

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ÉRIC LEHMAN

Comportement asymptotique du tenseur de courbure sur un espace-temps asymptotiquement plat

Annales de l'I. H. P., section A, tome 9, n° 3 (1968), p. 213-271

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__9_3_213_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Comportement asymptotique du tenseur de courbure sur un espace-temps asymptotiquement plat

par

Éric LEHMAN

Faculté des Sciences de Paris.

SOMMAIRE. — A partir d'une définition simple de ce que nous entendons par espace-temps asymptotiquement plat, il est possible de faire l'étude du développement limité du tenseur de courbure R :

$$R = \overset{1}{R}r^{-1} + \overset{2}{R}r^{-2} + \overset{3}{R}r^{-3} + \overset{4}{R}r^{-4} + o(r^{-4})$$

(ou du tenseur de courbure conforme C). Nous obtenons ainsi des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\overset{1}{R}$ soit un cas N, III ou II de la classification de Bel-Petrov, pour que $\overset{2}{R}$ soit un cas III ou II, etc. En particulier, nous redémontrons le théorème de peeling de Sachs avec des hypothèses beaucoup moins fortes et sans intégrer les équations de champs (et sans calculs trigonométriques). Nous terminons en montrant à l'aide d'un exemple (le schéma « champ électro-magnétique pur ») comment il est possible d'employer les théorèmes obtenus.

SUMMARY. — Having defined asymptotically flat space-time, the author studies the limited development of the curvator tensor R :

$$R = \overset{1}{R}r^{-1} + \overset{2}{R}r^{-2} + \overset{3}{R}r^{-3} + \overset{4}{R}r^{-4} + o(r^{-4}),$$

(or the Weyl-tensor C). He proves that some simple conditions are equivalent to « $\overset{1}{R}$ is a N-case » (or III, or II) of the Bel-Petrov classification,

or « $\overset{2}{R}$ is a III-case » (or II), and so on... In particular, Sachs peeling-theorem is proved with much less hypotheses, without integrating the field equations (and without circular functions). Finally the model « pure electro-magnetic field » is studied as an example on such an asymptotically flat space-time.

INTRODUCTION

Pour mettre en évidence ce qui pourrait être une radiation gravitationnelle une des méthodes les plus simples est l'étude du comportement asymptotique du champ de gravitation sur un espace-temps asymptotiquement plat. C'est ainsi que Bondi, van der Burg et Metzner, dans le cas à symétrie axiale et symétrie par réflexion, et Sachs, dans un cas plus général, ont obtenu une décomposition du tenseur de courbure en $1/r$ pour r tendant vers l'infini (r étant un paramètre de distance correspondant à la distance de la source) mettant en évidence la classification de Bel-Petrov; plus précisément, le tenseur de courbure R peut s'écrire :

$$(1) \quad R = N \frac{1}{r} + III \frac{1}{r^2} + II \frac{1}{r^3} + I' \frac{1}{r^4} + \dots$$

N , III et II étant des ensembles de fonctions indépendantes de r ayant les propriétés des composantes d'un tenseur de courbure qui soit respectivement un cas nul, un cas III et un cas II de la classification de Bel-Petrov (II signifiant II ou III) relativement à un vecteur isotrope k ; de même I' correspondant à un tenseur ayant k comme vecteur propre isotrope. Mais ce résultat est obtenu à partir d'hypothèses trop fortes comme le fait remarquer Sachs. Le but de ce travail est, d'une part, de mettre en évidence le rôle de chacune des hypothèses et, d'autre part, de trouver des hypothèses simples conduisant au même résultat ou à des résultats analogues.

Nous commençons par donner une définition précise de ce que nous entendons par espace-temps asymptotiquement plat. Nous avons employé des coordonnées (u, x, y, z) de préférence aux coordonnées (u, r, θ, φ) ($u = t - r$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$), car il nous a semblé plus simple d'employer des fonctions homogènes de degré 0 en (x, y, z) plutôt que des fonctions de θ et φ indépendantes de r qui nécessitent pratiquement un

emploi assez lourd des fonctions trigonométriques. Nous terminons le chapitre I en définissant ce que nous entendons par « R est un tel cas de la classification de Bel-Petrov » (ces définitions sont un peu plus générales que les définitions usuelles car nous n'imposons pas que le tenseur de Ricci soit nul).

Dans les chapitres II, III et IV, nous faisons l'étude du tenseur de courbure aux ordres 1, 2, 3 et 4, mettant en évidence des décompositions du type (1), selon qu'on impose certaines propriétés à un vecteur que nous désignerons par k et dont les coordonnées sont :

$$\begin{cases} k^0 = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ k^\alpha = \frac{x^\alpha}{r} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \end{cases}$$

($\alpha \dots = 1, 2, 3; x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z; \rho$ est l'ordre jusqu'auquel on pousse le développement limité),

ou un vecteur l défini par :

$$l = k + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

Dans le chapitre V, nous montrerons que tous les résultats (à de légères modifications près) s'étendent au tenseur de courbure conforme. Cette extension était nécessaire, car il semble que ce soit le tenseur de courbure conforme qui représente le champ de gravitation.

Enfin, dans le chapitre VI, nous traduirons dans notre système de coordonnées les hypothèses faites par Sachs, ce qui nous permettra d'analyser de quelles hypothèses découlent les résultats contenus dans (1). En particulier les hypothèses permettant le choix des coordonnées entraînent que

$$R = N 1/r + II 1/r^2 + \dots,$$

l'hypothèse supplémentaire $k^a k^b R_{ab} = o\left(\frac{1}{r^3}\right)$ entraîne

$$R = N 1/r + III 1/r^2 + II 1/r^3 + \dots,$$

et enfin (1) découle de

$$k^a (R_{ab} k_c - R_{ac} k_b) = o\left(\frac{1}{r^4}\right) (*)$$

(*) Et de l'hypothèse que la métrique est définie dans toutes les directions d'espace.

La méthode employée pour démontrer le théorème de Sachs (1) nous paraît présenter plusieurs avantages :

- i)* une très grande simplicité de calculs,
- ii)* emploi des développements limités au lieu des fonctions analytiques,
- iii)* non nécessité des équations de champ (ou tout au moins des équations de champ plus générales que $\text{Ricci} = 0$, permettant en particulier la présence simultanée d'un champ gravitationnel et d'un autre champ, le champ électromagnétique, par exemple),
- iv)* un certain nombre de résultats semblables (moins forts mais conséquences d'hypothèses moins fortes), dont les plus importants sont résumés dans les tableaux suivants.

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

Nous avons pensé qu'il pourrait être commode de résumer la plupart des résultats obtenus dans les cinq premiers chapitres en quelques tableaux. Voici quelques remarques concernant la lecture de ces tableaux :

\Rightarrow , \Downarrow et \Leftarrow désignent l'implication logique
 \Leftrightarrow désigne l'équivalence logique
 des énoncés figurant à l'intérieur d'un même encadrement sont équivalents.

X^i désigne le terme d'ordre i du développement de X
 R » le tenseur de courbure
 C » le tenseur de courbure conforme
 R_{ab} » les composantes du tenseur de Ricci
 \tilde{r} » la courbure scalaire
 g_{ab} » le tenseur métrique

a, b, \dots les minuscules latines prennent les valeurs 0, 1, 2, 3

α, β, \dots les minuscules grecques prennent les valeurs 1, 2, 3

l désigne un vecteur tel que $l^\alpha = \frac{x^\alpha}{r}$ et $l^0 = 0$

k » » » $k^\alpha = \frac{x^\alpha}{r} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$ et $k^0 = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$

l (ou k) intégrable n signifie : l (ou k) intégrable à l'ordre n , de même pour isotrope, géodésique, géodésique de paramètre affine (noté : géo. p. a.).

Premier ordre ($\rho = 1$).

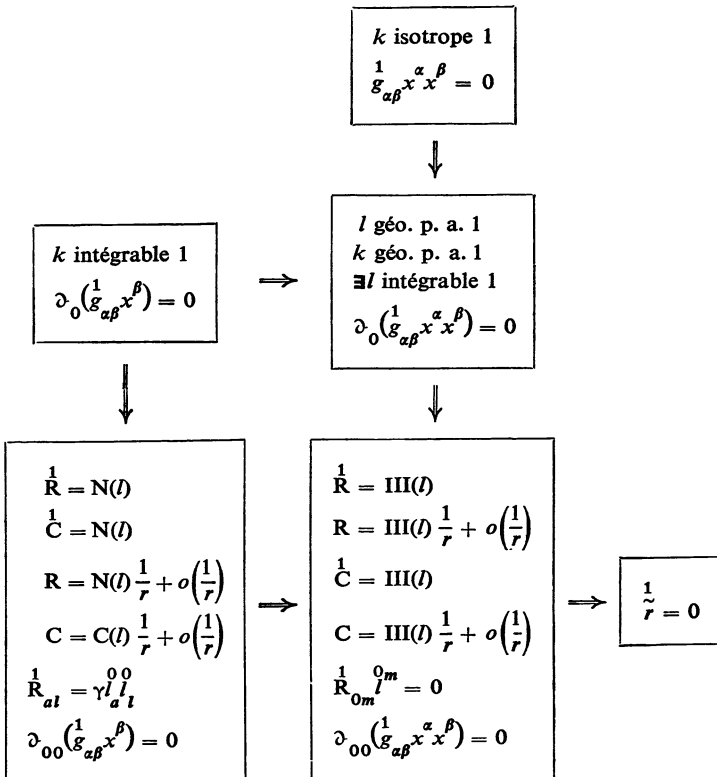
On a toujours :

l et k géodésiques 1

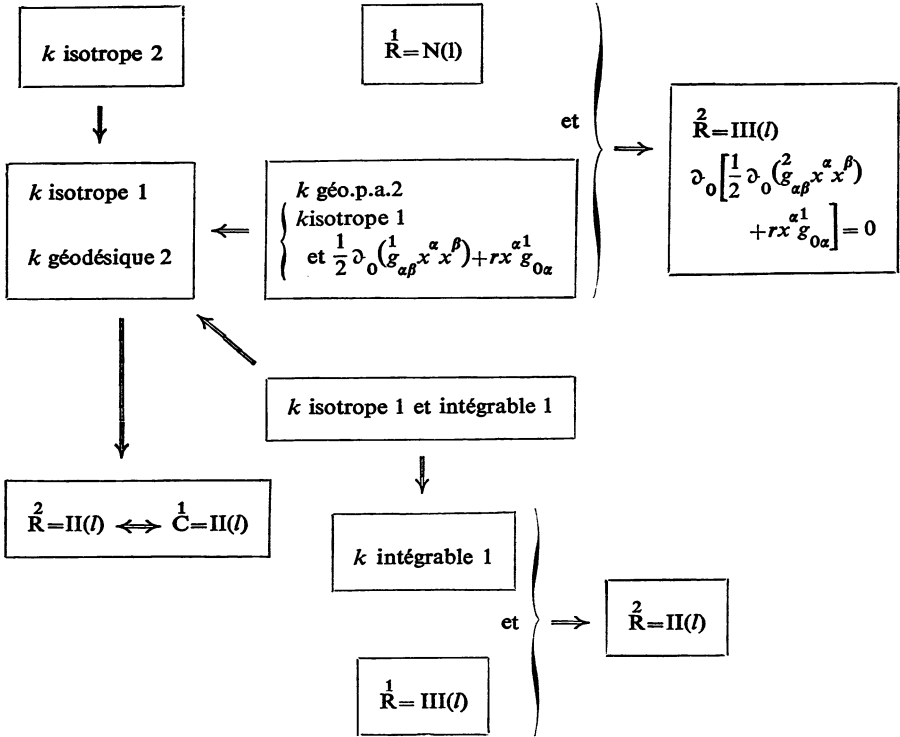
$${}^1\mathbf{R} = \mathbf{II}(l)$$

$${}^1\mathbf{C} = \mathbf{II}(l)$$

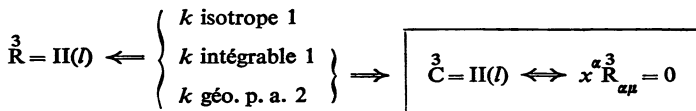
De plus les implications suivantes sont vraies :



Deuxième ordre ($\rho = 2$).



Troisième ordre ($\rho = 3$).



Quatrième ordre ($\rho = 4$).

k géo. p. a. 3 $\frac{1}{2} \partial_0 (g_{\alpha\beta}^3 x^\alpha x^\beta) + 2r x^\gamma g_{0\gamma} = 0$	}	et \Rightarrow	$\overset{4}{R} = I'(I) \Leftrightarrow \overset{4}{C} = I'(I) \Leftrightarrow \overset{2}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \overset{1}{g}_{\alpha\varepsilon} \overset{1}{g}_{\varepsilon\beta} = 0$
$\overset{1}{g}_{\alpha\beta} x^\beta = \overset{2}{g}_{\alpha\beta} x^\beta = 0$	}		

k géo. p. a. 2	}	et	$\overset{4}{R} = I'(I) \Leftrightarrow \overset{4}{C} = I'(I)$ $\Leftrightarrow \overset{2}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \overset{1}{g}_{\alpha\varepsilon} \overset{1}{g}_{\varepsilon\beta} + 2 \frac{x^\gamma}{r} g_{\gamma 0} \eta_{\alpha\beta} = 0$
k isotrope 3 $\overset{3}{g}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \overset{2}{g}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \overset{1}{g}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$	}	et	
$\overset{1}{g}_{\alpha\beta} x^\beta = \overset{2}{g}_{\alpha\beta} x^\beta = 0$	}		

I. ESPACE-TEMPS ASYMPTOTIQUEMENT PLAT

1. Espace de Minkowski en coordonnées (u, x, y, z).

Soit \mathbb{R}^4 une variété riemannienne de dimension 4 et de classe C^∞ admettant un système de coordonnées tel que la métrique s'écrive :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Nous désignerons cette variété par M et nous dirons que M est un espace de Minkowski ou un espace-temps plat.

Posons :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Soit r_0 un nombre réel positif, soit M' la sous-variété ouverte de M définie par : $r > r_0$, par abus de langage nous dirons que les 4 scalaires suivants définissent un système de coordonnées de M' :

$$\begin{cases} x^0 = u = t - r \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases}$$

Nous noterons ces coordonnées selon la commodité (x^i), (u, x^α) ou (u, x, y, z) (les indices latins prennent les valeurs 0, 1, 2, 3; les indices grecs les valeurs 1, 2, 3). Dans ces coordonnées, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$$

où

$$(1-1-1) \quad \begin{cases} \eta_{00} = 1 \\ \eta_{0\alpha} = \frac{x^\alpha}{r} \\ \eta_{\alpha\beta} = \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} - \delta_{\alpha\beta} \end{cases}$$

δ désigne le symbole de Kronecker (indépendamment de la position des

indices). Les éléments, notés η^{ab} , de la matrice inverse de la matrice d'éléments η_{ab} vérifient donc :

$$(1-1-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^{00} = 0 \\ \eta^{0\alpha} = \frac{x^\alpha}{r} \\ \eta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \end{array} \right.$$

2. Définition d'un espace-temps asymptotiquement plat.

Soit V_4 la variété « espace-temps » de la relativité générale; V_4 est une variété riemannienne hyperbolique normale que nous supposons de signature $(+, -, -, -)$ et au moins de classe C^2 .

Nous dirons que V_4 est asymptotiquement plat si il existe un ouvert U de V_4 homéomorphe à M' tel que dans le système de coordonnées

$$(x^a) = (u, x^\alpha) = (u, x, y, z)$$

défini sur U par cet homéomorphisme :

1° Le tenseur métrique, exprimé en repère naturel, admet un développement limité en $1/r$ à l'ordre ρ de la forme :

$$(1-2-1) \quad g_{ab} = \eta_{ab} + g_{ab}^1 \frac{1}{r} + g_{ab}^2 \frac{1}{r^2} + \dots + g_{ab}^\rho \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

(o désigne une fonction telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} r^\rho \cdot o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) = 0$), les g_{ab}^i étant des fonctions des x^l deux fois continuellement différentiables constantes le long des courbes $u = C^{te}$ et $\frac{x^\alpha}{r} = C^{te}$, c'est-à-dire que ce sont des fonctions homogènes de degré 0 en x^α , en particulier :

$$(1-2-2) \quad x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ab}^i = x^\alpha \partial_a g_{ab}^i = 0 ;$$

η_{ab} désigne la métrique de Minkowski (1-1-1).

2° Ce développement limité est deux fois dérivable :

$$(1-2-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 g_{ab} = \sum_{i=1}^{\rho} \partial_0 g_{ab}^i \frac{1}{r^i} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ \partial_{00} g_{ab} = \sum_{i=1}^{\rho} \partial_{00} g_{ab}^i \frac{1}{r^i} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \end{array} \right.$$

$$(1-2-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_{\lambda} g_{ab} = r \partial_{\lambda} \eta_{ab} \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{\rho-1} \left(r \partial_{\lambda} g_{ab}^i - i \frac{x^{\lambda}}{r} g_{ab} \right) \frac{1}{r^{i+1}} + o\left(\frac{1}{r^{\rho}}\right) \\ \partial_{u\lambda} g_{ab} = \dots \end{array} \right.$$

Remarque. — Soit D un sous-ensemble ouvert de l'hypersurface $r = 1$ définie dans M, et soit M'' la sous-variété ouverte de M définie par :

$$(u, x, y, z) \in M'' \iff \exists \lambda > 0 : \left(u, \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda} \right) \in D,$$

Nous pouvons définir une variété espace-temps asymptotiquement plate dans un domaine de direction D par la même définition que précédemment en remplaçant simplement M' par M'' .

Si V_4 est asymptotiquement plat, toutes les quantités construites à l'aide du tenseur métrique dont nous aurons besoin admettent un développement limité à l'ordre ρ .

3. Développement limité de g^{ab} .

g^{ab} désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice d'éléments g_{ab} . g^{ab} admet un développement limité à l'ordre ρ que nous écrirons :

$$(1-3-1) \quad g^{ab} = \eta^{ab} + g^{ab} \frac{1}{r} + \dots + g^{ab} \frac{1}{r^{\rho}} + o\left(\frac{1}{r^{\rho}}\right).$$

En appliquant l'identité :

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$$

on obtient :

$$(1-3-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^{ab} = -\eta^{ai} g_{ij} \eta^{jb} \\ g^{ab} = -\eta^{ai} g_{ij} \eta^{jb} + \eta^{ai} g_{ie} \eta^{ef} g_{fj} \eta^{jb} \\ g^{ab} = -\eta^{ai} g_{ij} \eta^{jb} + \eta^{ai} g_{ie} \eta^{ef} g_{fj} \eta^{jb} + \eta^{ai} g_{ie} \eta^{ef} g_{fj} \eta^{jb} \\ \quad - \eta^{ai} g_{ie} \eta^{ep} g_{pq} \eta^{qf} g_{fj} \eta^{jb} \\ \dots \end{array} \right.$$

4. Développement limité de la connexion en repère naturel.

La connexion est définie en repère naturel par les symboles de Christoffel de 2^e espèce :

$$(1-4-1) \quad \Gamma_{b\ c}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$

Ces Γ tendent vers 0 sur un espace-temps de Minkowski; on peut donc écrire le développement limité sous la forme :

$$(1-4-2) \quad \Gamma_{b\ c}^a = \overset{1}{\Gamma}_{b\ c}^a \frac{1}{r} + \overset{2}{\Gamma}_{b\ c}^a \frac{1}{r^2} + \dots + \overset{\rho}{\Gamma}_{b\ c}^a \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right).$$

Calcul de $\overset{1}{\Gamma}_{b\ c}^a$:

Puisque $\partial_b g_{ac}$ est en $1/r$ (cf. (1-2-3) et (1-2-4)), on a d'après (1-3-1) :

$$\overset{1}{\Gamma}_{b\ c}^a = \frac{1}{2} \eta^{ad} (\overset{1}{\partial_b g_{cd}} + \overset{1}{\partial_c g_{bd}} - \overset{1}{\partial_d g_{bc}})$$

En explicitant à l'aide de (1-1-2), (1-2-3) et (1-2-4), il vient :

$$(1-4-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{\Gamma}_0^0{}_0 = \frac{x^\delta}{r} \partial_0 g_{0\delta} \\ \overset{1}{\Gamma}_\beta^0{}_0 = \frac{1}{2} \frac{x^\delta}{r} \partial_0 g_{\beta\delta} \\ \overset{1}{\Gamma}_\beta^0{}_\gamma = -\eta_{\beta\gamma} \\ \overset{1}{\Gamma}_0^\alpha{}_0 = -\partial_0 g_{0\alpha} + \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \partial_0 g_{00} \\ \overset{1}{\Gamma}_\beta^\alpha{}_0 = -\frac{1}{2} \partial_0 g_{\alpha\beta} \\ \overset{1}{\Gamma}_\beta^\alpha{}_\gamma = -\frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \partial_0 g_{\beta\gamma} \end{array} \right.$$

Calcul de $\overset{2}{\Gamma}_{b\ c}^a$:

Nous posons :

$$\overset{2}{\Omega}_{b\ c}^a = \frac{1}{2} \eta^{ad} (\overset{2}{\partial_b g_{cd}} + \overset{2}{\partial_c g_{bd}} - \overset{2}{\partial_d g_{bc}})$$

On a alors en développant (1-4-1) au second ordre :

$$(1-4-4) \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{2}{\Gamma}_{b^a c} &= \Omega_{b^a c} + \frac{1}{2} g^{ad} (\overset{1}{\partial}_b g_{cd} + \overset{1}{\partial}_c g_{bd} - \overset{1}{\partial}_d g_{bc}) \\ \overset{2}{\Gamma}_{b^a c} &= \Omega_{b^a c} - \eta^{ai} g_{ij} \overset{1}{\Gamma}_{b^j c} \end{aligned} \right.$$

soit :

$$(1-4-4) \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{2}{\Gamma}_{b^0 c} &= \Omega_{b^0 c} - \frac{x^\delta}{r} g_{\epsilon j} \overset{1}{\Gamma}_{b^j c} \\ \overset{2}{\Gamma}_{b^a c} &= \Omega_{b^a c} - \frac{x^\alpha}{r} g_{0j} \overset{1}{\Gamma}_{b^j c} + g_{\alpha j} \overset{1}{\Gamma}_{b^j c} \end{aligned} \right.$$

En explicitant la formule de définition de $\Omega_{b^a c}$ à l'aide de (1-1-4), (1-2-3) et (1-2-4), il vient :

$$(1-4-5) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_{0^0 0} &= \frac{x^\delta}{r} \partial_0 g_{0\delta} + \frac{1}{2} g_{00} \\ \Omega_{\beta^0 0} &= \frac{1}{2} \frac{x^\delta}{r} \partial_0 g_{\beta\delta} + \frac{1}{2} r \partial_\beta \left(\frac{x^\delta}{r} g_{0\delta} \right) \\ \Omega_{\beta^0 \gamma} &= -\frac{1}{2} g_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} r \partial_\beta \left(\frac{x^\delta}{r} g_{\gamma\delta} \right) + \frac{1}{2} r \partial_\gamma \left(\frac{x^\delta}{r} g_{\beta\delta} \right) \\ \Omega_{0^a 0} &= -\partial_0 g_{0a} + \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \partial_0 g_{0\alpha} + \frac{1}{2} r \partial_\alpha g_{00} - \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} g_{00} \\ \Omega_{\beta^a 0} &= -\frac{1}{2} \partial_0 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^\alpha \partial_\beta g_{0\alpha} - \frac{1}{2} \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} g_{00} - \frac{1}{2} r \partial_\beta g_{0\alpha} + \frac{1}{2} r \partial_\alpha g_{\beta 0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{r} (x^\beta g_{0\alpha} - x^\alpha g_{0\beta}) \\ \Omega_{\beta^a \gamma} &= -\frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \partial_0 g_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \left[r \partial_\beta g_{0\gamma} - \frac{x^\beta}{r} g_{0\gamma} + r \partial_\gamma g_{0\beta} - \frac{x^\gamma}{r} g_{0\beta} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} r [\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\beta\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}] + \frac{1}{2} \frac{1}{r} [x^\beta g_{\gamma\alpha} + x^\gamma g_{\beta\alpha} - x^\alpha g_{\beta\gamma}] \end{aligned} \right.$$

Calcul de $\overset{3}{\Gamma}_{b^a c}$:

La méthode précédente peut s'appliquer à l'ordre i quelconque; nous allons l'appliquer encore à l'ordre 3 seulement, car nous n'aurons pas besoin des ordres supérieurs. Nous posons :

$$\Theta_{b^a c} = \frac{1}{2} \eta^{ad} (\overset{3}{\partial}_b g_{cd} + \overset{3}{\partial}_c g_{bd} - \overset{3}{\partial}_d g_{bc})$$

On peut alors écrire :

$$(1-4-6) \quad \Gamma_b^a c = \Theta_b^a c - \eta^{ai} \Gamma_{ij}^1 \Gamma_b^j c - \eta^{ai} \Gamma_{ij}^2 \Gamma_b^j c$$

Enfin, en explicitant la formule de définition des $\Theta_b^a c$, on a :

$$(1-4-7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta_0^0 0 &= \frac{x^\delta}{r} \partial_0 g_{0\delta} + g_{00} \\ \Theta_\beta^0 0 &= \frac{1}{2} \frac{x^\delta}{r} \partial_0 g_{\beta\delta} + \frac{1}{2} x^\delta \partial_\beta g_{0\delta} + g_{0\beta} - \frac{x^\beta x^\delta}{r^2} g_{0\delta} \\ \Theta_\beta^0 \gamma &= g_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} x^\delta (\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta}) - \frac{x^\beta x^\delta}{r^2} g_{\gamma\delta} - \frac{x^\gamma x^\delta}{r^2} g_{\beta\delta} \\ \Theta_0^\alpha 0 &= -\partial_0 g_{0\alpha} + \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \partial_0 g_{00} + \frac{1}{2} r \partial_\alpha g_{00} - \frac{x^\alpha}{r} g_{00} \\ \Theta_\beta^\alpha 0 &= -\frac{1}{2} \partial_0 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^\alpha \partial_\beta g_{00} - \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} g_{00} - \frac{1}{2} r \partial_\beta g_{0\alpha} + \frac{1}{2} r \partial_\alpha g_{0\beta} \\ &\quad + \frac{x^\beta}{r} g_{0\alpha} - \frac{x^\alpha}{r} g_{0\beta} \\ \Theta_\beta^\alpha \gamma &= -\frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \partial_0 g_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \left[r \partial_\beta g_{\gamma 0} + r \partial_\gamma g_{\beta 0} - 2 \frac{x^\beta}{r} g_{\gamma 0} - 2 \frac{x^\gamma}{r} g_{\beta 0} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} r \left[\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\beta\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \right] + \frac{1}{r} \left[x^\beta g_{\gamma\alpha} + x^\gamma g_{\beta\alpha} - x^\alpha g_{\beta\gamma} \right] \end{aligned} \right.$$

5. Développement limité du tenseur de courbure.

Rappelons la définition du tenseur de courbure :

$$R_a^b lm = \partial_l \Gamma_m^b a - \partial_m \Gamma_l^b a + \Gamma_l^b e \Gamma_m^e a - \Gamma_m^b e \Gamma_l^e a$$

Sachant que le développement limité de Γ (1-4-2) est une fois dérivable, on en déduit que $R_a^b lm$ admet un développement limité de la forme :

$$(1-5-1) \quad R_a^b lm = \overset{1}{R}_a^b lm \frac{1}{r} + \dots + \overset{\rho}{R}_a^b lm \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

avec

$$(1-5-2) \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{1}{R}_a^b \lambda\mu &= 0 \\ \overset{1}{R}_a^b 0\mu &= \partial_0 \overset{1}{\Gamma}_\mu^b a \end{aligned} \right.$$

$$(1-5-3) \left\{ \begin{array}{l} \overset{2}{R}_a{}^b{}_{\lambda\mu} = r\partial_\lambda \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - \frac{x^\lambda}{r} \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - r\partial_\mu \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_a + \frac{x^\mu}{r} \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_a + \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a - \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^e{}_a \\ \overset{2}{R}_a{}^b{}_{0\mu} = \partial_0 \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - r\partial_\mu \overset{1}{\Gamma}_0{}^b{}_a + \frac{x^\mu}{r} \overset{1}{\Gamma}_0{}^b{}_a + \overset{1}{\Gamma}_0{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a - \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_0{}^e{}_a \end{array} \right.$$

$$(1-5-4) \left\{ \begin{array}{l} \overset{3}{R}_a{}^b{}_{\lambda\mu} = r\partial_\lambda \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - 2\frac{x^\lambda}{r} \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - r\partial_\mu \overset{2}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_a + 2\frac{x^\mu}{r} \overset{2}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_a + \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_e \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a + \overset{2}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a \\ \hspace{15em} - \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{2}{\Gamma}_\lambda{}^e{}_a - \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^e{}_a \\ \overset{3}{R}_a{}^b{}_{0\mu} = \partial_0 \overset{3}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - r\partial_\mu \overset{2}{\Gamma}_0{}^b{}_a + 2\frac{x^\mu}{r} \overset{2}{\Gamma}_0{}^b{}_a + \overset{1}{\Gamma}_0{}^b{}_e \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a + \overset{2}{\Gamma}_0{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a - \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{2}{\Gamma}_0{}^e{}_a \\ \hspace{15em} - \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_0{}^e{}_a \end{array} \right.$$

$$(1-5-5) \left\{ \begin{array}{l} \overset{4}{R}_a{}^b{}_{\lambda\mu} = r\partial_\lambda \overset{3}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - 3\frac{x^\lambda}{r} \overset{3}{\Gamma}_\mu{}^b{}_a - r\partial_\mu \overset{3}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_a + 3\frac{x^\mu}{r} \overset{3}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_a + \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_e \overset{3}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a + \overset{2}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_e \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a \\ \hspace{10em} + \overset{3}{\Gamma}_\lambda{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^e{}_a - \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{3}{\Gamma}_\lambda{}^e{}_a - \overset{2}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{2}{\Gamma}_\lambda{}^e{}_a - \overset{3}{\Gamma}_\mu{}^b{}_e \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^e{}_a \\ \overset{4}{R}_a{}^b{}_{0\mu} = \dots \end{array} \right.$$

6. Vecteurs l et vecteurs k .

— Nous appellerons vecteur l un vecteur tel que dans le système de coordonnées les composantes de ce vecteur admettent un développement limité à l'ordre ρ une fois dérivable de la forme :

$$(1-6-1) \left\{ \begin{array}{l} l^0 = l^0 \frac{1}{r} + \dots + l^{\rho 0} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ l^\alpha = \frac{x^\alpha}{r} + l^{\alpha 1} \frac{1}{r} + \dots + l^{\alpha \rho} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \end{array} \right.$$

Dans ces conditions :

$$(1-6-2) \quad l_a = g_{a\beta} \frac{x^\beta}{r} + g_{ab} l^b + \dots + \eta_{ab} l^b$$

En particulier :

$$\overset{0}{l}_\alpha = 0, \quad \overset{0}{l}_0 = 1$$

— Nous désignerons par $k = k^{(\rho)}$ un vecteur l admettant un développement (dérivable) de la forme :

$$(1-6-3) \quad k^0 = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) ; \quad k^\alpha = \frac{x^\alpha}{r} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

On a alors :

$$k_a^i = g_{a\beta} \frac{x^\beta}{r}$$

Quelques définitions :

Nous dirons que l est isotrope à l'ordre ρ si

$$(1-6-4) \quad g_{ab} l^a l^b = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

Nous dirons que l est géodésique à l'ordre ρ si $\exists \lambda$ scalaire tel que :

$$(1-6-5) \quad l^a \nabla_a l_b = \lambda l_b + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

Nous dirons que l est géodésique de paramètre affine à l'ordre ρ si :

$$(1-6-6) \quad l^a \nabla_a l_b = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

Nous dirons que l est intégrable à l'ordre ρ si :

$$(1-6-7) \quad \nabla_a l_b - \nabla_b l_a = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

— Tous les vecteurs l sont isotropes, géodésiques de paramètre affine et intégrables à l'ordre 0.

Soit l un champ de vecteurs isotropes (à l'ordre ρ), nous dirons que :

R est un cas N à l'ordre ρ relativement au vecteur l (notation : $R = N(l) \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$) si

$$(1-6-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_a^b l_m l^m = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ (R^*)_a^b l_m l^m = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \end{array} \right.$$

R est un cas III à l'ordre ρ relativement à l (notation : $R = III(l) \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$) si

$$(1-6-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_a^b l_m l_b l^m = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ (R^*)_a^b l_m l_b l^m = o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \end{array} \right.$$

R est un cas II à l'ordre ρ relativement à l (notation : $R = \text{II}(l) \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$)
si $\exists \lambda$ tel que

$$(1-6-10) \quad R_a^b l_m l^m = \lambda l_a l^b + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right).$$

Remarquons que $\overset{\circ}{R}_a^b l_m$ ne sont pas les composantes d'un tenseur et dans ces conditions $\overset{\circ}{R}_a^b l_m l^m = 0$ et $\overset{\circ}{R}_a^b l_m l^b = 0$ ne sont pas, en général, des relations équivalentes, c'est pourquoi nous allons poser les définitions suivantes :

Soit l un champ de vecteurs isotropes défini par (1-6-1).

$\overset{\circ}{R}$ est un cas N relativement à l (notation $\overset{\circ}{R} = \text{N}(l)$) si :

$$(1-6-11) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{R}_a^b l_m l^m = \overset{\circ}{R}_a^b l_m l^b = \overset{\circ}{R}_a^b l_m l^a = 0 \\ (\overset{\circ}{R}^*)_a^b l_m l^m = (\overset{\circ}{R}^*)_a^b l_m l^b = (\overset{\circ}{R}^*)_a^b l_m l^a = 0 \end{cases}$$

$\overset{\circ}{R}$ est un cas III relativement à l (notation $\overset{\circ}{R} = \text{III}(l)$) si :

$$(1-6-12) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{R}_a^b l_m l^b l^m = \overset{\circ}{R}_a^b l_m l^a l^m = 0 \\ (\overset{\circ}{R}^*)_a^b l_m l^b l^m = (\overset{\circ}{R}^*)_a^b l_m l^a l^m = 0 \end{cases}$$

$\overset{\circ}{R}$ est un cas II relativement à l (notation $\overset{\circ}{R} = \text{II}(l)$) si :

$$(1-6-13) \quad \overset{\circ}{R}_a^b l_m l^b l^m = \lambda l_a l^b; \quad \overset{\circ}{R}_a^b l_m l^a l^m = \lambda l^b l^a$$

Dans les trois chapitres qui suivent, nous allons chercher à énoncer des théorèmes de la forme : si $\exists l$ ou k vérifiant certaines relations (1-6-4) à (1-6-7), alors R et $\overset{\circ}{R}$ vérifient certaines des relations (1-6-8) à (1-6-13).

II. ÉTUDE AU PREMIER ORDRE

1. Étude des vecteurs l .

a) CNS pour que l soit isotrope au premier ordre :

la relation :

$$g_{ab} l^a l^b = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

s'explícite :

$$2\eta_{ab}^1 \frac{x^\alpha}{r} + g_{\alpha\beta}^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r} = 0$$

soit :

$$2l^0 + g_{\alpha\beta}^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r} = 0$$

D'où :

— Une CNS pour que l soit isotrope au premier ordre est que :

$$(2-1-1) \quad l^0 = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r}$$

— Une CNS pour que k soit isotrope au premier ordre est que :

$$(2-1-2) \quad g_{\alpha\beta}^1 x^\alpha x^\beta = 0$$

b) CNS pour que l soit géodésique (de paramètre affine) au premier ordre :

la relation :

$$l^a \nabla_a l_b = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

s'explícite :

$$l^a \overline{\nabla_a l_b}^0 + l^a \overline{\nabla_a l_b}^1 = 0$$

$$\overline{\nabla_a l_b}^0 = 0$$

$$\frac{x^\alpha}{r} \Gamma_{\alpha b}^0 = 0$$

or $x^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^0 = 0$ est identiquement vérifié, il reste d'après (1-4-3) :

$$\frac{x^\alpha}{r} \frac{1}{2} \frac{x^\beta}{r} \partial_0 g_{\alpha\beta}^1 = 0$$

$$(2-1-3) \quad \partial_0 (g_{\alpha\beta}^1 x^\alpha x^\beta) = 0$$

Ce calcul nous montre que :

— l et k sont toujours géodésiques au premier ordre.

— pour que l (ou k) soit géodésique de paramètre affine au premier ordre, il faut et il suffit que (2-1-3) soit vérifié.

c) CNS pour que l soit intégrable au premier ordre :
la relation :

$$\nabla_a l_b - \nabla_b l_a = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

s'explique :

$$\frac{1}{\partial_a l_b} - \frac{1}{\partial_b l_a} = 0$$

$$\partial_0 l_\beta = 0$$

$$\partial_0 \left[\frac{x^\alpha}{r} g_{\alpha\beta} + \eta_{\beta a} l^a \right] = 0$$

$$\eta_{\beta\alpha} \partial_0 l^\alpha + \partial_0 \left[\frac{x^\alpha}{r} g_{\alpha\beta} + \frac{x^\beta}{r} l^0 \right] = 0$$

Ce résultat montre que :

— Pour que k soit intégrable au premier ordre, il faut et il suffit que :

$$(2-1-4) \quad \partial_0 (g_{\alpha\beta} x^\alpha) = 0$$

Si on veut un vecteur l qui soit de plus isotrope, la condition devient d'après (2-1-1) :

$$(2-1-5) \quad \eta_{\beta\alpha} \partial_0 l^\alpha = -\partial_0 \left[\frac{x^\alpha}{r} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{x^\beta}{r} \frac{x^\alpha}{r} \frac{x^\gamma}{r} g_{\alpha\gamma} \right]$$

On a un système de trois équations à trois inconnues $\partial_0 l^\alpha$ qui est de rang 2. Les équations sont liées par $x^\beta \eta_{\beta\alpha} \partial_0 l^\alpha = 0$. Pour qu'il existe des solutions, il faut et il suffit donc que :

$$\partial_0 \left(x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta} \right) = 0$$

$$\partial_0 (x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta}) = 0$$

D'où :

— Pour qu'il existe des vecteurs l intégrables isotropes au premier ordre, il faut et il suffit que (2-1-3) soit vérifié.

2. Étude du tenseur de courbure.

(l désigne un vecteur l isotrope au premier ordre).

a) Cas N :

$$R = N(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \iff \overset{1}{R} = N(l) \text{ (cf. p. 228)}$$

En effet $\overset{1}{R} = N(l)$ s'écrit :

$\overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0 = 0$ et $\overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0 = 0$ et $\overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0 = 0$ et de même pour R^* , donc $R_a{}^b{}_{lm}{}^m = o\left(\frac{1}{r}\right)$. Réciproquement, cette dernière relation entraîne puisque

$\overset{0}{R} = 0$, $R_a{}^b{}_{lm}{}^b = o\left(\frac{1}{r}\right)$ et $R_a{}^b{}_{lm}{}^a = o\left(\frac{1}{r}\right)$, d'où les trois relations ci-dessus.

De même pour R^* .

La relation $\overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0 = 0$ s'écrit :

$$\overset{1}{R}_a{}^0{}_{lm} = 0$$

$$\overset{1}{R}_a{}^0{}_{0\mu} = 0 \quad \text{soit} \quad \partial_0 \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^0{}_a = 0$$

Cette relation étant identiquement vérifiée pour $a = \alpha$, il reste

$$\partial_{00} x^\delta \overset{1}{g}_{\mu\delta} = 0$$

Dans ces conditions, le tenseur de Ricci vérifie

$$\overset{1}{R}_{a\mu} = \partial_0 \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^0{}_a = 0$$

$$\overset{1}{R}_{00} = \partial_0 \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^\mu{}_0 = \frac{1}{2} \partial_{00} \overset{1}{g}_{\mu\mu} \text{ (somme sur } \mu)$$

soit :

$$\overset{1}{R}_{al} = \left(\frac{1}{2} \partial_{00} \overset{1}{g}_{\mu\mu}\right) l_a^0 l_l^0$$

Cette relation montre, compte tenu de la relation initiale que :

$$(\overset{1}{R}^*)_a{}^b{}_{lm}{}^0 = 0$$

(On pourrait aussi le vérifier directement). D'où les énoncés :

— Une C N S pour que $R = N(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$ ou que $\overset{1}{R} = N(l)$ est que :

$$(2-2-1) \quad \partial_{00}(x^\beta \overset{1}{g}_{\alpha\beta}) = 0$$

THÉORÈME 1. — Si k est intégrable au premier ordre, il existe l isotrope au premier ordre tel que :

$$R = N(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

Si k est isotrope et intégrable au premier ordre,

$$R = N(k) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

(Dans les deux hypothèses k et l sont alors aussi géodésiques de paramètre affine et $\overset{1}{R} = N(l)$).

b) Cas III :

De même que précédemment :

$$R = \text{III}(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \iff \overset{1}{R} = \text{III}(l)$$

Pour que ces relations soient vérifiées, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm} \overset{0}{l}{}^m = 0 & (\alpha) \\ (\overset{1}{R}^*)^b{}_{lm} \overset{0}{l}{}^m = 0 & (\beta) \end{cases}$$

(α) s'écrit :

$$\overset{1}{R}_a{}^0{}_{l\mu} \frac{x^\mu}{r} = 0$$

soit :

$$x^\mu \partial_0 \Gamma_a{}^0{}_\mu = 0$$

ou encore :

$$x^\mu \partial_0 \overset{1}{\Gamma}_0{}^0{}_\mu = 0$$

c'est-à-dire :

$$\partial_{00}(x^\mu x^\beta \overset{1}{g}_{\mu\beta}) = 0$$

(β) s'écrit :

$$\frac{x^\mu}{r} \eta_{l\mu e f} \eta^{em} \eta^{fn} \overset{1}{R}_a{}^0{}_{mn} = 0$$

ou :

$$x^\mu \varepsilon_{l\mu e f} \eta^{e0} \eta^{fn} \overset{1}{R}_a{}^0{}_{0v} = 0$$

ou :

$$x^\mu \varepsilon_{l\mu e \varphi} \frac{x^\varepsilon}{r} \eta^{\varphi v} \overset{1}{R}_a{}^0{}_{0v} = 0$$

Cette relation est identiquement vérifiée car $x^\mu x^\varepsilon \varepsilon_{l\mu e \varphi} = 0$.

Donc :

— Une CNS pour que $R = \text{III}(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$ ou $\overset{1}{R} = \text{III}(l)$ est que :

(2-2-2)
$$\partial_{00}(x^\alpha x^\beta \overset{1}{g}_{\alpha\beta}) = 0$$

THÉORÈME 2. — Si l (ou k) est géodésique de paramètre affine au premier ordre ou si il existe un vecteur l intégrable et isotrope au premier ordre, alors :

$$R = \text{III}(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

Si k est isotrope au premier ordre, alors :

$$R = \text{III}(k) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

c) Cas II :

De même que précédemment :

$$R = \text{II}(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \iff \overset{1}{R} = \text{II}(l)$$

La relation de définition s'écrit :

$$\overset{1}{R}_a{}^0{}_{l\mu} \frac{x^\mu}{r} = \lambda \delta_a^0 \delta_l^0$$

ou :

$$x^\mu \overset{1}{R}_a{}^0{}_{0\mu} = 0$$

soit :

$$x^\mu \partial_0 \eta_{\mu\alpha} = 0$$

Cette relation est identiquement vérifiée. D'où :

THÉORÈME 3. — *Il existe l isotrope au premier ordre, tel que :*

$$R = \Pi(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

3. Quelques relations utiles conséquences des relations précédentes.

a) Si k est intégrable au premier ordre :

$$\partial_0(x^\beta g_{\alpha\beta}^1) = 0.$$

Les formules (1-4-3) donnent alors :

$$(2-3-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_\beta^0{}_0 = 0 \\ \Gamma_\beta^\alpha{}_\alpha = 0 \\ x^\beta \Gamma_\beta^1{}_c = 0 \end{array} \right. \quad \text{d'où aussi} \quad \Gamma_\beta^a{}_a = 0$$

b) Si on suppose de plus : $\rho = 2$, alors (1-4-4) et (2-3-1) donnent :

$$(2-3-2) \quad x^\beta \Gamma_\beta^2{}_c = x^\beta \Omega_\beta^a{}_c$$

c) Si on suppose de plus k isotrope au premier ordre :

$$x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta}^1 = 0.$$

Les formules (1-4-5) donnent alors :

$$(2-3-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^\beta \Omega_\beta^0{}_0 = \frac{1}{2r} \partial_0(x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta}^2) \\ x^\beta \Omega_\beta^0{}_\gamma = -x^\beta g_{\beta\gamma}^1 \\ x^\beta \Omega_\beta^\alpha{}_0 = -\frac{1}{2} \partial_0 x^\beta g_{\beta\alpha}^2 - \frac{1}{2} x^\alpha g_{00}^1 + \frac{1}{2} r x^\beta \partial_\alpha g_{0\beta}^1 + \frac{r}{2} g_{0\alpha}^1 - \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} x^\beta g_{0\beta}^1 \\ x^\beta \Omega_\beta^\alpha{}_\gamma = -\frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} x^\beta \partial_0 g_{\beta\gamma}^2 + \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} \left[-r g_{0\gamma}^1 + r x^\beta \partial_\gamma g_{0\beta}^1 - \frac{x^\gamma}{r} x^\beta g_{0\beta}^1 \right] \\ \quad + \frac{1}{2} r x^\beta [\partial_\alpha g_{\beta\gamma}^1 - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}^1] + \frac{1}{2} r g_{\alpha\gamma}^1 + \frac{1}{2} \frac{x^\beta}{r} [x^\gamma g_{\beta\alpha}^1 - x^\alpha g_{\beta\gamma}^1] \end{array} \right.$$

et

$$(2-3-4) \begin{cases} x^\beta x^\gamma \Omega_{\beta\gamma}^0 = 0 \\ x^\beta x^\gamma \Omega_{\beta\gamma}^\alpha = - \left[\frac{1}{2} \partial_0(x^\beta x^\gamma g_{\beta\gamma}^2) + r x^\beta g_{0\beta}^1 \right] \frac{x^\alpha}{r} \end{cases}$$

III. ÉTUDE AU SECOND ORDRE

Dans ce chapitre, nous supposons $\rho = 2$, c'est-à-dire que tous les développements limités en $1/r$ que nous considérons existent à l'ordre 2.

1. Étude des vecteurs l .

a) l isotrope. — Considérons un vecteur l isotrope au premier ordre, la condition :

$$g_{ab} l^a l^b = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

exprimant que l est isotrope au deuxième ordre est équivalente à :

$$g_{\alpha\beta}^2 \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} + 2g_{ab}^1 \frac{x^a l^b}{r} + \eta_{ab}^1 l^a l^b + 2l^0 = 0$$

On peut donc énoncer :

— Il existe des vecteurs l isotrope au deuxième ordre.

— Pour que k , supposé isotrope au premier ordre, soit isotrope au deuxième ordre, il faut et il suffit que :

$$(3-1-1) \quad g_{\alpha\beta}^2 x^\alpha x^\beta = 0$$

b) l géodésique. — Nous allons faire cette étude dans le cas où k est intégrable au premier ordre, soit $\partial_0(g_{\alpha\beta}^1 x^\beta) = 0$. On sait qu'on a alors $l^a \nabla_a l^b = o\left(\frac{1}{r}\right)$ et par suite :

l géodésique à l'ordre 2, qui s'écrit :

$$l^a \nabla_a l^b = \lambda l^b + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{est équivalent à} \quad \overbrace{l^a \nabla_a l^b}^2 = \lambda l^b$$

k géodésique à l'ordre 2, qui s'écrit :

$$k^a \nabla_a k^b = \lambda k^b + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \gg \quad \overbrace{k^a \nabla_a k^b}^{20} = \lambda k^b$$

l géodésique de paramètre affine à l'ordre 2 :

$$l^a \nabla_a l^b = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{est équivalent à} \quad \widehat{l^a \nabla_a l^b}^2 = 0$$

k géodésique de paramètre affine à l'ordre 2 :

$$k^a \nabla_a k^b = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \gg \quad \widehat{k^a \nabla_a k^b}^2 = 0$$

Calculons $\widehat{l^a \nabla_a l^b}^2$:

$$\begin{aligned} \widehat{l^a \nabla_a l^b}^2 &= \frac{x^\alpha}{r} \widehat{\nabla_a l^b}^2 + l^a \widehat{\nabla_a l^b}^1 \\ &= \frac{x^\alpha}{r} \left(\widehat{\partial_a l^b}^2 + \widehat{\Gamma_a^b}^c \frac{x^\gamma}{r} + \widehat{\Gamma_a^b}^c l^c \right) + l^a \left(\widehat{\Gamma_a^b}^c \frac{x^\gamma}{r} + \widehat{\partial_a l^b}^1 \right) \end{aligned}$$

D'après (2-3-1) et (2-3-2), il vient :

$$\widehat{l^a \nabla_a l^b}^2 = \frac{x^\alpha}{r} \widehat{\partial_a l^b}^2 + l^a \widehat{\partial_a l^b}^1 + l^0 \partial_0 l^b + \frac{x^\alpha x^\gamma}{r^2} \Omega_{\alpha\gamma}^b,$$

En tenant compte de (2-3-4) et en développant $\partial_a l^b$, il vient pour $b = 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{l^a \nabla_a l^0}^2 &= \frac{x^\alpha}{r} \left(r \partial_a l^0 - \frac{x^\alpha}{r} l^0 \right) + l^0 \partial_0 l^0 + \frac{x^\alpha x^\gamma}{r^2} \Omega_{\alpha\gamma}^0, \\ &= -l^0 + l^0 \partial_0 l^0 + \frac{x^\alpha x^\gamma}{r^2} \Omega_{\alpha\gamma}^0, \\ &= -l^0 + l^0 \partial_0 l^0 - \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\alpha\gamma}} \frac{x^\alpha x^\gamma}{r^2} \end{aligned}$$

et pour $b = \beta$:

$$\begin{aligned} \widehat{l^a \nabla_a l^\beta}^2 &= \frac{x^\alpha}{r} \left(r \partial_a l^\beta - \frac{x^\alpha}{r} l^\beta \right) + l^a \left(\delta_\alpha^\beta - \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} \right) + l^0 \partial_0 l^\beta + \frac{x^\alpha x^\gamma}{r^2} \Omega_{\alpha\gamma}^\beta, \\ &= l^0 \partial_0 l^\beta - \frac{x^\beta}{r} l^\alpha \frac{x^\alpha}{r} + \frac{x^\alpha x^\gamma}{r^2} \left[-\frac{1}{2} \partial_0 g_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{r} g_{\gamma 0} - \frac{1}{2} \frac{x^\gamma}{r} g_{\alpha 0} \right] \frac{x^\beta}{r} \\ &= l^0 \partial_0 l^\beta - \left[\frac{x^\alpha}{r} l^\alpha + \frac{1}{2} \partial_0 \left(\frac{2}{g_{\alpha\gamma}} \frac{x^\alpha x^\gamma}{r^2} \right) + \frac{x^\alpha}{r} g_{0\alpha} \right] \frac{x^\beta}{r} \end{aligned}$$

Ces deux relations nous permettent donc d'énoncer :

Si k est intégrable au premier ordre :

— Pour que k soit géodésique au second ordre, il faut et il suffit que k soit isotrope au premier ordre.

— Pour que k soit géodésique de paramètre affine au second ordre, il faut et il suffit que k soit isotrope au premier ordre et que :

$$(3-1-2) \quad \frac{1}{2} \partial_0 (g_{\alpha\gamma} x^\alpha x^\gamma) + r x^\alpha g_{0\alpha} = 0$$

— Si de plus l est isotrope et intégrable au premier ordre, alors l est géodésique au second ordre.

Ce dernier énoncé résulte de ce que (2-1-5) s'écrit dans nos hypothèses $\eta_{\alpha\beta} \partial_0 l^\beta = 0$, c'est-à-dire $\partial_0 l^\beta$ proportionnel à x^β .

2. Étude du tenseur de courbure.

a) Cas III :

— Si $\overset{1}{R} = N(l)$ alors :

$$R = III(l) \frac{1}{r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r^2} \right) \iff \overset{2}{R} = III(l)$$

En effet

$$\begin{aligned} \overset{2}{R} = III(l) &\implies \overset{2}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0{}^0 l_b = 0 \\ &\implies R_a{}^b{}_{lm}{}^m l_b = \overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^1{}^0 l_b + \overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^1{}^0 l_b^m + \overset{2}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0{}^0 l_b + o\left(\frac{1}{r^2}\right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

D'autre part

$$R_a{}^b{}_{lm}{}^m l_b = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \implies \overset{2}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0{}^0 l_b = 0 \quad \text{et} \quad R_a{}^b{}_{lm}{}^l l^l = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

d'où aussi $\overset{2}{R}_a{}^b{}_{lm}{}^0{}^0 l^a l^b = 0$. De même pour R^* , en tenant compte du fait que si $\overset{1}{R} = N(l)$,

$$l^a (R^*)_{a}{}^b{}_{lm} = \frac{1}{2} \eta_{lm pq} g^{pi} g^{qj} R_a{}^b{}_{ij} l^a.$$

— Nous supposons k intégrable au premier ordre, il existe donc

un vecteur l tel que : $\overset{1}{R} = N(l)$. $\overset{2}{R} = III(l)$ est alors équivalent à :

$$\begin{cases} \overset{2}{R}_a{}^b{}_{lm} l_3^m = 0 & (a) \\ (\overset{2}{R}^*)_a{}^b{}_{lm} l^m = 0 & (b) \end{cases}$$

(a) est alors, d'après (1-5-3), (2-3-1) et (2-3-2) équivalent à :

$$\begin{cases} x^\mu \overset{2}{R}_0{}^0{}_{0\mu} \equiv \partial_0(\Omega_\mu{}^0{}_0) + r\overset{1}{\Gamma}_0{}^0{}_0 = 0 \\ x^\mu \overset{2}{R}_0{}^0{}_{\lambda\mu} \equiv rx^\mu \partial_\lambda \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^0{}_0 + r\overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^0{}_0 = 0 \\ x^\mu \overset{2}{R}_\alpha{}^0{}_{\lambda\mu} \equiv rx^\mu \partial_\lambda \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^0{}_\alpha + r\overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^0{}_\alpha = 0 \end{cases}$$

(On a tenu compte du fait que (a) est symétrique en a et l .) Les deux dernières relations sont identiquement vérifiées, il reste d'après (1-4-5) et (1-4-3) :

$$(3-2-1) \quad \partial_0 \left[\frac{1}{2} \partial_0 (x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta}) + rx^\alpha g_{0\alpha} \right] = 0$$

(b) s'écrit :

$$x^\mu \eta_{l\mu e f} \eta^{ep} \eta^{fq} \overset{2}{R}_a{}^0{}_{pq} = 0$$

Tenant compte de (a), on voit que e ou f nul donnent une contribution nulle, il reste :

$$x^\mu \varepsilon_{\mu e \varphi} \overset{2}{R}_a{}^0{}_{e\varphi} = 0$$

Soit (*) :

$$\begin{cases} \oint_{\mu e \varphi} x^\mu \overset{2}{R}_0{}^0{}_{e\varphi} \equiv \oint_{\mu e \varphi} x^\mu [\overset{1}{\Gamma}_e{}^0{}_\sigma \overset{1}{\Gamma}_\varphi{}^0{}_\sigma - \overset{1}{\Gamma}_\varphi{}^0{}_\sigma \overset{1}{\Gamma}_e{}^0{}_\sigma] = 0 \\ \oint_{\mu e \varphi} x^\mu \overset{2}{R}_0{}^0{}_{e\varphi} \\ \equiv \oint_{\mu e \varphi} x^\mu \left[r\partial_e \overset{1}{\Gamma}_\varphi{}^0{}_\alpha - \frac{x^e}{r} \overset{1}{\Gamma}_\varphi{}^0{}_\alpha - r\partial_\varphi \overset{1}{\Gamma}_e{}^0{}_\alpha + \frac{x^\varphi}{r} \overset{1}{\Gamma}_e{}^0{}_\alpha + \overset{1}{\Gamma}_\varphi{}^0{}_\sigma \overset{1}{\Gamma}_e{}^0{}_\sigma - \overset{1}{\Gamma}_e{}^0{}_\sigma \overset{1}{\Gamma}_\varphi{}^0{}_\sigma \right] = 0 \end{cases}$$

d'après (2-3-1) et (1-5-3).

En explicitant à l'aide de (1-4-3), on voit que ces relations sont identiquement vérifiées.

(*) La notation $\oint_{\alpha\beta\gamma} f(\alpha, \beta, \gamma)$ désigne la somme des permutations circulaires :

$$\oint_{\alpha\beta\gamma} f(\alpha, \beta, \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma) + f(\beta, \gamma, \alpha) + f(\gamma, \alpha, \beta)$$

Nous pouvons donc énoncer :

k étant supposé intégrable au premier ordre, une condition nécessaire et suffisante pour que *R* soit un cas III relativement à un vecteur *l* au deuxième ordre est que (3-2-1) soit satisfaite.

D'où le

THÉORÈME 1. — Si *k* est intégrable au premier ordre et géodésique de paramètre affine au second ordre, alors *k* est isotrope au premier ordre et il existe des vecteurs *l* tels que :

$$l = k + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$R = N(l)\frac{1}{r} + III(l)\frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

b) Cas II :

— Si $R = III(l)\frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$ alors $R = II(l)\frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \Leftrightarrow \overset{2}{R} = II(l)$

ceci se démontre de la même manière que pour le cas III.

— Supposons $R = III(l)\frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$; $\overset{2}{R} = II(l)$ s'écrit :

$$\overset{2}{R}_a{}^b{}_{im}{}^0{}^0 l^i = \lambda^0{}^b{}_{lm}$$

soit :

$$\begin{cases} \overset{2}{R}_a{}^b{}_{i\mu}{}^0{}^0 l^i = 0 \\ \overset{2}{R}_a{}^b{}_{i0}{}^0{}^0 l^i = \lambda^0{}^b \end{cases}$$

Ces deux relations étant triviales pour $b = 0$ puisque $\overset{2}{R}_a{}^0{}_{im}{}^0{}^0 = \overset{2}{R}_a{}^b{}_{im}{}^0{}^0 l^b = 0$, il reste :

$$\begin{cases} x^\alpha x^\lambda \overset{2}{R}_\alpha{}^\beta{}_{\lambda\mu} = 0 & (a) \\ \eta_{\mu\beta} \overset{2}{R}_\alpha{}^\beta{}_{\lambda 0} x^\alpha x^\lambda = 0 & (b) \end{cases}$$

L'équation (a) s'écrit d'après (1-5-3) :

$$x^\alpha x^\lambda \left[r \partial_\lambda \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^\beta{}_\alpha - \frac{x^\lambda}{r} \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^\beta{}_\alpha - r \partial_\mu \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^\beta{}_\alpha + \frac{x^\mu}{r} \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^\beta{}_\alpha + \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^\beta{}_e \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^e{}_\alpha - \overset{1}{\Gamma}_\mu{}^\beta{}_e \overset{1}{\Gamma}_\lambda{}^e{}_\alpha \right] = 0$$

Posons :

$$H_\alpha = \partial_0 x^\alpha \overset{1}{g}_{\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad K = x^\alpha H_\alpha$$

l'équation s'écrit en tenant compte de (1-4-3)

$$\frac{1}{2} x^\beta H_\mu + \frac{1}{2} r x^\alpha x^\lambda \partial_\mu \left(\frac{x^\beta}{r} \partial_0 g_{\alpha\lambda} \right) - \frac{1}{2} \frac{x^\beta x^\mu}{r^2} K + \frac{1}{4} \frac{x^\beta}{r^2} K H_\mu - \frac{1}{4} \frac{x^\beta}{r^2} H_\mu K = 0$$

or

$$r x^\alpha x^\lambda \partial_\mu \left(\frac{x^\beta}{r} \partial_0 g_{\alpha\lambda} \right) = \left(\delta_\mu^\beta - \frac{x^\beta x^\mu}{r^2} \right) K + x^\beta x^\alpha \partial_\mu H_\alpha - x^\beta H_\mu$$

(a) est donc équivalent à :

$$x^\beta x^\alpha \partial_\mu H_\alpha + \delta_\mu^\beta K - 2 \frac{x^\beta x^\mu}{r^2} K = 0 \quad (c)$$

Par multiplication contractée par x^β , on obtient :

$$r^2 x^\alpha \partial_\mu H_\alpha - x^\mu K = 0$$

soit

$$x^\alpha \partial_\mu H_\alpha = \frac{x^\mu}{r^2} K$$

En reportant dans (c), on obtient :

$$- \eta_{\beta\mu} K = 0 \quad \text{ou} \quad K = 0$$

Reportant à nouveau dans (c), il vient :

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial_\mu H_\alpha &= 0 \\ \partial_\mu x^\alpha H_\alpha - H_\alpha \delta_\mu^\alpha &= 0 \\ H_\mu &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que (c) et donc (a) est équivalent à $H_\mu = 0$. On vérifie alors que (b) est identiquement vérifié. Donc si $R = \text{III}(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$, $\tilde{R} = \text{II}(l)$ est équivalent à $\partial_0(x^\beta g_{\alpha\beta}) = 0$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 2. — *Si R est un cas III au premier ordre et un cas II au second ordre relativement à un vecteur l, alors R est un cas N relativement à ce vecteur l au premier ordre.*

THÉORÈME 3. — *Si k est intégrable au premier ordre, il existe un vecteur l isotrope au second ordre tel que R soit un cas N au premier ordre et un cas II au second ordre relativement à l.*

3. Quelques conséquences des relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_a k_b - \nabla_b k_a = o\left(\frac{1}{r}\right) \\ k_a k^a = o\left(\frac{1}{r}\right) \\ k^a \nabla_a k^b = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{array} \right.$$

Outre les relations (2-3-1) à (2-3-4), on a :

$$\Gamma_{\beta 0}^2 0 = \frac{1}{2} \frac{x^\delta}{r} \partial_0 g_{\beta\delta} + \frac{1}{2} r \partial_\beta \left(\frac{x^\delta}{r} g_{0\delta} \right) + \frac{1}{2} \frac{x^\varepsilon}{r} g_{\varphi\varepsilon} \partial_0 g_{\phi\beta}$$

(3-3-1) $x^\beta \Gamma_{\beta 0}^2 0 = x^\beta \Omega_{\beta 0}^0 = -x^\beta g_{0\beta}$

(3-3-2) $x^\beta x^\gamma \Gamma_{\beta \gamma}^2 a = x^\beta x^\gamma \Omega_{\beta \gamma}^a = 0$

Si de plus $\rho = 3$

(3-3-3) $x^\beta x^\gamma \Gamma_{\beta \gamma}^3 a = x^\beta x^\gamma \Theta_{\beta \gamma}^a$

$$(3-3-4) \left\{ \begin{array}{l} x^\beta x^\gamma \Theta_{\beta \gamma}^0 = -x^\beta x^\gamma g_{\beta\gamma} \\ x^\beta x^\gamma \Theta_{\beta \gamma}^a = -\frac{x^\alpha}{r} \left[\frac{1}{2} \partial_0 (g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma) + 2r x^\gamma g_{0\gamma} + g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma \right] \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} r \partial_\alpha (g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma) + r x^\beta g_{\beta\alpha} \end{array} \right.$$

IV. ÉTUDE AUX ORDRES 3 ET 4

1. Étude à l'ordre 3.

Nous supposons dans ce paragraphe que $\rho = 3$.

— Si $R = N(k) \frac{1}{r} + III(I) \frac{1}{r^2} + \mathring{R} \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$ et si k est intégrable au premier ordre, alors $\exists I$ tel que :

$$R = II(I) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \iff \mathring{R} = II(I)$$

En effet, écrivons que R est un cas II relativement à l à l'ordre 3

$$R_a^b l_m l^l = \lambda l^b l_m + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (a)$$

Puisque R est un cas N à l'ordre 1 et un cas III à l'ordre 2, on a

$$\lambda = \lambda = \lambda = 0$$

et la relation s'écrit :

$${}^3 R_a^b l_m l^l + {}^2 R_a^b l_m (l^a l^l + l^a l^l) + {}^1 R_a^b l_m (l^a l^l + l^a l^l + l^a l^l) = \lambda^3 l_m l^l$$

Puisque $\bar{R} = N(k)$, nous pouvons choisir l de la forme

$$l^a = l^a + l^a \frac{1}{r^2} + l^a \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

où $l^0 = 0$, $l^a = \frac{x^a}{r}$, l^0 et l^0 tels que $l^a l_a = o\left(\frac{1}{r^3}\right)$ la relation se ramène alors à

$${}^3 R_a^b l_m l^a l^l = \lambda^3 l_m l^l,$$

ce qui prouve que $\bar{R} = \Pi(l) \Rightarrow R = \Pi(l) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$. Pour montrer la réciproque, il reste à montrer que (a) entraîne

$${}^3 R_a^b l_m l_b l^m = \lambda l_a l_l$$

Or (a) entraîne :

$$R_a^b l_m l_b l^m = \lambda l_a l_l + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

soit

$${}^3 R_a^b l_m l_b l^m + {}^2 R_a^b l_m l_b l^m = \lambda l_a l_l$$

puisque $l^a = 0$. De plus, $l_b = \frac{1}{g_{be}} \frac{x^e}{r}$.

Pour $b = 0$, on a $\overset{2}{R}_a^0 l_m \overset{0}{l}^m = \overset{1}{R}_a^0 l_m \overset{1}{l}^m = 0$, il nous suffit donc, pour terminer la démonstration, de vérifier

$$\begin{cases} \overset{2}{R}_\alpha^\beta \lambda_\mu x^\mu \overset{1}{g}_{\beta\varepsilon} x^\varepsilon = 0 \\ \overset{2}{R}_0^\beta \lambda_\mu x^\mu \overset{1}{g}_{\beta\varepsilon} x^\varepsilon = 0 \\ \overset{2}{R}_\alpha^\beta \overset{0}{g}_{0\mu} x^\mu \overset{1}{g}_{\beta\varepsilon} x^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Ces relations sont des identités si on tient compte du fait que k est intégrable et isotrope ($\overset{1}{R} = N(k)$) au premier ordre, c'est-à-dire de $\partial_0(\overset{1}{g}_{\mu\alpha} x^\mu)$ et $x^\alpha x^\beta \overset{1}{g}_{\alpha\beta} = 0$.

— Supposons donc k isotrope et intégrable au premier ordre et géodésique de paramètre affine au second ordre, il existe l géodésique au troisième ordre, tel que $l = k + o\left(\frac{1}{r}\right)$. On a alors

$$R = N(k) \frac{1}{r} + III(l) \frac{1}{r^2} + \overset{3}{R} \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

et
$$R = II(l) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

est équivalent à

$$\overset{3}{R}_a^b l_m \overset{0}{l}^a \overset{0}{l}^m - \overset{3}{R}_a^b l_n \overset{0}{l}^a \overset{0}{l}^m = 0 \quad (b)$$

en effet, cette équation entraîne $\overset{0}{l}^a \overset{0}{l}^3 R_a^b l_m = \overset{3}{h}^b l_m$, soit en tenant compte des résultats de la démonstration ci-dessus

$$l^a l^l R_a^b l_m = h^b l_m + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

d'où :

$$l^a l^l R_{abl m} = h_b l_m + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

le tenseur de courbure étant symétrique par rapport aux couples d'indices ab et lm , on en déduit $h_b l_m = h_m l_b + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$, soit $h_b = \lambda l_b + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$, d'où

$$l^a l^l R_{abl m} = \lambda l_b l_m + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

La condition (b) s'écrit :

$$x^\alpha x^\mu \overset{3}{R}_{\alpha \lambda \mu}^b = 0$$

Soit d'après (1-5-4) et (2-3-1) à (2-3-4) et (3-3-1) à (3-3-4) :

$$rx^\alpha x^\mu \partial_\lambda \Gamma_\mu^\alpha{}^b{}_\alpha + 2rx^\alpha \Gamma_\lambda^\alpha{}^b{}_\alpha = 0$$

ou

$$\partial_\lambda (x^\alpha x^\mu \Gamma_\alpha^\mu{}^b{}_\alpha) = 0$$

qui est identiquement vérifié.

THÉORÈME 1. — *Si k est intégrable au premier ordre et géodésique de paramètre affine au second ordre, tout l géodésique au troisième ordre vérifie*

$$l = k + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

et :

$$R = N(l) \frac{1}{r} + III(l) \frac{1}{r^2} + II(l) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Dans ce cas, on a de plus $\overset{3}{R} = II(l)$.

2. Étude à l'ordre 4.

Dans ce paragraphe, nous supposerons $\rho = 4$, k intégrable au premier ordre, isotrope et géodésique de paramètre affine au deuxième ordre, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta &= g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \\ \partial_0 (g_{\alpha\beta} x^\beta) &= 0 \\ g_{0\beta} x^\beta &= 0 \end{aligned}$$

Nous dirons qu'un vecteur l isotrope au quatrième ordre (et vérifiant donc $l = k + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$) est vecteur propre à l'ordre 4 du tenseur de courbure, ou encore que le tenseur de courbure est un cas I' relativement à l si :

$$[(R_a{}^b{}_{lm} l_n - R_a{}^b{}_{ln} l_m) l^c - (R_a{}^c{}_{lm} l_n - R_a{}^c{}_{ln} l_m) l^b] l^a l^l = o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Notation :

$$R = I'(l) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Étant donné les hypothèses que nous faisons sur k , on a :

$$R = N(k) \frac{1}{r} + III(k) \frac{1}{r^2} + II(I) \frac{1}{r^3} + \overset{4}{R} \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

et $\overset{1}{l}^a = \overset{2}{l}^a = 0$; la condition est alors équivalente à :

$$[(\overset{4}{R}_\alpha^b{}_{\lambda m} \delta_n^0 - \overset{4}{R}_\alpha^b{}_{\lambda n} \delta_m^0) \overset{0}{l}^c - (\overset{4}{R}_\alpha^c{}_{\lambda m} \delta_n^0 - \overset{4}{R}_\alpha^c{}_{\lambda n} \delta_m^0) \overset{0}{l}^b] x^\alpha x^\delta = 0$$

ou

$$x^\alpha x^\lambda (\overset{4}{R}_\alpha^b{}_{\lambda \mu} \overset{0}{l}^c - \overset{4}{R}_\alpha^c{}_{\lambda \mu} \overset{0}{l}^b) = 0$$

La condition s'écrit donc :

$$\begin{cases} x^\alpha x^\lambda \overset{4}{R}_\alpha^0{}_{\lambda \mu} = 0 & (a) \\ x^\alpha x^\lambda (\overset{4}{R}_\alpha^\beta{}_{\lambda \mu} x^\gamma - \overset{4}{R}_\alpha^\gamma{}_{\lambda \mu} x^\beta) = 0 & (b) \end{cases}$$

Explicitons (a) d'après (1-5-5) en tenant compte de (2-3-1) et (3-3-2) :

$$\begin{aligned} & x^\alpha x^\lambda \left[-3 \frac{x^\lambda}{r} \overset{3}{\Gamma}_\mu^0{}_\alpha - r \partial_\mu \overset{3}{\Gamma}_\mu^0{}_\alpha + 3 \frac{x^\mu}{r} \overset{3}{\Gamma}_\lambda^0{}_\alpha + \overset{2}{\Gamma}_\lambda^0{}_e \overset{2}{\Gamma}_\mu^e{}_\alpha - \overset{1}{\Gamma}_\mu^0{}_e \overset{3}{\Gamma}_\lambda^e{}_\alpha \right] = 0 \\ & 3 \frac{x^\mu}{r} x^\alpha x^\lambda \overset{3}{\Gamma}_\alpha^0{}_\lambda - r x^\alpha x^\lambda \partial_\mu \overset{3}{\Gamma}_\alpha^0{}_\lambda - 3 r x^\beta \overset{3}{\Gamma}_\beta^0{}_\mu + x^\lambda \overset{2}{\Gamma}_\lambda^0{}_e x^\beta \overset{2}{\Gamma}_\beta^e{}_\mu - \overset{1}{\Gamma}_\mu^0{}_e x^\alpha x^\lambda \overset{3}{\Gamma}_\alpha^e{}_\lambda = 0 \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} x^\alpha \overset{3}{\Gamma}_\beta^0{}_\mu &= x^\beta \Theta_\beta^0{}_\mu - \eta^{0e1} g_{e\alpha} x^\beta \Omega_\beta^\alpha{}_\mu \\ x^\beta \Theta_\beta^0{}_\mu &= -x^\beta g_{\beta\mu}^2 \\ x^\alpha x^\lambda \overset{3}{\Gamma}_\alpha^0{}_\lambda &= 0 \\ x^\alpha x^\lambda \overset{3}{\Gamma}_\alpha^\varepsilon{}_\lambda &= x^\alpha x^\lambda \Theta_\alpha^\varepsilon{}_\lambda \\ \overset{1}{\Gamma}_\mu^0{}_e x^\alpha x^\lambda \overset{3}{\Gamma}_\alpha^e{}_\lambda &= -\eta_{\mu\varepsilon} r x^\beta g_{\beta\varepsilon}^2 = r x^\beta g_{\beta\mu}^2 \\ x^\lambda \overset{2}{\Gamma}_\lambda^0{}_e x^\beta \overset{2}{\Gamma}_\beta^e{}_\mu &= x^\lambda \overset{2}{\Gamma}_\lambda^0{}_e x^\beta \overset{2}{\Gamma}_\beta^\varepsilon{}_\mu = x^\lambda \Omega_\lambda^0{}_e x^\beta \Omega_\beta^\varepsilon{}_\mu \\ &= -x^\lambda g_{\lambda\varepsilon}^1 x^\beta \Omega_\beta^\varepsilon{}_\mu \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 3r x^\beta g_{\beta\mu}^2 + 3x^\varepsilon g_{e\alpha} x^\beta \Omega_\beta^\alpha{}_\mu - x^\lambda g_{\lambda\varepsilon}^1 x^\beta \Omega_\beta^\varepsilon{}_\mu - r x^\beta g_{\beta\mu}^2 &= 0 \\ r x^\beta g_{\beta\mu}^2 + x^\varepsilon g_{e\alpha} x^\beta \Omega_\beta^\alpha{}_\mu &= 0 \end{aligned}$$

On voit qu'une condition suffisante pour que (a) soit vérifié est que :

$$x^\beta g_{\beta\mu}^1 = x^\beta g_{\beta\mu}^2 = 0$$

Nous utiliserons cette hypothèse supplémentaire pour expliciter (b) : (b) est équivalente à :

$$\eta_{\delta\beta} x^\alpha x^\lambda R_{\alpha\lambda\mu}^{\beta 4} = 0$$

$$\eta_{\delta\beta} x^\alpha x^\lambda \left[-3 \frac{x^\lambda}{r} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta 3} - r \partial_\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^{\beta 3} + 3 \frac{x^\mu}{r} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\beta 3} + \Gamma_{\lambda\epsilon}^{\beta 2} \Gamma_{\mu\alpha}^{\epsilon 2} \right] = 0$$

Tenant compte de nos hypothèses, cette relation s'écrit :

$$(4-2-1) \quad \frac{1}{4} r^2 [4g_{\delta\mu}^2 + g_{\delta\epsilon}^1 g_{\epsilon\mu}^1] - \eta_{\delta\mu} \left[\frac{1}{2} \partial_0 (g_{\beta\gamma}^3 x^\beta x^\gamma) + 2rx^\gamma g_{0\gamma}^2 \right] = 0$$

Premier cas :

k géodésique de paramètre affine à l'ordre 3

$$k^a \nabla_a k_b = o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

est équivalent à :

$$(4-2-2) \quad \frac{1}{2} \partial_0 (g_{\beta\gamma}^3 x^\beta x^\gamma) + 2rx^\gamma g_{0\gamma}^2 = 0$$

D'où :

THÉORÈME 2. — Si k est géodésique affine à l'ordre 3 et si

$$k_a = \lambda(r) \delta_a^0 + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

alors pour que

$$R = I'(l) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

il faut et il suffit que :

$$(4-2-3) \quad 4g_{\delta\mu}^2 + g_{\delta\epsilon}^1 g_{\epsilon\mu}^1 = 0$$

On a alors pour tout l isotrope à l'ordre 4, $l = k + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ et

$$R = N(l) \frac{1}{r} + III(l) \frac{1}{r^2} + II(l) \frac{1}{r^3} + I'(l) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Remarque. — L'ensemble des propriétés imposées à la métrique peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} (4-2-2), (4-2-3) \\ g_{\alpha\beta}x^\beta = g_{\alpha\beta}x^\beta = 0 \end{array} \right.$$

Deuxième cas :

Si on suppose k isotrope à l'ordre 3, $g_{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma = 0$ et géodésique de paramètre affine à l'ordre 2, la condition (b) s'écrit :

$$(4-2-4) \quad g_{\delta\mu} + \frac{1}{4} g_{\delta\epsilon} g_{\epsilon\mu} + 2 \frac{x^\gamma}{r} g_{0\gamma} \eta_{\delta\mu} = 0$$

THÉORÈME 3. — *Si k est géodésique de paramètre affine à l'ordre 2, isotrope à l'ordre 3 et si*

$$k_a = \lambda(r)\delta_a^0 + o\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

alors pour que

$$R = I'(l) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

il faut et il suffit que : (4-2-4). On a alors pour tout l isotrope à l'ordre 4,

$$l = k + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

et

$$R = N(l) \frac{1}{r} + III(l) \frac{1}{r^2} + II(l) \frac{1}{r^3} + I'(l) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

V. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU TENSEUR DE COURBURE CONFORME

1. Définition du tenseur de courbure conforme.

Sur V_4 le tenseur de courbure conforme est défini par :

$$(5-1-1) \quad C_a{}^b{}_{im} = R_a{}^b{}_{im} - \frac{1}{2} (g_{ai}R_m{}^b + \delta_m^b R_{ai} - g_{am}R_i{}^b - \delta_i^b R_{am}) + \frac{1}{6} \tilde{r} (g_{ai}\delta_m^b - g_{am}\delta_i^b)$$

(R_{am} désignant le tenseur de Ricci et \tilde{r} la courbure scalaire). Il admet donc un développement limité à l'ordre ρ et :

$$(5-1-2) \quad \overset{1}{C}_a{}^b{}_{lm} = \overset{1}{R}_a{}^b{}_{lm} - \frac{1}{2} (\eta_{al} \overset{1}{R}_m{}^b + \delta_m^b \overset{1}{R}_{al} - \eta_{am} \overset{1}{R}_l^b - \delta_l^b \overset{1}{R}_{am}) + \frac{1}{6} \tilde{r} (\eta_{al} \delta_m^b - \eta_{am} \delta_l^b)$$

$$(5-1-3) \quad \overset{2}{C}_a{}^b{}_{lm} = \overset{2}{R}_a{}^b{}_{lm} - \frac{1}{2} (\eta_{al} \overset{2}{R}_m{}^b + \delta_m^b \overset{2}{R}_{al} - \eta_{am} \overset{2}{R}_l^b - \delta_l^b \overset{2}{R}_{am} + \overset{1}{g}_{al} \overset{1}{R}_m{}^b - \overset{1}{g}_{am} \overset{1}{R}_l^b) \\ + \frac{1}{6} \tilde{r}^2 (\eta_{al} \delta_m^b - \eta_{am} \delta_l^b) + \frac{1}{6} \tilde{r} (\overset{1}{g}_{al} \delta_m^b - \overset{1}{g}_{am} \delta_l^b)$$

$$(5-1-4) \quad \overset{3}{C}_a{}^b{}_{lm} = \overset{3}{R}_a{}^b{}_{lm} - \frac{1}{2} (\eta_{al} \overset{3}{R}_m{}^b + \delta_m^b \overset{3}{R}_{al} - \eta_{am} \overset{3}{R}_l^b - \delta_l^b \overset{3}{R}_{am} + \overset{1}{g}_{al} \overset{2}{R}_m{}^b \\ - \overset{1}{g}_{am} \overset{2}{R}_l^b + \overset{2}{g}_{al} \overset{1}{R}_m{}^b - \overset{2}{g}_{am} \overset{1}{R}_l^b) \\ + \frac{1}{6} \tilde{r}^3 (\eta_{al} \delta_m^b - \eta_{am} \delta_l^b) + \frac{1}{6} \tilde{r}^2 (\overset{1}{g}_{al} \delta_m^b - \overset{1}{g}_{am} \delta_l^b) + \frac{1}{6} \tilde{r} (\overset{2}{g}_{al} \delta_m^b - \overset{2}{g}_{am} \delta_l^b)$$

$$(5-1-5) \quad \overset{4}{C}_a{}^b{}_{lm} = \overset{4}{R}_a{}^b{}_{lm} - \frac{1}{2} (\eta_{al} \overset{4}{R}_m{}^b + \delta_m^b \overset{4}{R}_{al} - \eta_{am} \overset{4}{R}_l^b - \delta_l^b \overset{4}{R}_{am} + \overset{1}{g}_{al} \overset{3}{R}_m{}^b - \overset{1}{g}_{am} \overset{3}{R}_l^b \\ + \overset{2}{g}_{al} \overset{2}{R}_m{}^b - \overset{2}{g}_{am} \overset{2}{R}_l^b + \overset{3}{g}_{al} \overset{1}{R}_m{}^b - \overset{3}{g}_{am} \overset{1}{R}_l^b) \\ + \frac{1}{6} \tilde{r}^4 (\eta_{al} \delta_m^b - \eta_{am} \delta_l^b) + \frac{1}{6} \tilde{r}^3 (\overset{1}{g}_{al} \delta_m^b - \overset{1}{g}_{am} \delta_l^b) \\ + \frac{1}{6} \tilde{r}^2 (\overset{2}{g}_{al} \delta_m^b - \overset{2}{g}_{am} \delta_l^b) + \frac{1}{6} \tilde{r} (\overset{3}{g}_{al} \delta_m^b - \overset{3}{g}_{am} \delta_l^b)$$

Nous définissons comme pour le tenseur de courbure les divers cas de la classification de Bel-Petrov (ce sont les définitions usuelles puisque $C_a{}^b{}_{bm} = C_{am} = 0$, mis à part que nous ne faisons pas une classification exclusive, c'est-à-dire que par exemple un cas N est un cas particulier d'un cas II).

Pour étudier les propriétés de C, il nous faut d'abord connaître celle du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire.

2. Étude du tenseur de Ricci.

Nous définissons le tenseur de Ricci par :

$$R_{am} = R_a{}^b{}_{bm} = \overset{1}{R}_{am} \frac{1}{r} + \dots + \overset{\rho}{R}_{am} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

a) *Premier ordre.*

Un calcul direct à partir de (1-5-2) et (1-4-3) donne :

$$(5-2-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{R}_{\alpha\mu} = 0 \\ \overset{1}{R}_{0\mu} = \frac{1}{2r} \partial_{00}(x^\delta \overset{1}{g}_{\mu\delta}) \\ \overset{1}{R}_{00} = \frac{1}{2} \partial_{00} \overset{1}{g}_{\beta\beta} \end{array} \right.$$

Tenant compte des résultats du chapitre II, nous pouvons énoncer

$$(5-2-2) \quad \overset{1}{R} = N(I) \iff \overset{1}{R}_{a1} = \overset{00}{l}_a \overset{00}{l}_1 ; \quad \text{on a} \quad \gamma = \frac{1}{2} \partial_{00} \overset{1}{g}_{\beta\beta}$$

$$(5-2-3) \quad \overset{1}{R} = III(I) \iff \overset{0}{l}^m \overset{1}{R}_{0m} = 0$$

Remarque 1 : $\forall R \quad \overset{0}{l}^a \overset{00}{l}^m \overset{1}{R}_{am} = 0$

Remarque 2 : $\overset{1}{R} = III(I) \implies \overset{1}{r} = 0$

b) *Deuxième ordre :*

Nous supposons k intégrable au premier ordre, soit $\partial_0 \overset{1}{g}_{\alpha\beta} x^\beta = 0$. Nous obtenons alors à l'aide (1-5-3), (1-4-3) et (2-3-1) :

$$(5-2-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^\alpha \overset{2}{R}_{\alpha\mu} = 0 \\ x^\alpha \overset{2}{R}_{\alpha 0} = -\frac{1}{r} \partial_0 \left[\frac{1}{2} \partial_0 (g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma) + r x^\beta \overset{1}{g}_{\beta 0} \right] \end{array} \right.$$

Tenant compte des résultats du chapitre III, nous pouvons énoncer :

— Si k est intégrable au premier ordre

$$(5-2-5) \quad \overset{00}{l}^a \overset{2}{l}^m \overset{2}{R}_{am} = 0$$

$$(5-2-6) \quad \overset{0}{l}^a \overset{2}{R}_{am} = 0 \iff \overset{2}{R} = III(I)$$

c) *Troisième ordre :*

Supposons k intégrable au premier ordre et géodésique de paramètre affine au second ordre, alors (1-5-4), (3-3-1) et (3-3-2), (2-3-1) à (2-3-4) donnent :

$$(5-2-7) \quad \overset{00}{l}^a \overset{3}{l}^m \overset{3}{R}_{am} = \frac{x^\alpha x^\mu}{r^2} \overset{3}{R}_{\alpha\mu} = 0$$

3. Équivalences entre les propriétés de R et de C.

a) *Premier ordre* :

Cas II. — De (5-1-2) et (5-2-1), on déduit

$$(5-3-1) \quad x^\alpha x^\lambda \overset{1}{C}_{\alpha \gamma m}^b = x^\alpha x^\lambda \overset{1}{R}_{\alpha \lambda m}^b - \frac{2}{3} r x^\lambda \overset{1}{R}_{0\lambda} \overset{0}{l}_m^0$$

⇒ Au premier ordre C est toujours un cas II;

Cas III. — Supposons que $\overset{1}{R} = \text{III}(I)$; alors $x^\mu \overset{1}{R}_{0\mu} = 0$ et $\tilde{r} = 0$, on a donc :

$$x^\alpha x^\lambda \overset{1}{C}_{\alpha \lambda m}^b = 0$$

D'autre part :

$$x^\alpha x^\lambda (\overset{1}{C}^*)_{\alpha \lambda m}^b = 0$$

est alors équivalent :

$$x^\alpha x^\lambda \varepsilon_{\lambda\pi\sigma} \overset{1}{C}_{\alpha \pi\sigma}^\beta = 0$$

qui est identiquement vérifié.

Réciproquement supposons que $\overset{1}{C} = \text{III}(I)$, d'après (5-3-1), (5-2-1), (1-5-2) et (1-4-3), il vient :

$$-\frac{1}{6} \partial_{00} (\overset{1}{g}_{\alpha\lambda} x^\alpha x^\lambda) \overset{0}{l}_m^0 = 0$$

Soit $x^\mu \overset{1}{R}_{0\mu} = 0$, soit d'après (5-2-3), $\overset{1}{R} = \text{III}(I)$.

$$\Rightarrow \quad \overset{1}{R} = \text{III}(I) \iff \overset{1}{C} = \text{III}(I)$$

Cas N. — Supposons $\overset{1}{R} = \text{N}(I)$, on a $\overset{1}{R}_{\alpha l} = \left(\frac{1}{2} \partial_{00} \overset{1}{g}_{\beta\beta}\right) \overset{0}{l}_\alpha \overset{0}{l}_l$, d'où d'après (5-1-2) :

$$\begin{aligned} x^\lambda \overset{1}{C}_{\alpha \lambda m}^b &= -\frac{1}{2} (\eta_{\alpha\lambda} x^\lambda \overset{0}{l}_m^0 - \tilde{r} \overset{0}{l}_\alpha \overset{0}{l}_m^0) \left(\frac{1}{2} \partial_{00} \overset{1}{g}_{\beta\beta}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Réciproquement supposons $\overset{1}{C} = \text{N}(I)$, d'après ce qui précède $\overset{1}{R} = \text{III}(I)$ et

$$x^\lambda \overset{1}{C}_{\alpha \lambda m}^b = x^\lambda \overset{1}{R}_{\alpha \lambda m}^b - \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\lambda} x^\lambda \overset{1}{R}_m^b - \delta_\lambda^b x^\lambda \overset{1}{R}_{\alpha m}) = 0$$

Écrivons cette relation pour $b = \beta, a = \alpha, m = 0$

$$x^\lambda \overset{1}{R}_\alpha{}^\beta{}_{\lambda 0} + \frac{1}{2} x^\beta \overset{1}{R}_{\alpha 0} = 0$$

$$\frac{3}{4} \frac{x^\beta}{r} \partial_{00}(x^\lambda \overset{1}{g}_{\alpha\lambda}) = 0$$

Ce qui montre que

$$\overset{1}{R} = N(I)$$

THÉORÈME 1. — *Pour que le tenseur de courbure conforme soit un cas N (resp. III) au premier ordre, il faut et il suffit que le tenseur de courbure soit un cas N (resp. III) au premier ordre.*

Le tenseur de courbure conforme est toujours un cas II au premier ordre.

b) *Étude au deuxième ordre :*

Cas II. — Supposons que R ou C est un cas III à l'ordre 1, on a alors d'après (5-1-3), (5-2-3) et (5-2-4) :

$$x^\alpha x^\lambda \overset{2}{C}_\alpha{}^b{}_{\lambda m} \equiv x^\alpha x^\lambda \overset{2}{R}_\alpha{}^b{}_{\lambda m} + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_{\alpha\lambda} x^\alpha x^\lambda \overset{1}{R}_m{}^b \quad (\text{modulo } l_m^{0,0})$$

Donc :

Si R ou C est un cas III à l'ordre 1 et si k est isotrope au premier ordre :

$$\overset{2}{C} = \text{II}(I) \iff \overset{2}{R} = \text{II}(I)$$

Cas III. — Nous supposons k intégrable et isotrope au premier ordre, on a alors $\overset{1}{R} = N(k)$. Supposons $\overset{2}{R} = \text{III}(I)$, on a :

$$x^\alpha x^\lambda \overset{2}{C}_\alpha{}^b{}_{\lambda m} = -\frac{1}{6} \overset{2}{r} x^\alpha \eta_{\alpha m} \delta_\lambda^b x^\lambda$$

Or :

$$\begin{aligned} \overset{2}{r} &= \eta^{am} \overset{2}{R}_{am} + g^{am} \overset{1}{R}_{am} = -\overset{2}{R}_{\alpha\alpha} \\ &= -\overset{2}{R}_\alpha{}^\beta{}_{\beta\alpha} = -\partial_{00} \overset{1}{g}_{\alpha\alpha} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} r \partial_\beta \frac{x^\beta}{r} \right] = 0 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$x^\alpha x^\lambda (\overset{2}{C}^*)_\alpha{}^b{}_{\lambda m} = 0$$

est équivalent à :

$$x^\alpha x^\lambda \varepsilon_{\lambda \pi \sigma} \overset{2}{C}_\alpha{}^{\beta}{}_{\pi \sigma} = 0$$

qui est identiquement vérifié.

Réciproquement, $x^\alpha x^\lambda \overset{2}{C}_\alpha{}^b{}_{\lambda m} = 0$ s'écrit pour $m = 0$, $b = \beta$:

$$x^\alpha x^\lambda \overset{2}{R}_\alpha{}^b{}_{\lambda 0} + x^\beta x^\lambda \overset{2}{R}_{0\lambda} - \frac{1}{6} \overset{2}{r} r x^\beta = 0$$

soit :

$$\frac{5}{3} \partial_0 \left[\frac{1}{2} \partial_0 (g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) + r x^\alpha g_{\alpha 0} \right] = 0$$

et donc $\overset{2}{R} = \text{III}(I)$.

\Rightarrow Si k est isotrope et intégrable au premier ordre

$$\overset{2}{R} = \text{III}(I) \iff \overset{2}{C} = \text{III}(I).$$

c) *Étude au troisième ordre :*

Nous supposons k intégrable au premier ordre et géodésique de paramètre affine au second ordre. De (5-1-3), (5-1-6), (5-2-1), on déduit :

$$\begin{aligned} x^\alpha x^\lambda \overset{3}{C}_\alpha{}^b{}_{\lambda m} &= -\frac{1}{2} x^\alpha x^\lambda (-\eta_{am} \overset{3}{R}_\lambda{}^b - \delta_\lambda^b \overset{3}{R}_{am} + g_{\alpha\lambda} \overset{2}{R}_m{}^b + g_{\alpha\lambda} \overset{1}{R}_m{}^b) \\ &\quad + \frac{1}{6} \overset{3}{r} x^\alpha x^\lambda (-\eta_{am} \delta_\lambda^b) \\ &\equiv \frac{1}{2} x^\alpha x^\lambda (\eta_{am} \overset{3}{R}_\lambda{}^b + \delta_\lambda^b \overset{3}{R}_{am}) \quad (\text{modulo } \overset{0,0}{l}_m^b) \end{aligned}$$

si $x^\alpha \overset{3}{R}_{\alpha\mu} = 0$

$$x^\alpha x^\lambda \delta_\lambda^b \overset{3}{R}_{am} \equiv 0$$

et

$$x^\alpha x^\lambda \eta_{am} \overset{3}{R}_\lambda{}^b = x^\alpha \eta_{am} x^\lambda \eta^{b0} \overset{3}{R}_{0\lambda} \equiv 0$$

d'où

$$x^\alpha x^\lambda \overset{3}{C}_\alpha{}^b{}_{\lambda m} \equiv 0$$

et réciproquement cette relation n'est vérifiée que si $x^\alpha \overset{3}{R}_{\alpha\mu} = 0$.

⇒ Si k est intégrable au premier ordre et géodésique de paramètre affine au second ordre :

$${}^3C = \Pi(I) \iff x^\alpha {}^3R_{\alpha\mu} = 0.$$

d) Étude à l'ordre 4 :

Supposons k géodésique de paramètre affine à l'ordre 3 et vérifiant $k_\alpha = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$, on a alors

$$x^\alpha x^\mu {}^4R_{\alpha\mu} = \frac{1}{4} r^2 [4g_{\beta\beta}^2 + g_{\beta\varepsilon}g_{\varepsilon\beta}^1]$$

La condition ${}^4C = I'(I)$ s'écrit :

$$(5-3-2) \quad \begin{cases} x^\alpha x^\lambda {}^4C_{\alpha\lambda\mu} = 0 \\ x^\alpha x^\lambda ({}^4C_{\alpha\lambda\mu} x^\gamma - {}^4C_{\alpha\lambda\mu} x^\beta) = 0 \end{cases}$$

la première est triviale et la seconde s'écrit :

$${}^4R_{\alpha\lambda} x^\alpha x^\lambda (\delta_\mu^\gamma x^\beta - \delta_\mu^\beta x^\gamma) + x^\alpha x^\lambda ({}^4R_{\alpha\lambda\mu} x^\gamma - {}^4R_{\alpha\lambda\mu} x^\beta) = 0$$

ou :

$$\eta_{\delta\beta} x^\alpha x^\lambda {}^4R_{\alpha\lambda\mu}^\beta - \eta_{\delta\mu} {}^4R_{\alpha\lambda} x^\alpha x^\lambda = 0$$

soit :

$$4g_{\delta\mu}^2 + g_{\delta\varepsilon}g_{\varepsilon\mu}^1 - \eta_{\delta\mu} (4g_{\beta\beta}^2 + g_{\beta\varepsilon}g_{\varepsilon\beta}^1) = 0$$

qui équivaut à :

$$4g_{\delta\mu}^2 + g_{\delta\varepsilon}g_{\varepsilon\mu}^1 = 0$$

⇒ Si k est géodésique de paramètre affine à l'ordre 3 vérifie $k_\alpha = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ alors :

$$4g_{\alpha\beta}^2 + g_{\alpha\varepsilon}g_{\varepsilon\beta}^1 = 0 \iff {}^4R = I'(I) \iff {}^4C = I'(I)$$

Si on suppose k géodésique à l'ordre 3, vérifiant $k_\alpha = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ et géodésique de paramètre affine à l'ordre 2, on a alors :

$$(5-3-5) \quad x^\alpha x^\mu {}^4R_{\alpha\mu} = r^2 \left[g_{\beta\beta}^2 + \frac{1}{4} g_{\beta\varepsilon}g_{\varepsilon\beta}^1 + 4g_{0\gamma}^2 \frac{x^\gamma}{r} \right]$$

La condition $\overset{4}{C} = I'(I)$ s'écrit (5-3-2) dont la première relation est triviale et la seconde s'écrit :

$$\eta_{\delta\beta} x^\alpha x^\lambda \overset{4}{R}_{\alpha\lambda\mu}^\beta - \eta_{\delta\mu} \overset{4}{R}_{\alpha\lambda} x^\alpha x^\lambda = 0$$

soit :

$$g_{\mu\delta}^2 + \frac{1}{4} g_{\mu\varepsilon} g_{\varepsilon\delta}^1 + 2 \frac{x^\gamma}{r} g_{\gamma 0} \eta_{\mu\delta}^2 - \eta_{\mu\delta} \left[g_{\beta\beta}^2 + \frac{1}{4} g_{\beta\varepsilon} g_{\varepsilon\beta}^1 - 4 g_{0\gamma} \frac{x^\gamma}{r} \right] = 0$$

Cette équation est de la forme $a_{\mu\delta} - \eta_{\mu\delta} a_{\beta\beta} = 0$ et est équivalente à :

$$g_{\mu\delta}^2 + \frac{1}{4} g_{\mu\varepsilon} g_{\varepsilon\delta}^1 + 2 \frac{x^\gamma}{r} g_{\gamma 0} \eta_{\mu\delta}^2 = 0$$

⇒ Si k vérifie $k_\alpha = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ et si k est isotrope à l'ordre 3 et géodésique de paramètre affine à l'ordre 2, alors

$$g_{\mu\delta}^2 + \frac{1}{4} g_{\mu\varepsilon} g_{\varepsilon\delta}^1 + 2 \frac{x^\gamma}{r} g_{\gamma 0} \eta_{\mu\delta}^2 = 0 \iff \overset{4}{R} = I'(I) \iff \overset{4}{C} = I'(I)$$

Cette étude nous permet d'étendre au tenseur de courbure conforme tous les résultats concernant le tenseur de courbure (*).

4. Résumé des résultats.

THÉORÈME 1. — Si $\rho = 1$

a) $\exists I$ isotrope au premier ordre, tel que

$$C = \Pi(I) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

(*) Avec une légère modification pour les théorèmes 2 et 3 : il faut supposer k isotrope au premier ordre, et pour les théorèmes 4, 5, 6, il faut supposer $x^\alpha \overset{3}{R}_{\alpha\beta} = 0$. Cette dernière relation signifie que $\partial_0(g_{\beta\gamma} x^\beta)$ doit s'exprimer à l'aide de $g_{\alpha\beta}^1$ et $g_{\alpha\alpha}^1$:

$$\begin{aligned} \partial_0(g_{\beta\gamma} x^\beta) &= 2r g_{0\gamma}^1 - r^2 \partial_\gamma \left(\frac{x^\beta}{r} g_{\beta\gamma}^1 \right) \\ &\quad - x^\beta g_{\beta\varepsilon}^1 (\delta_\gamma^\varepsilon \partial_0 g_{\alpha\alpha}^1 + \partial_0 g_{\varepsilon\gamma}^1 - 3\delta_\gamma^\varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{2} r^2 \partial_\alpha [\partial_\alpha (x^\beta g_{\beta\gamma}^1) - \partial_\gamma (x^\beta g_{\beta\alpha}^1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} x^\gamma g_{\alpha\alpha}^1 - \frac{1}{2} r^2 \partial_\gamma g_{\alpha\alpha}^1 + \frac{1}{2} r^2 \partial_\alpha g_{\alpha\gamma}^1 \end{aligned}$$

Dans le cas de Sachs (cf. chapitre VI), la condition devient $g_{0\gamma}^1 = 0$.

b) Si l est géodésique de paramètre affine et isotrope au premier ordre ou si $\exists l$ intégrable et isotrope au premier ordre, alors :

$$C = \text{III}(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

c) Si k est intégrable au premier ordre, $\exists l$ isotrope au premier ordre tel que :

$$C = \text{N}(l) \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

THÉORÈME 2. — Si $\rho = 2$ et si k est intégrable et isotrope au premier ordre :

a) $\exists l$ isotrope au deuxième ordre, tel que :

$$C = \text{N}(l) \frac{1}{r} + \text{II}(l) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

b) Si de plus k est géodésique de paramètre affine au second ordre, $\exists l$ isotrope au deuxième ordre tel que :

$$C = \text{N}(l) \frac{1}{r} + \text{III}(l) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

(on a dans ces deux cas $l = k + \sigma\left(\frac{1}{r}\right)$).

THÉORÈME 3. — Si $\rho = 2$ et si k est isotrope au premier ordre,

$$C = \text{III}(l) \frac{1}{r} + \text{II}(l) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

entraîne :

$$C = \text{N}(l) \frac{1}{r} + \text{II}(l) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

THÉORÈME 4. — Si $\rho = 3$ et si k est intégrable au premier ordre et géodésique de paramètre affine au second ordre, et si $x^\alpha \mathbf{R}_{\alpha\beta} = 0$, $\exists l$ isotrope tel que :

$$C = \text{N}(l) \frac{1}{r} + \text{III}(l) \frac{1}{r^2} + \text{II}(l) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

THÉORÈME 5. — Si $\rho = 4$ et si k est géodésique de paramètre affine à l'ordre 3 et vérifie $k_\alpha = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$, alors les conditions

$$4g_{\alpha\beta}^2 + g_{\alpha\lambda}g_{\lambda\beta} = 0 \quad \text{et} \quad x^\alpha R_{\alpha\beta}^3 = 0$$

sont équivalentes à : $\exists l$ isotrope tel que :

$$C = N(l)\frac{1}{r} + III(l)\frac{1}{r^2} + II(l)\frac{1}{r^3} + I'(l)\frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

THÉORÈME 6. — Si $\rho = 4$ et si k

- i) est isotrope à l'ordre 3,
- ii) est géodésique de paramètre affine à l'ordre 2,
- iii) vérifie $k_\alpha = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$,

alors les conditions

$$g_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{4}g_{\alpha\epsilon}g_{\epsilon\beta} + 2\frac{x^\gamma}{r}g_{\gamma 0}\eta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{et} \quad x^\alpha R_{\alpha\beta}^3 = 0$$

sont équivalentes à :

$$C = N(l)\frac{1}{r} + III(l)\frac{1}{r^2} + II(l)\frac{1}{r^3} + I'(l)\frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

VI. ESPACE-TEMPS DE SACHS

Dans son article, Sachs généralise la méthode de Bondi, Van der Burg et Metzner. Nous allons mettre en évidence les diverses hypothèses que contient le travail de Sachs et dégager les conclusions correspondantes en ce qui concerne le comportement asymptotique du tenseur de courbure.

1. Métrique.

Sachs choisit des hypothèses telles que l'on puisse écrire la métrique sous la forme (nous avons pris la signature $+, -, -, -$ au lieu de $-, +, +, +$) :

$$(6-1-1) \quad ds^2 = V\frac{e^{2\beta}}{r} du^2 + 2e^{2\beta} du dr - r^2 h_{AB}(dx'^A - U^A du)(dx'^B - U^B du)$$

où

$$2h_{AB}dx'^A dx'^B = (e^{2\gamma} + e^{2\delta})d\theta^2 + 4 \sin \theta \operatorname{sh}(\gamma - \delta)d\theta d\varphi + \sin^2 \theta (e^{-2\gamma} + e^{-2\delta})d\varphi^2$$

si on pose

$$x'^0 = x^{0'} = u, \quad x'^1 = x^{1'} = r, \quad x'^2 = x^{2'} = \theta, \quad x'^3 = x^{3'} = \varphi$$

V, β, U^A, γ et δ sont des fonctions de u, r, θ, φ .

Sachs fait, de plus, les hypothèses suivantes sur le comportement asymptotique

i) $r \rightarrow +\infty$ a un sens

$$\forall u \in [u_1, u_2]$$

$$\forall \theta \in [0, \pi]$$

$$\forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

ii) quand $r \rightarrow +\infty$

$$(6-1-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{V}{r} \rightarrow +1 \\ rU^A \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

iii) Toutes les fonctions considérées sont analytiques en $1/r$, les séries étant dérivables terme à terme, etc.

Nous allons conserver les hypothèses *i)* et *ii)*, mais affaiblir *iii)* en :

iv) Toutes les fonctions considérées admettent des développements limités en $1/r$ à l'ordre 4, deux fois dérivables.

Nous allons remplacer les six fonctions $V, U^A, \beta, \gamma, \delta$ par les sept fonctions :

$$(6-1-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = V \frac{e^{2\beta}}{r} - r^2 h_{AB} U^A U^B \\ b = e^{2\beta} \\ e = (e^{2\gamma} + e^{2\delta})rU^2 + 2 \sin \theta \operatorname{sh}(\gamma - \delta)rU^3 \\ f = 2 \operatorname{sh}(\gamma - \delta)rU^2 + \sin \theta (e^{-2\gamma} + e^{-2\delta})rU^3 \\ l = \frac{1}{2}(e^{2\gamma} + e^{2\delta}) \\ m = \frac{1}{2}(e^{-2\gamma} + e^{-2\delta}) \\ n = 2 \operatorname{sh}(\gamma - \delta) \end{array} \right.$$

liées par la relation :

$$(6-1-4) \quad 4lm - n^2 = 4$$

Les limites (6-1-2) deviennent : quand $r \rightarrow +\infty$:

$$(6-1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow 1 \\ b \rightarrow 1 \\ e \rightarrow 0 \\ f \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 1 \\ m \rightarrow 1 \\ n \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Pour ramener l'étude de ce problème à l'étude que nous avons faite dans les chapitres précédents, nous allons faire le changement de coordonnées :

$$x^a = x^a(x'^b)$$

défini par :

$$(6-1-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^0 = u \\ x^1 = x = r \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 = y = r \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 = z = r \cos \theta \end{array} \right.$$

Ce qui nous donne la nouvelle métrique sous la forme :

$$(6-1-7) \quad g_{00} = a$$

$$(6-1-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{01} = b \sin \theta \cos \varphi + e \cos \theta \cos \varphi - f \sin \varphi \\ g_{02} = b \sin \theta \sin \varphi + e \cos \theta \sin \varphi + f \cos \varphi \\ g_{03} = b \cos \theta - e \sin \theta \end{array} \right.$$

$$(6-1-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{11} = -l \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + 2n \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - m \sin^2 \varphi \\ g_{12} = -l \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + n \cos \theta (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + m \sin \varphi \cos \varphi \\ g_{13} = l \sin \theta \cos \theta \cos \varphi - n \sin \theta \sin \varphi \\ g_{22} = -l \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - 2n \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - m \cos^2 \varphi \\ g_{23} = l \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + n \sin \theta \cos \varphi \\ g_{33} = -l \sin^2 \theta \end{array} \right.$$

On vérifie que (6-1-5) se traduit par : quand $r \rightarrow +\infty$

$$g_{ij} \rightarrow \eta_{ij}$$

Nous sommes donc dans les hypothèses que nous avons données au chapitre premier.

De (6-1-8), on déduit :

$$(6-1-10) \quad g_{0\alpha} \frac{x^\alpha}{r} = b$$

De (6-1-9), on déduit :

$$(6-1-11) \quad g_{\alpha\beta} \frac{x^\beta}{r} = 0$$

$$(6-1-12) \quad g_{\mu\mu} = -(l + m)$$

2. Premières conséquences.

De (6-1-11), on déduit immédiatement :

$${}^1 g_{\alpha\beta} x^\beta = 0$$

et $0 = {}^1 g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = {}^2 g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$. k est donc isotrope au second ordre et du théorème 3, chapitre III, on déduit :

$$R = N(k) \frac{1}{r} + II(k) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Pour obtenir des résultats plus forts, il nous faut des hypothèses plus fortes. Sachs suppose que le tenseur de Ricci est nul. Nous allons prendre des hypothèses plus générales :

$$(A) \quad R_{ab} k^a k^b = o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$(B) \quad k^a (R_{ab} k_c - R_{ac} k_b) = o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

3. Conséquences de (A).

(A) s'écrit dans nos coordonnées $R_{\alpha\beta} \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} = o\left(\frac{1}{r^3}\right)$, or on a vu au chapitre précédent que ${}^1 R_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = {}^2 R_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$, (A) est donc équivalent à

$$(6-3-1) \quad {}^3 R_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$$

D'après (6-1-4) et $\overset{0}{l} = \overset{0}{m} = 1$,

$$(6-3-2) \quad \overset{1}{l} + \overset{1}{m} = 0$$

et

$$(6-3-3) \quad \overset{1}{g}_{\mu\mu} = 0.$$

Tenant compte de cette relation, et de $\overset{i}{g}_{\alpha\beta}x^\beta = 0$, (6-3-1) s'écrit :

$$\overset{3}{R}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = -2r\overset{1}{g}_{0e}x^e = 0$$

(Cette relation s'écrit d'après (6-1-10), $\overset{1}{b} = 0$, soit $\overset{1}{\beta} = 0$), k étant isotrope à l'ordre 3, on voit d'après le théorème 1 du chapitre IV que (A) entraîne que :

$$R = N(k)\frac{1}{r} + III(k)\frac{1}{r^2} + II(k)\frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

4. Conséquences de (B).

(B) s'écrit dans nos coordonnées :

$$\frac{x^\alpha}{r} R_{\alpha\gamma} = o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

soit

$$\begin{cases} x^\alpha \overset{3}{R}_{\alpha\gamma} = 0 \\ x^\alpha \overset{4}{R}_{\alpha\gamma} = 0 \end{cases}$$

La première de ces relations ne nous est pas utile (*) (elle s'écrit : $\overset{1}{g}_{0\gamma} = 0$).

La deuxième relation s'écrit en tenant compte de $\overset{i}{g}_{\alpha\beta}x^\beta = 0, \overset{1}{g}_{\mu\mu} = 0$ (le calcul est très simple, mais un peu long) :

$$(6-4-1) \quad \begin{aligned} x^\alpha \overset{4}{R}_{\alpha\gamma} &= r^2 \partial_a \overset{2}{g}_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} r^2 \partial_a (\overset{1}{g}_{\alpha\varepsilon} \overset{1}{g}_{\varepsilon\gamma}) + 2r \partial_\gamma (x^\beta \overset{2}{g}_{\beta 0}) - 6 \frac{x^\gamma}{r} x^\beta \overset{2}{g}_{\beta 0} \\ &+ 2x^\gamma \overset{2}{g}_{\beta\beta} - r^2 \partial_\gamma \overset{2}{g}_{\beta\beta} + x^\gamma \overset{1}{g}_{\beta\varepsilon} \overset{1}{g}_{\varepsilon\beta} - \frac{1}{2} r^2 \partial_\gamma (\overset{1}{g}_{\beta\varepsilon} \overset{1}{g}_{\varepsilon\beta}) \\ &- \frac{1}{4} x^\gamma \overset{1}{g}_{\alpha\varepsilon} \overset{1}{g}_{\varepsilon\alpha} + \frac{1}{4} r^2 \overset{1}{g}_{\alpha\varepsilon} \partial_\gamma \overset{1}{g}_{\varepsilon\alpha} = 0 \end{aligned}$$

(*) Elle nous sera, par contre, nécessaire pour pouvoir étendre nos résultats au tenseur de courbure conforme.

par multiplication contractée par x^γ , il vient :

$$(6-4-2) \quad x^\alpha x^\gamma R_{\alpha\gamma} = r^2 \left[g_{\beta\beta}^2 + \frac{1}{4} g_{\beta\epsilon}^1 g_{\epsilon\beta}^1 - 4 \frac{x^\beta}{r} g_{\beta 0}^2 \right] = 0$$

Nous allons montrer que (6-4-1) et (6-1-9) entraînent :

$$g_{\alpha\gamma}^2 + \frac{1}{4} g_{\alpha\epsilon}^1 g_{\epsilon\gamma}^1 + 2 \frac{x^\beta}{r} g_{\beta 0}^2 \eta_{\alpha\gamma} = 0$$

De (6-1-9), on déduit que $j_{\alpha\beta} = g_{\alpha\epsilon} g_{\epsilon\beta}$ s'exprime comme $g_{\alpha\beta}$ en fonction de θ , φ , en remplaçant l , m et n par $L = -(l^2 + m^2)$, $M = -(m^2 + n^2)$ et $N = -(l + m)n$. Nous écrivons ceci $j_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(L, M, N)$. En particulier de $\bar{l} + \bar{m} = 0$, on déduit

$$g_{\alpha\epsilon}^1 g_{\epsilon\beta}^1 = -(\bar{l}^2 + \bar{n}^2) g_{\alpha\beta}(1, 1, 0) = \mu \eta_{\alpha\beta}$$

pour $\mu = -(\bar{l}^2 + \bar{n}^2)$.

Posons

$$\frac{x^\beta}{r} g_{\beta 0}^2 = v$$

$$g_{\alpha\gamma}^2 = \lambda \eta_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\gamma}$$

où λ et $h_{\alpha\beta}$ sont définis de façon unique par $h_{\beta\beta} = 0$, on a :

$$\lambda = \frac{1}{2} (\bar{l}^2 + \bar{n}^2)$$

$$(6-4-3) \quad \begin{aligned} h_{\alpha\gamma} &= g_{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{2} (\bar{l}^2 - \bar{n}^2), -\frac{1}{2} (\bar{l}^2 - \bar{n}^2), \bar{n} \right) \\ &= g_{\alpha\gamma} (\bar{l}, -\bar{l}, \bar{n}) \quad \bar{l} = \frac{1}{2} (\bar{l}^2 - \bar{n}^2), \quad \bar{n} = \bar{n}. \end{aligned}$$

(6-4-2) s'écrit :

$$-2\lambda - \frac{1}{2} \mu - 4v = 0$$

Tenant compte de cette relation (6-4-1) s'écrit (puisque λ , μ et v sont homogènes de degré 0 en x , y et z) :

$$r^2 \partial_\alpha h_{\alpha\gamma} + r^2 \partial_\gamma \left[\lambda + \frac{1}{4} \mu + 2v \right] - 2x^\gamma \left[\lambda + \frac{1}{4} \mu + 2v \right] = 0$$

soit :

$$(6-4-4) \quad \partial_\alpha h_{\alpha\gamma} = 0$$

Il reste à montrer que cette relation entraîne $h_{\alpha\gamma} = 0$. Tenant compte de (6-4-3) et (6-1-9), (6-4-4) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \bar{l} = 0 \\ \frac{\partial \bar{n}}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \bar{n} = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) [(\bar{l} + i\bar{n}) \sin^2 \theta] = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\bar{l} + i\bar{n} = \frac{B \left(\text{Log tg } \frac{1}{2} \theta - i\theta \right)}{\sin^2 \theta}$$

B étant une fonction arbitraire. Sous cette forme explicite, on voit que \bar{l} et \bar{n} ou $h_{\alpha\beta}$ présentent une vraie singularité pour $\theta = 0$, sauf si $B \equiv 0$. $h_{\alpha\beta}$ étant régulier, cela entraîne $h_{\alpha\beta} = 0$, c. q. f. d. k étant isotrope à l'ordre 4, on voit, d'après le théorème 3 du chapitre IV que (B) entraîne :

$$R = N(k) \frac{1}{r} + \text{III}(k) \frac{1}{r^2} + \text{II}(k) \frac{1}{r^3} + I'(k) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

5. Résumé.

$$\text{Choix de la métrique} \quad \Rightarrow \quad R = N(k) \frac{1}{r} + \text{II}(k) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Choix de la métrique} \\ R_{ab} k^a k^b = o\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow R = N(k) \frac{1}{r} + \text{III}(k) \frac{1}{r^2} + \text{II}(k) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Choix de la métrique} \\ k^a (R_{ab} k_c - R_{ac} k_b) = o\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow R = N(k) \frac{1}{r} + \text{III}(k) \frac{1}{r^2} + \text{II}(k) \frac{1}{r^3} \\ + I'(k) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Enfin, étant donné les théorèmes du chapitre précédent, ces résultats

s'étendent au tenseur de courbure conforme sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Choix de la métrique} &\Rightarrow C = N(k) \frac{1}{r} + II(k) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \left. \begin{aligned} \text{Choix de la métrique} \\ k^a(R_{ab}k_c - R_{ac}k_b) = o\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow C = N(k) \frac{1}{r} + III(k) \frac{1}{r^2} + II(k) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ \left. \begin{aligned} \text{Choix de la métrique} \\ k^a(R_{ac}k_b - R_{ac}k_b) = o\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow C = N(k) \frac{1}{r} + III(k) \frac{1}{r^2} + II(k) \frac{1}{r^3} \\ &\quad + I'(k) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned}$$

VII. EXEMPLE D'APPLICATION : ÉTUDE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Nous allons terminer ce travail en appliquant les résultats obtenus à l'étude d'un espace-temps asymptotiquement plat sur lequel est défini en dehors du champ gravitationnel un autre champ, le champ électromagnétique (dans le schéma « pur ») par exemple. Les généralisations possibles à un champ quelconque seront évidentes.

1. Champ électro-magnétique sur un espace-temps asymptotiquement plat.

Soit V_4 un espace-temps asymptotiquement plat (cf. chapitre I). Un champ électro-magnétique sera défini sur V_4 par une deux-forme, le tenseur champ électro-magnétique F_{ab} . Nous supposons qu'il admet un développement limité à l'ordre ρ en $\frac{1}{r}$ dérivable :

$$(7-1-1) \quad F_{ab} = \overset{1}{F}_{ab} \frac{1}{r} + \dots + \overset{\rho}{F}_{ab} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right)$$

$$(7-1-2) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_0 F_{ab} &= \partial_0 \overset{1}{F}_{ab} \frac{1}{r} + \dots + \partial_0 \overset{\rho}{F}_{ab} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ \partial_\gamma F_{ab} &= \left(r \partial_\gamma \overset{1}{F}_{ab} - \frac{x^\gamma}{r} \overset{1}{F}_{ab} \right) \frac{1}{r^2} + \dots + \left(r \partial_\gamma \overset{\rho-1}{F}_{ab} - (\rho-1) \frac{x^\gamma}{r} \overset{\rho-1}{F}_{ab} \right) \frac{1}{r^\rho} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \end{aligned} \right.$$

$\overset{i}{F}_{ab}$ étant homogène de degré 0 en x^a .

Remarque. — Si on suppose qu'il existe un terme en $\overset{0}{F}_{ab}$, on obtient $\overset{0}{F}_{ab} \equiv 0$, car le tenseur de Maxwell associé à $\overset{0}{F}_{ab}$ est nul d'après les équations d'Einstein.

Nous supposons que dans notre domaine de coordonnées (c'est-à-dire pour r assez grand) seuls les champs gravitationnels et électro-magnétiques existent. Dans le modèle « champ électro-magnétique pur » F doit satisfaire les équations de champ suivantes :

a) *Équations de Maxwell :*

$$(7-1-3) \quad g^{ca} \nabla_c F_{ab} = 0$$

$$(7-1-4) \quad \oint_{cab} \nabla_c F_{ab} = 0$$

b) *Équations d'Einstein :*

$$(7-1-5) \quad S_{ab} = \chi \tau_{ab}$$

où $S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{r} g_{ab}$ est le tenseur d'Einstein

$$(7-1-6) \quad \tau_{ab} = \frac{1}{2} \psi g_{ab} - g^{lm} F_{al} F_{bm} \text{ est le tenseur de Maxwell}$$

$$(7-1-7) \quad \psi = \frac{1}{2} g^{ab} g^{lm} F_{al} F_{bm}$$

χ est une constante (non nulle).

Puisque $\tau = g^{ab} \tau_{ab} = 0$, (7-1-5) est équivalente à :

$$(7-1-6) \quad R_{ab} = \chi \tau_{ab}$$

Enfin en tenant compte de (7-1-1, 2, 6 et 7), on voit que

$$\begin{aligned} \psi &= \overset{1}{\psi} \frac{1}{r} + \dots + \overset{\rho}{\psi} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ \tau_{ab} &= \overset{1}{\tau}_{ab} \frac{1}{r} + \dots + \overset{\rho}{\tau}_{ab} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \\ \nabla_c F_{ab} &= \overset{1}{\nabla}_c F_{ab} \frac{1}{r} + \dots + \overset{\rho}{\nabla}_c F_{ab} \frac{1}{r^\rho} + o\left(\frac{1}{r^\rho}\right) \end{aligned}$$

où en particulier :

$$(7-1-7) \quad \begin{cases} \overset{1}{\psi} = 0 \\ \overset{2}{\psi} = \frac{1}{2} \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} + 2 \overset{1}{F}_{0\lambda} \overset{1}{F}_{\lambda\beta} \frac{x^\beta}{r} - \left(\overset{1}{F}_{0\beta} \frac{x^\beta}{r} \right)^2 \end{cases}$$

$$(7-1-8) \quad \begin{cases} \overset{1}{\tau}_{ab} = 0 \\ \overset{2}{\tau}_{ab} = \frac{1}{2} \overset{2}{\psi} \eta_{ab} + \overset{1}{F}_{a\lambda} \frac{x^\lambda}{r} \overset{1}{F}_{0b} + \overset{1}{F}_{0a} \overset{1}{F}_{b\lambda} \frac{x^\lambda}{r} + \overset{1}{F}_{a\gamma} \overset{1}{F}_{b\lambda} \\ \overset{3}{\tau}_{ab} = \frac{1}{2} \overset{3}{\psi} \eta_{ab} + \frac{1}{2} \overset{2}{\psi} \overset{2}{g}_{ab} - \eta^{lm} \overset{1}{F}_{al} \overset{2}{F}_{bm} - \eta^{lm} \overset{2}{F}_{al} \overset{1}{F}_{bm} - g^{a1} \overset{1}{F}_{al} \overset{1}{F}_{bm} \\ \overset{4}{\tau}_{ab} = \frac{1}{2} \overset{4}{\psi} \eta_{ab} + \frac{1}{2} \overset{3}{\psi} \overset{3}{g}_{ab} + \frac{1}{2} \overset{2}{\psi} \overset{2}{g}_{ab} - \eta^{lm} (\overset{1}{F}_{al} \overset{3}{F}_{bm} + \overset{2}{F}_{al} \overset{2}{F}_{bm} + \overset{3}{F}_{al} \overset{1}{F}_{bm}) \\ \quad \quad \quad - g^{1m} (\overset{1}{F}_{al} \overset{2}{F}_{bm} - \overset{2}{F}_{al} \overset{1}{F}_{bm}) - g^{2m} \overset{1}{F}_{al} \overset{1}{F}_{bm} \end{cases}$$

$$(7-1-9) \quad \begin{cases} \overline{\nabla_0 F_{ab}} = \partial_0 \overset{1}{F}_{ab} \\ \overline{\nabla_\gamma F_{ab}} = 0 \end{cases}$$

$$(7-1-10) \quad \begin{cases} \overline{\nabla_0 F_{ab}} = \partial_0 \overset{2}{F}_{ab} + \overset{1}{\Gamma}_b^d \overset{1}{F}_{da} - \overset{1}{\Gamma}_a^d \overset{1}{F}_{db} \\ \overline{\nabla_\gamma F_{ab}} = r \partial_\gamma \overset{1}{F}_{ab} - \frac{x^\gamma}{r} \overset{1}{F}_{ab} + \overset{1}{\Gamma}_b^d \overset{1}{F}_{\gamma da} - \overset{1}{\Gamma}_a^d \overset{1}{F}_{\gamma db} \end{cases}$$

Pour étudier ces équations, nous allons faire des hypothèses simplificatrices. Nous étudierons 2 cas.

2. Étude des champs gravitationnel et électro-magnétique sur un espace-temps de Sachs.

Nous supposons $\rho = 4$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur de courbure conforme ait la décomposition :

$$(7-2-1) \quad C = N(k) \frac{1}{r} + III(k) \frac{1}{r^2} + II(k) \frac{1}{r^3} + I'(k) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

est que :

$$\begin{cases} \frac{x^\alpha}{r} R_{\alpha\mu} = o\left(\frac{1}{r^4}\right) \\ \frac{x^\alpha}{r} R_{\alpha 0} = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{cases}$$

Étant donné les équations d'Einstein (7-1-6), cette condition s'écrit :

$$(7-2-2) \quad \begin{cases} x^\alpha \tau_{\alpha 0} = 0 & (a) \\ x^\alpha \tau_{\alpha \mu} = 0 & (b) \\ x^\alpha \tau_{\alpha \mu} = 0 & (c) \\ x^\alpha \tau_{\alpha \mu} = 0 & (d) \end{cases}$$

(b) s'écrit :

$$\overset{1}{F}_{0\alpha} x^\alpha \overset{1}{F}_{\mu\lambda} \frac{x^\lambda}{r} + x^\alpha \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} \overset{1}{F}_{\mu\lambda} = 0$$

qui est équivalent à :

$$x^\alpha \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} = 0$$

On a alors :

$$\tau_{\alpha 0} = \frac{1}{4} \left[\overset{1}{F}_{\beta\lambda} \overset{1}{F}_{\beta\lambda} - 2 \left(\overset{1}{F}_{0\beta} \frac{x^\beta}{r} \right)^2 \right] \frac{x^\alpha}{r} + \overset{1}{F}_{0\alpha} \overset{1}{F}_{0\lambda} \frac{x^\lambda}{r} + \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} \overset{1}{F}_{0\lambda}$$

et (a) devient :

$$\frac{1}{4} \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} + \frac{1}{2} \left(\overset{1}{F}_{0\beta} \frac{x^\beta}{r} \right)^2 = 0$$

soit :

$$\overset{1}{F}_{\alpha\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \overset{1}{F}_{0\beta} x^\beta = 0$$

On a alors $\psi = 0$ et (c) est identiquement vérifié; (d) s'écrit :

$$- \eta^{lm} \overset{2}{F}_{\alpha l} \overset{2}{F}_{\beta m} x^\alpha - g^{lm} \overset{2}{F}_{\alpha l} \overset{1}{F}_{\beta m} x^\alpha = 0$$

ou

$$x^\alpha \overset{2}{F}_{0\alpha} \overset{2}{F}_{\beta\mu} \frac{x^\mu}{r} + x^\alpha \overset{2}{F}_{\alpha\lambda} \overset{2}{F}_{\beta\lambda} = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$x_\alpha \overset{2}{F}_{\alpha\lambda} = 0$$

Finalement (7-2-2) est équivalent à :

$$(7-2-3) \quad \begin{cases} \overset{1}{F}_{\alpha\lambda} = 0 \\ \overset{1}{F}_{0\beta} x^\beta = 0 \\ \overset{2}{F}_{\alpha\beta} x^\beta = 0 \end{cases}$$

Ces conditions expriment que $\overset{1}{F}$ est singulier de vecteur isotrope $\overset{0}{k}$ et que $\overset{2}{F}$ admet $\overset{0}{k}$ comme vecteur propre.

Nous dirons que $\overset{1}{F}$ est un cas N relativement à k et $\overset{2}{F}$ un cas II.
Finalement, nous pouvons énoncer le

THÉOREME 1. — *Sur un espace-temps de Sachs dans le cas d'un « schéma champ électro-magnétique pur », pour que :*

$$C = N(k) \frac{1}{r} + III(k) \frac{1}{r^2} + II(k) \frac{1}{r^3} + I'(k) \frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

il faut et il suffit que :

$$F = N(k) \frac{1}{r} + II(k) \frac{1}{r^2} + \overset{3}{F} \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

3. Étude des champs gravitationnel et électro-magnétique sur un espace-temps asymptotiquement plat dans le cas d'un champ électromagnétique initialement nul.

Soit V_4 un espace-temps asymptotiquement plat sur lequel est défini un champ électro-magnétique F , vérifiant les équations de Maxwell et d'Einstein (7-1-3, 4 et 6).

Nous supposons que pour $u = u_0$, $F_{ab} = 0$ (*).

a) *Conséquences des équations de Maxwell :*

Premier ordre : (7-1-3) s'écrit

$$\partial_0 \overset{1}{F}_{ab} \frac{x^a}{r} = 0$$

(7-1-4) s'écrit :

$$\partial_0 \overset{1}{F}_{\alpha\beta} = 0$$

(*) En fait, il suffit de supposer

$$\overset{1}{F}_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{1}{F}_{0\beta} x^\beta = 0, \quad \overset{2}{F}_{\alpha\beta} x^\beta = 0.$$

Étant donné les conditions initiales, nous pouvons intégrer et on a :

$$(7-3-1) \quad \begin{cases} \overset{1}{F}_{\alpha\beta} = 0 \\ \overset{1}{F}_{0\beta}x^\beta = 0 \end{cases}$$

Deuxième ordre. — De (7-1-4), on déduit :

$$\overset{2}{\nabla_0 F_{\alpha\beta}} + \overset{2}{\nabla_\beta F_{0\alpha}} - \overset{2}{\nabla_\alpha F_{0\beta}} = 0$$

qui donne, si $\overset{1}{\partial_0 g_{\alpha\beta}}x^\beta = 0$, en faisant le produit contracté par x^β :

$$\partial_0 \overset{2}{F}_{\alpha\beta}x^\beta = 0$$

qui s'intègre en

$$\overset{2}{F}_{\alpha\beta}x^\beta = 0$$

Pour montrer que

$$(7-3-2) \quad \overset{2}{F}_{\alpha\beta}x^\beta = 0$$

nous allons montrer que les équations d'Einstein et (7-3-1) entraînent

$$\partial_0 \overset{1}{g}_{\alpha\beta}x^\beta = 0$$

b) *Conséquences des équations d'Einstein :*

De (7-3-1), on déduit $\overset{2}{\psi} = 0$ et

$$\overset{2}{\tau}_{ab} = \overset{1}{F}_{a\lambda} \overset{1}{F}_{b\lambda}$$

De (7-1-6), il suit :

$$(7-3-3) \quad x^\alpha x^\beta \overset{2}{R}_{\alpha\beta} = 0$$

$$(7-3-4) \quad x^\alpha \overset{2}{R}_{\alpha\beta} = 0$$

$$(7-3-5) \quad x^\alpha \overset{2}{R}_{\alpha 0} = 0$$

(7-3-3) s'écrit :

$$\partial_0 \overset{1}{g}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$$

Compte tenu de cette relation (7-3-4) s'écrit :

$$(7-3-6) \quad \partial_0 g_{\alpha\beta} x^\beta = 0$$

Donc (7-3-2) est vérifié.

Enfin si $\rho = 3$, de (7-3-5), (7-3-6) et (5-2-6), on déduit :

$$R = N(I) \frac{1}{r} + III(I) \frac{1}{r^2} + II(I) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

c) *Étude du tenseur de courbure conforme :*

De (7-3-1) et (7-3-2), il résulte que :

$$x^\alpha \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{soit} \quad x^\alpha R_{\alpha\beta} = 0$$

Si on refait les raisonnements du chapitre V en tenant compte de $R_{ab} = 0$, $R_{\alpha\beta} = 0$ au lieu de k isotrope au premier ordre, on a :

$$C = N(I) \frac{1}{r} + III(I) \frac{1}{r^2} + II(I) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Finalement, nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 2. — *Si sur un espace-temps asymptotiquement plat ($\rho = 3$), dans le cas d'un schéma « champ électro-magnétique pur », le champ électro-magnétique est nul pour $u = u_0$, alors :*

$$\left\{ \begin{array}{l} F = N(I) \frac{1}{r} + II(I) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ C = N(I) \frac{1}{r} + III(I) \frac{1}{r^2} + II(I) \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{array} \right.$$

CONCLUSION

Est-ce que le travail précédent peut nous permettre de répondre à la question : qu'est-ce qu'un état de radiation gravitationnelle sur un espace-temps asymptotiquement plat ? Il semble que plusieurs réponses soient possibles. Désignons par T_{ab} le tenseur impulsion-énergie. Il paraît clair

que le terme en $\frac{1}{r}$ doit être nul, mais selon les relations imposées aux termes d'ordre supérieur nous obtenons divers modèles pouvant être considérés comme des états de radiation gravitationnelle, par exemple :

. *Espace-temps de Sachs*, $\rho = 4$,

si :

$$T_{ab} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad k^a T_{ab} = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad k^a(T_{ab}k_c - T_{ac}k_b) = o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

alors :

$$C = N(k)\frac{1}{r} + III(k)\frac{1}{r^2} + II(k)\frac{1}{r^3} + I'(k)\frac{1}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

. *Espace-temps asymptotiquement plat*, $\rho = 3$,

si :

$$T_{ab} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad k^a T_{ab} = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad k^a(T_{ab}k_c - T_{ac}k_b) = o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

alors :

$$C = N(I)\frac{1}{r} + III(I)\frac{1}{r^2} + II(I)\frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

. *Espace-temps asymptotiquement plat*, $\rho = 3$,

si :

$$T_{ab} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad k^a T_{ab} = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

alors :

$$R = N(I)\frac{1}{r} + III(I)\frac{1}{r^2} + II(I)\frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$C = N(I)\frac{1}{r} + II(I)\frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

. *Espace-temps asymptotiquement plat*, $\rho = 2$,

si :

$$T_{ab} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad k^a(T_{ab}k_c - T_{ac}k_b) = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

alors :

$$C = N(I) \frac{1}{r} + \text{II}(I) \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Finalement $T_{ab} = o\left(\frac{1}{r}\right)$ entraîne que le terme en $\frac{1}{r}$ du tenseur de courbure (de même que celui du tenseur de courbure conforme) est un cas N. Mais il reste à choisir d'autres critères pour pouvoir définir ce qu'il faudrait appeler radiation gravitationnelle.

Ainsi le résultat essentiel de ce travail semble être plutôt la mise au point d'une méthode simple permettant de traiter des espaces-temps asymptotiquement plats, plutôt que l'élaboration d'une définition rigoureuse d'un concept qui n'est appréhendé que par analogie.

BIBLIOGRAPHIE

- L. BEL, Sur la radiation gravitationnelle. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **247**, 1958, p. 2096.
 L. BEL, Étude algébrique d'un certain type de tenseurs de courbure. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **247**, 1958.
 L. BEL, Introduction d'un tenseur du 4^e ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **248**, 1959, p. 1297.
 L. BEL, Quelques remarques sur la classification de Petrov. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **248**, 1959, p. 2561.
 L. BEL, *La radiation gravitationnelle*. Thèse, Paris, 1960.
 H. BONDI, M. G. J. VAN DER BURG et A. W. K. METZNER, Gravitational waves in general relativity. VII. Waves from axi-symmetric isolated systems. *Proc. of Roy. Soc.*, t. **269**, 1962, p. 21.
 LE THANH-PHONG, *Contribution à l'étude de la radiation gravitationnelle*. Thèse, Paris.
 A. LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mécanique relativiste*, Hermann, 1939.
 A. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **222**, 1946, p. 432.
 A. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **246**, 1958, p. 893 et t. **247**, 1958, p. 433.
 A. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **248**, 1959, p. 2728.
 A. LICHNEROWICZ, Radiation gravitationnelle et électromagnétique en Relativité générale. *Annali di matematica pura e applicata*, t. IV, 1960, p. 50.
 A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson, Paris, 1955.
 R. K. SACHS, Gravitational waves in general relativity, *Proc. Roy. Soc. London*, A, t. **270**, 1962, p. 130.
 M. A. TONNELAT, Radiation gravitationnelle et Mouvement des sources (Colloque international du CNRS : Fluides et champ gravitationnel; Paris, juin 1967), 1967.

(Manuscrit reçu le 12 juin 1968).