(\chi + 1)}} e^{-i\mu_0 u}.$$

Il restera alors, incorporant la constante arbitraire C dans les amplitudes,

$$\overline{\Phi}^{(\mu\nu),\rho}\Phi_{(\mu\nu),\rho} = \overline{\varphi}^{\mu,\rho}\varphi_{\mu,\rho},$$

$$\overline{\Phi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = \frac{2}{\chi + 1}\overline{\varphi}^{\mu,\rho}\varphi_{\mu,\rho},$$

$$\overline{\Phi}^{\mu,\rho}\Phi_{\mu,\rho} = \frac{2}{\chi + 1}\overline{\varphi}^{\mu,\rho}\varphi_{\mu,\rho}.$$

Dans le cas où $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ est de trace nulle $\Phi^{\mu,\rho} = 0$, nous écrirons encore les ondes planes sous la forme

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \chi^{\mu\nu,\rho} Y_1(u),$$

$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \chi^{\mu\nu,\rho\sigma} Y_2(u).$$

Les symétries des fonctions $\Phi^{\mu\nu,\rho}$ et $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ sont ici encore reportées sur les amplitudes $\chi^{\mu\nu,\rho}$, $\chi^{\mu\nu,\rho\sigma}$.

On a donc

$$\chi^{\mu\lambda,}{}_{,\lambda} = 0 \quad , \quad \chi^{[\mu\nu,\rho]} = 0,$$

$$\chi^{\mu\nu,}{}_{,\mu\nu} = 0 \quad , \quad \chi^{\mu[\nu,\rho\sigma]} = 0$$

et en outre

$$\chi^{\mu,\rho} = 0.$$

La substitution nous conduit encore après séparation à deux systèmes, d'une part

$$Y_1' + \frac{i\omega_0}{\lambda_1} Y_2 = 0 \quad , \quad Y_2' + \frac{i\omega_0}{\lambda_2} Y_1 = 0,$$

et d'autre part

$$n_\mu \chi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \chi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \chi_{\mu\nu,\sigma} - n_\sigma \chi_{\mu\nu,\rho} = \lambda_1 \chi_{\mu\nu,\rho\sigma},$$
$$n^\lambda \chi_{\lambda\mu,\rho\sigma} = \lambda_2 \chi_{\mu,\rho\sigma}.$$

On en déduit comme dans le cas général les conditions de transversalité

$$n_\lambda \chi^{\lambda,\rho\sigma} = 0 \quad , \quad n_\lambda \chi^{\lambda\mu,\rho} = 0.$$

La combinaison des deux équations donne alors la condition

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

On pourra encore prendre sans perte de généralité $\lambda_1 = 1$ et *il restera la relation de définition*

$$\chi_{\mu\nu,\rho\sigma} = n_\mu \chi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \chi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \chi_{\mu\nu,} \; - n_{\sigma\sigma} \chi_{\mu\nu,\rho},$$

et le système

$$Y_1' + i\omega_0 Y_2 = 0 \quad , \quad Y_2' + i\omega_0 Y_1 = 0.$$

Ici les solutions ondes planes seront du type

$$Y_1 = Ce^{-i\mu_0 u} \quad , \quad Y_2 = Ce^{-i\mu_0 u}$$

avec

$$\mu_0 = \omega_0$$

Incorporant la constante arbitraire C dans les amplitudes $\chi^{\mu\nu,\rho}$, il restera finalement

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \chi^{\mu\nu,\rho} e^{-i\omega_0 u},$$
$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = (n^\mu \chi^{\nu,\rho\sigma} - n^\nu \chi^{\mu,\rho\sigma} + n^\rho \chi^{\mu\nu,\sigma} - n^\sigma \chi^{\mu\nu,\rho}) e^{-i\omega_0 u},$$

$\chi^{\mu\nu,\rho}$ étant assujetti aux conditions

$$n_\lambda \chi^{\lambda\mu,\rho} = n_\lambda \chi^{\mu\nu,\lambda} = 0.$$

On en déduit pour cette solution particulière

$$\overline{\Phi}^{(\mu\nu),\rho} \Phi_{(\mu\nu),\rho} = \overline{\chi}^{(\mu\nu),\rho} \chi_{(\mu\nu),\rho},$$
$$\overline{\Phi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 2\overline{\chi}^{(\mu\nu),\rho} \chi_{(\mu\nu),\rho}.$$

La définition des amplitudes

$$\varphi^{\mu\nu,\rho}, \; \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma}, \; \chi^{\mu\nu,\rho}, \; \chi^{\mu\nu,\rho\sigma},$$

entraîne notamment les relations

$$\bar{\varphi}^{(\mu\nu).\rho}\chi_{(\mu\nu),\rho} = 0,$$

$$\bar{\varphi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\chi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 0.$$

On en déduit entre fonctions des deux types les relations

$$\bar{\Phi}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(\mu\nu),\rho} = 0 \quad , \quad \bar{\Phi}^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\chi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 0.$$

Les amplitudes $\varphi^{\mu\nu,\rho}$, $\varphi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ du premier cas se déduisent des amplitudes $\varphi^{\mu,\rho}$ arbitraires sous réserve de vérifier la condition de trace $\varphi^{\mu,}{}_{\mu} = 0$ et la condition de transversalité

$$n_\lambda \varphi^{\lambda,\mu} = 0.$$

Nous allons obtenir *cinq amplitudes* $\varphi^{\mu,\rho}$ linéairement indépendantes et orthogonales entre elles vérifiant ces conditions.

Celles-ci vont être déterminées à partir des éléments d'une tétrade constituée par le vecteur unitaire n^μ et trois autres vecteurs unitaires du genre espace $n_{(a)}{}^{\mu}$, $n_{(b)}{}^{\mu}$, $n_{(c)}{}^{\mu}$.

Nous aurons donc

$$n^\mu n_\mu = 1 \quad , \quad n_{(a)}{}^{\mu} n_{(b)\mu} = g_{(ab)},$$

$$g_{(aa)} = g_{(bb)} = g_{(cc)} = -1 \quad , \quad g_{(ab)} = g_{(bc)} = g_{(ca)} = 0,$$

$$n^\mu n_{(a)\mu} = 0 \qquad (a,\ b,\ c).$$

Trois amplitudes linéairement indépendantes $\varphi^{\mu,\rho}$ sont alors obtenues en écrivant

$$\varphi^{\mu,\rho}_{(ab)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(n_{(a)}{}^{\mu} n_{(b)}{}^{\rho} + n_{(a)}{}^{\rho} n_{(b)}{}^{\mu}\right),$$

$$(a \neq b) \quad , \quad (ab) = (12),\ (23),\ (31).$$

La transversalité et la condition de trace sont immédiatement vérifiées. D'autre part, on a

$$\bar{\varphi}^{\mu,\rho}_{(ab)}\varphi_{(a'b')\mu,\rho} = g_{(aa')}g_{(bb')} + g_{(ab')}g_{(ba')},$$

et par suite

$$\bar{\varphi}^{\mu,\rho}_{(ab)}\varphi_{(ab)\mu,\rho} = 1,$$

$$\bar{\varphi}^{\mu,\rho}_{(ab)}\varphi_{(bc)\mu,\rho} = 0.$$

Deux autres amplitudes $\varphi^{\mu,\rho}$ peuvent être construites à partir des trois expressions

$$\varphi^{\mu,\rho}_{(c)} = n_{(a)}{}^{\mu} n_{(a)}{}^{\rho} - n_{(b)}{}^{\mu} n_{(b)}{}^{\rho}, \qquad (a) \neq (b).$$

Les conditions de trace et de transversalité sont satisfaites, mais ces trois amplitudes ne sont pas linéairement indépendantes : on a

$$\varphi^{\mu,\rho}_{(a)} + \varphi^{\mu,\rho}_{(b)} + \varphi^{\mu,\rho}_{(c)} = 0.$$

On forme alors deux amplitudes linéairement indépendantes

$$\varphi_{(A)}^{\mu,\rho} \quad , \quad \varphi_{(B)}^{\mu,\rho}$$

en ajoutant la condition

$$\bar{\varphi}_{(A)}^{\mu,\rho}\varphi_{(B)\mu,\rho} = 0,$$

Ceci nous conduit à prendre

$$\varphi_{(A)}^{\mu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\varphi_{(a)}^{\mu,\rho} - \varphi_{(b)}^{\mu,\rho}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(a)}{}^{\rho} + n_{(b)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\rho} - 2n_{(c)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\rho}\right)$$

et

$$\varphi_{(B)}^{\mu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(a)}{}^{\rho} - n_{(b)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\rho}\right).$$

On vérifie facilement ici les relations

$$\bar{\varphi}_{(A)}^{\mu,\rho}\varphi_{(A)\mu,\rho} = \bar{\varphi}_{(B)}^{\mu,\rho}\varphi_{(B)\mu,\rho} = 1,$$

$$\bar{\varphi}_{(A)}^{\mu,\rho}\varphi_{(B)\mu,\rho} = \bar{\varphi}_{(A)}^{\mu,\rho}\varphi_{(ab)\mu,\rho} = \bar{\varphi}_{(B)}^{\mu,\rho}\varphi_{(ab)\mu,\rho} = 0.$$

L'amplitude $\varphi^{\mu,\rho}$ générale se représentera donc par une combinaison linéaire du type

$$\varphi^{\mu,\rho} = C_{(ab)}\varphi_{(ab)}^{\mu,\rho} + C_{(bc)}\varphi_{(bc)}^{\mu,\rho} + C_{(ca)}\varphi_{(ca)}^{\mu,\rho} + C_{A}\varphi_{(A)}^{\mu,\rho} + C_{B}\varphi_{(B)}^{\mu,\rho}.$$

Désignant par C_s, $s = 1, 2, 3, 4, 5$, les cinq constantes C, introduites ici, on voit facilement que l'on aura

$$\bar{\varphi}^{\mu,\rho}\varphi_{\mu,\rho} = \sum_{s}\bar{C}_s C_s.$$

Dans le cas des solutions de seconde espèce, nous devons déterminer des amplitudes $\chi^{\mu\nu,\rho}$ linéairement indépendantes et vérifiant les conditions

$$\chi^{\mu\lambda,}{}_{,\lambda} = 0 \quad , \quad \chi^{[\mu\nu,\rho]} = 0,$$

$$n_{\lambda}\chi^{\mu\lambda,\rho} = n_{\lambda}\chi^{\mu\nu,\lambda} = 0,$$

On obtient trois éléments vérifiant ces conditions en posant

$$\chi_{(abc)}^{(1)\mu\nu,\rho} = \left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(b)}{}^{\mu}\right)n_{(c)}{}^{\rho} + \left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(c)}{}^{\mu}\right)n_{(b)}{}^{\rho}.$$

Ces trois éléments ne sont pas indépendants : on a entre eux la relation

$$\chi_{(abc)}^{(1)\mu\nu,\rho} + \chi_{(bca)}^{(1)\mu\nu,\rho} + \chi_{(cab)}^{(1)\mu\nu,\rho} = 0.$$

On formera alors les deux amplitudes $\chi_{(A)}^{\mu\nu,\rho}$, $\chi_{(B)}^{\mu\nu,\rho}$ linéairement indépendantes et orthogonales

$$\bar{\chi}_{(A)}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(B)(\mu\nu),\rho} = 0$$

en posant

$$\chi_{(A)}^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(c)}{}^{\mu}\right)n_{(b)}{}^{\rho} + \left(n_{(b)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu} - n_{(b)}{}^{\nu}n_{(c)}{}^{\mu}\right)n_{(a)}{}^{\rho} \right\},$$

$$\chi_{(B)}^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{ 2\left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(b)}{}^{\mu}\right)n_{(c)}{}^{\rho} + \left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(c)}{}^{\mu}\right)n_{(b)}{}^{\rho} \right.$$
$$\left. + \left(n_{(c)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\nu} - n_{(c)}{}^{\nu}n_{(b)}{}^{\mu}\right)n_{(a)}{}^{\rho} \right\}.$$

On a ici

$$\bar{\chi}_{(A)}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(A),(\mu\nu),\rho} = \bar{\chi}_{(B)}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(B),(\mu\nu),\rho} = -1.$$

On construit également *trois autres amplitudes, soient*

$$\chi_{(a)}^{\mu\nu,\rho},\ \chi_{(b)}^{\mu\nu,\rho},\ \chi_{(c)}^{\mu\nu,\rho}$$

par permutation de (a), (b), (c) dans l'expression

$$\chi_{(a)}^{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(n_{(a)}{}^{\mu}n_{(b)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\nu}n_{(b)}{}^{\mu}\right)n_{(b)}{}^{\rho} + \left(n_{(c)}{}^{\mu}n_{(a)}{}^{\nu} - n_{(a)}{}^{\mu}n_{(c)}{}^{\nu}\right)n_{(c)}{}^{\rho}\right].$$

Pour ces amplitudes, on aura encore

$$\bar{\chi}_{(a)}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(a),(\mu\nu),\rho} = -1,$$

$$\bar{\chi}_{(a)}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(b),(\mu\nu),\rho} = 0,$$

$$\bar{\chi}_{\substack{(A)\\ \text{ou (B)}}}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(a),(\mu\nu),\rho} = 0.$$

On a donc obtenu *cinq amplitudes linéairement indépendantes,* soient

$$\chi_{(s)}^{(\mu\nu),\rho}, \qquad s = (a),\ (b),\ (c),\ (A),\ (B).$$

L'amplitude générale de ce type s'écrira donc

$$\chi^{\mu\nu,\rho} = \sum_s C_s \chi^{\mu\nu,\rho}$$

et l'on aura

$$\bar{\chi}^{(\mu\nu),\rho}\chi_{(\mu\nu),\rho} = -\left(\sum_s \bar{C}_s C_s\right).$$

On vérifie facilement l'orthogonalité déjà signalée des amplitudes des types $\varphi^{\mu\nu,\rho}$ et $\chi^{\mu\nu,\rho}$.

BIBLIOGRAPHIE

G. Petiau, *Nuovo Cimento*, t. **40**, 1965, p. 81-101.
Ann. Institut Henri Poincaré, t. **3**, n° 2, 1965, p. 127-159.
C. R. Ac. Sc. Paris, t. **267** (B), 1968, p. 169-171.
Communication, 5e Conférence internationale sur la gravitation et la théorie de la relativité Tiflis, 1968 *(à paraître)*.

Manuscrit reçu le 3 mars 1969.