

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

A. HAMOUI

## **Couches simples de matière en relativité générale**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 9, n° 2 (1968), p. 179-211

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1968\\_\\_9\\_2\\_179\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__9_2_179_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## Couches simples de matière en relativité générale

par

A. PAPAPETROU et A. HAMOUI

Laboratoire de Physique Théorique Associé au C. N. R. S.,  
Institut Henri-Poincaré, Paris.

---

**SUMMARY.** — The first part of this work presents a general treatment of surface layers in General Relativity. Starting from the field equations we derive a number of relations valid for an arbitrary surface layer. The splitting of these relations into components orthogonal and parallel to the hypersurface  $\Sigma$ , which represents the motion of the surface layer, leads to the 3-dimensional relations obtained by Israel.

The second part contains a detailed study of spherically symmetric surface layers. We restrict ourselves to the case where there is no other matter than that of the surface layer, in which case the metric in minkowskian inside  $\Sigma$ . We further assume that matter consists of point-particles interacting only through their gravitational field (ideal gas). This property is characterized by a relation which constitutes the equation of motion of the layer. A detailed study of the types of motion permitted by this equation shows that there are motions which start or end on the singularity  $r = 0$ . But there are also motions without any singularity which consist of a contraction from  $r = \infty$  to  $r = r_{\min} \neq 0$ , followed by an expansion to  $r = \infty$ .

**RÉSUMÉ.** — La première partie contient une étude générale des couches simples de matière en relativité générale. En partant des équations du champ nous déduisons un nombre de relations valables pour une couche simple quelconque. En décomposant ces relations en composantes orthogonale et parallèle à l'hypersurface  $\Sigma$  qui représente l'évolution de la couche simple dans le temps nous arrivons aux relations tridimensionnelles obtenues par Israel.

La deuxième partie contient l'étude détaillée des couches simples à symétrie sphérique. Nous supposons qu'il n'y a que la matière de la couche simple, ce qui a pour conséquence que la métrique dans la région intérieure à la couche est celle de Minkowski. Nous demandons que la matière qui forme la couche simple consiste en des particules ponctuelles soumises seulement à l'action de leur champ gravitationnel (gaz idéal). La relation qui exprime cette condition est l'équation du mouvement de la couche. L'étude détaillée des différents types de mouvement possibles montre qu'à côté des mouvements qui commencent ou finissent sur la singularité située à  $r = 0$ , il y a aussi des mouvements sans aucune singularité : Mouvements qui consistent en une contraction de  $r = \infty$  jusqu'à  $r = r_{\min} \neq 0$  suivie par une expansion jusqu'à  $r = \infty$ .

---

### § 1. Introduction.

Considérons une distribution matérielle occupant le domaine de l'espace-temps contenu entre deux hypersurfaces voisines  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Nous parlons dans un tel cas du mouvement d'une couche mince de matière. Un exemple d'un tel mouvement est celui de la matière éjectée par l'explosion d'une étoile nova. Nous appellerons couche simple — en anglais *surface layer* — la limite d'une couche mince quand l'épaisseur tend vers zéro, c'est-à-dire quand  $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ . L'intérêt des couches simples découle en premier lieu du fait que leur étude est essentiellement plus simple que celle des couches minces. Il est, d'autre part, plausible que le mouvement d'une couche mince sera qualitativement identique à celui d'une couche simple correspondante.

Il est remarquable que les couches simples, utilisées couramment dans la théorie de Maxwell ainsi que la théorie newtonienne de la gravitation, peuvent être étudiées aussi en relativité générale malgré le fait que sur l'hypersurface  $\Sigma$  les composantes du tenseur de matière  $T_{\mu\nu}$  sont des distributions. L'existence d'une couche simple de matière sur  $\Sigma$  a pour seule conséquence qu'il y aura des discontinuités essentielles (\*) des premières dérivées de  $g_{\mu\nu}$  à travers  $\Sigma$ . En effet, les équations d'Einstein montrent alors immédiatement que, si l'équation de  $\Sigma$  est

$$(1, 1) \quad z(x^\alpha) = 0,$$

---

(\*) Les discontinuités sont appelées essentielles si on ne peut pas les éliminer par une transformation quelconque de coordonnées.

le tenseur de la matière sera de la forme

$$(1,2) \quad T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}\delta(z) + \tilde{T}_{\mu\nu}$$

$\tilde{T}_{\mu\nu}$  étant des fonctions ordinaires de  $x^a$ .

La première étude des couches simples a été donnée par Lanczos [1,2]. Le cas étudié par Lanczos est celui d'une hypersurface  $\Sigma$  du genre temps. Les résultats qu'il a obtenus sont valables pour le cas où le terme  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  apparaissant dans (1,2) est continu à travers  $\Sigma$ ,

$$(1,3) \quad [\tilde{T}_{\mu\nu}] = 0.$$

Récemment Dautcourt [3] a repris la discussion du problème des couches simples en partant aussi de (1,3). Dautcourt a considéré en quelque détail les surfaces  $\Sigma$  caractéristiques.

L'étude d'une couche simple dans le cas

$$(1,4) \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = 0$$

a été entrepris par Israel [4]. Israel se limite aux surfaces  $\Sigma$  du genre temps. Ses calculs, qui ne partent pas directement des équations d'Einstein, utilisent systématiquement les propriétés géométriques de l'hypersurface  $\Sigma$ . En particulier, Israel montre que la distribution matérielle sur  $\Sigma$  obéit à une loi de conservation qu'on peut écrire sous forme tridimensionnelle, à l'aide de la métrique de  $\Sigma$  seulement. Citons encore le travail de Kuchar [5] qui étudie les couches simples dans la théorie d'Einstein-Maxwell (matière chargée).

Le présent travail est divisé en deux parties. Une description condensée du contenu de chacune de ces parties est donnée dans le résumé.

## PREMIÈRE PARTIE

### ÉTUDE GÉNÉRALE DES COUCHES SIMPLES

#### § 2. Quelques formules générales.

Dans les coordonnées que nous utilisons, l'hypersurface  $\Sigma$  est déterminée par l'équation (1,1). Appelons  $V^-$  et  $V^+$  les demi-espaces correspondant à  $z < 0$  et  $z > 0$ . Soient  $g_{\mu\nu}^-$  et  $g_{\mu\nu}^+$  les tenseurs métriques dans  $V^-$

et  $V^+$ . Nous supposons que les coordonnées ont été choisies de manière que les  $g_{\mu\nu}^-$  et  $g_{\mu\nu}^+$  soient continues à travers  $\Sigma$  :

$$(2,1) \quad [g_{\mu\nu}] \equiv (g_{\mu\nu}^+)_{z \rightarrow +0} - (g_{\mu\nu}^-)_{z \rightarrow -0} = 0.$$

Les dérivées premières de  $g_{\mu\nu}$  étant discontinues sur  $\Sigma$  nous écrivons la formule [6] :

$$(2,2) \quad g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^{-(+)} + z\beta_{\mu\nu} + \frac{z^2}{2}\gamma_{\mu\nu} + \dots,$$

$g_{\mu\nu}^{-(+)}$  est une continuation de  $g_{\mu\nu}^-$  dans  $V^+$  telle qu'il y a continuité sur  $\Sigma$  des dérivées du premier et du second ordre. Cette continuation n'est pas univoque : les fonctions  $\beta_{\mu\nu}$  et  $\gamma_{\mu\nu}$  ne sont pas uniquement déterminées. Mais leurs valeurs sur  $\Sigma$  sont univoques et ce sont seulement ces valeurs qui nous intéressent dans la suite.

Les discontinuités des  $g_{\mu\nu,\rho}$  sont données par la formule

$$(2,3) \quad [g_{\mu\nu,\rho}] = \beta_{\mu\nu}P_\rho,$$

$P_\rho$  étant la normale à la surface  $\Sigma$  :

$$(2,4) \quad P_\rho = \frac{\partial z}{\partial x^\rho} \equiv z_{,\rho}.$$

De (2,3), on déduit la formule pour les discontinuités des  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  :

$$(2,5) \quad [\Gamma_{\mu\nu}^\lambda] = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\beta_{\rho\mu}P_\nu + \beta_{\rho\nu}P_\mu - \beta_{\mu\nu}P_\rho).$$

En supposant que les  $g_{\mu\nu,\rho}$  et  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  sont différentiables en dehors de  $\Sigma$ , nous aurons

$$(2,6) \quad \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\lambda = [\Gamma_{\mu\nu}^\lambda]\delta(z)P_\alpha + \dots,$$

les termes ... étant des fonctions ordinaires.

La formule

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \dots$$

nous donne immédiatement

$$(2,7) \quad R_{\mu\nu} = r_{\mu\nu}\delta(z) + \tilde{R}_{\mu\nu},$$

$$(2,7a) \quad r_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\beta_{\mu\nu}P_\alpha P^\alpha + \beta P_\mu P_\nu - \beta_{\mu\alpha}P^\alpha P_\nu - \beta_{\nu\alpha}P^\alpha P_\mu), \quad \beta = g^{\rho\sigma}\beta_{\rho\sigma}.$$

Les quantités  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  sont des fonctions ordinaires, en général discontinues sur  $\Sigma$ .

Avec (2, 7), les équations du champ,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

nous donnent immédiatement la relation (1, 2) avec

$$(2, 8) \quad -2\kappa\tau_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu} P_\alpha P^\alpha + \beta P_\mu P_\nu - (\beta_{\mu\alpha} P_\nu + \beta_{\nu\alpha} P_\mu) P^\alpha - g_{\mu\nu} (\beta P_\alpha P^\alpha - \beta_{\rho\sigma} P^\rho P^\sigma).$$

On déduit immédiatement de (2, 8) que  $\tau_{\mu\nu}$  est orthogonal à  $P^\nu$  :

$$(2, 9) \quad \tau_{\mu\nu} P^\nu = 0.$$

En se rappelant que  $\tau_{\mu\nu} = \tau_{\nu\mu}$  on voit que (2, 9) signifie que  $\tau_{\mu\nu}$  est situé sur  $\Sigma$ . La relation (2, 9) a été donnée par Lanczos [2].

On arrive à une autre formule importante en calculant la quantité  $[R_{\mu\nu}]$  égale d'après (2, 7) à  $[\tilde{R}_{\mu\nu}]$ . Les calculs nécessaires ont été faits dans l'étude des ondes de choc du premier ordre [6]. Le résultat est :

$$(2, 10) \quad \left\{ \begin{aligned} 2[R_{\mu\nu}] &= g^{\rho\sigma} (2\beta_{\mu\nu;\rho} P_\sigma + \beta_{\rho\sigma;\mu} P_\nu + \beta_{\rho\sigma;\nu} P_\mu - \beta_{\mu\rho;\nu} P_\sigma \\ &\quad - \beta_{\nu\rho;\mu} P_\sigma - \beta_{\mu\rho;\sigma} P_\nu - \beta_{\nu\rho;\sigma} P_\mu + \beta_{\mu\nu} P_{\rho;\sigma} \\ &\quad + \beta_{\rho\sigma} P_{\mu;\nu} - \beta_{\mu\rho} P_{\nu;\sigma} - \beta_{\nu\rho} P_{\mu;\sigma}) + 2\Gamma_{\mu\nu} \\ &\quad + g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} \left\{ (\beta_{\mu\sigma} P_\alpha - \beta_{\mu\alpha} P_\sigma) \beta_{\nu\mu} P_\rho - \frac{1}{2} \beta_{\alpha\sigma} P_\mu \beta_{\beta\rho} P_\nu \right. \\ &\quad \left. + (\beta_{\mu\sigma} P_\nu + \beta_{\nu\sigma} P_\mu - \beta_{\mu\nu} P_\sigma) \left( \beta_{\beta\rho} P_\alpha - \frac{1}{2} \beta_{\alpha\beta} P_\rho \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$2\Gamma_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} (\gamma_{\mu\nu} P_\rho P_\sigma + \gamma_{\rho\sigma} P_\mu P_\nu - \gamma_{\mu\rho} P_\nu P_\sigma - \gamma_{\mu\rho} P_\mu P_\sigma).$$

Dans cette formule  $\bar{\cdot}$  signifie la dérivée covariante par rapport à  $g_{\mu\nu}^-$  calculée aux points de  $\Sigma$ . La formule (2, 10) a été donnée par Dautcourt [3].

La formule (2, 10) contient les quantités  $\gamma_{\rho\sigma}$  dans le terme  $\Gamma_{\mu\nu}$ . La structure de ce terme montre qu'on peut éliminer les  $\gamma_{\rho\sigma}$  en calculant la quantité

$$(2, 11) \quad 2 \left\{ [R_{\mu\nu}] - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [R] \right\} P^\nu = -2\kappa [T_{\mu\nu}] P^\nu.$$

Le résultat de ce calcul est

$$(2, 12) \quad \left\{ \begin{aligned} -2\kappa [T_{\mu\nu}] P^\nu &= (\beta_{\mu\nu;\rho} - \beta_{\nu\rho;\mu}) P^\rho P^\nu - P_\mu g^{\alpha\nu} g^{\rho\sigma} (\beta_{\alpha\nu;\sigma} P_\rho - \beta_{\alpha\rho;\nu} P_\sigma \\ &\quad + \beta_{\alpha\nu} P_{\rho;\sigma} - \beta_{\alpha\rho} P_{\nu;\sigma}) + g^{\rho\sigma} P^\nu (\beta_{\rho\sigma;\mu} P_\nu - \beta_{\mu\rho;\sigma} P_\nu \\ &\quad + \beta_{\mu\nu} P_{\rho;\sigma} + \beta_{\rho\sigma} P_{\mu;\nu} - \beta_{\mu\rho} P_{\nu;\sigma} - \beta_{\nu\rho} P_{\mu;\sigma}) \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{4} \beta_{\alpha\rho} \beta_{\beta\sigma} (g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} - g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma}) P_\nu P^\nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \beta \beta_{\rho\sigma} P^\rho P^\sigma - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \beta_{\alpha\rho} \beta_{\beta\sigma} P^\rho P^\sigma \right\} P_\mu. \end{aligned} \right.$$

Nous nous limiterons dans la suite au cas où la surface  $\Sigma$  est du genre temps :

$$(2,13) \quad P_\alpha P^\alpha < 0.$$

Dans ce cas, le deuxième membre de (2,12) peut être exprimé à l'aide des quantités  $\tau_{\mu\nu}$  et  $P_\mu$  seulement. En effet, on vérifie sans difficulté que les termes contenant une dérivation covariante se réduisent à  $2\kappa\tau_{\mu;\nu}$ . Par contre, les termes quadratiques en  $\beta_{\rho\sigma}$  se réduisent à

$$\kappa^2 P_\mu (P_\alpha P^\alpha)^{-1} \left( \tau_{\rho\sigma} \tau^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \tau^2 \right), \quad \text{avec} \quad \tau = g^{\rho\sigma} \tau_{\rho\sigma}.$$

La relation (2,12) prend donc finalement la forme

$$(2,14) \quad - (P_\alpha P^\alpha) [T_\nu^\mu] P^\nu = (P_\alpha P^\alpha) \tau^{\mu\nu}_{;\nu} + \frac{\kappa}{2} P^\mu \left( \tau_{\rho\sigma} \tau^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \tau^2 \right).$$

Il est évident que les demi-espaces  $V^-$  et  $V^+$  ont des rôles équivalents. Il existe, par conséquent, une formule analogue à (2,10) contenant les dérivées  $\ddagger$  au lieu de  $\bar{\cdot}$ . On trouve sans difficulté que cette formule se déduit de (2,10) si on y remplace toutes les dérivées  $\bar{\cdot}$  par  $\ddagger$  et si on change en même temps les signes de tous les termes quadratiques en  $\beta_{\rho\sigma}$ . On doit effectuer les mêmes changements dans la relation (2,12) ainsi que dans (2,14). Nous n'écrivons que la nouvelle forme de (2,14) :

$$(2,14a) \quad - (P_\alpha P^\alpha) [T_\nu^\mu] P^\nu = (P_\alpha P^\alpha) \tau^{\mu\nu+}_{;\nu} - \frac{\kappa}{2} P^\mu \left( \tau_{\rho\sigma} \tau^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \tau^2 \right).$$

De la relation (2,14) ou (2,14a), on déduit d'abord la condition de raccordement pour un  $T_{\mu\nu}$  discontinu sur  $\Sigma$  quand il n'y a pas une couche simple sur  $\Sigma$ . En effet, dans ce cas, on a  $\tau_{\mu\nu} = 0$  et la relation (2,14) se réduit à

$$[T_\nu^\mu] P^\nu = 0.$$

Cette condition a été donnée par Lanczos [2] ainsi que par O'Brien et Synge [7] et Choquet-Bruhat [8].

Le cas  $\tau_{\mu\nu} = 0$  conduit aux postulats adoptés par Lichnerowicz [9], à savoir que les métriques d'espace-temps sont au moins une fois continûment différentiables.

Nous imposons maintenant la condition  $[R_{\mu\nu}] = 0$ , ce qui est équivalent à (1,3) :

$$(2,15) \quad [T_{\mu\nu}] = [\tilde{T}_{\mu\nu}] = 0.$$

Les relations (2, 14) et (2, 14a) se réduisent alors à

$$(2, 16) \quad (\mathbf{P}_\alpha \mathbf{P}^\alpha) \tau^{\nu\mu}_{;\nu} \mp \frac{\kappa}{2} \mathbf{P}^\mu \left( \tau_{\rho\sigma} \tau^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \tau^2 \right) = 0.$$

La relation (2, 16) avec les signes inférieurs a été donnée par Dautcourt [3].

L'addition des deux équations (2, 16) élimine le dernier terme et nous donne

$$(2, 17) \quad \tau^{\mu\nu}_{;\nu} + \tau^{\mu\nu}_{;\mu} = 0.$$

Cette relation est équivalente à l'équation (IV), p. 533 de Lanczos [2]. La différence de forme est la conséquence du fait que Lanczos utilise le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$ ,

$$(2, 18) \quad n^\mu = \mathbf{P}^\mu (-\mathbf{P}_\alpha \mathbf{P}^\alpha)^{-1/2}.$$

La soustraction de deux équations (2, 16) conduit à une relation qui ne contient que les  $\tau_{\mu\nu}$  et  $\beta_{\mu\nu}$  sans dérivation. En tenant compte de (2, 8) et (2, 5), on démontre sans difficulté que cette relation est satisfaite identiquement. L'équation (2, 17) est, par conséquent, équivalente à chacune de deux équations (2, 16).

En multipliant (2, 16) par  $\mathbf{P}_\mu$ , on trouve

$$(2, 19) \quad \tau^{\mu\nu}_{;\nu} \mathbf{P}_\mu \mp \frac{\kappa}{2} \left( \tau_{\rho\sigma} \tau^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \tau^2 \right) = 0.$$

D'autre part, on déduit de (2, 9) :

$$\tau^{\mu\nu}_{;\nu} \mathbf{P}_\mu + \tau^{\mu\nu} \mathbf{P}_{\mu;\nu} = 0.$$

L'équation (2, 19) peut donc être décrite aussi sous la forme

$$(2, 20) \quad \tau^{\mu\nu} \mathbf{P}_{\mu;\nu} \pm \frac{\kappa}{2} \left( \tau_{\rho\sigma} \tau^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \tau^2 \right) = 0.$$

L'addition de deux équations (2, 20) nous donne

$$(2, 21) \quad \tau^{\mu\nu} (\mathbf{P}_{\mu;\nu} + \mathbf{P}_{\mu;\nu}) = 0.$$

En tenant compte de (2, 20), nous mettons (2, 16) sous la forme

$$(2, 22) \quad (\mathbf{P}_\alpha \mathbf{P}^\alpha) \tau^{\mu\nu}_{;\nu} + \mathbf{P}^\mu \tau^{\rho\sigma} \mathbf{P}_{\rho;\sigma} = 0.$$



### § 3. Les relations tridimensionnelles d'Israel.

Nous avons déjà remarqué que d'après (2,9),  $\tau_{\mu\nu}$  est situé sur l'hypersurface  $\Sigma$ . Par contre, l'équation (2,16) ou (2,17) est une équation essentiellement quadridimensionnelle : la composante (2,19) de cette équation qui est orthogonale à  $\Sigma$  n'est pas triviale. Nous allons déterminer la projection de l'équation (2,16) sur  $\Sigma$  et nous montrerons que cette projection est identique à la loi de conservation tridimensionnelle d'Israel.

Dans ce paragraphe nous ferons usage de la notation de Eisenhart [10]. Nous désignerons par  $y^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) les coordonnées de l'espace à 4 dimensions et par  $a_{\alpha\beta}$  la métrique correspondante; par  $x^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), les coordonnées sur l'hypersurface  $\Sigma$  et par  $g_{ik}$  la métrique correspondante. Soient

$$(3,1) \quad y^\alpha \equiv y^\alpha(x^i)$$

les équations de  $\Sigma$ . A chaque point de  $\Sigma$  considéré comme point de l'espace à 4 dimensions, nous avons le repère formé par les 4 vecteurs

$$(3,2) \quad e^\alpha_i = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \equiv y^\alpha_{,i} \quad , \quad e^\alpha_3 = n^\alpha = P^\alpha(-P_\rho P^\rho)^{-1/2};$$

$n^\alpha$  étant le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  et  $e^\alpha_i$  étant situés dans  $\Sigma$ , nous aurons ainsi les relations

$$(3,3) \quad e^\alpha_3 e_{i\alpha} \equiv a_{\alpha\beta} e^\alpha_3 e^\beta_i = 0 \quad , \quad e^\alpha_3 e_{3\alpha} = -1.$$

Les deux métriques  $a_{\alpha\beta}$  et  $g_{ij}$  sont liées par les relations

$$(3,4) \quad g_{ik} = a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,k} \quad ; \quad a^{\alpha\beta} = g^{ik} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,k} - n^\alpha n^\beta.$$

La matrice  $\gamma_{\rho\sigma} = a_{\alpha\beta} e^\alpha_\rho e^\beta_\sigma$  a, d'après (3,3) et (3,4), la forme

$$(3,5) \quad \gamma_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_{ik} \end{pmatrix}$$

Les trois vecteurs  $e^\alpha_i$ , qui forment un repère sur l'hypersurface  $\Sigma$ , nous permettent d'écrire les relations liant les composantes à 3 et à 4 dimensions des tenseurs situés sur  $\Sigma$ . On remarquera d'abord que le vecteur infinitésimal  $dx^i$  de  $\Sigma$  a la forme 4-dimensionnelle

$$(3,6) \quad dy^\alpha = y^\alpha_{,i} dx^i = e^\alpha_i dx^i.$$

Ceci montre que les composantes  $A^\alpha$  et  $A^i$  d'un vecteur contravariant quelconque de  $\Sigma$  sont liées par

$$(3,6a) \quad A^\alpha = y^\alpha_{,i} A^i.$$

Pour un tenseur  $A^{ik}$ , nous aurons

$$(3,6b) \quad A^{\alpha\beta} = y^\alpha_{,i} y^\beta_{,k} A^{ik}.$$

Pour trouver la relation entre les composantes covariantes  $A_\beta$  et  $A_k$ , il suffit de multiplier (3,6a) par  $a_{\alpha\beta} y^\beta_{,k}$ . En tenant compte de (3,4), on trouve

$$(3,7) \quad A_k = y^\beta_{,k} A_\beta.$$

Pour un tenseur  $A_{\alpha\beta}$  de  $\Sigma$ , nous aurons

$$A_{ik} = y^\alpha_{,i} y^\beta_{,k} A_{\alpha\beta}.$$

Le « tenseur » qui nous intéresse particulièrement ici est la quantité définie par (2,8). La quantité tridimensionnelle correspondante est d'après (3,7)

$$(3,8) \quad \tau_{ik} = y^\alpha_{,i} y^\beta_{,k} \tau_{\alpha\beta}.$$

On élèvera les indices  $i$  et  $k$  à l'aide de  $g^{ik}$  :

$$\tau^i_k = g^{il} \tau_{lk}, \quad \tau^{ik} \equiv g^{il} g^{km} \tau_{lm}.$$

Il est presque évident que la quantité  $\tau_{ik}$  est identique, à un facteur scalaire près, au tenseur 3-dimensionnel  $S_{ik}$  introduit *ad hoc* par Israel. Pour trouver la relation exacte entre  $\tau_{ik}$  et  $S_{ik}$ , on doit partir de l'équation qui donne les coefficients  $\Omega_{ik}$  de la deuxième forme fondamentale de  $\Sigma$  [8] :

$$(3,9) \quad \Omega_{ik} = n_\alpha y^\alpha_{,i;k} + \frac{1}{2} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} n_\alpha y^\mu_{,i} y^\nu_{,k}.$$

Dans cette formule  $_{;k}$  signifie la dérivée covariante par rapport à  $g_{ik}$ . Par contre  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  sont les symboles de Christoffel de la métrique 4-dimensionnelle  $a_{\mu\nu}$ .

A cause de (3,3), le premier terme du deuxième membre de (3,9) se réduit à  $n_\alpha y^\alpha_{,ik}$ . Rappelons maintenant notre hypothèse, d'après laquelle il y a sur  $\Sigma$  une couche simple de matière. Il s'ensuit que les  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  ont sur  $\Sigma$  les discontinuités données par (2,5). Par contre, les quantités  $y^\alpha_{,i}$ ,  $y^\alpha_{,ik}$  et  $n^\alpha$

sont continues sur  $\Sigma$ . La relation (3,9) nous donne d'après ces remarques, si nous tenons compte de (2,18) :

$$(3,10) \quad [\Omega_{ik}] = + \frac{1}{2} \beta_{\mu\nu} y^{\mu}_{,i} y^{\nu}_{,k} (-P_{\alpha} P^{\alpha})^{-1/2}.$$

Le tenseur  $S_{ik}$  d'Israel est défini par la relation

$$(3,11) \quad -\kappa S_{ik} = -[\Omega_{ik}] + g_{ik} g^{mn} [\Omega_{mn}].$$

En tenant compte de (3,10) et de (2,8), on trouve immédiatement la relation

$$(3,12) \quad S_{ik} = \tau_{\mu\nu} y^{\mu}_{,i} y^{\nu}_{,k} (-P_{\alpha} P^{\alpha})^{-1/2} = \tau_{ik} (-P_{\alpha} P^{\alpha})^{-1/2}.$$

La relation inverse est

$$(3,12a) \quad \tau^{\mu\nu} = y^{\mu}_{,i} y^{\nu}_{,k} S^{ik} (-P_{\alpha} P^{\alpha})^{-1/2}.$$

En utilisant les formules de Gauss-Codazzi pour l'hypersurface  $\Sigma$ , Israel démontre que  $S_{ik}$  satisfait la loi de conservation

$$(3,13) \quad S^{ik}_{;k} = 0.$$

A l'aide de (3,12), on peut écrire (3,13) comme une équation pour  $\tau_{\mu\nu}$ .

$$(3,14) \quad g^{kl} \{ \tau_{\mu\nu} y^{\mu}_{,i} y^{\nu}_{,k} (-P_{\alpha} P^{\alpha})^{-1/2} \}_{;l} = 0.$$

On peut vérifier directement que l'équation (3,14) est la projection sur  $\Sigma$  de l'équation (2,22). Il suffit de multiplier (2,22) par  $a_{\mu\beta} y^{\beta}_{,i}$  et d'effectuer quelques calculs élémentaires. Démontrons encore que ce qui reste de l'équation (2,22), c'est-à-dire la composante orthogonale à  $\Sigma$  donnée par (2,21), peut être écrite aussi sous forme 3-dimensionnelle. En effet, les coefficients  $\Omega_{ik}$  sont donnés aussi par l'équation

$$(3,15) \quad \Omega_{ik} = -n_{\mu;\nu} \xi^{\mu}_{,i} \xi^{\nu}_{,k}.$$

En tenant compte de (2,18) et (3,3), on trouve encore

$$(3,15a) \quad \Omega_{ik} = -(-P_{\alpha} P^{\alpha})^{-1/2} P_{\mu;\nu} y^{\mu}_{,i} y^{\nu}_{,k}.$$

Or, il suffit d'introduire (3,12a) dans (2,21) pour mettre (2,21) sous la forme

$$(3,16) \quad S^{ik} (\Omega_{ik}^{+} + \Omega_{ik}^{-}) = 0.$$

Cette relation est la deuxième des équations établies par Israel pour  $S_{ik}$ .

L'équation (2,22) ou les équations équivalentes (3,13) et (3,16) représentent tout ce qu'on peut déduire de la condition (2,15). Cette condition permet que  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  soit non nulle : il suffit que  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  soit continu à travers  $\Sigma$ . Dans le cas plus restrictif (1,4), c'est-à-dire quand

$$T_{\mu\nu}^- = 0 \quad \text{et} \quad T_{\mu\nu}^+ = 0,$$

il y a 4 autres relations. Ces relations que nous ne discuterons pas ici ont été données par Israel. Rappelons finalement que la formule (2,14) ou (2,14a) est valable aussi pour le cas plus général avec  $\tau_{\mu\nu} \neq 0$  et  $[T_{\mu\nu}] \neq 0$ .

## DEUXIÈME PARTIE

### COUCHES SIMPLES A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

#### § 4. Analyse qualitative du problème.

L'analyse intuitive que nous donnons dans ce paragraphe a pour but de clarifier la signification physique du problème de mouvement des couches simples à symétrie sphérique.

Nous allons considérer une couche mince contenant de la matière d'un type simplifié : nous supposons que la matière est constituée par des particules ponctuelles soumises seulement à l'action de leur champ gravitationnel. Nous nous limiterons à des couches à symétrie sphérique. Pour obtenir cette symétrie, il suffit d'imposer aux données initiales du mouvement, par exemple pour  $t = 0$ , les 3 conditions suivantes :

1° La densité des particules à un point quelconque de la couche est une fonction de la distance  $r$  du point au centre de symétrie,  $\mu \equiv \mu(r)$ .

2° A chaque point la distribution des vitesses des particules est symétrique autour de la direction radiale de ce point.

3° Cette distribution des vitesses est identique pour tous les points de la sphère  $r = \text{const.}$

Le problème étant encore bien compliqué, nous décidons de nous limiter à l'étude des mouvements symétriques par rapport au temps. Ceci impose une quatrième condition :

4° A chaque point P, toutes les particules ont à l'instant  $t = 0$  des vitesses orthogonales à la direction radiale du point P.

Nous ajouterons provisoirement les deux hypothèses suivantes :

a) A l'instant  $t = 0$ , soient  $a$  et  $b = a + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon \ll a$ , les rayons intérieur et extérieur de la couche. Soit encore  $m$  la masse totale du système, c'est-à-dire la constante  $m$  de la solution de Schwarzschild qui représente le champ gravitationnel extérieur. Nous supposons que  $a \gg 2m$ .

b) Nous supposons finalement que le mouvement de chacune des particules est relativiste,  $v \approx c$ .

A cause de l'hypothèse a), le champ gravitationnel est faible dans un certain intervalle de temps contenant l'instant  $t = 0$ . Ceci a pour conséquence que dans cet intervalle de temps, le mouvement des particules est presque identique au mouvement des particules libres dans l'espace minkowskien. Il s'ensuit que les particules s'éloignent du centre et le champ devient encore plus faible. Le résultat final est que le mouvement des particules sera presque identique au mouvement des particules libres pour toutes les valeurs de  $t$  et par conséquent on aura  $r \rightarrow \infty$  pour  $t \rightarrow \infty$ . Dans l'intervalle complet  $-\infty < t < +\infty$  le mouvement consiste en une contraction de  $r = \infty$  jusqu'à  $r_{\min} = a$  suivie par une expansion jusqu'à  $r = \infty$ .

L'intérêt d'un mouvement de ce type réside dans le fait que le champ gravitationnel correspondant est globalement régulier. On remarquera en même temps que la distribution matérielle que nous avons considérée peut être raisonnable au point de vue physique : avec des valeurs  $a$ ,  $b$  et  $m$  choisies convenablement, la densité de la matière reste, pour toutes les valeurs de  $t$ , tellement petite que l'hypothèse des particules soumises seulement à l'action du champ gravitationnel pourrait être une approximation acceptable.

Malgré les simplifications que nous avons introduites, la solution exacte de ce problème sera très difficile. Une approximation basée sur le fait que le champ gravitationnel est faible donnerait sans doute des résultats satisfaisants; mais les calculs seront très lourds si on ne se limite pas à la première approximation. Par contre, l'étude exacte du mouvement de la couche simple qui correspond au cas limite  $\varepsilon = b - a \rightarrow 0$  ne présente pas des difficultés, comme nous allons montrer dans la suite. Les résultats que nous allons obtenir pour le mouvement des couches simples constituent sans doute une certaine approximation pour les couches minces.

Ajoutons que les hypothèses a) et b), introduites pour qu'on arrive à des solutions sans singularités, ne seront pas retenues dans la suite.

### § 5. Le raccordement des métriques de Schwarzschild et Minkowski.

Nous supposons que de deux côtés de l'hypersurface  $\Sigma$  qui représente le mouvement de la couche simple il n'y a pas de matière :

$$(5,1) \quad T_{\mu\nu}^- = 0 = T_{\mu\nu}^+$$

La symétrie sphérique a pour conséquence que le champ gravitationnel sera du type de Schwarzschild aussi bien en dehors qu'à l'intérieur de  $\Sigma$ . Les champs extérieur et intérieur auront des constantes de masse totale différentes,  $m_{\text{ext.}} \neq m_{\text{int.}}$ . Nous devons demander que la matière distribuée sur  $\Sigma$  ait une masse positive, ce qui a pour conséquence

$$m_{\text{ext.}} > m_{\text{int.}}$$

S'il n'y a pas d'autre matière que celle distribuée sur  $\Sigma$ , il sera nécessairement  $m_{\text{int.}} = 0$ .

Le fait que dans le cas que nous considérons, nous connaissons aussi bien la métrique extérieure  $g_{\mu\nu}^+$  que la métrique intérieure  $g_{\mu\nu}^-$  simplifie énormément le problème. En effet, nous n'avons dans ce cas qu'à raccorder les métriques  $g_{\mu\nu}^+$  et  $g_{\mu\nu}^-$  sur  $\Sigma$  de manière que

$$(5,2) \quad [g_{\mu\nu}] = 0.$$

Les équations (2,22) ou (3,13) et (3,16) ainsi que les 4 autres équations déduites de (5,1) sont satisfaites automatiquement car la métrique de Schwarzschild satisfait les équations  $R_{\mu\nu} = 0$ . Toutes ces équations ne seront directement utiles que dans l'étude de problèmes plus compliqués où on ne peut connaître *a priori* que, par exemple, la métrique extérieure  $g_{\mu\nu}^+$ .

Dans ce travail, nous allons étudier le cas d'une couche simple à symétrie sphérique avec

$$(5,3) \quad m_{\text{ext.}} = m > 0 \quad , \quad m_{\text{int.}} = 0.$$

La métrique intérieure  $g_{\mu\nu}^-$  se réduit alors à la métrique minkowskienne. Le raccordement de la métrique de Schwarzschild à celle de Minkowski de manière que (5,2) soit satisfait, peut être obtenu sans difficulté avec la métrique de Schwarzschild écrite dans n'importe quel système de coordonnées. Ici, nous allons utiliser le système de coordonnées radiatives qui ont l'avantage pratique de conduire à des formules particulièrement simples.

On obtient la forme radiative de la métrique de Schwarzschild en partant de la forme de Eddington-Finkelstein [11] et en remplaçant la coordonnée  $t$  par  $u = t - r$ . Le  $ds^2$  de Schwarzschild a dans ces coordonnées la forme

$$(5,4) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

A cause de la symétrie sphérique de l'hypersurface  $\Sigma$  son équation ne dépend pas de  $\theta, \varphi$ . Elle sera donc de la forme

$$(5,5) \quad r = f(u).$$

La métrique de Schwarzschild sera valable en dehors de  $\Sigma$ , c'est-à-dire pour  $r \geq f(u)$ . Nous posons

$$(5,6) \quad r - f(u) = z.$$

En remplaçant dans (5,4)  $r$  par  $z$ , nous trouvons pour le  $ds^2$  de Schwarzschild la forme valable pour  $z \geq 0$  :

$$(5,7) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{z+f} + 2f'\right) du^2 + 2dudz - (z+f)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

avec

$$f' \equiv \frac{df}{du}.$$

On obtient le  $dS^2$  minkowskien dans les coordonnées radiatives  $U, R$  en posant  $m = 0$  dans (5,4) :

$$dS^2 = dU^2 + 2dUdR - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Soit  $R = F(U)$  l'équation de  $\Sigma$  dans les coordonnées  $U, R$ . La métrique minkowskienne sera valable pour  $R \leq F(U)$ . En posant  $R - F(U) = Z$ , on trouve pour le  $dS^2$  la forme

$$(5,8) \quad dS^2 = \left(1 + 2\frac{dF}{dU}\right) dU^2 + 2dUdZ - (Z+F)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

qui est valable pour  $Z \leq 0$ .

Pour obtenir le raccordement (5,2) des métriques (5,7) et (5,8), il suffit d'introduire dans (5,8) les coordonnées  $u, z$  par

$$(5,9) \quad U = \alpha(u) \quad , \quad Z = z\gamma(u) \quad ; \quad \gamma > 0.$$

La métrique (5, 8) devient alors (avec  $\alpha' = \frac{d\alpha}{du}$  etc.)

(5, 10)

$$dS^2 = \left\{ \left( 1 + 2 \frac{dF}{dU} \right) \alpha'^2 + 2\alpha'\gamma'z \right\} du^2 + 2\alpha'\gamma dudz - (z\gamma + F)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

En comparant (5, 7) et (5, 10) sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire pour  $z = 0$ , on voit immédiatement que la condition de raccordement (5, 2) est équivalente aux 3 relations suivantes :

$$(5, 11) \quad \left( 1 + 2 \frac{dF}{dU} \right) \alpha'^2 = 1 - \frac{2m}{f} + 2f' \quad , \quad \alpha'\gamma = 1 \quad , \quad F = f.$$

On déduit de la dernière équation (5, 11) et la première (5, 9) :

$$(5, 12) \quad \frac{dF}{dU} \alpha' = f'.$$

La première (5, 11) devient alors

$$(5, 13) \quad (\alpha' + f')^2 = (1 + f')^2 - \frac{2m}{f}.$$

Cette équation permet de déterminer la fonction  $\alpha(u)$  quand  $f(u)$  a été choisie arbitrairement. Avec  $\alpha(u)$  déjà déterminé, la deuxième équation (2, 11) détermine  $\gamma(u)$ . Nous avons ainsi démontré que le raccordement (5, 2) de la métrique de Schwarzschild à celle de Minkowski est possible sur n'importe quelle hypersurface à symétrie sphérique.

### § 6. Calcul des $P_\mu$ , $\beta_{\mu\nu}$ et $\tau_{\mu\nu}$ .

Posons  $u = x^0$ ,  $z = x^1$ ,  $\theta = x^2$ ,  $\varphi = x^3$ . Nous trouvons les valeurs des  $g_{\mu\nu}$  sur  $\Sigma$  en posant  $z = 0$  dans (5, 7) :

$$(6, 1) \quad g_{00} = 1 - \frac{2m}{f} + 2f' \quad , \quad g_{01} = 1 \quad , \quad g_{22} = g_{33}/\sin^2 \theta = -f^2,$$

les autres  $g_{\mu\nu}$  étant nuls. Les composantes contravariantes  $g^{\mu\nu}$  sont

$$(6, 2) \quad g^{01} = 1 \quad , \quad g^{11} = -g_{00} \quad , \quad g^{22} = g^{33} \sin^2 \theta = -\frac{1}{f^2}, \text{ les autres } g^{\mu\nu} = 0.$$

L'équation de  $\Sigma$  étant  $z = x^1 = 0$ , le vecteur  $P_\lambda$  est

$$(6, 3) \quad P_\lambda = (0; 1, 0, 0).$$



Les composantes contravariantes  $P^\lambda$  sont

$$(6,4) \quad P^\lambda = g^{\lambda 1} = (1; -g_{00}, 0, 0).$$

Par conséquent

$$(6,5) \quad -P^\lambda P_\lambda = -P^1 = g_{00}.$$

Pour les quantités  $\beta_{\mu\nu}$ , on a d'après (2,3) et (6,3) :

$$\beta_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu,1}].$$

On trouve après quelques calculs simples :

$$(6,6) \quad \beta_{00} = \frac{2m}{f^2} - 2\alpha'\gamma', \beta_{22} = \beta_{33}/\sin^2 \theta = 2f(\gamma - 1), \text{ les autres } \beta_{\mu\nu} = 0.$$

De ces formules, on déduit encore

$$(6,7) \quad \beta = \beta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \frac{4}{f}(1 - \gamma) \quad , \quad \beta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = \beta_{00}.$$

En portant les valeurs de  $\beta_{\mu\nu}$  dans (2,8) on détermine  $\tau_{\mu\nu}$ . Le résultat est

$$(6,8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\kappa\tau_{00} = \beta(g_{00})^2, \quad -2\kappa\tau_{11} = \beta \quad , \quad -2\kappa\tau_{01} = \beta g_{00} ; \\ -2\kappa\tau_{22} = -2\kappa\tau_{33}/\sin^2 \theta = \beta_{22}g_{00} + \beta_{00}g_{22}; \quad \text{les autres } \tau_{\mu\nu} = 0 ; \end{array} \right.$$

$$(6,9) \quad -2\kappa\tau_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 2(\beta_{00} + \beta g_{00}).$$

Les quantités  $\tau^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \tau_{\alpha\beta}$  sont encore plus simples :

$$(6,10) \quad -2\kappa\tau^{00} = \beta \quad , \quad -2\kappa\tau^{22} = -2\kappa\tau^{33} \sin^2 \theta = \frac{1}{f^4} (\beta_{22}g_{00} + \beta_{00}g_{22}),$$

les autres  $\tau^{\mu\nu}$  étant nuls.

Nous avons calculé aussi le tenseur  $S_{ik}$  d'Israel. Nous prenons comme coordonnées sur  $\Sigma$  les  $x^i$  avec  $i = 0, 2, 3$ . Le tenseur métrique de  $\Sigma$  est alors diagonal, les composantes  $g_{00}, g_{22}$  et  $g_{33}$  ayant les valeurs indiquées dans (6,1). Le tenseur  $S_{ik}$  est aussi diagonal. Les quantités  $S_{ik}$  diffèrent de  $\tau_{ik}$  par le facteur scalaire  $(g_{00})^{-1/2}$  :

$$(6,11) \quad S_{ik} = (g_{00})^{-1/2} \tau_{ik}. \quad (i, k = 0, 2, 3).$$

Les composantes contravariantes  $S^{ik}$  sont

$$(6,12) \quad S^{ik} = (g_{00})^{1/2} \tau^{ik}.$$

On vérifie sans difficulté la loi de conservation tridimensionnelle (3,13).

### § 7. La masse propre totale.

Il est évident que si l'on choisit arbitrairement l'hypersurface  $\Sigma$ , la distribution matérielle correspondante déterminée par les formules du § 6 n'aura pas en général une signification physique. Pour que cette distribution matérielle soit physiquement significative, l'hypersurface  $\Sigma$  doit satisfaire à des conditions appropriées.

Dans ce travail, nous demanderons que la matière de la couche simple soit un ensemble de particules ponctuelles soumises seulement à leur champ gravitationnel (gaz idéal). Cette forme de matière est caractérisée par une condition bien simple. Pour trouver cette condition, rappelons d'abord que le nombre des particules est en tout cas très grand (\*). Il s'ensuit qu'une quelconque de ces particules considérée séparément est une particule d'épreuve en mouvement dans le champ créé par l'ensemble des particules. Or, la masse propre d'une particule d'épreuve en mouvement dans un champ gravitationnel quelconque est constante [12]. Il s'ensuit que la somme des masses propres de toutes les particules, c'est-à-dire la masse propre totale du gaz considéré doit être aussi indépendante du temps.

Quand la matière est du type gaz idéal le tenseur  $T_{\mu\nu}$  a la forme

$$(7,1) \quad T_{\mu\nu} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \sum \tilde{m}_0 c^2 u_\mu u_\nu ;$$

$\tilde{m}_0$  et  $u_\mu$  est la masse propre et la vitesse d'une particule individuelle et la sommation s'étend sur toutes les particules contenues, à l'instant considéré, dans l'élément de volume tridimensionnel  $\delta V$ . On déduit de cette relation :

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \sum \tilde{m}_0 = \frac{1}{c^2} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}.$$

Par conséquent, la masse propre totale du gaz sera donnée par

$$(7,2) \quad M_0 = \sum \frac{1}{c^2} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta V,$$

c'est-à-dire par l'intégrale de la trace  $T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  sur une hypersurface appropriée. Ajoutons que dans le cas que nous étudions, cette hypersurface ne peut pas être une des hypersurfaces  $u = \text{const}$ , car le tenseur métrique est non-diagonal.

---

(\*) Pour une symétrie sphérique exacte, ce nombre doit être infini.

Pour arriver à la formule, dont nous avons besoin, considérons le domaine de l'espace-temps contenu entre les hypersurfaces voisines  $u = \text{const}$  et  $u + \delta u = \text{const}$ . Nous intégrons la trace  $T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta(z)$  sur ce domaine :

$$(7,3) \quad I = \int g^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}\delta(x^1)\sqrt{-\det g_{\rho\sigma}}dx^0 dx^1 dx^2 dx^3.$$

Le facteur  $\delta(x^1)$  montre qu'on doit prendre la valeur de  $\sqrt{-\det g_{\rho\sigma}}$  sur  $\Sigma$ . On déduit immédiatement de (6,1) :

$$(\sqrt{-\det g_{\rho\sigma}})_{\Sigma} = f^2 \sin \theta.$$

En remarquant que  $g^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}$  ne dépend pas de  $\theta$  et  $\varphi$  on trouve :

$$(7,4) \quad I = g^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}f^2 \cdot 4\pi\delta u.$$

L'intervalle de temps propre correspondant à  $\delta u$  sur  $\Sigma$  est donné par (5,7) et (6,1) :

$$(7,5) \quad \delta\tau = \sqrt{g_{00}}\delta u.$$

Nous devons donc écrire

$$I = M_0 c^2 \delta\tau,$$

ce qui donne

$$(7,6) \quad M_0 c^2 = 4\pi g^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}f^2 (g_{00})^{-1/2}.$$

Il est préférable d'utiliser au lieu de  $M_0$  la quantité géométrique

$$(7,7) \quad m_0 = \frac{G}{c^2} M_0.$$

En tenant compte de la relation  $8\pi G/c^4 = \kappa$ , nous trouvons finalement :

$$(7,8) \quad m_0 = \frac{1}{2} \kappa g^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}f^2 (g_{00})^{-1/2}.$$

Avec  $m_0 = \text{const}$ , cette équation nous donne la condition nécessaire pour que la matière de la couche simple soit du type gaz idéal.

On remarquera, d'autre part, que notre problème ne contient qu'une fonction inconnue  $f(u)$ . Par conséquent, l'équation (7,8) avec  $m_0 = \text{const}$

suffit pour la détermination de la solution du problème. Nous admettrons donc que l'équation (7,8) avec  $m_0 = \text{const}$  est la condition nécessaire et suffisante pour que la matière soit du type gaz idéal (\*).

### § 8. Changement de variable.

Dans ce paragraphe, nous allons remplacer dans les formules précédentes la variable  $u$  par le temps propre du mouvement macroscopique de la matière. Ceci facilitera beaucoup la discussion de l'équation du mouvement (7,8).

A cause de la symétrie sphérique, le mouvement macroscopique de la matière est radial (\*\*). Les trajectoires de ce mouvement sont les courbes  $\theta, \varphi = \text{const}$  de l'hypersurface  $\Sigma$ , décrites dans le plan  $(u, r)$  par l'équation (5,5),  $r = f(u)$ . Avec  $z = 0$  et  $\theta, \varphi = \text{const}$ , on déduit de (5,7) :

$$(8,1) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{f} + 2f'\right) du^2.$$

Les trajectoires doivent être du genre temps ou (à la limite) isotropes :

$$(8,2) \quad ds^2 \geq 0.$$

Nous pouvons donc écrire au lieu de (8,1)

$$(8,3) \quad \frac{ds}{du} = \left(1 - \frac{2m}{f} + 2f'\right)^{1/2}.$$

Pour une fonction  $\varphi(u)$  quelconque, nous écrirons

$$(8,4) \quad \dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{ds} = \varphi' \frac{du}{ds}.$$

Avec (8,3), cette relation nous donne pour  $\varphi = f$  :

$$(8,5) \quad f' = \dot{f} \left(1 - \frac{2m}{f} + 2f'\right)^{1/2}.$$

---

(\*) Il pourrait être utile d'entreprendre une discussion approfondie de ce point plus tard.

(\*\*) Les mouvements des particules individuelles ont, en général, une composante non radiale.

La solution de cette équation par rapport à  $f'$  est

$$(8,6) \quad f' = \dot{f}(\dot{f} + B);$$

$$(8,7) \quad B = \varepsilon \sqrt{1 + \dot{f}^2 - \frac{2m}{f}}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Nous prendrons dans (8,7)  $\varepsilon = +1$  quand  $f > 2m$ . Nous verrons à la fin du § 9 que dans les mouvements où  $f$  diminue jusqu'à la valeur  $f = 0$ , le signe de  $B$  change pour des valeurs de  $f$  suffisamment petites. Mais nous aurons  $f'\dot{f} > 0$  pour toutes les valeurs de  $f$  dans le cas d'expansion,  $\dot{f} > 0$ .

Par contre, dans le cas de contraction,  $\dot{f} < 0$ , nous aurons  $f'\dot{f} > 0$  seulement quand  $f > 2m$ . En effet, avec  $\dot{f} < 0$ , la formule (8,6) donne  $f' \rightarrow 0$  quand  $f \rightarrow 2m$ . Ce résultat signifie que si nous étudions un mouvement de contraction en utilisant la variable  $u$ , nous ne pouvons pas traverser la surface de Schwarzschild  $f \equiv r = 2m$ . Ceci est une conséquence du fait qu'avec les coordonnées utilisées dans (5,4), l'espace-temps est incomplet dans la direction  $u \rightarrow +\infty$ . Cette difficulté n'existe pas si on utilise la longueur propre  $s$  au lieu de  $u$  (\*).

En remarquant que  $f'\dot{f} = \frac{ds}{du}$ , nous déduisons de (8,6)

$$(8,8) \quad \frac{ds}{du} = \dot{f} + B.$$

Nous calculons maintenant la quantité  $\alpha'$ . En introduisant (8,6) dans (5,13), nous trouvons

$$(8,9) \quad (\alpha' + f')^2 = A^2(\dot{f} + B)^2,$$

$$A \equiv \sqrt{1 + \dot{f}^2};$$

c'est-à-dire

$$(8,10a) \quad \alpha' + f' \equiv \pm A(\dot{f} + B).$$

La deuxième des équations (5,11) montre que  $\alpha' > 0$ , car  $\gamma > 0$  d'après (5,9). D'autre part, on déduit de (8,6) et (8,9) :

$$|f'| < A(\dot{f} + B).$$

---

(\*) Une autre manière d'éviter cette difficulté serait d'utiliser, par exemple, les coordonnées de Kruskal [3]. Mais la métrique est alors compliquée.

On doit, par conséquent, exclure le signe  $-$  dans (8, 10a) :

$$(8, 10) \quad \alpha' + f' = A(\dot{f} + B).$$

Avec (8, 6), nous trouvons finalement

$$(8, 11) \quad \alpha' = (A - \dot{f}) (\dot{f} + B).$$

La deuxième des équations (5, 11) nous donne maintenant

$$(8, 12) \quad \gamma = \frac{1}{\alpha'} = \frac{A + \dot{f}}{\dot{f} + B}.$$

Par un calcul élémentaire, nous trouvons la dérivée  $\gamma' = \dot{\gamma} \frac{ds}{du}$  :

$$(8, 13) \quad \gamma' = \frac{1}{AB} (A + \dot{f})(B - A)\ddot{f} - \frac{1}{f^2 B(\dot{f} + B)} (A + \dot{f})m\dot{f}.$$

En introduisant (8, 11), (8, 12) et (8, 13) dans (6, 6) et (6, 7), nous trouvons les nouvelles expressions pour  $\beta_{\mu\nu}$  :

$$(8, 14) \quad \beta_{00} = (\dot{f} + B) \left\{ \frac{2m}{f^2 B} + 2\dot{f} \frac{A - B}{AB} \right\}, \quad \beta_{22} = 2f \frac{A - B}{\dot{f} + B};$$

$$(8, 15) \quad \beta = \frac{4B - A}{f \dot{f} + B}, \quad \beta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = \beta_{00}.$$

Avec ces valeurs des  $\beta_{\mu\nu}$  et en tenant compte de la relation

$$(8, 16) \quad g_{00} = \left( \frac{ds}{du} \right)^2 = (\dot{f} + B)^2$$

nous trouvons les nouvelles expressions pour  $\tau_{\mu\nu}$ . Nous donnons ici seulement les formules pour  $g^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}$  et  $\tau_{22}$ , dont nous avons besoin dans la suite :

$$(8, 17) \quad -2\kappa\tau_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{4}{AB} (\dot{f} + B)(A - B) \left\{ \ddot{f} - \frac{A}{2f}(3B - A) \right\},$$

$$(8, 18) \quad -2\kappa\tau_{22} = -\frac{2}{AB} f^2 (\dot{f} + B)(A - B) \left\{ \ddot{f} + \frac{A}{2f}(A - B) \right\}.$$

Avec (8, 17), l'équation du mouvement (7, 8) devient

$$(8, 19) \quad m_0 = -\frac{1}{AB} (A - B)f \left\{ f\ddot{f} - \frac{A}{2}(3B - A) \right\},$$

avec  $m_0 = \text{const.}$  Finalement, nous posons

$$(8,20) \quad \frac{m_0}{m} = \lambda = \text{const.}$$

et nous écrivons l'équation du mouvement (8,19) sous la forme :

$$(8,21) \quad 2ff'' = A(3B - A) - \lambda(A + B)AB.$$

### § 9. Une intégrale première de l'équation du mouvement.

En dérivant les relations (8,7) et (8,9), on trouve immédiatement

$$(9,1) \quad A\ddot{A} = \dot{f}\ddot{f}, \quad B\dot{B} = \dot{f}\ddot{f} + \frac{m}{f^2}\dot{f}.$$

A l'aide de ces relations, l'équation (8,21) se met sous la forme

$$(9,2) \quad \frac{\dot{A} + \dot{B}}{A + B} = \frac{\dot{f}}{f} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2}(A + B) \right\}.$$

Dans le cas  $\frac{\lambda}{2}(A + B) \neq 1$ , nous intégrons l'équation (9,2) après séparation des fonctions  $f$  et  $A + B$ . Le résultat est :

$$(9,3) \quad f \left\{ \frac{1}{A + B} - \frac{\lambda}{2} \right\} = \text{const} \equiv k.$$

On voit maintenant que le cas  $\frac{\lambda}{2}(A + B) = 1$  est contenu dans (9,3) (pour  $k = 0$ ). Par conséquent, l'équation (9,3) donne l'intégrale première générale de l'équation du mouvement (8,21).

L'équation (9,3) contient les deux constantes  $\lambda$  et  $k$ . La signification physique de  $\lambda$  est indiquée par (8,20). Pour trouver la signification de la constante  $k$ , il sera nécessaire de considérer en quelques détails le cas où la couche simple contient de la matière du type appelé poussière. La poussière est caractérisée par un tenseur de matière de la forme

$$(9,4) \quad T_{\mu\nu} = \mu u_\mu u_\nu,$$

$u_\mu$  étant la vitesse macroscopique de la matière. On voit immédiatement que pour que le gaz idéal que nous avons sur  $\Sigma$  satisfait à (9,4), le mouvement

de chaque particule du gaz considérée individuellement doit être radial. Il s'ensuit que ce cas sera caractérisé par

$$(9,5) \quad \tau_{22} = 0.$$

De (8, 18) et (9, 5), on déduit l'équation du mouvement d'une couche simple de poussière :

$$(9,6) \quad 2\dot{f}\ddot{f} = -A(A - B).$$

En introduisant (9, 6) dans (8, 21), nous trouvons

$$(9,7) \quad \frac{\lambda}{2}(A + B) - 1 = 0.$$

C'est-à-dire le cas de la poussière est caractérisé par

$$(9,8) \quad k = 0.$$

Il s'ensuit que la constante  $k$  caractérise quantitativement la composante non radiale des mouvements individuels des particules du gaz. Ceci devient encore plus clair si on écrit la formule générale pour  $\tau_{22}$  obtenue par élimination de  $\ddot{f}$  entre (8, 18) et (8, 21) :

$$(9,9) \quad 2\kappa\tau_{22} = \frac{4m}{f}(B + \dot{f})k.$$

En comparant (9, 9) avec (7, 1), on voit que  $k$  doit être non négatif,

$$(9,10) \quad k \geq 0.$$

On déduit d'ailleurs la même condition de (9, 3) : avec  $k < 0$ , on aurait une singularité pour  $\lambda f + 2k = 0$ , c'est-à-dire à  $f = -\frac{2k}{\lambda}$ , qui n'a pas de justification physique. Ajoutons encore que la discussion détaillée donnée dans les § 10-12 montre qu'on ne peut avoir un mouvement du type  $f \geq f_{\min} > 0$  que dans le cas  $k > 0$ .

L'équation (9, 3) peut être résolue par rapport à  $\dot{f}^2$ . Le résultat est :

$$(9,11) \quad A = \sqrt{1 + \dot{f}^2} = \frac{m(\lambda f + 2k)}{2f^2} + \frac{f}{\lambda f + 2k}.$$

Cette relation représente l'équation du mouvement de la couche simple écrite comme équation différentielle du premier ordre. C'est par l'intégration



de cette équation avec les valeurs données de  $\lambda$  et  $k$  qu'on déterminera complètement le mouvement de la couche.

En introduisant (9, 11) dans (9, 3), nous obtenons une expression pour B :

$$(9, 12) \quad B = \frac{f}{\lambda f + 2k} - \frac{m(\lambda f + 2k)}{2f^2}.$$

Cette équation complète la relation de définition (8, 7) où nous n'avons déterminé le facteur  $\varepsilon$  que pour  $f > 2m$ . En effet, pour petites valeurs de  $f$  (dans le cas des mouvements qui continuent jusqu'à  $f = 0$ ), le terme prépondérant dans (9, 12) est le dernier et il est négatif. Par conséquent, B s'annule pour une certaine valeur  $f = f_1 < 2m$  et devient négatif pour  $f < f_1$ . C'est-à-dire le facteur  $\varepsilon$  dans (8, 7) est  $+1$  pour  $f > f_1$  et  $-1$  pour  $f < f_1$ . On remarquera que  $A + B = \frac{2f}{\lambda f + 2k} \geq 0$ , tandis que  $A \geq 1$ .

### § 10. Le cas de la poussière.

Avec  $k = 0$ , l'équation (9, 11) donne finalement pour  $\dot{f}$  :

$$(10, 1) \quad \dot{f} = \pm \frac{1}{2f} \sqrt{(m\lambda + \frac{2}{\lambda}f)^2 - 4f^2}.$$

Le deuxième membre contient sous la racine carrée un polynôme de  $f$  de degré 2, et par conséquent, on peut intégrer cette équation à l'aide des fonctions élémentaires. Mais ceci n'est possible que dans ce cas : si  $k \neq 0$ , le polynôme sous la racine carrée est de degré supérieur à 2.

La solution de (10, 1) a été obtenue et discutée en détail par Israël [14]. Nous nous limiterons ici à montrer comment on peut trouver les caractéristiques générales du mouvement à partir de l'équation (9, 6) ou (9, 7) sans les résoudre explicitement. Ceci nous sera utile dans la suite quand nous discuterons des mouvements avec  $k \neq 0$  où la solution explicite est trop compliquée.

Les relations (8, 7) et (8, 9) montrent que  $A - B > 0$ . Par conséquent, l'équation du mouvement (9, 6) montre que  $\ddot{f} < 0$ . Le mouvement est donc une expansion décélérée ou une contraction accélérée. Il y a deux types de mouvement possibles.

1° Le mouvement commence comme une expansion à partir de  $f = 0$ . Cette expansion s'arrête à  $f = f_{\max}$  et elle est suivie par une contraction jusqu'à  $f = 0$ .

2° Le mouvement est soit une expansion illimitée de  $f = 0$  jusqu'à  $f = \infty$ , soit une contraction illimitée de  $f = \infty$  à  $f = 0$ .

Dans un mouvement du type 1° nous avons à  $f = f_{\max}$  :

$$\dot{f} = 0.$$

Avec ces valeurs de  $f$  et  $\dot{f}$ , nous trouvons

$$A = 1 \quad , \quad B = \sqrt{1 - \frac{2m}{f_{\max}}}.$$

La relation (9,7) nous donne alors

$$(10,2) \quad \lambda = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2m}{f_{\max}}}}.$$

De cette relation, nous déduisons

$$(10,3) \quad 2m \leq f_{\max} < \infty \quad , \quad 1 < \lambda \leq 2.$$

La limite supérieure  $\lambda = 2$  est en accord avec celle d'Arnouitt *et al.* [15].

Dans un mouvement du type 2°, la relation (9,7) nous donne pour  $f = \infty$ , si nous désignons par  $\dot{f}_{\infty}$  la vitesse correspondante :

$$(10,4) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{f}_{\infty}^2}}.$$

Nous aurons donc

$$(10,5) \quad \lambda = 1 \quad \text{si} \quad \dot{f}_{\infty} = 0 \quad , \quad \lambda < 1 \quad \text{si} \quad \dot{f}_{\infty} \neq 0.$$

### § 11. Le cas $\lambda = 0$ .

La masse propre d'une particule physique quelconque étant positive ou nulle, la condition  $\lambda = 0$  signifie que la masse propre de chacune des particules du gaz est nulle (par exemple gaz des photons). L'équation du mouvement (8,21) se réduit maintenant à

$$(11,1) \quad 2f\ddot{f} = A(3B - A).$$

La première intégrale (9,3) devient

$$(11,2) \quad f = k(A + B).$$

Nous utiliserons aussi l'équation (9, 11) qui se réduit à

$$(11,3) \quad \dot{f}^2 = \omega^2 - 1 \quad \text{avec} \quad \omega(f) = \frac{mk}{f^2} + \frac{f}{2k}.$$

On trouve immédiatement

$$\frac{d\omega}{df} = -\frac{2mk}{f^3} + \frac{1}{2k}, \quad \frac{d^2\omega}{df^2} = \frac{6mk}{f^4} > 0.$$

Par conséquent,  $\omega$  a un minimum pour  $f = f_0$  avec

$$(11,4a) \quad f_0^3 = 4mk^2.$$

La valeur minimum est

$$(11,4) \quad \omega_{\min} = \frac{3}{4} \left( \frac{4m}{k} \right)^{1/3}.$$

L'équation (11, 3) montre que nous aurons 3 types de mouvement correspondants aux 3 possibilités  $\omega_{\min} \geq 1$ .

Dans le cas  $\omega_{\min} > 1$ , l'équation (11, 3) montre que  $\dot{f}^2 > 0$  pour toutes les valeurs de  $f$ . Ceci signifie que le mouvement est une expansion illimitée de  $f = 0$  à  $f = \infty$  ou inversement une contraction illimitée. Ce type de mouvement correspond aux valeurs de la constante  $k$  satisfaisant à

$$(11,5) \quad k < \frac{27m}{16}.$$

Dans le cas  $\omega_{\min} = 1$ , on a  $\dot{f} = 0$  pour  $f = f_0$ . La valeur de  $k$  correspondant à  $\omega_{\min} = 1$  est

$$(11,6) \quad k = \frac{27m}{16}$$

et par conséquent la valeur de  $f_0$  donnée par (11, 4a) est

$$(11,7) \quad f_0 \equiv a = \frac{9}{4} m.$$

Pour le point  $f = a$ , où d'après (11, 3)  $\dot{f} = 0$ , on trouve  $A = 1$  et  $B = \sqrt{1 - \frac{2m}{a}} = \frac{1}{3}$ . L'équation du mouvement (11, 1) montre alors qu'à ce point  $\ddot{f} = 0$ . Ce mouvement a donc la forme particulièrement simple

$$(11,8) \quad f = \text{const} = a.$$

En supposant que les particules du gaz sont des photons, on peut interpréter cette solution comme un « geon » électromagnétique stationnaire [16]. Rappelons qu'il n'y a pas des geons stationnaires quand les composantes  $T_{\mu\nu}$  du tenseur de matière sont des fonctions ordinaires [16]. La valeur (11, 7) avait été déjà obtenue par Lanczos [2] et Sen [17] par la discussion générale des couches simples stationnaires.

Le mouvement (11, 8) n'est pas le seul possible quand  $\omega_{\min} = 1$  : la relation (11, 3) nous donne dans ce cas  $\dot{f}^2 > 0$  pour  $f \neq a$  et par conséquent, on peut avoir des mouvements tels que  $f \neq a$ . Si nous partons d'un point  $f < a$  et nous supposons qu'à ce point  $\dot{f} > 0$ , nous trouvons sans difficulté qu'il s'agit d'un mouvement d'expansion qui commence à  $f = 0$  et finit à  $f = a$ , la valeur  $f = a$  étant atteinte asymptotiquement après un intervalle de temps propre infini. Avec  $f > a$  et  $\dot{f} < 0$ , nous avons un mouvement de contraction qui commence à  $f = \infty$  et finit asymptotiquement à  $f = a$ . Il y a aussi les mouvements inverses dans les cas  $f < a$  et  $\dot{f} < 0$  ou  $f > a$ ,  $\dot{f} > 0$ . L'existence de ces mouvements montre l'extrême instabilité du mouvement (11, 8).

Dans le dernier cas  $\omega_{\min} < 1$ , la dérivée  $\dot{f}$  s'annule pour deux valeurs différentes de  $f$ ,

$$\dot{f} = 0 \quad \text{pour} \quad f = a_1 \quad \text{et} \quad f = a_2 \quad , \quad a_1 < a_2.$$

Le deuxième membre de (11, 3) est négatif dans l'intervalle  $a_1 < f < a_2$ . Par conséquent, le mouvement doit être limité dans l'un ou l'autre des intervalles

$$(11, 9) \quad f < a_1 \quad \text{ou} \quad f > a_2.$$

Écrite pour la constante  $k$  la condition  $\omega_{\min} < 1$  donne

$$(11, 10) \quad k > \frac{27}{16}m.$$

Le mouvement dans le premier des intervalles (11, 9) est nécessairement une expansion de  $f = 0$  jusqu'à  $f_{\max} = a_1$  suivie par une contraction jusqu'à  $f = 0$ . Pour  $f = a_1$ , nous avons  $\dot{f} = 0$ ,  $A = 1$  et  $B = \sqrt{1 - \frac{2m}{a_1}}$  et l'équation (11, 1) nous donne

$$2a_1(\ddot{f})_{f=a_1} = 3\sqrt{1 - \frac{2m}{a_1}} - 1.$$

Pour que le point  $f = a_1$  soit la fin de l'expansion et le début de la contraction il faut que  $(\ddot{f})_{f=a_1}$  soit négatif, c'est-à-dire, on doit avoir

$$(11,12) \quad a_1 < a.$$

Ceci est vrai comme on démontre en discutant en détail l'équation

$$\omega(f) - 1 = 0.$$

Nous avons ainsi le résultat que le mouvement d'expansion limitée que nous avons trouvé précédemment pour la poussière existe aussi pour  $\lambda = 0$ . Mais nous avons ici la restriction

$$f_{\max} = a_1 < a.$$

Ajoutons que pour ce type de mouvement, l'équation initiale (11,2) renforce la restriction (11,10). On trouve en effet dans ce cas

$$(11,13) \quad \frac{27}{16}m < k < 2m.$$

Le mouvement dans le deuxième intervalle (11,9) est une contraction de  $f = \infty$  jusqu'à  $f_{\min} = a_2$  suivie par une expansion jusqu'à  $f = \infty$ . Pour  $f = a_2$ , nous trouvons  $\dot{f} = 0$ ,  $A = 1$ ,  $B = \sqrt{1 - \frac{2m}{a_2}}$  et

$$2a_2(\ddot{f})_{f=a_2} = 3\sqrt{1 - \frac{2m}{a_2}} - 1.$$

De l'équation  $\omega(f) - 1 = 0$ , on déduit :

$$(11,14) \quad a_2 > a$$

et par conséquent  $(\ddot{f})_{f=a_2} > 0$ . Ce mouvement est du type décrit qualitativement dans le § 4.

Remarquons encore que pour tous les mouvements dans lesquels  $f$  augmente indéfiniment, on a d'après (11,2)

$$\frac{|\dot{f}|}{f} \rightarrow \frac{1}{2k} \quad \text{quand} \quad f \rightarrow \infty.$$

Le fait que  $|\dot{f}| \rightarrow \infty$  quand  $f \rightarrow \infty$  signifie que l'hypersurface  $\Sigma$  devient,

pour  $f \rightarrow \infty$ , asymptotiquement tangente à une hypersurface caractéristique. En effet, si  $\dot{f} \rightarrow +\infty$ , l'équation (8,6) donne

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{(B + \dot{f})\dot{f}} \rightarrow 0.$$

C'est-à-dire  $\Sigma$  est dans ce cas asymptotiquement tangent à une des hypersurfaces caractéristiques  $u = \text{const}$ . Par contre, si  $\dot{f} \rightarrow -\infty$  pour  $f \rightarrow \infty$ , on trouve

$$B = -\dot{f}\left(1 + \frac{1}{2\dot{f}^2} + \dots\right), \quad (B + \dot{f})\dot{f} \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad \frac{du}{dr} \rightarrow -2.$$

Mais  $\frac{du}{dr} = -2$  est la forme asymptotique, pour  $r \rightarrow \infty$ , de la deuxième famille d'hypersurfaces caractéristiques à symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild (5,4).

### § 12. Le cas général $\lambda k \neq 0$ .

Le deuxième membre de (9,11) étant, dans ce cas, compliqué, la discussion du mouvement à l'aide de cette équation est moins facile. Nous utiliserons directement l'équation du mouvement (8,21).

Nous montrons d'abord que, dans ce cas aussi, il y a des mouvements stationnaires,

$$(12,1) \quad f = \text{const} \equiv b.$$

Avec  $\dot{f} = 0 = \ddot{f}$ , l'équation (8,21) nous donne

$$(12,2) \quad 3\sqrt{1 - \frac{2m}{b}} - 1 - \lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2m}{b}}\right) \sqrt{1 - \frac{2m}{b}} = 0.$$

Posons

$$(12,3) \quad \sqrt{1 - \frac{2m}{b}} \equiv \xi.$$

La relation (12,2) devient alors une équation du second degré pour  $\xi$  :

$$(12,4) \quad \Pi(\xi; \lambda) = -\lambda\xi^2 + (3 - \lambda)\xi - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$(12,5) \quad \xi_1, \xi_2 = \frac{3 - \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2\lambda}, \quad \Delta = (1 - \lambda)(9 - \lambda).$$

La condition  $\Delta \geq 0$  nous donne :

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{ou} \quad \lambda \geq 9.$$

D'autre part, la somme et le produit des racines sont

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{3 - \lambda}{\lambda}, \quad \xi_1 \xi_2 = \frac{1}{\lambda} > 0.$$

Les deux racines ont donc le même signe. Elles sont positives quand  $0 \leq \lambda \leq 1$  et négatives quand  $\lambda > 9$ . D'après (12,3),  $\xi$  varie de 0 à 1 quand  $b$  varie de  $2m$  à  $\infty$ . Par conséquent, le seul cas acceptable est

$$(12,6) \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

D'autre part, on vérifie sans difficulté que, avec  $\lambda$  satisfaisant à (12,6), on a  $\xi_1 \leq 1$  et  $\xi_2 \geq 1$ . On doit, par conséquent, exclure (\*)  $\xi_2$  et on arrive finalement au résultat suivant : il y a des solutions stationnaires du type (12,1) avec la quantité  $b = b(\lambda)$  donnée par

$$(12,7) \quad \sqrt{1 - \frac{2m}{b}} = \frac{1}{2\lambda} \{ 3 - \lambda - \sqrt{(1 - \lambda)(9 - \lambda)} \}.$$

Les valeurs de la constante  $k$  correspondant à ces mouvements sont données par l'équation (9,3) considérée au point  $f = b$  :

$$(12,8) \quad k = b \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2m}{b}}} - \frac{\lambda}{2} \right).$$

On vérifie immédiatement que  $k > 0$ .

Nous ajouterons sans entrer dans les détails que, pour les valeurs des constantes  $\lambda$  et  $k$  satisfaisant à (12,8), il y aura à côté du mouvement (12,1) d'autres mouvements possibles du type que nous avons déjà rencontré dans le cas  $\lambda > 0$  : expansion ou contraction limitée se raccordant asymptotiquement au mouvement (12,1).

Nous considérons maintenant des mouvements constitués par une expansion et une contraction limitées. Dans ce cas, il y aura un point  $f_0$  tel que  $\dot{f}_0 \equiv (\dot{f})_{f=f_0} = 0$ . Pour ce point, l'équation du mouvement (8,21) nous donne :

$$(12,9) \quad 2f_0 \ddot{f}_0 = -\lambda X^2 + (3 - \lambda)X - 1 \equiv \Pi(X; \lambda), \quad X \equiv \sqrt{1 - \frac{2m}{f_0}}.$$

(\*) Quand  $\xi_2 = 1$ , on a aussi  $\xi_1 = 1$ . On ne perd donc rien en excluant  $\xi_2$ .

L'équation  $\Pi(X; \lambda) = 0$  a les racines  $X_1 = \xi_1$ ,  $X_2 = \xi_2 > \xi_1$  données par (12,5). Nous écrivons (12,9) sous la forme

$$(12,9a) \quad 2f_0 \ddot{f}_0 = -\lambda(X - \xi_1)(X - \xi_2)$$

et nous supposons d'abord que  $0 \leq \lambda < 1$ . Dans ce cas, nous avons  $\xi_1 < 1$  et  $\xi_2 > 1$ . La valeur  $f_0 = b(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  étant donné par (12,7), nous donne  $X = \xi_1$  et  $\ddot{f}_0 = 0$  : nous retrouvons dans ce cas le mouvement stationnaire étudié précédemment. Pour  $f_0 = b_1 < b(\lambda)$ , nous déduisons de la formule (12,9) pour  $X$  que  $X_{f_0=b_1} < \xi_1$  et par conséquent  $\ddot{f}_0 < 0$ . Il s'ensuit que  $\dot{f}$  sera décroissant : au voisinage de  $f = b_1$ , le mouvement est une expansion jusqu'à  $f_{\max} = b_1$  suivie par une contraction. Cette contraction ne peut pas s'arrêter à un point  $f'_0 < b_1$  : à ce point, nous aurions  $\dot{f}'_0 = 0$ ,  $\ddot{f}'_0 > 0$ , ce qui est incompatible avec (12,9a), car  $f'_0 < b_1 < b(\lambda)$ . Par conséquent, le mouvement est une expansion de  $f = 0$  jusqu'à  $f_{\max} = b_1 < b(\lambda)$  suivie par une contraction jusqu'à  $f = 0$ .

Si  $f_0 \equiv b_2 > b(\lambda)$  nous trouvons  $\xi_2 > X > \xi_1$  et par conséquent  $\ddot{f}_0 > 0$ . Un raisonnement analogue au précédent montre que dans ce cas, il s'agit d'un mouvement du type décrit dans le § 4 : contraction de  $f = \infty$  jusqu'à  $f_{\min} = b_2$  suivie par une expansion jusqu'à  $f = \infty$ .

Les valeurs de la constante  $k$  correspondant à ces mouvements sont données par la relation (9,3) considérée au point  $f_0$  :

$$(12,10) \quad k = f_0 \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2m}{f_0}}} - \frac{\lambda}{2} \right).$$

On vérifie immédiatement que  $k > 0$  à cause de  $0 \leq \lambda < 1$ .

Dans le cas  $\lambda = 1$ , on a  $\xi_1 = \xi_2 = 1$  et l'équation (12,9a) devient

$$2f_0 \ddot{f}_0 = -\lambda(X - 1)^2.$$

On aura donc  $\ddot{f}_0 < 0$  pour n'importe quel  $X < 1$ . Ce résultat est valable aussi pour  $\lambda > 1$  : les racines  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  sont, soit imaginaires ( $1 < \lambda < 9$ ), soit réelles mais négatives ( $\lambda > 9$ ) de manière que  $\Pi(X) < 0$  pour toutes les valeurs de  $X$ . Le mouvement sera une expansion limitée de  $f = 0$  jusqu'à  $f_{\max} = f_0$  suivie par une contraction jusqu'à  $f = 0$ . La valeur  $f_{\max} = f_0$  ne doit satisfaire qu'à la condition

$$(12,11) \quad f_0 \geq 2m,$$

comme dans le cas correspondant ( $1 \leq \lambda \leq 2$ ) de la poussière.



Ajoutons qu'il existe une limite supérieure pour  $\lambda$  qu'on obtient à partir de (9,3). En effet, avec  $k \geq 0$ , cette relation donne  $\lambda \leq \frac{2}{A+B}$ . Or, pour un mouvement donné la quantité  $A+B$  prend, d'après (9,3) sa valeur maximum pour  $f = f_0$ , d'où  $(A+B)_{\max} = 1 + \sqrt{1 - \frac{2m}{f_0}} \geq 1$  et par conséquent,  $\lambda \leq 2$ . On voit ainsi que dans le cas général, on a pour  $\lambda$  les mêmes limites comme dans le cas d'une distribution de poussière.

Nous remarquerons finalement qu'il y a aussi des mouvements d'expansion (ou de contraction) illimitée. La condition pour que le mouvement soit de ce type est donnée par

$$(12,12) \quad \omega_{\min} > 1,$$

$\omega(f)$  étant le deuxième membre de (9,11). Le premier membre de (12,12) est une fonction des paramètres  $\lambda$  et  $k$  qu'il est difficile d'expliciter dans le cas  $\lambda k \neq 0$ . Mais on arrive facilement à une restriction pour  $\lambda$  si l'on écrit la relation (9,11) pour  $f = \infty$  :

$$\sqrt{1 + \dot{f}_{\infty}^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ceci signifie que

$$(12,13) \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

### § 13. Conclusions.

Dans le cas général,  $\lambda k \neq 0$ , nous avons trouvé 4 types de mouvement.

1° Couches simples stationnaires,  $f = \text{const} = b(\lambda)$ . Ces mouvements sont possibles pour  $0 \leq \lambda < 1$ . Le rayon constant  $b(\lambda)$  augmente avec  $\lambda$ . Sa valeur minimum est  $b(0) = a = \frac{9}{4} m$ , tandis que  $b(\lambda) \rightarrow \infty$  quand  $\lambda \rightarrow 1$ .

Nous joindrons à ce type les mouvements d'expansion ou contraction limitée se raccordant asymptotiquement à l'état stationnaire  $f = b(\lambda)$ .

2° Mouvement d'expansion + contraction dans l'intervalle

$$0 \leq f \leq f_{\max} = b_1$$

ou de contraction + expansion dans l'intervalle  $b_2 = f_{\min} < f < \infty$ . Ces

mouvements, possibles pour  $0 \leq \lambda < 1$ , sont effectivement liés à ceux du type 1°. On a  $b_1 < b < b_2$ .

3° Mouvement d'expansion + contraction dans l'intervalle fini  $0 \leq f \leq f_{\max}$ . Ce type de mouvement est possible quand  $1 \leq \lambda \leq 2$ . La seule restriction pour  $f_{\max}$  est  $f_{\max} > 2m$ .

4° Expansion (ou contraction) illimitée dans l'intervalle  $0 \leq f \leq \infty$ . Elle est possible pour  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Dans le cas particulier de la poussière,  $k = 0$ , il n'y a que les types de mouvement 3° et 4°.

Dans le cas du gaz de « photons »,  $\lambda = 0$ , il y a les types 1°, 2° et 4°.

Soulignons finalement que le problème que nous avons étudié dans ce travail n'a pas des solutions oscillatoires. Ce résultat est lié à l'hypothèse  $m_{\text{int}} = 0$  qui est à la base de nos calculs. Il est facile de voir qu'il y aura des solutions oscillatoires dans le cas où  $m_{\text{int}} \neq 0$  et  $m_{\text{int}}/m_{\text{ext}} \approx 1$ . L'étude de ce nouveau problème est actuellement en cours et fera l'objet d'une prochaine publication.

Nous tenons à remercier MM. S. Deser et A. Taub pour d'intéressantes discussions.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. LANCZOS, *Phys. Zeits.*, t. **23**, 1922, p. 539.
- [2] C. LANCZOS, *Ann. d. Phys.*, t. **74** (4), 1924, p. 518.
- [3] G. DAUTCOURT, *Math. Nachr.*, t. **27**, 1964, p. 277.
- [4] W. ISRAEL, *Nuovo Cimento*, t. **44 B**, 1966, p. 1; Errata : *Nuovo Cimento*, t. **48 B**, 1967, p. 463.
- [5] K. KUCHAR, Preprint 1967. Charles University, Prague.
- [6] A. PAPAPETROU et H. TREDER, *Math. Nachr.*, t. **20**, 1959, p. 53.
- [7] S. O'BRIEN et J. L. SYNGE, *Commun. Dublin Inst. Adv. Stud.*, A, n° 9, 1952.
- [8] Y. CHOQUET-BRUHAT, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), 1959, p. 1782.
- [9] A. LICHNEROWICZ, *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*. Masson, 1955.
- [10] L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, Princeton, 1966.
- [11] A. S. EDDINGTON, *Nature*, t. **113**, 1924, p. 192.  
D. FINKELSTEIN, *Phys. Rev.*, t. **110**, 1958, p. 965.
- [12] A. PAPAPETROU, *Proc. Roy. Soc., A*, t. **209**, 1951, p. 248.
- [13] M. KRUSKAL, *Phys. Rev.*, t. **119**, 1960, p. 1743.
- [14] W. ISRAEL, *Phys. Rev.*, t. **153**, 1967, p. 1388.
- [15] R. ARNOWITT, S. DESER et C. W. MISNER, *Ann. Phys.*, t. **33**, 1965, p. 88.
- [16] J. A. WHEELER, *Phys. Rev.*, t. **97**, 1955, p. 511.
- [17] N. SEN, *Ann. d. Phys.*, t. **73**, 1924, p. 365.

(Manuscrit reçu le 14 juin 1968).