ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ILIJA LUKACEVIC

Sur les ondes d'Alfven en magnétohydrodynamique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, nº 3 (1968), p. 217-240
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_3_217_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 3, 1968, p. 217-240.

Section A :
Physique théorique.

Sur les ondes d'Alfven en magnétohydrodynamique relativiste

par

Ilija LUKACEVIC

Faculté des Sciences, Belgrade.

SOMMAIRE. — On démontre que les ondes de choc d'Alfvén sont les seules ondes possibles pour lesquelles les discontinuités des vecteurs quadri-vitesse et champ magnétique sont colinéaires. On démontre une propriété analogue pour les ondes d'Alfvén infinitésimales, ainsi que l'incompatibilité du mouvement irrotationnel avec ces ondes. Ensuite, on considère le vecteur densité superficielle du courant électrique, et on donne, à l'aide de ce vecteur, les conditions nécessaires et suffisantes pour un choc d'Alfvén en Relativité générale.

SUMMARY. — The author obtains a proof that the Alfvén shock-waves are the only possible waves for which discontinuities of the velocity four-vector and those of the magnetic field vector are colinear. An analogous proof for the infinitesimal Alfvén waves is obtained, and the incompatibility of an irrotational motion with these waves is established. Then one considers the electrical current-sheet vector, and using it, the necessary and sufficient conditions for an Alfvén shock in General Relativity is given.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude de certaines propriétés des ondes d'Alfvén relativistes. Pour l'essentiel, il est basé sur les résultats obtenus par le Professeur Lichnerowicz (cf. [*4*]), et cela tant pour les ondes de choc que pour les ondes infinitésimales.

L'étude ira dans deux directions : premièrement, on considérera les ondes de choc (ou chocs) et les ondes infinitésimales en magnétohydrodynamique relativiste, ensuite les ondes de choc en Relativité générale uniquement, ou plus précisément, les discontinuités des premiers membres des équations d'Einstein dans le cas d'ondes de choc, les ondes infinitésimales n'ayant pas d'influence sur la continuité du tenseur de Ricci. La supposition essentielle est que les $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières sont continus.

Dans la première partie du travail, nous exposerons les équations générales et les équations de choc de la magnétohydrodynamique relativiste et leurs invariants ainsi que les propriétés des chocs d'Alfvén.

La seconde partie consistera dans la démonstration de certaines conséquences nouvelles qui découlent des résultats exposés précédemment.

Dans la première section de la troisième partie nous donnerons un bref rappel de certains résultats de la théorie des ondes infinitésimales en magnétohydrodynamique relativiste (et d'un opérateur différentiel nouvellement introduit) tels que les a exposés Lichnerowicz dans son cours au Collège de France de 1966-1967. Les deuxième et troisième sections contiennent l'application de ces résultats dans le cas d'ondes d'Alfvén infinitésimales et du mouvement irrotationnel du fluide considéré.

La quatrième partie sera consacrée aux ondes de choc en Relativité générale.

I

1. — LE TENSEUR D'ÉNERGIE EN MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

La métrique $\underline{ds}^2$ de l'espace-temps V_4 sera de signature $+, -, -, -$.

a) Un fluide parfait chargé a pour tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

où $\underline{\rho}$ est la densité propre d'énergie du fluide, sa pression, $\underline{u}^\alpha$ le vecteur vitesse unitaire avec

$$u^\alpha u_\alpha = 1$$

et $\tau_{\alpha\beta}$ la partie électromagnétique du tenseur d'énergie.

La densité propre d'énergie $\underline{\rho}$ est exprimée par :

$$\rho = c^2 r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right)$$

où r est la densité propre de matière et ε l'énergie interne spécifique du fluide. Nous aurons donc, pour le scalaire de (1.1) :

$$\rho + p = c^2 r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{p}{c^2 r}\right) = c^2 r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) \tag{1.2}$$

La seconde égalité définit la fonction i, enthalpie spécifique du fluide. La fonction-indice f, introduite par Lichnerowicz pour un tel fluide (la partie mécanique correspond à un *fluide parfait thermodynamique*) sera

$$f = 1 + \frac{i}{c^2} \tag{1.3}$$

L'énergie interne spécifique, et par suite, la fonction-indice f, est considéré comme fonction de deux variables indépendantes. Il nous sera utile de choisir comme variables indépendantes la densité propre r et l'entropie spécifique S.

La relation entre la température propre Θ et l'entropie spécifique S d'un milieu matériel sera la même qu'en thermodynamique classique :

$$\Theta dS = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.4}$$

En différentiant la fonction-indice f, définie par (1.3), on obtient, en tenant compte de (1.2) et de (1.4) :

$$\Theta dS = c^2 df - \frac{dp}{r}$$

c'est-à-dire

$$\underline{dp} = c^2 r df - r\Theta dS \tag{1.5}$$

Le tenseur d'énergie aura donc la forme :

$$T_{\alpha\beta} = c^2 r f u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}. \tag{1.1'}$$

Le tenseur qui correspond à la partie électromagnétique de l'énergie (1.1′) est donné par :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} H_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - H_{\alpha\rho} G_\beta{}^\rho \tag{1.6}$$

où $H_{\rho\sigma}$ est le tenseur champ électrique-induction magnétique, $G_{\rho\sigma}$ le tenseur champ magnétique-induction électrique. Les vecteurs champ électrique e^α

et champ magnétique h^α sont donnés, à partir de ces tenseurs et de leurs adjoints $* G^{\alpha\beta}$ et $* H^{\alpha\beta}$, dans cette métrique, par :

$$e^\alpha = u_\beta H^{\beta\alpha}$$
$$h^\alpha = u_\beta(* G^{\beta\alpha})$$

La relation entre $G_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$ est :

$$(1.7) \qquad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{\lambda\mu - 1}{\mu}(u_\alpha e_\beta - u_\beta e_\alpha)$$

où λ est la permittivité électrique et μ la perméabilité magnétique.

b) En désignant par ∇ l'opérateur de différentiation covariante, les équations de Maxwell seront :

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} \nabla_\alpha(* H^{\alpha\beta}) &= 0 \\ \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} &= \mathfrak{J}^\beta \end{aligned}$$

$\mathfrak{J}^\beta$ est le vecteur courant électrique.

Le cas magnétohydrodynamique d'un fluide parfait chargé est celui où le vecteur champ électrique e^α est nul et la conductivité infinie. Nous ne considérerons pas d'autre cas dans ce travail.

En magnétohydrodynamique, la relation (1.7) se réduit à :

$$(1.7') \qquad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta}$$

Les tenseurs $G_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$ sont alors :

$$(1.9) \qquad * H_{\alpha\beta} = \mu(u_\alpha h_\beta - u_\beta h_\alpha) \qquad G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(u^\gamma h^\delta - u^\delta h^\gamma)$$

Le tenseur d'énergie électromagnétique devient :

$$(1.6') \qquad \tau_{\alpha\beta} = \mu\left(\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - G_{\alpha\rho} G_\beta{}^\rho\right)$$

h^α étant un vecteur d'espace, nous aurons :

$$| h |^2 = - h_\alpha h^\alpha$$

Le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ peut s'écrire alors :

$$(1.6'') \qquad \tau_{\alpha\beta} = \mu \left\{ | h |^2 \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) - h_\alpha h_\beta \right\}$$

Et le tenseur d'énergie total $T_{\alpha\beta}$:

$$(1.1'') \qquad T_{\alpha\beta} = (c^2 rf + \mu \mid h \mid^2) u_\alpha u_\beta - \left(p + \frac{1}{2}\mu \mid h \mid^2\right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta$$

Nous désignerons par q le coefficient de $g_{\alpha\beta}$, dénommé la pression totale dans le fluide considéré (cf. [4]) :

$$(1.10) \qquad q = p + \frac{1}{2}\mu \mid h \mid^2$$

2. — CONDITIONS DE CONSERVATION ET ÉQUATIONS DE CHOC

Nous userons des trois groupes suivants d'équations différentielles :

1) L'équation de conservation de la densité de matière (ou de continuité) :

$$(2.1) \qquad \nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0$$

2) Le premier groupe d'équations de Maxwell (1.8), qui s'écrivent :

$$(2.2) \qquad \nabla_\alpha (h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha) = 0$$

3) Les équations du mouvement du fluide, conséquences des conditions de conservation :

$$(2.3) \qquad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

4) Si on multiplie les relations (2.3) par u^α et les équations de Maxwell par h^α on obtiendra, après combinaison de ces équations :

$$c^2 f \nabla_\alpha (r u^\alpha) + r\Theta u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$

D'où encore une relation :

$$(2.4) \qquad u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$

Nous considérerons d'abord les ondes de choc, hypersurfaces orientées dans le temps, à la traversée desquelles l'un des vecteurs u^α, h^α où l'une au moins des variables thermodynamiques peuvent avoir des discontinuités. Nous désignerons par [P] la discontinuité P′ − P d'une quantité P à la traversée du choc.

Les relations (2.1), (2.2), (2.3) étant satisfaites de part et d'autre de la surface de discontinuité Σ, ceci entraîne, sur la surface elle-même, pour les distributions qui y figurent :

$$[ru^{\alpha}]l_{\alpha} = 0 \tag{2.5}$$

$$[h^{\alpha}u^{\beta} - h^{\beta}u^{\alpha}]l_{\alpha} = 0 \tag{2.6}$$

$$[T^{\alpha\beta}]l_{\alpha} = 0 \tag{2.7}$$

où l_{α} est la normale à l'onde de choc Σ, donc orientée dans l'espace ($l^{\alpha}l_{\alpha} = -1$). Ces conditions expriment l'invariance de deux vecteurs V_{α}, W_{α} et d'un scalaire a. En désignant par η la projection du vecteur h_{α} sur la normale l_{α}, ces quantités invariantes s'écrivent :

$$ru^{\alpha}l_{\alpha} = a \tag{2.8}$$

$$\eta u^{\beta} - \frac{a}{r}h^{\beta} = V^{\beta} \tag{2.9}$$

$$\frac{a}{r}(c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2)u^{\beta} - ql^{\beta} - \mu\eta h^{\beta} = W^{\beta} \tag{2.10}$$

3. — LES INVARIANTS DES ONDES DE CHOC

Nous ne considérerons que les chocs non tangentiels, c'est-à-dire tels que ni u^{α} ni h^{α} ne soient tangents à Σ ($a \neq 0$, $\eta \neq 0$).

Au moyen du scalaire invariant H :

$$H = \frac{1}{a^2}V_{\alpha}V^{\alpha} = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|\,h\,|^2}{r^2} \tag{3.1}$$

on a l'expression de α, paramètre important pour l'étude des chocs d'Alfvén (cf. [*4*]), qui est donné par :

$$\alpha = \frac{c^2f}{r} - \mu H \tag{3.2}$$

Si w^{β} désigne la composante tangente à Σ de ru^{β}, nous pouvons écrire la relation de définition (2.10), sous la forme :

$$W^{\beta} = a\alpha w^{\beta} + \mu\frac{r\eta}{a}V^{\beta} - (q + a^2\alpha)l^{\beta} \tag{3.3}$$

W^{β} est ainsi représenté au moyen de ses deux composantes, l'une tangente à Σ (ce qui est facile à vérifier au moyen de (2.9)), l'autre colinéaire à la normale l^{β}. Les deux composantes étant respectivement invariantes, l'une d'elles, dont nous aurons besoin plus tard, est :

(3.4) $$l = \alpha + \frac{q}{a^2}$$

Le produit scalaire $W^{\alpha}V_{\alpha}$ nous donnera :

$$W^{\alpha}V_{\alpha} = ar\eta(\alpha + \mu H)$$

Or d'après la définition de α :

(3.5) $$W^{\alpha}V_{\alpha} = c^2 af\eta$$

4. — ONDES DE CHOC D'ALFVÉN

Les ondes d'Alfvén relativistes, ainsi qu'il a été démontré [4] sont les solutions de l'équation différentielle :

(4.1) $$\left(\frac{1}{\mu}c^2 rf + |h|^2\right)(u^{\alpha}\partial_{\alpha}\varphi)^2 - (h^{\alpha}\partial_{\alpha}\varphi)^2 = 0$$

où φ = const. est l'équation finie de l'hypersurface Σ. En désignant par β^2 le scalaire qui multiplie $(u^{\alpha}\partial_{\alpha}\varphi)^2$, la relation (4.1) s'écrit (le gradient $\partial_{\alpha}\varphi$ étant colinéaire à l_{α}) :

(4.1') $$\beta^2 \frac{a^2}{r^2} - \eta^2 = 0$$

L'équation (4.1) peut être décomposée comme le produit de deux facteurs :

$$A^{\beta}l_{\beta} \cdot B^{\alpha}l_{\alpha} = 0$$

où l'on a :

$$A^{\beta} = \beta u^{\beta} + h^{\beta} \qquad B^{\alpha} = \beta u^{\alpha} - h^{\alpha}$$

La nullité de l'un ou l'autre des facteurs $A^{\alpha}l_{\alpha}$, $B^{\alpha}l_{\alpha}$ est le cas où on a respectivement les ondes d'Alfvén d'espèce A ou B.

Il a été démontré (cf. [*4*]) que la nullité du paramètre α avant le choc entraîne sa nullité après le choc, et que c'est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un choc soit choc d'Alfvén. Au cas où α serait invariant en étant différent de zéro, il y aurait absence de choc.

Les propriétés des chocs d'Alfvén démontrées ainsi étaient l'invariance des variables thermodynamiques

$$(4.2) \qquad [f] = 0 \quad [r] = 0 \quad [p] = 0$$

l'invariance de l'intensité du champ magnétique, des composantes de u^α et de h^α normales à l'onde de choc, et enfin l'invariance des vecteurs A^α ou B^α suivant qu'on a un choc d'espèce A ou B :

$$(4.3) \qquad [u^\alpha l_\alpha] = 0 \quad [h^\alpha l_\alpha] = 0 \quad [|h|^2] = 0$$

et

$$(4.4) \qquad [h^\alpha] + \beta[u^\alpha] = 0$$

ou

$$(4.4') \qquad [h^\alpha] - \beta[u^\alpha] = 0$$

II

5. — COMPOSANTES INVARIANTES ET DENSITÉ SUPERFICIELLE DE COURANT

a) Nous démontrerons d'abord que les vecteurs u^α et h^α ont chacun une composante invariante qui est tangente à l'onde de choc. En effet :

$$(5.1) \qquad \begin{aligned} [u^\alpha V_\alpha] &= [\eta] = 0 \\ [h^\alpha V_\alpha] &= \left[\frac{|h|^2}{r}\right] = 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc la conclusion que :

Les composantes, tangentes à l'onde de choc Σ en direction du vecteur invariant V^α, *des vecteurs* u^α *et* h^α *sont invariantes.*

Les vecteurs A^α et B^α sont d'ailleurs colinéaires à V^α dans les chocs de ces espèces respectives. Ceci est exprimé par les conditions que $A^\alpha l_\alpha$ ou $B^\alpha l_\alpha$ soient nuls, ce qui est facile à vérifier. De même, dans un choc d'Alfvén, si on considère l'expression (3.3), on constate que W^α appartient localement au même 2-plan que V^α et l^α, à la suite de la nullité du paramètre α.

b) Considérons maintenant le vecteur courant électrique, qui est, d'après le deuxième groupe d'équations de Maxwell (1.8) :

$$\mathfrak{J}^{\beta} = \nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta} = - \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_{\alpha}(u_{\gamma} h_{\lambda})$$

Le vecteur densité superficielle de courant K^{α}, qui lui correspond, est :

$$K^{\beta} = l_{\alpha}[G^{\alpha\beta}]$$

Donc

(5.2)
$$K^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\beta}[u_{\gamma} h_{\delta}] = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\beta}([u_{\gamma}][h_{\delta}] + [u_{\gamma}]h_{\delta} + u_{\gamma}[h_{\delta}]) = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\beta}([u_{\gamma}]h_{\delta} + u_{\gamma}[h_{\delta}]$$

les discontinuités $[u^{\alpha}]$ et $[h^{\alpha}]$ étant colinéaires pour un choc d'Alfvén. Si nous substituons à la discontinuité du vecteur champ magnétique $[h^{\alpha}]$ son expression au moyen de $[u^{\alpha}]$ à partir de (4.4), nous aurons :

(5.3) $$K^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\beta}[u_{\gamma}](h_{\delta} + \beta u_{\delta})$$

Le dernier terme du second membre est le vecteur invariant A_{δ} qui est colinéaire à V_{δ}. Ceci a été démontré pour un choc d'espèce A, mais nous aurions la même conclusion pour un choc d'espèce B.

Nous avons donc :

Le vecteur densité superficielle de courant K^{α} *est orthogonal, dans un choc d'Alfvén, à la normale à l'onde de choc* l_{α}, *au vecteur invariant* V_{α} *et à la discontinuité* $[u_{\alpha}]$ *du vecteur vitesse unitaire (ou à la discontinuité* $[h_{\alpha}]$ *du champ magnétique).*

Remarquons que K^{α} est alors évidemment orthogonal au vecteur invariant W_{α}, qui est contenu dans le 2-plan l_{α}, V_{α}.

Il a été démontré pour les chocs qui ne sont pas d'Alfvén (cf. [*4*]) que le vecteur densité superficielle de courant est toujours orthogonal aux vecteurs l_{α}, V_{α}, W_{α}.

6. — UNE PROPRIÉTÉ DES CHOCS D'ALFVÉN

Quels peuvent être les chocs non tangentiels pour lesquels la discontinuité du vecteur vitesse est colinéaire à la discontinuité du vecteur champ magnétique ? Posons cette condition :

(6.1) $$[h^{\alpha}] + \gamma[u^{\alpha}] = 0$$

où γ peut être un scalaire arbitraire. En tenant compte du fait que u^α demeure unitaire et orthogonal à h^α après le choc, nous aurons :

$$(6.2) \qquad [u^\alpha][u_\alpha] = -2u^\alpha[u_\alpha]$$

$$(6.3) \qquad [u^\alpha h_\alpha] = [u^\alpha][h_\alpha] + [u^\alpha]h_\alpha + u^\alpha[h_\alpha] = 0$$

En multipliant (6.1) par $[u^\alpha]$, en y substituant $[u^\alpha][u_\alpha]$ de (6.2) et $[u^\alpha][h_\alpha]$ de (6.3), on aura :

$$(6.4) \qquad [u^\alpha]h_\alpha + u^\alpha[h_\alpha] + 2\gamma u^\alpha[u_\alpha] = 0$$

c'est-à-dire

$$(6.5) \qquad [u^\alpha](h_\alpha + \gamma u_\alpha) = 0$$

Si nous substituons dans (6.5) l'expression $[h_\alpha]u^\alpha$ obtenue en multipliant (6.1) par u^α, et en usant de (6.2), nous aurons :

$$2h^\alpha[h_\alpha] + \gamma^2[u^\alpha][u_\alpha] = 0$$

Donc

$$2h^\alpha[h_\alpha] + [h^\alpha][h_\alpha] = 0$$

D'où il suit que

$$(6.6) \qquad [|h|^2] = 0$$

La multiplication de (6.1) par l^α donnera :

$$(6.1') \qquad \gamma a\left[\frac{1}{r}\right] + [\eta] = 0$$

Cependant, l'expression (3.1) du scalaire invariant H donnera, dans notre cas, à cause de l'invariance de $|h|$:

$$(6.7) \qquad \frac{1}{a^2}[\eta^2] - |h|^2\left[\frac{1}{r^2}\right] = 0$$

soit, quand on développe :

$$(6.7') \qquad \frac{1}{a^2}[\eta]^2 - |h|^2\left[\frac{1}{r}\right]^2 + \frac{2}{a^2}\eta[\eta] - |h|^2\frac{2}{r}\left[\frac{1}{r}\right] = 0$$

Quand on aura substitué $[\eta]$ de (6.1′) dans (6.7′), on obtiendra, après quelques arrangements :

$$(\gamma^2 - |h|^2)\left[\frac{1}{r}\right]^2 - 2\left(\frac{1}{a}\gamma\eta + \frac{1}{r}|h|^2\right)\left[\frac{1}{r}\right] = 0 \tag{6.7''}$$

a) Pour $\gamma \neq \pm |h|$, on aura deux possibilités :

$$1)\quad \left[\frac{1}{r}\right] = 0 \qquad\qquad [\eta] = 0$$

$$2)\quad \left[\frac{1}{r}\right] = 2\frac{\frac{1}{a}\gamma\eta + \frac{1}{r}|h|^2}{\gamma^2 - |h|^2} \qquad [\eta] = -2a\gamma\frac{\frac{1}{a}\gamma\eta + \frac{1}{r}|h|^2}{\gamma^2 - |h|^2} \tag{6.8}$$

Dans le cas 1), nous aurons évidemment les chocs d'Alfvén. Examinons le cas 2). L'invariance du vecteur V^α nous donne :

$$[\eta][u^\alpha] + [\eta]u^\alpha + \eta[u^\alpha] - a\left(\left[\frac{1}{r}\right][h^\alpha] + \left[\frac{1}{r}\right]h^\alpha + \frac{1}{r}[h^\alpha]\right) = 0 \tag{6.9}$$

Après la substitution de $\left[\frac{1}{r}\right]$ et de $[\eta]$ à partir des expressions (6.8), on aura :

$$-2a\frac{\frac{1}{a}\gamma\eta + \frac{1}{r}|h|^2}{\gamma^2 - |h|^2}(\gamma u^\alpha + h^\alpha) + \left(\eta + \frac{a}{r}\gamma\right)[u^\alpha] = 0 \tag{6.9'}$$

La multiplication de cette expression par $[u_\alpha]$ nous donnera (nous montrerons que $[u^\alpha][u_\alpha] \neq 0$), à la suite de la relation (6.5) :

$$\eta + \frac{a}{r}\gamma = 0$$

Après la substitution dans (6.9′), nous aurons :

$$\frac{\frac{1}{a}\gamma\eta + \frac{1}{r}|h|^2}{\gamma^2 - |h|^2} = \frac{1}{r}\,\frac{-\frac{r^2\eta^2}{a^2} + |h|^2}{\frac{r^2\eta^2}{a^2} - |h|^2} = -\frac{1}{r}$$

Ceci étant le second membre de la première relation (6.8), il résultera que :

$$\left[\frac{1}{r}\right] = -\frac{2}{r} \qquad \frac{1}{r'} = -\frac{1}{r}$$

Ce résultat étant une impossibilité physique (changement du signe de la densité après le choc), nous aurons, comme solutions correctes, seulement les expressions 1).

Nous examinerons la possibilité que $[u^\alpha][u_\alpha] = 0$:

$$[u^\alpha][u_\alpha] = u'^\alpha u'_\alpha - 2u'^\alpha u_\alpha + u^\alpha u_\alpha = 2(1 - u'^\alpha u_\alpha) = 0$$

donc

$$u'^\alpha u_\alpha = 1$$

Ceci n'est possible que pour $u'^\alpha = u^\alpha$. De 1), on aura $h'^\alpha = h^\alpha$. L'équation de continuité (2.4) nous donnera $\left[\frac{1}{r}\right] = 0$ et les autres équations l'invariance des autres variables thermodynamiques. Donc l'absence de choc. Il ne reste que le cas 1).

Nous avions obtenu :

$$[|h|^2] = 0 \qquad [\eta] = 0 \qquad \left[\frac{1}{r}\right] = 0$$

A la suite de (3.5), ceci nous donnera $[f] = 0$. Toutes les variables thermodynamiques ainsi que l'intensité de h^α et les composantes normales de u^α et de h^α étant invariantes, on peut montrer l'invariance de ces vecteurs en direction de V^α. Nous aurons donc un choc d'Alfvén, et par suite $\gamma = \pm \beta$.

b) Il nous faut examiner, maintenant, le cas où $\gamma = \pm |h|$. (6.7″) deviendra alors :

$$\left(\gamma\eta + \frac{a}{r}|h|^2\right)\left[\frac{1}{r}\right] = 0$$

1) $\left[\frac{1}{r}\right] = 0$, ce qui entraîne $[\eta] = 0$ et conduit, de même que le cas 1) de *a)* aux chocs d'Alfvén. Mais, à cause de :

$$[h^\alpha] \pm |h|[u^\alpha] = 0$$

et de

$$[h^\alpha] \pm \beta[u^\alpha] = 0$$

que nous avons simultanément, nous aurons $[h^\alpha] = [u^\alpha] = 0$, c'est-à-dire l'absence de choc.

2) $$\gamma\eta + \frac{a}{r}|h|^2 = 0$$

Ce qui nous donne :

(6.10) $$\eta \pm \frac{a}{r}|h| = 0$$

L'expression (6.6) nous montrait l'invariance de l'intensité du champ magnétique. La conséquence en sera que, de (6.10) :

(6.10′) $$[r\eta] = 0$$

Pour examiner les conséquences de (6.10′), nous écrirons le vecteur invariant W^β dans la forme (3.3) :

$$W^\beta = a\alpha w^\beta + \frac{\mu}{a} r\eta V^\beta - (q + a^2\alpha)l^\beta$$

où le terme qui multiplie l^β est invariant. On désigne par w^β :

$$w^\beta = ru^\beta + al^\beta$$

Considérons l'expression $[W^\beta]V_\beta = 0$:

$$[W^\beta]V_\beta = a[aw^\beta]V_\beta + \frac{\mu}{a}[r\eta]V^\beta V_\beta = 0$$

c'est-à-dire, à la suite de (6.10′) :

$$[aw^\beta V_\beta] = 0$$

Or $w^\beta V_\beta = ru^\beta \eta u_\beta = rn$. Donc, le choc n'étant pas tangentiel, nous aurons $[\alpha] = 0$. Ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un choc soit choc d'Alfvén. La combinaison d'un choc d'Alfvén et de la condition (6.10) nous donnera l'absence de choc.

D'où :

Les chocs d'Alfvén sont les seuls chocs magnétohydrodynamiques pour lesquels la discontinuité du vecteur vitesse unitaire est colinéaire à la discontinuité du vecteur champ magnétique.

III

7. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE POUR LES ONDES INFINITÉSIMALES

Nous indiquerons brièvement quelques notions qui se rapportent à la dérivation des tenseurs-distributions qui apparaîtront dans l'étude des chocs infinitésimaux, que nous appellerons aussi plus brièvement ondes.

Il existe un certain tenseur-distribution $\underline{\delta}\mathrm{T}$ qui est tel que :

$$\bar{\delta}[\nabla \mathrm{T}] = \nabla(\bar{\delta}[\mathrm{T}]) + l\underline{\delta}\mathrm{T} \tag{7.1}$$

où $\bar{\delta}$ désigne le delta de Dirac, l la normale à l'onde de choc et $\underline{\delta}$ un opérateur différentiel qui fait correspondre $\underline{\delta}\mathrm{T}$ à T.

Les hypothèses que nous ferons sur le tenseur T sont les suivantes :

T est un tenseur continu. Il est de classe C^2 dans les domaines respectifs du passé et du futur relativistes d'une onde Σ. Sous ces hypothèses, la formule (7.1) se réduit à :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \mathrm{T}] = l_\alpha \underline{\delta}\mathrm{T} \tag{7.2}$$

Les formules (2.5), (2.6), (2.7) pour les ondes (chocs infinitésimaux) seront de la forme :

$$\underline{\delta}(ru^\alpha)l_\alpha = 0 \tag{7.3}$$

$$\underline{\delta}(u^\alpha l^\beta - u^\beta l^\alpha)l_\alpha = 0 \tag{7.4}$$

$$\underline{\delta}\mathrm{T}^{\alpha\beta}l_\alpha = 0 \tag{7.5}$$

La multiplication successive de (7.4) par u_β et h_β nous donnera :

$$(u^\alpha l_\alpha)u_\beta \underline{\delta} h^\beta - \underline{\delta}\eta = 0 \tag{7.6}$$

$$|\,h\,|^2\underline{\delta}(u^\alpha l_\alpha) + \frac{1}{2}(u^\alpha l_\alpha)\underline{\delta}\,|\,h\,|^2 + \eta h_\alpha \underline{\delta} u^\alpha = 0 \tag{7.7}$$

En tenant compte de (7.6), l'équation (7.7) peut s'écrire :

$$\frac{1}{2}(u^\alpha l_\alpha)\underline{\delta}\,|\,h\,|^2 + |\,h\,|^2(u^\alpha l_\alpha)\underline{\delta}(u^\beta l_\beta) - \eta\underline{\delta}\eta = 0 \tag{7.7'}$$

Les équations du mouvement, écrites explicitement, sont :

$$\begin{aligned}(c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2)u^\alpha l_\alpha \underline{\delta} u^\beta + c^2 r u^\alpha l_\alpha \underline{\delta} f u^\beta + \mu u^\alpha l_\alpha \underline{\delta}\,|\,h\,|^2 u^\beta \\ + \mu\,|\,h\,|^2 \underline{\delta}(u^\alpha l_\alpha)u^\beta - \underline{\delta} q l^\beta - \mu\underline{\delta}\eta h^\beta - \mu\eta\underline{\delta} h^\beta = 0\end{aligned} \tag{7.5'}$$

(2.4) nous donnera :

$$u^\alpha l_\alpha \underline{\delta}\mathrm{S} = 0$$

D'où

$$\underline{\delta}\mathrm{S} = 0 \tag{7.8}$$

8. — UNE PROPRIÉTÉ DES ONDES D'ALFVÉN

Considérons les ondes qui remplissent la condition suivante :

$$\underline{\delta} h_\alpha + \gamma \underline{\delta} u_\alpha = 0 \tag{8.1}$$

De $u^\alpha \underline{\delta} u_\alpha = 0$, il résulte, à la suite de (8.1) que $u^\alpha \underline{\delta} h_\alpha = 0$. Nous aurons donc, à cause de l'orthogonalité de u^α et de h^α :

$$h^\alpha \underline{\delta} u_\alpha = 0$$

La multiplication de (8.1) par h^α entraîne comme conséquence :

$$h^\alpha \underline{\delta} h_\alpha = 0, \qquad \text{donc} \qquad \underline{\delta} \,|\, h \,|^2 = 0 \tag{8.2}$$

La relation (7.6) donnera :

$$\underline{\delta} \eta = 0 \tag{8.3}$$

Et (7.7′) :

$$\underline{\delta}(u^\alpha l_\alpha) = 0 \tag{8.4}$$

Il résulte de l'équation de continuité (7.3) que

$$\underline{\delta} r = 0 \tag{8.5}$$

Les équations de Maxwell (7.4) se réduisent à :

$$(u^\alpha l_\alpha) \underline{\delta} h^\beta - \eta \underline{\delta} u^\beta = 0$$

A la suite de (8.1), nous aurons :

$$\frac{a}{r} \gamma + \eta = 0 \tag{8.6}$$

D'autre part, les équations du mouvement (7.5) deviendront :

$$\mu \beta^2 \frac{a}{r} \underline{\delta} u^\beta + c^2 r u^\alpha l_\alpha \underline{\delta} f u^\beta - \underline{\delta} p l^\beta + \mu \eta \gamma \underline{\delta} u^\beta = 0$$

où $\underline{\delta} q$ se réduit à $\underline{\delta} p$ à la suite de l'invariance de $|\, h \,|^2$. Les deux variables thermodynamiques r, S supposées indépendantes (voir la section 1), les variables p et f seront nécessairement invariantes. Nous aurons donc :

$$\beta^2 \frac{a}{r} + \eta\gamma = 0 \tag{8.7}$$

De (8.6) et de (8.7), il résultera que :

$$\gamma = \pm \beta$$

Nous avons la conclusion (analogue à celle de la section 6) :

Les ondes d'Alfvén sont les seules ondes magnétohydrodynamiques qui satisfont à une condition de la forme :

$$\underline{\delta} h_\alpha + \gamma \underline{\delta} u_\alpha = 0$$

9. — ONDES D'ALFVÉN ET MOUVEMENT IRROTATIONNEL

Nous démontrerons une propriété de la propagation des ondes d'Alfvén.

Les équations différentielles du mouvement (2.3) en magnétohydrodynamique relativiste peuvent être mises sous une forme particulière, analogue à celles dont on use pour étudier le caractère rotationnel ou irrotationnel du mouvement des fluides parfaits chargés.

Les conditions de conservation écrites pour le tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ sous sa forme (1.1′) sont (en posant $c^2 = 1$) :

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = \nabla_\alpha(rfu^\alpha)u_\beta + rfu^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \partial_\beta p + \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = 0 \tag{9.1}$$

La divergence de la partie électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ du tenseur d'énergie, exprimée sous sa forme (1.6′) étant égale à :

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = \mu G_{\rho\beta} \nabla_\alpha G^{\alpha\rho} \tag{9.2}$$

En usant de (1.4) et de (1.5), les équations (9.1) peuvent être mises sous la forme :

$$u^\alpha\left(\Omega_{\alpha\beta} + \Theta u_\alpha \partial_\beta S - \Theta u_\beta \partial_\alpha S + \frac{1}{2}\frac{\mu}{r}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathfrak{J}^\gamma h^\delta\right) = 0 \tag{9.3}$$

où on a posé :

$$\Omega_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha(fu_\beta) - \nabla_\beta(fu_\alpha) \qquad \mathfrak{J}^\gamma = \nabla_\alpha G^{\alpha\gamma}$$

Le tenseur entre les parenthèses dans (9.3) étant antisymétrique, et ces équations linéaires et homogènes par rapport à u^α, son rang ne peut être que 2 ou 0. Dans le premier cas, nous considérerons le mouvement du fluide comme rotationnel, et dans le second comme irrotationnel. Retenons ce dernier cas; nous aurons alors :

$$(9.4) \qquad \Omega_{\alpha\beta} + \Theta u_\alpha \partial_\beta S - \Theta u_\beta \partial_\alpha S + \frac{1}{2}\frac{\mu}{r}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathfrak{J}^\gamma h^\delta = 0$$

Sur une surface d'onde, cela donnera, à la suite de (7.8), la condition :

$$\bar{\delta}[\Omega_{\alpha\beta}] + \frac{\mu}{2r}\bar{\delta}[\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathfrak{J}^\gamma h^\delta] = 0$$

c'est-à-dire

$$(9.5) \qquad f(l_\alpha \underline{\delta u}_\beta - l_\beta \underline{\delta u}_\alpha) + (l_\alpha u_\beta - l_\beta u_\alpha)\underline{\delta f} + \frac{\mu}{2r}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} l_\eta \underline{\delta G}^{\eta\gamma} h^\delta = 0$$

Pour un choc d'Alfvén, ce sera

$$f(l_\alpha \underline{\delta u}_\beta - l_\beta \underline{\delta u}_\alpha) + \frac{\mu}{2r}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} l_\eta \underline{\delta G}^{\eta\gamma} h^\delta = 0$$

Multiplions cette expression par h^α :

$$h^\alpha l_\alpha \underline{\delta u}_\beta - l_\beta h^\alpha \underline{\delta u}_\alpha = 0$$

Les propriétés (8.1) et (8.2) entraînent la conséquence :

$$\underline{\delta u}_\beta = 0 \qquad \underline{\delta h}_\beta = 0$$

Donc :

Un fluide parfait chargé de conductivité infinie, dans lequel se propagent des ondes d'Alfvén effectives, ne peut admettre de mouvement irrotationnel.

IV

10. — LA DISCONTINUITÉ DU TENSEUR DE RICCI

Nous passerons maintenant aux chocs magnétohydrodynamiques en Relativité générale.

Les relations de base, équations d'Einstein, étant :

$$(10.1) \qquad R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\,xT_{\alpha\beta}$$

Pour un choc, nous aurons :

$$(10.2) \qquad [R_{\alpha\beta}] - \frac{1}{2}[R]g_{\alpha\beta} = -x[T_{\alpha\beta}]$$

Le tenseur d'énergie étant donné par (1.1″) pour ce fluide, nous aurons, de (10.1) :

$$(10.3) \qquad R = xT^{\alpha}_{\alpha} = c^2 r f - 4p$$

A) Dans le cas d'un choc d'Alfvén, nous aurons :

$$[R] = 0$$

et de (10.2) :

$$(10.4) \qquad [R_{\alpha\beta}]l^{\beta} = 0$$

La discontinuité du tenseur de courbure de Ricci étant égale, à un facteur constant près, à la discontinuité du tenseur d'énergie, nous aurons :

$$[R_{\alpha\beta}] = -x\mu\{\beta^2([u_\alpha][u_\beta] + [u_\alpha]u_\beta + u_\alpha[u_\beta]) - ([h_\alpha][h_\beta] + [h_\alpha]h_\beta + h_\alpha[h_\beta])\}$$

Si on considère le cas des ondes d'espèce A :

$$[h_\alpha] = -\beta[u_\alpha]$$

on aura :

$$(10.5) \qquad [R_{\alpha\beta} = -x[T_{\alpha\beta}] = -x\mu\beta\{(h_\alpha + \beta u_\alpha)[u_\beta] + (h_\beta + \beta u_\beta)[u_\alpha]\}$$
$$= -x\mu\beta(A_\alpha[u_\beta] + A_\beta[u_\alpha])$$

Dans le cas d'une onde d'espèce B, on aurait :

$$(10.5') \qquad [R_{\alpha\beta}] = -x[T_{\alpha\beta}] = -x\mu\beta(B_\alpha[u_\beta] + B_\beta[u_\alpha])$$

Un vecteur K^{β}, orthogonal aux vecteurs l_β, V_β, W_β ainsi qu'à la discontinuité $[u_\beta]$, donc colinéaire au vecteur densité superficielle de courant, sera, de même que l^{β} dans (10.4), une solution d'équations linéaires

$$(10.6) \qquad [R_{\alpha\beta}]K^{\beta} = 0$$

(Les vecteurs A^{α} et B^{α} étant colinéaires, dans les chocs de ces espèces relatives, au vecteur invariant V^{α}).

B) Considérons, inversement, un choc magnétohydrodynamique non tangentiel qui admet les relations (10.4) et (10.6).

Dans ce cas, nous aurons de (10.2) et de (10.4), comme première conséquence :

$$[R] = c^2[rf] - 4[p] = 0. \tag{10.7}$$

Exprimons l'orthogonalité de K^α sur V_α et W_α (en tenant compte de $K^\alpha l_\alpha = 0$) :

$$\eta K^\alpha u_\alpha - \frac{a}{r} K^\alpha h_\alpha = 0$$

$$\frac{a}{r}(c^2 rf + \mu \mid h \mid^2) K^\alpha u_\alpha - \mu\eta K^\alpha h_\alpha = 0$$

Nous avons deux possibilités, ou bien :

$$K^\alpha u_\alpha = K^\alpha h_\alpha = 0 \tag{10.8}$$

ou bien le déterminant du système d'équations considérées est égal à zéro. En usant de la notation $\beta^2 = \frac{c^2}{\mu} rf + \mid h \mid^2$, la seconde condition est :

$$\beta^2 \frac{a^2}{r^2} - \eta^2 = 0$$

ce qui est précisément l'équation différentielle des ondes d'Alfvén. Nous en tirerons la conclusion que la condition nécessaire pour qu'un choc ne soit pas choc d'Alfvén est que nous ayons (10.8).

Examinons les conséquences des conditions (10.4) et (10.6) en tenant compte de (10.8). Nous avons, comme première conséquence, que K^α est un vecteur d'espace. Nous le considérerons comme normé par $K^\alpha K_\alpha = -1$.

Nous nous servirons, dans la suite, de certaines conditions que nous rappellerons : les conditions que $[V^\alpha]$ soit égal à zéro et que u^α reste unitaire et orthogonal par rapport au vecteur champ magnétique après le choc. Ce sont les conditions (6.2), (6.3) et (6.9). Les multiplications contractées des relations (6.9) et (10.4) par K^α, puis la multiplication successive de (10.6) par K^α et $[u^\alpha]$ nous donneront, après quelques arrangements de la dernière relation obtenue au moyen de (6.2) et de (6.3) :

$$(\eta + [\eta])K^\alpha[u_\alpha] - a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)K^\alpha[h_\alpha] = 0 \tag{10.9}$$

$$a(\beta^2 + [\beta^2])\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)K^\alpha[u_\alpha] - (\eta + [\eta])K^\alpha[h_\alpha] = 0 \tag{10.10}$$

$$(10.11)\quad \mu(\beta^2 + [\beta^2])(\mathrm{K}^\alpha[u_\alpha])^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2\right] - \mu(\mathrm{K}^\alpha[h_\alpha])^2 = 0$$

$$(10.12)\quad \mu(\beta^2 + [\beta^2])u^\alpha[u_\alpha]\mathrm{K}^\beta[u_\beta] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2\right]\mathrm{K}^\beta[u_\beta] - \mu u^\alpha[h_\alpha]\mathrm{K}^\beta[h_\beta] = 0$$

Des équations (10.9), (10.10), (10.12), nous aurons deux conclusions possibles :

1) $$\mathrm{K}^\alpha[u_\alpha] = \mathrm{K}^\alpha[h_\alpha] = 0$$

2) Les déterminants de ces équations, linéaires et homogènes par rapport à $\mathrm{K}^\alpha[u_\alpha]$, $\mathrm{K}^\alpha[h_\alpha]$ doivent être nuls.

Dans le premier cas, nous aurons de la relation (10.11) :

$$\left[\frac{1}{2}c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2\right] = 0$$

D'après (10.7), nous avions : $c^2[rf] - 4[p] = 0$. La condition précédente deviendra donc :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2\right] = \left[p + \frac{1}{2}\mu\,|\,h\,|^2\right] = [q] = 0$$

L'invariance de la pression totale q entraîne celle de α, paramètre dont l'invariance signifie l'absence de choc, au cas où $\alpha \neq 0$ et un choc d'Alfvén au cas où $\alpha = 0$. Donc, pour $[\mathrm{R}_{\alpha\beta}] \neq 0$, c'est toujours d'un choc d'Alfvén qu'il s'agit.

Supposons que nous ayons le deuxième cas, c'est-à-dire que $\mathrm{K}^\alpha[u_\alpha]$ et $\mathrm{K}^\alpha[h_\alpha]$ soient différents de zéro. La conséquence qui en découle est que les déterminants de deux paires d'équations du système constitué par (10.9), (10.10), (10.12) doivent être nuls. Choisissons pour ces paires d'équations les systèmes constitués par (10.9), (10.10) et (10.10), (10.12). Nous aurons :

$$(10.13)\quad (\eta + [\eta])^2 - (\beta^2 + [\beta^2])\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)^2 = 0$$

$$(10.14)\quad \mu(\beta^2 + [\beta^2])\left\{a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)u^\alpha[h_\alpha] - (\eta + [\eta]u^\alpha[u_\alpha]\right\} - (\eta + [\eta][q] = 0$$

Si nous multiplions (10.14) par $a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)$ et y substituons l'expression de $a^2(\beta^2 + [\beta^2])\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)^2$ à partir de (10.13), nous aurons :

$$\mu \left\{ (\eta + [\eta])^2 u^\alpha [h_\alpha] - a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)(\beta^2 + [\beta^2])(\eta + [\eta]) u^\alpha [u_\alpha] \right\} - a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)(\eta + [\eta])[q] = 0$$

Nous avons encore deux possibilités :

a) $$\eta + [\eta] = 0$$

Ceci signifierait, à la suite de (10.13) que ou $\beta'^2 = 0$ ou $\left(\frac{1}{r'}\right)^2 = 0$, donc que la densité d'après le choc soit infinie, ou qu'elle soit nulle en même temps que le champ magnétique. C'est donc une impossibilité physique.

b) $$\mu \left\{ (\eta + [\eta]) u^\alpha [h_\alpha] - a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)(\beta^2 + [\beta^2]) u^\alpha [u_\alpha] \right\} - a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)[q] = 0$$

Pour étudier les conséquences de *b)*, nous constituerons un nouveau système d'équations linéaires homogènes en $K^\alpha[u_\alpha]$, $K^\alpha[h_\alpha]$ avec l'équation (10.9) et une équation que nous obtiendrons en multipliant (10.6) par u^α. Compte tenu de (10.8), ce système sera :

$$(\eta + [\eta])K^\alpha[u_\alpha] - a\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)K^\alpha[h_\alpha] = 0 \tag{10.15}$$

$$(\beta^2 + [\beta^2])(1 + u^\alpha[u_\alpha])K^\beta[u_\beta] - u^\alpha[h_\alpha]K^\beta[h_\beta] = 0 \tag{10.16}$$

Le déterminant de ce système devant être nul aussi, nous aurons :

$$-(\eta + [\eta])u^\alpha[h_\alpha] + a(\beta^2 + [\beta^2])\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)(1 + u^\alpha[u_\alpha]) = 0 \tag{10.17}$$

La somme de *b)* et de (10.17) multipliée par μ, donnera :

$$\mu(\beta^2 + [\beta^2]) - [q] = 0 \tag{10.18}$$

D'autre part, si nous multiplions (10.4) par u^α, nous aurons :

$$a\mu(\beta^2 + [\beta^2])\left(\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]\right)(u_\alpha + [u_\alpha])u^\alpha - a\mu\beta^2\frac{1}{r} - \frac{a}{r}[q] - \mu(\eta + [\eta])u^\alpha[h_\alpha] = 0 \tag{10.19}$$

A la suite (10.17) ceci nous donnera :

$$\mu\beta^2 + [q] = 0 \tag{10.20}$$

La somme des expressions (10.18) et (10.20) est :

$$\beta^2 + \beta'^2 = 0$$

Ce qui signifierait la nullité simultanée des densités et des champs magnétiques avant et après le choc. Donc, une impossibilité physique.

Nous avons :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un choc magnétohydrodynamique non tangentiel en Relativité générale soit choc d'Alfvén est que nous ayons :

$$[R_{\alpha\beta}]l^\beta = 0$$
$$[R_{\alpha\beta}]K^\beta = 0$$

où l^β est la normale à l'onde de choc et K^β un vecteur orthogonal aux vecteurs l_β, V_β, W_β, donc colinéaire à la densité superficielle de courant.

On peut mettre les conditions (10.4), (10.6) à l'aide des formules de Hadamard, sous une forme où elles seront exprimées au moyen des dérivées secondes de $g_{\alpha\beta}$.

Les deux systèmes (10.4), (10.6) se réduiront à :

$$\begin{aligned} g^{\rho\delta}[\partial_{\beta\rho}g_{\alpha\delta} + \partial_{\alpha\delta}g_{\beta\rho} - \partial_{\alpha\beta}g_{\rho\delta} - \partial_{\rho\delta}g_{\alpha\beta}]l^\beta &= 0 \\ g^{\rho\delta}[\partial_{\beta\rho}g_{\alpha\delta} + \partial_{\alpha\delta}g_{\beta\rho} - \partial_{\alpha\beta}g_{\rho\delta} - \partial_{\rho\delta}g_{\alpha\beta}]K^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{10.22}$$

Si nous posons

$$[\partial_{\alpha\rho}g_{\beta\delta}] = l_\alpha \lambda_{\rho\beta\delta} \tag{10.23}$$

nous aurons, après quelques simplifications du fait que $\lambda_{\rho\beta\delta}$ est symétrique par rapport à ses deux derniers indices, et que le second membre de (10.23) est invariante par la substitution de l'indice de l_α avec le premier indice de $\lambda_{\rho\beta\delta}$:

$$\begin{aligned} (\lambda_{\alpha\beta\rho} - \lambda_{\rho\beta\alpha})K^\beta l^\rho &= 0 \\ \lambda_{\rho\alpha\cdot}^{\ \ \ \rho} + \lambda_{\rho\alpha\beta}l^\rho l^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{10.22'}$$

11. — LES DISCONTINUITÉS DES DÉRIVÉES SECONDES DES VARIABLES

Examinons maintenant les relations qui peuvent être établies entre les dérivées secondes des variables u^α et h^α.

L'identité de Ricci, appliquée à un vecteur v_α est :

$$\nabla_\beta \nabla_\gamma v_\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\beta v_\alpha = - R^{\delta}_{\cdot\alpha,\beta\gamma} v_\delta$$

Nous aurons par contraction :

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta v^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\alpha v^\alpha = R_{\alpha\beta} v^\alpha$$

Appliquons cette identité aux vecteurs u_α et h_α et multiplions successivement ces expressions par l_α et V_α, puis considérons les discontinuités des seconds membres. Pour un choc d'Alfvén, nous aurons :

$$(11.1) \quad \begin{aligned} l^\alpha[R_{\alpha\beta}u^\beta] &= -x\left[\left(\frac{1}{2}c^2rf + q\right)\frac{1}{r}\right] = 0 \\ l^\alpha[R_{\alpha\beta}h^\beta] &= x[(c^2rf - \mu\,|\,h\,|^2 - 2p)\eta] = 0 \\ V^\alpha[R_{\alpha\beta}u^\beta] &= -x[(c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2 + 2p)\eta] = 0 \\ V^\alpha[R_{\alpha\beta}h^\beta] &= x\left[\left(\frac{1}{2}ac^2f - \frac{1}{2}\mu\frac{a}{r}\,|\,h\,|^2 - a\frac{p}{r}\right)|\,h\,|^2\right] = 0 \end{aligned}$$

Inversement, considérons un choc non tangentiel pour lequel nous avons les trois premières relations de (11.1). Quelles en sont les conséquences ?

L'addition et la soustraction successives de la deuxième et de la troisième relation (11.1) nous donneront :

$$(11.2) \quad \begin{aligned} [rf\eta] &= 0 \\ [q\eta] &= 0 \end{aligned}$$

La première des relations (11.1) peut s'écrire :

$$\left[\left(\frac{1}{2}c^2rf\eta + q\eta\right)\frac{1}{r\eta}\right] = 0$$

A la suite de (11.2), cette relation deviendra :

$$\left(\frac{1}{2}c^2rf + q\right)\eta\left[\frac{1}{r\eta}\right] = 0$$

L'expression entre les parenthèses est différente de zéro, toutes les quantités contenues étant positives; η est différent de zéro. Il en résulte que

$$(11.3) \quad [r\eta] = 0$$

Nous avons déjà eu cette condition dans la section 6. Elle entraîne comme conséquence $[\alpha] = 0$. Nous avons donc un choc d'Alfvén.

D'où

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un choc magnétohydrodynamique en Relativité générale soit choc d'Alfvén est que soient satisfaites les trois premières des conditions (11.1).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson et Cie, Paris, 1955.

[*2*] Y. Bruhat, Fluides chargés de conductivité infinie, *C. R. Acad. Sc.*, n° 18, mai 1959.

[*3*] A. H. Taub, *Hydrodynamics and General Relativity*, Symp. on the Relativistic Fluid Mechanics and Magnetohydrodynamics, Academic Press, 1963, p. 21-28.

[*4*] A. Lichnerowicz, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. V, n° 1, 1966, p. 37-75.

[*5*] A. Lichnerowicz, *Problèmes d'hydrodynamique relativiste*, Cours professé au Collège de France en 1966-1967.

Reçu le 6 novembre 1967.