

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GAETANO CARICATO

Sur le problème de Cauchy pour les équations de la relativité générale dans les schémas matériels fluide parfait et matière pure

Annales de l'I. H. P., section A, tome 9, n° 3 (1968), p. 283-301

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__9_3_283_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Sur le problème de Cauchy
pour les équations de la relativité générale
dans les schémas matériels fluide parfait
et matière pure**

par

Gaetano CARICATO

(Istituto Matematico « G. Castelnuovo », Città Universitaria, Roma).

SUMMARY. — The Cauchy problem for the Einstein equations is considered, in the interior cases where the stress tensor of a perfect fluid or pure matter is present. It is shown that the Cauchy problem breaks into two separate invariant problems: the problem of initial conditions, the restricted problem of evolution.

For the restricted problem of evolution two theorems of existence and unicity are established: with the assumption of analytic data for a perfect fluid; without any assumption of analyticity for a system of pure matter

INTRODUCTION

Je considère dans ce travail les équations d'Einstein d'abord dans le cas fluide parfait muni d'une équation d'état, puis dans le cas matière pure; en poursuivant une étude précédente sur les équations de la gravitation dans le vide ⁽¹⁾, je prends en examen le problème de Cauchy correspondant.

⁽¹⁾ G. CARICATO, Sul problema di Cauchy per le equazioni gravitazionali nel vuoto. *Rendiconti di Matematica*, (3-4), vol. 22, 1963.

Même dans ce cas déjà, Lichnerowicz a montré que les équations d'Einstein ont une structure telle qu'on en peut localement tirer un système « restreint » d'équations aux dérivées partielles (les « équations d'évolution ») et un autre système d'équations aux dérivées partielles (les « équations de compatibilité ») qui, sur l'hypersurface initialement donnée n'expriment que des liaisons différentielles entre les données de Cauchy (les « conditions de compatibilité des données »). Toute solution des équations d'évolution qui, sur l'hypersurface donnée, vérifie les conditions de compatibilité, satisfait à la fois les équations de compatibilité dans son champ entier d'existence ⁽²⁾.

Lichnerowicz a montré aussi que si les données sont analytiques, le problème restreint d'évolution admet une solution analytique réelle et une seule.

Mais les deux problèmes n'ont pas été énoncés sous une forme intrinsèque.

Par la suite, Mme Bruhat a traduit en forme intrinsèque le problème des données initiales ⁽³⁾ et a fait une analyse soignée de différents procédés pour le résoudre.

Elle a, de plus, résolu le problème de Cauchy pour l'entier système des équations d'Einstein pour des données de Cauchy non analytiques ⁽⁴⁾ : en supposant que les équations d'Einstein étaient écrites en coordonnées harmoniques, elle a démontré, pour ces équations, un théorème d'existence et unicité par une technique utilisable pour avoir des formules qui permettent de calculer la solution, au moins approchée, correspondant à des données fixées.

Mme Bruhat a démontré en outre que toute solution des équations gravitationnelles en coordonnées physiquement admissibles, qui vérifie les données de Cauchy, peut s'exprimer en coordonnées harmoniques par une transformation convenable de coordonnées.

Il manquait une formulation intrinsèque du problème « restreint » d'évolution et l'étude de quelque procédé pour le résoudre. Dans ce travail je montre comment, en employant la technique des projections de Cat-

(2) A. LICHNEROWICZ, Problèmes globaux en mécanique relativiste. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, Paris, t. XII, 1939, p. 333; *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

(3) Y. BRUHAT, Sur l'intégration des équations de la relativité générale. *Journal of rational mechanics and analysis*, vol. 5, 1956, p. 951-966.

(4) Y. BRUHAT, Théorèmes d'existence en mécanique des fluides relativistes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 86, 1958, p. 155-175.

taneo ⁽⁵⁾, on parvient naturellement au partage du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein dans les cas intérieurs indiqués ci-dessus en deux problèmes distincts, tous les deux énoncés intrinsèquement. Dans cette formulation, on voit clairement le rôle essentiel du tenseur métrique spatial standard γ_{ik} , qui est celui d'organiser dans une variété V_4 différentiable fixée la congruence locale de courbes donnée de façon que cette congruence puisse constituer les lignes de courant du fluide.

Je montre aussi que pour le problème restreint d'évolution dans le cas fluide parfait, pour des données initiales analytiques, il existe une solution et une seule; dans le cas matière pure, la solution existe et est unique même quand les données ne sont que simplement différentiables : des théorèmes de Mme Bruhat ⁽⁶⁾ sont fondamentaux dans cette dernière démonstration.

Je suis heureux de manifester ici ma reconnaissance à M. Cattaneo pour les idées fécondes que son enseignement m'a apportées et les conseils qu'il m'a donnés; à Mme Bruhat et M. Lichnerowicz pour l'intérêt qu'ils ont pris à mes recherches et pour les encouragements qui m'ont permis de mener ce travail à bien.

§ 1. LES ÉQUATIONS DU CAS FLUIDE PARFAIT ET LEUR EXPRESSION RELATIVE À UN REPÈRE PHYSIQUE DONNÉ

n. 1. Les équations gravitationnelles.

On sait que le système d'équations du champ pour un fluide parfait peut s'écrire

$$(1) \quad G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\chi [p_0 g_{ik} + (\mu_0 c^2 + p_0) \gamma_i \gamma_k] \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

où les g_{ik} sont les composantes du tenseur métrique de la variété rieman-

⁽⁵⁾ C. CATTANEO, General Relativity : Relative standard mass, Momentum, Energy and Gravitational Field in a General System of Reference. *Il Nuovo Cimento*, série X, t. 10, 1958, p. 318-337; Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale. *Annali di Matematica pura e applicata* (IV) vol. XLVIII, 1959, p. 361-386.

⁽⁶⁾ Cf. le Mémoire cité en ⁽⁴⁾.

nienne V_4 dans laquelle nous supposons posé le fluide ⁽⁷⁾, γ_i le champ de vecteurs unitaires tangents aux lignes de courant du fluide, μ_0 la densité propre, p_0 la pression propre.

Puisque les lignes de courant du fluide forment une congruence de courbes de V_4 , le champ de vecteurs unitaires γ_i constitue un repère physique S bien déterminé; on peut donner donc aux équations (1) un aspect relatif à ce repère, en supposant de choisir un système de coordonnées locales adaptées au repère même ⁽⁸⁾. En posant ⁽⁹⁾

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} s_{jm} \equiv \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(R_{jm}) \quad (s_{4j} \equiv 0) \\ S_\alpha \equiv \frac{1}{2} [\tilde{\nabla}_\alpha^*(\tilde{K}^i{}_i) - \tilde{\nabla}_\beta^*(\tilde{K}_\alpha{}^\beta + \tilde{\Omega}_\alpha{}^\beta)] + C^\beta \tilde{\Omega}_{\beta\alpha} \quad (S_4 \equiv 0) \\ \mathfrak{J} \equiv \frac{1}{4} [(\tilde{K}_\alpha{}^\alpha)^2 - \tilde{K}^{\alpha\beta} \tilde{K}_{\alpha\beta} + 3\tilde{\Omega}^{\alpha\beta} \tilde{\Omega}_{\alpha\beta}]; \\ \tilde{P}_{\alpha\beta}^* \equiv -\tilde{\partial}_\beta \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\rho} \\ \alpha\rho \end{array} \right\}^* + \tilde{\partial}_\rho \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\rho} \\ \beta\alpha \end{array} \right\}^* - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\sigma} \\ \alpha\rho \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\rho} \\ \beta\sigma \end{array} \right\}^* + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\sigma} \\ \beta\alpha \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\rho} \\ \rho\sigma \end{array} \right\}^*, \quad (\tilde{P}_{4r}^* \equiv 0) \\ \tilde{R}^* \equiv \gamma^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}^* \equiv \gamma^{\alpha\beta} \tilde{P}_{\alpha\beta}^* \end{array} \right.$$

⁽⁷⁾ On suppose que la signature de la métrique hyperbolique normale est la suivante : $+++-$.

⁽⁸⁾ C'est-à-dire telles que les lignes du champ vectoriel $\underline{\gamma}$ ont les équations $x^\alpha = \text{const.}$ et par conséquent le vecteur unitaire $\underline{\gamma}$ orienté dans le futur, a pour composantes contravariantes $\gamma^\alpha = 0$, $\gamma^4 = 1/\sqrt{-g_{44}}$.

⁽⁹⁾ Cf. C. CATTANEO, le deuxième Mémoire cité en ⁽⁵⁾. Dans l'emploi des indices, on adopte ici la convention suivante : tout indice grec varie de 1 à 3, tout indice latin de 1 à 4. On rappelle que l'opérateur différentiel $\tilde{\partial}_i \equiv \partial_i + \gamma_i \gamma^A \partial_A$, *dérivation partielle transverse*, a caractère invariant vis-à-vis d'une transformation quelconque de coordonnées internes au repère physique S ; l'opérateur $\gamma^i \partial_i \equiv \gamma^A \partial_A$, *dérivation longitudinale*, appliqué à un tenseur d'espace, produit un tenseur d'espace, du même ordre. De plus, les symboles de Christoffel d'espace de première et deuxième espèce, ainsi définis

$$[\tilde{ij}, h]^* = \frac{1}{2} (\tilde{\partial}_i \gamma_{jh} + \tilde{\partial}_j \gamma_{hi} - \tilde{\partial}_h \gamma_{ij}); \quad \left\{ \begin{array}{c} \tilde{r} \\ ij \end{array} \right\}^* = \gamma^{rh} [\tilde{ij}, h]^*,$$

permettent de montrer que l'opérateur $\tilde{\nabla}_\alpha^*$, *dérivation covariante transverse*, agit sur un champ de tenseurs d'espace de la même façon qu'une dérivée covariante usuelle, sauf la substitution du tenseur métrique d'espace γ_{ik} au tenseur métrique d'espace-temps g_{ik} et de la dérivataon $\tilde{\partial}_\alpha$ à la dérivataon partielle ∂_α . On rappelle, en outre, que le vecteur d'espace C_i et les tenseurs d'espace \tilde{K}_{ik} , $\tilde{\Omega}_{ik}$ ont les expressions suivantes :

$$C_i \equiv \gamma^r \nabla_r \gamma_i = \gamma^A (\partial_A \gamma_i - \partial_i \gamma_A); \quad \tilde{K}_{ik} \equiv \gamma^A \partial_A \gamma_{ik}; \quad \tilde{\Omega}_{ik} \equiv \gamma_4 \left[\tilde{\partial}_i \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_4} \right) - \tilde{\partial}_k \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_4} \right) \right].$$

on obtient ⁽¹⁰⁾

$$(3) \left\{ \begin{aligned} s_{jm} &= \tilde{R}_{jm}^* + \frac{1}{4} \tilde{K}_\alpha^{\ \alpha} (\tilde{K}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) - \frac{1}{2} (\tilde{K}_m^{\ i} + \tilde{\Omega}_m^{\ i}) \tilde{K}_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma^4 \partial_4 (\tilde{K}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_j^{\ i} \tilde{\Omega}_{im} - C_j C_m - \tilde{\nabla}_m^* C_j ; \\ \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(R_{jm}) &= \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(G_{jm}) = S_j \gamma_m ; & \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(R_{jm}) &= \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(G_{jm}) = S_m \gamma_j ; \\ & & \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(G_{jm}) &= \frac{1}{2} (\tilde{R}^* + \mathfrak{J}) \gamma_j \gamma_m . \end{aligned} \right.$$

On a de même pour le tenseur d'énergie $T_{ik} \equiv p_0 g_{ik} + (\mu_0 c^2 + p_0) \gamma_i \gamma_k$

$$(4) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(T_{jm}) = p_0 \gamma_{jm}, \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(T_{jm}) = \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(T_{jm}) = 0, \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(T_{jm}) = \mu_0 c^2 \gamma_j \gamma_m.$$

On en déduit que les équations (1) sont parfaitement équivalentes à un système de trois équations tensorielles « spatiales » (une tensorielle, une vectorielle et une autre scalaire) qu'on peut écrire :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} s_{\alpha\rho} - \frac{1}{2} R \gamma_{\alpha\rho} &= - \chi p_0 \gamma_{\alpha\rho} \\ S_\alpha &= 0 \\ \tilde{R}^* + \mathfrak{J} &= - 2\chi \mu_0 c^2 \end{aligned} \right.$$

n.2. Les lois relatives de conservation.

En vertu de l'identité différentielle à laquelle le tenseur d'Einstein G_{ik} satisfait,

$$(6) \quad \nabla_i G^i_k \equiv 0,$$

le tenseur d'énergie T_{ik} vérifie l'équation

$$(7) \quad \nabla_j T_i^j = 0.$$

⁽¹⁰⁾ Ida CATTANEO GASPARINI, Projections naturelles des tenseurs de courbure d'une variété V_{n+1} à métrique hyperbolique normale. *C. R. Acad. Sci.*, t. 252, 1961, p. 3722-3724.

En traduisant en forme relative au repère physique S l'identité (6), on obtient ⁽¹¹⁾

$$(6)' \left\{ \begin{aligned} & \tilde{\nabla}_j^* s_m^j + C_h s_m^h - \frac{1}{2} RC_m - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_m^* R \\ & \quad + \frac{1}{2} \tilde{K}_\alpha^{\alpha} S_m + \gamma^4 \partial_4 S_m + \tilde{\Omega}_{hm} S^h + \frac{1}{2} (\tilde{R}^* + \mathfrak{J}) C_m \equiv 0 \\ & \frac{1}{2} (\tilde{K}_{jt} + \tilde{\Omega}_{jt}) s^{jt} - \frac{1}{4} R \tilde{K}_\alpha^{\alpha} + \tilde{\nabla}_j^* S^j + 2C_j S^j + \frac{1}{4} \tilde{K}_\alpha^{\alpha} (\tilde{R}^* + \mathfrak{J}) \\ & \quad + \frac{1}{2} \gamma^4 \partial_4 (\tilde{R}^* + \mathfrak{J}) \equiv 0. \end{aligned} \right.$$

De la même façon, les équations (7) qui peuvent s'écrire

$$\nabla_j (p_0 \gamma_i^j + \mu_0 c^2 \gamma_i^j \gamma^j) \equiv \nabla_j (p_0 \gamma_i^j) + \partial_j \mu_0 \cdot \gamma_i \gamma^j c^2 + \mu_0 c^2 \gamma^j \nabla_j \gamma_i + \mu_0 c^2 \gamma_i \nabla_j \gamma^j = 0$$

donnent par projection ⁽¹²⁾ l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$(8) \quad (\tilde{\partial}_i p_0 + p_0 C_i) dS_0 = -\mu_0 c^2 C_i \cdot dS_0$$

et l'équation de conservation de l'énergie matérielle

$$(9) \quad \gamma^4 \partial_4 (\mu_0 c^2 dS_0) = -\frac{1}{2} p_0 \tilde{K}_\alpha^{\alpha} dS_0,$$

dS_0 étant l'élément de volume propre du fluide.

A cause des formules

$$C_i \equiv \gamma^4 (\partial_4 \gamma_i - \partial_i \gamma_4), \quad \tilde{K}_{ij} \equiv \gamma^4 \partial_4 \gamma_{ij}, \quad \gamma^4 \partial_4 (dS_0) = \frac{1}{2} \tilde{K}_\alpha^{\alpha} dS_0$$

les équations précédentes peuvent être mises sous la forme

$$(8)' \quad \tilde{\partial}_\alpha p_0 + (p_0 + \mu_0 c^2) \gamma^4 (\partial_4 \gamma_\alpha - \partial_\alpha \gamma_4) = 0$$

$$(9)' \quad \gamma^4 \partial_4 (\mu_0 c^2) + \frac{1}{2} (p_0 + \mu_0 c^2) \gamma^{\alpha\beta} \gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} = 0.$$

⁽¹¹⁾ Cf. le travail cité en (*).

⁽¹²⁾ C. CATTANEO, Conservation Laws in General Relativity. *Il Nuovo Cimento*, série X, vol. 13, 1959, p. 237-240; Formulation relative des lois physiques en relativité générale, Cours professé au Collège de France, 1962.

**n.3. Une expression relative
différente des équations du champ.**

En vertu des équations (1), on a

$$(10) \quad G \equiv G^i_i \equiv -R = -\chi(3p_0 - \mu_0 c^2);$$

on en déduit alors

$$(11) \quad R_{jm} = -\frac{1}{2}\chi[(\mu_0 c^2 - p_0)\gamma_{jm} + (\mu_0 c^2 + 3p_0)\gamma_j\gamma_m],$$

et *vice versa*.

En faisant les projections naturelles des deux membres de l'équation (11), il vient

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\chi(\mu_0 c^2 - p_0)\gamma_{\alpha\beta} \\ S_\alpha = 0 \\ \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(R_{jm}) = -\frac{1}{2}\chi(\mu_0 c^2 + 3p_0)\gamma_j\gamma_m. \end{array} \right.$$

Donc les équations (11) équivalent aux équations (1), et on peut dire la même chose des systèmes d'équations (5) et (12) qui sont les expressions correspondantes relatives au repère physique S.

Naturellement le nouveau système d'équations

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\chi(\mu_0 c^2 - p_0)\gamma_{\alpha\beta} \\ S_\alpha = 0 \\ \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(G_{jm}) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathfrak{J})\gamma_j\gamma_m = -\chi\mu_0 c^2\gamma_j\gamma_m \end{array} \right.$$

est une conséquence des équations (12).

Mais on peut montrer aussi que ce dernier système d'équations équivaut parfaitement au système d'équations (12).

A cet effet, il suffit de voir que de la relation

$$(14) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(R_{jm}) = \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(G_{jm}) + \frac{1}{2}R\mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(g_{jm})$$

on déduit l'équation (12)₃, à cause du système d'équations (13).

En effet, compte tenu des formules

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{\alpha\sigma}(\delta^k_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma^k)R^{\sigma}_k \equiv \gamma_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta} + \gamma_{\alpha\sigma}\gamma_{\beta}\gamma^4R^{\sigma}_4 \\ S_{\alpha} \equiv -\gamma^4\gamma_{\alpha k}R^k_4 \equiv -\gamma^4(R_{\alpha 4} + \gamma_{\alpha}\gamma^4R_{44}) \\ \mathcal{F}_{\Theta\Theta}(G_{jm}) \equiv \gamma_j\gamma_m\gamma_r\gamma^4\left(R^r_4 - \frac{1}{2}Rg^r_4\right) \end{array} \right.$$

il vient de (13)₂ $\gamma_{\alpha\rho}R^{\rho}_4 = 0$; par conséquent, puisque $\det. \|\gamma_{\alpha\rho}\| \neq 0$, on a

$$(16) \quad R^{\rho}_4 = 0.$$

Les équations (13)₁ et (13)₃ deviennent alors respectivement

$$(17) \quad s_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\rho}R^{\rho}_{\beta} = -\frac{1}{2}\chi(\mu_0c^2 - p_0)\gamma_{\alpha\beta},$$

$$(18) \quad \frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathfrak{J}) \equiv \gamma_r\gamma^4\left(R^r_4 - \frac{1}{2}Rg^r_4\right) = -\chi\mu_0c^2.$$

Puisque $\gamma^{\sigma\alpha}\gamma_{\rho\alpha} = \delta^{\sigma}_{\rho}$, par (17) on a

$$\gamma^{\sigma\alpha}\gamma_{\alpha\rho}R^{\rho}_{\beta} = -\frac{1}{2}\chi(\mu_0c^2 - p_0)\gamma^{\sigma\alpha}\gamma_{\alpha\beta}$$

d'où

$$(19) \quad R^{\sigma}_{\beta} = -\frac{1}{2}\chi(\mu_0c^2 - p_0)\delta^{\sigma}_{\beta}.$$

En substituant dans (18), on déduit

$$(20) \quad R^4_4 = \frac{1}{2}\chi(\mu_0c^2 + 3p_0),$$

et encore par (16), (19), (20)

$$(21) \quad R = \chi(3p_0 - \mu_0c^2) :$$

en vertu des (13)₃ et (21), l'équation (12)₃ est une conséquence de l'équation (14).

On peut donc choisir les équations

$$(13)' \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\chi(\mu_0c^2 - p_0)\gamma_{\alpha\beta} \\ S_{\alpha} = 0 \\ R^* + \mathfrak{J} = -2\chi\mu_0c^2 \end{array} \right.$$

comme expression relative au repère physique S des équations du champ pour un schéma fluide parfait.

Ainsi (13)', (8)', (9)' constituent les équations fondamentales pour l'étude relativiste locale d'un fluide parfait, quand on a choisi un repère physique dont les lignes horaires sont les lignes de courant du fluide même.

A ces équations, il faut adjoindre la condition que le vecteur unitaire γ_i soit orienté dans le temps.

Supposons maintenant le fluide muni d'une équation d'état liant la densité propre et la pression propre,

$$(22) \quad p_0 = p_0(\mu_0)$$

et récrivons les équations fondamentales en essayant de montrer leur structure essentielle. Dans ce but, il faut remarquer que les composantes du tenseur s_{ik} non identiquement nulles, ont la forme ⁽¹³⁾

$$(23) \quad s_{\alpha\beta} \equiv a_{\alpha\beta}^{(rs\rho\sigma)} \partial_r \partial_s \gamma_{\rho\sigma} + b_{\alpha\beta}^{(rsi)} \partial_r \partial_s \gamma_i + p_{\alpha\beta}(\gamma_{\rho\sigma}, \partial_r \gamma_i, \gamma_i, \partial_4 \gamma_{\rho\sigma}) \quad (s_{4i} \equiv 0)$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}^{(rs\rho\sigma)}$, $b_{\alpha\beta}^{(rsi)}$ sont des polynômes dans les fonctions γ_i , $\gamma_{\rho\sigma}$ et les termes $p_{\alpha\beta}$ des polynômes dans les fonctions γ_i , $\partial_r \gamma_i$, $\gamma_{\rho\sigma}$, $\partial_4 \gamma_{\rho\sigma}$.

Cela posé, on peut vérifier que, compte tenu de l'équation d'état (22), les équations (9)', (13)'₁ et l'équation déduite de (8)' par dérivation le long des lignes de courant (opération invariante $\gamma^4 \partial_4$) sont résolubles par rapport aux $\partial_4 \partial_4 \gamma_{\rho\sigma}$, $\partial_4 \partial_4 \gamma_\alpha$ dans un domaine du repère physique S et peuvent s'écrire [cf. n. 4 prochain] :

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_4 \partial_4 \gamma_{\rho\sigma} &= \mathcal{L}_{\rho\sigma}(\partial_\gamma \partial_s \gamma_{\alpha\beta}, \partial_\gamma \partial_s \gamma_i, \mu_0) + \pi_{\rho\sigma}(\partial_4 \gamma_{\alpha\beta}, \partial_r \gamma_i, \partial_\alpha \mu_0) \\ \partial_4 \partial_4 \gamma_\alpha &= \mathcal{L}_\alpha(\partial_\rho \partial_s \gamma_{\gamma\sigma}, \partial_\rho \partial_s \gamma_i) + \mathcal{M}_\alpha(\partial_4 \gamma_{\gamma\sigma}, \partial_r \gamma_i, \partial_\alpha \mu_0) \\ \partial_4 \mu_0 &= -\frac{1}{2c^2} (p_0 + \mu_0 c^2) \gamma^{\rho\sigma} \partial_4 \gamma_{\rho\sigma}. \end{aligned} \right.$$

⁽¹³⁾ Leur expression explicite [cf. (9)] est la suivante :

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta} \equiv & \frac{1}{2} (\gamma^4)^2 \gamma^{\rho\sigma} [-\gamma_\alpha \gamma_\beta \partial_4 \partial_4 \gamma_{\rho\sigma} + \gamma_\beta \gamma_\sigma \partial_4 \partial_4 \gamma_{\alpha\rho} + \gamma_\alpha \gamma_\rho \partial_4 \partial_4 \gamma_{\sigma\beta} - \gamma_\rho \gamma_\sigma \partial_4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta}] \\ & + \frac{1}{2} (\gamma^4)^2 [\partial_4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \partial_4 \partial_4 \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \partial_4 \partial_4 \gamma_\beta] + \frac{1}{2} \gamma^4 \gamma^{\rho\sigma} [-\gamma_\alpha \partial_\rho \partial_4 \gamma_{\rho\sigma} - \gamma_\beta \partial_\alpha \partial_4 \gamma_{\rho\sigma} \\ & + \gamma_\beta \partial_\rho \partial_4 \gamma_{\alpha\sigma} + \gamma_\rho \partial_\beta \partial_4 \gamma_{\alpha\sigma} + \gamma_\alpha \partial_\rho \partial_4 \gamma_{\sigma\beta} - 2\gamma_\sigma \partial_\rho \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_\rho \partial_\alpha \partial_4 \gamma_{\sigma\beta}] \\ & - \frac{1}{2} \gamma^4 (\partial_4 \partial_\alpha \gamma_\beta + \partial_4 \partial_\beta \gamma_\alpha) + \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma} [\partial_\rho \partial_\beta \gamma_{\alpha\sigma} + \partial_\rho \partial_\alpha \gamma_{\sigma\beta} - \partial_\rho \partial_\sigma \gamma_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta \gamma_{\rho\sigma}] \\ & + \gamma^4 \partial_\alpha \partial_\beta \gamma_4 + \frac{1}{2} (\gamma^4)^2 [\gamma_\alpha \partial_4 \partial_\beta \gamma_4 + \gamma_\beta \partial_4 \partial_\alpha \gamma_4] + \frac{1}{2} (\tilde{K}_{\beta\alpha} + \tilde{\Omega}_{\beta\alpha}) \tilde{K}_{\rho}{}^\rho \\ & - \frac{1}{2} (\tilde{K}_{\beta}{}^\rho + \tilde{\Omega}_{\beta}{}^\rho) \tilde{K}_{\rho\alpha} + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{\alpha}{}^\rho \tilde{\Omega}_{\rho\beta} - C_\alpha C_\beta + \frac{1}{2} \partial_4 \gamma^4 \cdot \tilde{K}_{\alpha\beta} \\ & + [C_\alpha \partial_4 (\gamma_\beta \gamma^4) + C_\beta \partial_4 (\gamma_\alpha \gamma^4)] + C_\alpha [\gamma_4 \partial_\beta \gamma^4 - \gamma_\beta \partial_4 \gamma^4] - (\beta_{\alpha}^{\sim}, \sigma) \gamma^{\rho\sigma} C_\rho. \end{aligned}$$

Les fonctions $L_{\rho\sigma}$, $\pi_{\rho\sigma}$, L_α , M_α sont des polynômes (les premier et troisième linéaires, les deuxième et quatrième non linéaires, dans les fonctions indiquées entre parenthèses) qui ont pour coefficients des fonctions des γ_i , $\gamma_{\rho\sigma}$, γ^i , $\gamma^{\sigma\rho}$. Il convient de rappeler les équations (13)₂, (13)₃ sous la forme intrinsèque primitive :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_\alpha \equiv \frac{1}{2} [\tilde{\nabla}_\alpha^* (\tilde{K}^\rho_\rho) - \tilde{\nabla}_\beta^* (\tilde{K}_\alpha^\beta + \tilde{\Omega}_\alpha^\beta)] + C^\beta \tilde{\Omega}_{\beta\alpha} = 0 \\ \tilde{R}^* + \mathfrak{J} \equiv \gamma^{\alpha\beta} \tilde{P}_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{4} [(\tilde{K}_\alpha^\alpha)^2 - \tilde{K}^{\alpha\beta} \tilde{K}_{\alpha\beta} + 3\tilde{\Omega}^{\alpha\beta} \tilde{\Omega}_{\alpha\beta}] = -2\chi\mu_0 c^2. \end{array} \right.$$

Il y a enfin la condition

$$(26) \quad \gamma^i \gamma_i = -1.$$

**n.4. Conditions pour résoudre univoquement
le problème de Cauchy pour les équations (8)', (9)', (13)'
au voisinage d'une hypersurface $\bar{\Sigma}$.**

L'analyse des équations fondamentales (8)', (9)', (13)' [cf. n.5] montrera que les équations (13)₂', (13)₃' donnent les conditions de compatibilité des données de Cauchy, et que les autres équations (8)', (9)', (13)₁' traduisent proprement le problème de l'évolution. C'est pourquoi nous avons séparé ces dernières équations que nous avons écrites sous la forme (24).

Nous allons maintenant préciser quand on peut donner aux équations (8)', (9)', (13)₁' la forme (24) dans le voisinage d'une hypersurface $\bar{\Sigma}$, d'équation locale $x^4 = 0$, puisque, pour avoir cela, on sait que l'hypersurface $\bar{\Sigma}$ doit vérifier les conditions suivantes :

a) ne doit être tangente, en aucun de ses points, ni au cône élémentaire correspondant, ni à une ligne de courant du fluide;

b) ne doit pas être une hypersurface d'onde hydrodynamique.

Q étant un point quelconque de $\bar{\Sigma}$, si on appelle $\bar{\pi}_Q$ l'espace vectoriel tangent à $\bar{\Sigma}$ en Q, il suffit que l'on ait sur $\bar{\Sigma}$

$$(27) \quad (\gamma_{ik} - \gamma_i \gamma_k) \bar{\xi}^i \bar{\xi}^k > 0 \quad \mathbf{V}_{\bar{\xi}} \in \bar{\pi}_Q; \quad \gamma_i \gamma^i = \gamma_4 \gamma^4 = -1$$

pour que la condition a) soit vérifiée.

Pour satisfaire la condition b), il convient de rappeler brièvement l'équation caractéristique du système d'équations (8)', (9)'.

En donnant à l'équation (9)' la forme qu'on en déduit à l'aide de la relation (14)

$$(28) \quad \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tilde{K}_i{}^i = \nabla_i \gamma^i,$$

le système d'équations (8)', (9)' peut s'écrire

$$(29) \quad \begin{cases} \gamma^{ja} \tilde{\partial}_a p_0 + (p_0 + \mu_0 c^2) \gamma^r \nabla_r \gamma^i = 0 \\ \gamma^4 \partial_4 (\mu_0 c^2) + (p_0 + \mu_0 c^2) \nabla_i \gamma^i = 0 \end{cases} \quad [p_0 = p_0(\mu_0)]$$

Par les conditions de compatibilité de Hugoniot, appliquées à la dérivée longitudinale de p_0 , au gradient transvers de p_0 et au tenseur $\nabla_i \gamma^i$,

$$(30) \quad \Delta(\gamma^4 \partial_4 \mu_0) = \lambda^{(\mu)} \gamma^4 \partial_4 z; \quad \Delta(\tilde{\partial}_a p_0) = \frac{dp_0}{d\mu_0} \lambda^{(\mu)} \tilde{\partial}_a z; \quad \Delta(\nabla_i \gamma^i) = \lambda^{(j)} \partial_j z$$

$\lambda^{(\mu)}$, $\lambda^{(j)}$ étant les paramètres caractéristiques des discontinuités et

$$z(x^1, x^2, x^3, x^4) = \text{const.}$$

l'équation de $\bar{\Sigma}$, on déduit de (29) l'équation caractéristique

$$(31) \quad (c\gamma^4 \partial_4 z)^2 = \frac{dp_0}{d\mu_0} \gamma^{\alpha\beta} \tilde{\partial}_\alpha z \cdot \tilde{\partial}_\beta z.$$

Donc pour $z = x^4$, on obtient la condition

$$(32) \quad \gamma^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta - (c\gamma^4)^2 \cdot \frac{d\mu_0}{dp_0} \neq 0$$

qui doit être satisfaite sur $\bar{\Sigma}$ par les données de Cauchy, pour exclure que $\bar{\Sigma}$, d'équation locale $x^4 = 0$, soit une hypersurface d'onde hydrodynamique.

On remarque que de (31), on déduit, pour la vitesse v de propagation des ondes hydrodynamiques, l'expression (15)

$$(33) \quad v = \sqrt{\left| \frac{dp_0}{d\mu_0} \right|} = \left| \frac{c\gamma^4 \partial_4 z}{\tilde{\text{grad}} z} \right|.$$

(14) Cf. C. CATTANEO, Cours cité à la note (12), p. 95 [9].

(15) Il n'est pas inutile peut-être de montrer brièvement comme on peut obtenir, dans

**§ 2. LE PROBLÈME DE CAUCHY
POUR UN FLUIDE PARFAIT
MUNI D'UNE ÉQUATION D'ÉTAT**

n.5. Analyse des équations fondamentales.

Remarquons d'abord que des relations différentielles (6) et (7) on déduit l'équation

$$(34) \quad \nabla_j(G^j_m + \chi T^j_m) = 0;$$

en tenant compte de (6)', (8)' et (9)', cette équation donne lieu aux équations suivantes, relatives au repère physique S :

$$(35) \quad \tilde{\nabla}_j^* s^j_m + C_h s^h_m - \left(\frac{1}{2}R - \chi p_0\right) C_m - \tilde{\partial}_m \left(\frac{1}{2}R - \chi p_0\right) \\ + \frac{1}{2} S_m \tilde{K}^{\alpha} + \gamma^4 \partial_4 S_m + \tilde{\Omega}_{jm} S^j + \left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathcal{J}) + \chi \mu_0 c^2\right] C_m = 0,$$

un repère physique S donné, la vitesse relative de propagation d'une onde, dont l'équation soit $z(x^1, x^2, x^3, x^4) = \text{const.}$

En tenant compte de l'intervalle de temps relatif

$$(b) \quad dT = -\frac{1}{c} \gamma_i dx^i,$$

différent de zéro même pour un vecteur dx^i isotrope, si on considère les équations d'une bicaractéristique sous la forme $x^i = x^i(T)$, on déduit

$$(c) \quad \frac{dz}{dT} \equiv \partial_i z \cdot \frac{dx^i}{dT} = 0.$$

Puisque on a $\gamma^i \gamma_i = \gamma^4 \gamma_4 = -1$, on obtient de (b)

$$\frac{dx^4}{dT} = \gamma^4 \left(c + \gamma_{\alpha} \frac{dx^{\alpha}}{dT} \right)$$

et, par conséquent, de (c)

$$\tilde{\partial}_{\alpha} z \cdot \frac{dx^{\alpha}}{dT} + c \gamma^4 \partial_4 z = 0.$$

En posant

$$\tilde{\text{grad}} z \equiv |\tilde{\text{grad}} z| \cdot \text{vers grad } z, \quad v = V \cdot \text{vers grad } z, \quad \left(v^i \equiv \frac{dx^i}{dT} \right)$$

on en déduit la vitesse relative de propagation de l'onde

$$v = -\frac{c \gamma^4 \partial_4 z}{|\tilde{\text{grad}} z|}.$$

$$(36) \quad \frac{1}{2} (\tilde{K}_{jr} + \tilde{\Omega}_{jr}) s^{jr} \gamma_m - \left(\frac{1}{2} R - \chi p_0 \right) \cdot \frac{1}{2} \tilde{K}^a_\alpha \gamma_m + (\tilde{\nabla}_j^* S^j + 2C_h S^h) \gamma_m + \left[\frac{1}{2} (\tilde{R}^* + J) + \chi \mu_0 c^2 \right] \cdot \frac{1}{2} \tilde{K}^a_\alpha \gamma_m + \gamma^4 \partial_4 \left[\frac{1}{2} (\tilde{R}^* + J) + \chi \mu_0 c^2 \right] \gamma_m = 0.$$

Supposons maintenant avoir donné dans une variété différentiable V_4 une hypersurface $\bar{\Sigma}$ et un champ de vecteurs contravariants $\gamma^i(x)$ qui ne soient jamais tangents sur $\bar{\Sigma}$ à l'hypersurface même et supposons, de plus, que nous connaissions un champ de vecteurs covariants $\gamma_i(x)$, un champ de tenseurs covariants symétriques $\gamma_{ik}(x)$ et deux fonctions scalaires $\mu_0(x), p_0(x)$ tels que, le tenseur métrique $g_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_i \gamma_k$ étant donné sur la variété V_4 , les équations suivantes [cf. (8)', (9)', (13)'₁, (26)] soient satisfaites au voisinage de $\bar{\Sigma}$:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma^i \gamma_i &= -1 \\ s_{jm} \gamma^m &= 0 \\ s_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \chi (\mu_0 c^2 - p_0) \gamma_{\alpha\beta} \\ \tilde{\partial}_\alpha p_0 + (p_0 + \mu_0 c^2) \gamma^4 (\partial_4 \gamma_\alpha - \partial_\alpha \gamma_4) &= 0 \\ \gamma^4 \partial_4 (\mu_0 c^2) + \frac{1}{2} (p_0 + \mu_0 c^2) \gamma^{\alpha\beta} \gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \right.$$

et sur $\bar{\Sigma}$ les conditions [cf. (25)]

$$(38) \quad (S_\alpha)_{\bar{\Sigma}} = 0, \quad (\tilde{R}^* + J + 2\chi \mu_0 c^2)_{\bar{\Sigma}} = 0.$$

On peut démontrer alors que les fonctions tensorielles et scalaires dont nous venons d'admettre l'existence satisfont aussi, au même voisinage de $\bar{\Sigma}$, les équations

$$(39) \quad S_\alpha = 0, \quad \tilde{R}^* + J + 2\chi \mu_0 c^2 = 0.$$

Dans ce but, il convient de relever d'abord que, dans les hypothèses faites,

a) les deux dernières équations (37) ne sont rien de plus que la traduction de l'équation (7) en forme relative au repère physique déterminé par le champ de vecteurs γ^i ;

b) le champ de vecteurs γ_i est la représentation covariante du champ de vecteurs γ^i ;

c) on a [cf. (3)]

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \equiv \tilde{R}^* + \frac{1}{4} (\tilde{K}^\alpha_\alpha)^2 - \frac{1}{2} \tilde{K}^{\alpha\rho} \tilde{K}_{\alpha\rho} + \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^4 \partial_4 (\tilde{K}_{\alpha\beta} + \tilde{\Omega}_{\beta\alpha}) \\ - C^\beta C_\beta - \tilde{\nabla}_\beta^* C^\beta + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^{i\beta} \Omega_{i\beta} = -\frac{3}{2} \chi (\mu_0 c^2 - p_0), \end{aligned}$$

et, par conséquent, en vertu des identités

(40)

$$R \equiv \tilde{R}^* + \frac{1}{4} [(\tilde{K}^\alpha_\alpha)^2 + \tilde{K}^{\alpha\beta} \tilde{K}_{\alpha\beta} + \tilde{\Omega}^{\alpha\beta} \tilde{\Omega}_{\alpha\beta}] + \gamma^4 \partial_4 (\tilde{K}^\alpha_\alpha) - 2(\tilde{\nabla}_\alpha^* C^\alpha + C^\rho C_\rho),$$

$$(41) \quad \tilde{K}^{\alpha\beta} \equiv -\gamma^4 \partial_4 \gamma^{\alpha\beta}$$

on en déduit

$$(42) \quad R = -[\tilde{R}^* + \mathfrak{J} + 3\chi(\mu_0 c^2 - p_0)].$$

Cela posé, les identités (35), (36) deviennent

(43)

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma^4 \partial_4 S_\alpha &= -\frac{1}{2} \tilde{\partial}_\alpha [\tilde{R}^* + \mathfrak{J} + 2\chi\mu_0 c^2] - [\tilde{R}^* + \mathfrak{J} + 2\chi\mu_0 c^2] C_\alpha - \frac{1}{2} \tilde{K}^\beta_\beta S_\alpha - \tilde{\Omega}^\beta_\alpha S_\beta \\ \gamma^4 \partial_4 [\tilde{R}^* + \mathfrak{J} + 2\chi\mu_0 c^2] &= -[\tilde{R}^* + \mathfrak{J} + 2\chi\mu_0 c^2] \tilde{K}^\rho_\rho - 2(\tilde{\nabla}_\rho^* S^\rho + 2C_\rho S^\rho). \end{aligned} \right.$$

Ces équations aux dérivées partielles linéaires dans les fonctions inconnues S_α , $\tilde{R}^* + \mathfrak{J} + 2\chi\mu_0 c^2$ peuvent être écrites sous forme normale par rapport à la variable x^4 , à condition qu'on ait ⁽¹⁶⁾ [cf. (32)]

$$(44) \quad \gamma^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \neq 1,$$

et n'admettent, pour des données sur $\bar{\Sigma}$ nulles, d'autre solution que la solution nulle ⁽¹⁷⁾

$$S_\alpha \equiv 0, \quad \tilde{R}^* + \mathfrak{J} + 2\chi\mu_0 c^2 \equiv 0.$$

L'analyse précédente montre donc que le problème de Cauchy pour un fluide parfait peut être partagé en deux problèmes : le problème des données initiales; le problème restreint de l'évolution.

⁽¹⁶⁾ Cf. note citée en (*) [16].

⁽¹⁷⁾ Cf. S. CINQUINI, *Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari*, Note I e II. *Rendiconti Accademia Lincei* (VIII), t. 33, 1962, p. 401-404 e t. 34, 1963, p. 27-33.

**n.6. Formulation intrinsèque
du problème des données initiales
et du problème restreint de l'évolution.**

1. Problème des données initiales

Dans une variété différentiable à quatre dimensions, V_4 , supposons donnés :

- a) un morceau d'hypersurface régulière $\bar{\Sigma}$;
- b) un domaine à trois dimensions D sur $\bar{\Sigma}$;
- c) en tout point Q de D deux fonctions scalaires $\bar{\mu}_0(Q)$, $p_0(\bar{\mu}_0)$ et un champ de vecteurs covariants $\bar{\gamma}_i(Q)$;
- d) dans un voisinage de l'hypersurface $\bar{\Sigma}$, de trace D sur $\bar{\Sigma}$, supposons donnés de plus un champ de vecteurs contravariants $\bar{\gamma}^i$ qui sur $\bar{\Sigma}$ ne soient pas tangents à $\bar{\Sigma}$ et vérifient la condition

$$(45) \quad \bar{\gamma}^i \bar{\gamma}_i = -1 \quad [\bar{\gamma}^i = (\bar{\gamma}^i)_{\bar{\Sigma}}].$$

Cela posé, si on appelle $\bar{\pi}_Q$ l'espace vectoriel tangent à $\bar{\Sigma}$ en Q, en choisissant des coordonnées (x^i) adaptées au champ de vecteurs $\bar{\gamma}^i(x)$ et à l'hyper-surface $\bar{\Sigma}$ ⁽¹⁸⁾ proposons-nous de chercher deux tenseurs symétriques $\bar{\gamma}_{ij}$, $\bar{\varphi}_{ij}$ (signifiant respectivement le tenseur métrique choisi pour $\bar{\Sigma}$ et la détermination préfixée du tenseur de déformation $\tilde{K}_{\alpha\beta}$) vérifiant les conditions [cf. (32), (44)]

$$(46) \quad \bar{\gamma}_{ij} \bar{\gamma}^j = 0, \quad \bar{\varphi}_{ij} \bar{\gamma}^j = 0$$

$$(47) \quad (\bar{\gamma}_{ij} - \bar{\gamma}_i \bar{\gamma}_j) \bar{\xi}^i \bar{\xi}^j > 0 \quad \mathbf{V} \bar{\xi}^r \in \bar{\pi}_Q$$

$$(48) \quad \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \bar{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\beta \neq (c\bar{\gamma}^4)^2 \cdot \frac{d\bar{\mu}_0}{dp_0}, \quad \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \bar{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\beta \neq 1$$

et tels que, avec toutes les précédentes données, satisfassent les équations [cf. (25)]

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} [\tilde{\nabla}_\alpha^* (\bar{\varphi}^\rho{}_\rho) - \tilde{\nabla}_\sigma^* (\bar{\varphi}_\alpha{}^\sigma + \bar{\omega}_\alpha{}^\sigma)] + \bar{C}^\beta \bar{\omega}_{\beta\alpha} = 0 \\ \bar{\gamma}^{\alpha\beta} (\tilde{P}_{\alpha\beta}^*)_{\bar{\Sigma}} + \frac{1}{4} [(\bar{\varphi}_\alpha{}^\alpha)^2 - \bar{\varphi}^{\alpha\beta} \bar{\varphi}_{\alpha\beta} + 3\bar{\omega}^{\alpha\beta} \bar{\omega}_{\alpha\beta}] = -2\chi \bar{\mu}_0 c^2. \end{cases}$$

⁽¹⁸⁾ C'est-à-dire telles que les lignes du champ vectoriel $\bar{\gamma}^i(x)$ et l'hypersurface $\bar{\Sigma}$ ont respectivement les équations $x^\alpha = \text{const.}$, $x^4 = 0$.

Le vecteur $\bar{C}_\alpha \in \bar{\pi}_Q$ et le tenseur $\bar{\omega}_{\alpha\beta} \in \bar{\pi}_Q \otimes \bar{\pi}_Q$ sont donnés des formules

$$(50) \quad \bar{C}_\alpha = - \frac{\bar{p}'_0(\bar{\mu}_0)}{p_0(\bar{\mu}_0) + \bar{\mu}_0 c^2} \partial_\alpha \bar{\mu}_0 + \frac{\bar{p}'_0(\bar{\mu}_0)}{2c^2} \cdot \bar{\gamma}^{\rho\sigma} \bar{\varphi}_{\rho\sigma} \cdot \bar{\gamma}_\alpha \quad \left(\bar{p}'_0 = \frac{d\bar{p}_0}{d\bar{\mu}_0} \right)$$

$$\bar{\omega}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \bar{\gamma}_\beta - \partial_\beta \bar{\gamma}_\alpha + \frac{\bar{p}'_0(\bar{\mu}_0)}{p_0(\bar{\mu}_0) + \bar{\mu}_0 c^2} (\bar{\gamma}_\beta \partial_\alpha \bar{\mu}_0 - \bar{\gamma}_\alpha \partial_\beta \bar{\mu}_0),$$

le scalaire $\bar{\gamma}^{\alpha\beta} (\tilde{P}_{\alpha\beta}^*)_{\bar{\Sigma}}$ s'obtient en posant en (2)₄

$$(51) \quad (\gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\varphi}_{\alpha\beta}, \quad (\partial_4 \gamma_\alpha)_{\bar{\Sigma}} = \partial_\alpha \bar{\gamma}_4 + \frac{\bar{\gamma}_4 \bar{p}'_0(\bar{\mu}_0)}{p_0(\bar{\mu}_0) + \bar{\mu}_0 c^2} [\partial_\alpha \bar{\mu}_0 + \bar{\gamma}_\alpha (\gamma^4 \partial_4 \mu_0)_{\bar{\Sigma}}]$$

et en tenant compte des valeurs sur $\bar{\Sigma}$ des $\partial_4 \partial_4 \gamma_{\rho\sigma}$ [cf. (24)₁].

II. Problème restreint de l'évolution

En supposant d'avoir résolu le problème des données initiales, nous nous proposons de chercher dans un voisinage de $\bar{\Sigma}$, de trace D sur $\bar{\Sigma}$, une fonction scalaire $\mu_0(x)$, un champ de vecteurs covariants $\gamma_i(x)$ et un champ de tenseurs symétriques d'ordre 2, γ_{ij} , astreints aux conditions

$$(52) \quad \gamma^i \gamma_i = -1, \quad \gamma_{ij} \gamma^j = 0$$

et tels qu'ils satisfassent aux équations (¹⁹)

$$(53) \quad \begin{cases} \partial_4 \partial_4 \gamma_{\rho\sigma} = L_{\rho\sigma} (\partial_\nu \partial_s \gamma_{\alpha\beta}, \partial_\nu \partial_s \gamma_i, \mu_0) + \pi_{\rho\sigma} (\partial_4 \gamma_{\alpha\beta}, \partial_r \gamma_i, \partial_\alpha \mu_0) \\ \partial_4 \partial_4 \gamma_\alpha = L_\alpha (\partial_\rho \partial_s \gamma_{\mu\sigma}, \partial_\rho \partial_s \gamma_i) + M_\alpha (\partial_4 \gamma_{\nu\sigma}, \partial_r \gamma_i, \partial_\alpha \mu_0) \\ \partial_4 \mu_0 = - \frac{1}{2c^2} (p_0 + \mu_0 c^2) \gamma^{\rho\sigma} \partial_4 \gamma_{\rho\sigma} \end{cases}$$

et sur $\bar{\Sigma}$ les conditions

$$(54) \quad (\mu_0)_{\bar{\Sigma}} = \bar{\mu}_0, \quad (\gamma_i)_{\bar{\Sigma}} = \bar{\gamma}_i, \quad (\gamma_{ij})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\gamma}_{ij}, \quad (\gamma^4 \partial_4 \gamma_{ij})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\varphi}_{ij}.$$

Les équations (53) constituent un système d'équations aux dérivées partielles, normales par rapport à la variable x^4 ; par conséquent, pour des données initiales analytiques, le problème restreint d'évolution admet une solution et une seule.

(¹⁹) Les équations (53) représentent, pour le moment, seulement du point de vue formel les équations (24) où les fonctions $\gamma^{\rho\sigma}$ sont déduites des relations $\gamma^{\rho\sigma} \gamma_\sigma = \delta_\nu^\rho$ et, en général, on emploie le tenseur $g_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_i \gamma_k$ pour élever les indices.

Cette solution connue, si nous donnons le tenseur métrique $g_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_i \gamma_k$ sur la variété différentiable V_4 , au voisinage de $\bar{\Sigma}$, nous voyons que le champ de vecteurs γ_i , unitaires et orientés dans le temps, individualise un repère physique bien déterminé; dans ce repère physique, les équations (47) et (53) ne sont rien d'autre que les équations fondamentales obtenues des équations (1) par le procédé esquissé au paragraphe précédent.

§ 3. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR UN SCHEMA MATIÈRE PURE

n.7. Équations fondamentales.

Dans le cas matière pure, le tenseur des pressions est nul; par conséquent, on peut choisir comme équations fondamentales, dans ce cas, les équations du champ [cf. (13)']

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{jm} = -\frac{1}{2} \chi \mu_0 c^2 \gamma_{jm} \\ S_\alpha = 0 \\ \tilde{R}^* + \mathfrak{J} = -2\chi \mu_0 c^2; \end{array} \right.$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement [cf. (8)'] qui devient

$$(56) \quad C_\alpha \equiv \gamma^r (\nabla_r \gamma_\alpha - \nabla_\alpha \gamma_r) \equiv \gamma^4 (\partial_4 \gamma_\alpha - \partial_\alpha \gamma_4) = 0,$$

et se limite à nous dire que les lignes de courant de la matière pure sont des géodésiques de la métrique d'univers; et enfin, l'équation de conservation de l'énergie matérielle [cf. (9)'] qui prend la forme très simple

$$(57) \quad \gamma^4 \partial_4 (\mu_0 c^2) = -\frac{1}{2} \mu_0 c^2 \tilde{K}^\rho{}_\rho.$$

On peut remarquer que les équations (55)₁ sont résolubles par rapport aux $\partial_4 \partial_4 \gamma_{\rho\sigma}$ au voisinage d'une hypersurface $\bar{\Sigma}$, pourvu que les conditions (27), (44) soient satisfaites, et l'ensemble des équations fondamentales (55), (56), (57) peut s'écrire :

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_4 \partial_4 \gamma_{\rho\sigma} = L_{\rho\sigma} (\partial_\rho \partial_4 \gamma_{\alpha\beta}, \partial_\rho \partial_4 \gamma_i, \mu_0) + N_{\rho\sigma} (\partial_4 \gamma_{\alpha\beta}, \partial_r \gamma_i) \\ \partial_4 \partial_4 \gamma_\alpha = \partial_4 \partial_\alpha \gamma_4 \\ \partial_4 \mu_0 = -\mu_0 \gamma^{\rho\sigma} \partial_4 \gamma_{\rho\sigma}. \end{array} \right.$$

Les fonctions $L_{\rho\sigma}$ et $N_{\rho\sigma}$ sont des polynômes, les uns linéaires, les autres non linéaires dans les fonctions indiquées entre parenthèses, qui ont pour coefficients des fonctions des $\gamma_i, \gamma_{\rho\sigma}, \gamma^i, \gamma^{\rho\sigma}$. Les équations (58) sont plus simples que les équations correspondantes (24) pour un fluide parfait en pouvant tirer le système d'équations

$$\partial_4 \partial_4 \gamma_\alpha = \partial_4 \partial_\alpha \gamma_4$$

qui permet de connaître les γ_α au moyen de γ_4 . Pour cela, les équations (58) suggèrent une formulation intrinsèque du problème des données initiales et du problème restreint d'évolution, un peu plus simple, que nous allons esquisser maintenant, sans beaucoup de détails.

n.8. Le problème des données initiales et le problème restreint d'évolution dans le cas matière pure.

I. Problème des données initiales

Dans une variété différentiable à 4 dimensions V_4 fixée choisissons :

- a) un morceau d'hypersurface régulière $\bar{\Sigma}$;
- b) un domaine à 3 dimensions D sur $\bar{\Sigma}$;
- c) en tout point Q de D une fonction scalaire $\bar{\mu}_0(Q)$ et un champ de vecteurs covariants $\bar{\gamma}_i(Q)$;

d) dans un voisinage de l'hypersurface $\bar{\Sigma}$, de trace D sur $\bar{\Sigma}$, supposons donnés, en outre, un champ de vecteurs contravariants γ^i , qui sur $\bar{\Sigma}$ ne soient pas tangents à $\bar{\Sigma}$ et un champ de vecteurs covariants γ_i qui satisfont, au susdit voisinage de $\bar{\Sigma}$, les équations

$$(59) \quad \gamma^i \gamma_i = -1, \quad \gamma^i (\partial_i \gamma_r - \partial_r \gamma_i) = 0,$$

et sur $\bar{\Sigma}$ les conditions

$$(60) \quad (\gamma_i)_{\bar{\Sigma}} = \bar{\gamma}_i.$$

Cela posé, choisissons des coordonnées x^i adaptées au champ de vecteurs γ^i et à l'hypersurface $\bar{\Sigma}$, appelons $\bar{\pi}_Q$ l'espace vectoriel tangent à $\bar{\Sigma}$ en Q et proposons-nous de chercher deux tenseurs symétriques $\bar{\gamma}_{ij}, \bar{\varphi}_{ij}$ vérifiant (sur $\bar{\Sigma}$) les conditions

$$(61) \quad \bar{\gamma}_{ij} \bar{\gamma}^j = 0, \quad \bar{\varphi}_{ij} \bar{\gamma}^j = 0, \quad (\bar{\gamma}_{ij} - \bar{\gamma}_i \bar{\gamma}_j) \bar{\xi}^i \bar{\xi}^j > 0 \quad (\mathbf{V} \bar{\xi}^r \in \bar{\pi}_Q)$$

et les équations

$$(62) \quad \begin{cases} \tilde{\nabla}_\alpha^*(\bar{\varphi}_\rho{}^\rho) - \tilde{\nabla}_\sigma^*(\bar{\varphi}_\alpha{}^\sigma + \bar{\omega}_\alpha{}^\sigma) = 0 \\ \bar{\gamma}^{\alpha\beta}(\tilde{\mathbf{P}}_{\alpha\beta}^*)_{\bar{\Sigma}} + \frac{1}{4}[(\bar{\varphi}_\alpha{}^\alpha)^2 - \bar{\varphi}^{\alpha\beta}\bar{\varphi}_{\alpha\beta} + 3\bar{\omega}^{\alpha\beta}\bar{\omega}_{\alpha\beta}] = -2\chi\bar{\mu}_0c^2. \end{cases}$$

II. *Problème restreint de l'évolution*

Proposons-nous de chercher dans un voisinage de $\bar{\Sigma}$, de trace D sur $\bar{\Sigma}$, une fonction scalaire $\mu_0(x)$ et un champ de tenseurs d'ordre 2, symétriques, γ_{ij} , astreints aux conditions

$$(63) \quad \gamma_{ij}\gamma^j = 0$$

et tels qu'ils satisfassent aux équations

$$(64) \quad \begin{cases} \partial_4\partial_4\gamma_{\rho\sigma} = L_{\rho\sigma}(\partial_\rho\partial_4\gamma_{\alpha\beta}, \mu_0) + N_{\rho\sigma}(\partial_4\gamma_{\alpha\beta}) \\ \partial_4\mu_0 = -\frac{1}{2}\mu_0\gamma^{\rho\sigma}\partial_4\gamma_{\rho\sigma} \end{cases}$$

et sur $\bar{\Sigma}$ les conditions

$$(65) \quad (\mu_0)_{\bar{\Sigma}} = \bar{\mu}_0 \quad , \quad (\bar{\gamma}_{ij})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\gamma}_{ij} \quad , \quad (\gamma^4\partial_4\gamma_{ij})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\varphi}_{ij}.$$

En considérant la structure du système (64), nous voyons que de la dernière équation, on peut déduire la densité propre μ_0 , par les dérivées $\partial_4\gamma_{\alpha\beta}$; pour cela, on peut réduire les autres équations à un système de six équations aux dérivées partielles dans les six fonctions inconnues $\gamma_{\alpha\beta}$, qui a la même structure que le système aux dérivées partielles traduisant le problème restreint d'évolution dans le vide ⁽²⁰⁾. Pour ce dernier problème, en vertu d'un théorème de Mme Bruhat ⁽²¹⁾, j'ai pu démontrer l'existence et l'unicité de la solution, même quand les données ne sont que simplement différentiables. On peut dire donc de même dans le cas du problème restreint d'évolution pour le cas matière pure.

Remarque. — Si on considère un fluide parfait avec $\mu_0 = \text{const.}$, aux équations (8)', (9)', on peut substituer deux équations plus simples et les équations fondamentales (24) deviennent un cas particulier des équations (58). On en déduit que pour un tel fluide, le problème des données initiales et le problème restreint d'évolution peuvent être énoncés et traités comme pour le cas matière pure.

(Manuscrit reçu le 24 juin 1968).

⁽²⁰⁾ Cf. note citée en (1); et encore : Sul problema intrinseco di evoluzione per le equazioni einsteiniane, Nota I. *Rendiconti Acc. Lincei*, serie VIII, vol. XLI, 1966.

⁽²¹⁾ Cf. le mémoire cité en (6).