ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Théorie des rayons en hydrodynamique et magnétohydrodynamique relativistes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, nº 4 (1967), p. 271-302

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_4_271_0>

Ann. Inst. Henri Poincare, Section A :
Vol. VII, n° 4, 1967, p. 271-302. *Physique théorique.*

Théorie des rayons en hydrodynamique et magnétohydrodynamique relativistes

par

André LICHNEROWICZ
(Collège de France).

INTRODUCTION

Nous avons déterminé antérieurement, par étude du problème de Cauchy formel [*4*], les différents types d'ondes qui apparaissent en hydrodynamique et magnétohydrodynamique relativistes, pour un fluide parfait thermodynamique au sens de Taub [*10*]. Nous avons de plus établi un théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy sur des classes de Gevrey convenables, *en écartant un cas singulier remarquable*, celui où, avec nos notations :

$$\gamma = \frac{c^2 rf + \mu \mid h \mid^2}{\mu \mid h \mid^2} \tag{S}$$

Dans le présent article, nous nous proposons essentiellement de développer la théorie des rayons (ou bicaractéristiques) correspondants aux ondes mises en évidence. Alors qu'ondes et rayons sont en général étudiés en termes de séries formelles, nous les étudions ici en termes de *tenseurs-distributions* [*3*] associés aux discontinuités des dérivées des grandeurs physiques. Une première partie de ce travail est consacrée aux préliminaires mathématiques nécessaires relatifs à ces distributions; l'optique est voisine de celle de Pichon [*7*]. On peut ainsi définir *l'opérateur* $\boldsymbol{\delta}$ *de discontinuité infinitésimale* et mettre en évidence ses principales propriétés. La seconde et la troisième parties sont consacrées respectivement à l'hydrodynamique et à la magnétohydrodynamique. Pour les rayons associés respectivement aux ondes soniques, aux ondes magnétosoniques et aux ondes d'Alfven, *la propriété fondamentale des rayons* concernant la propagation des « discontinuités infinitésimales » est établie, sous des hypothèses larges.

Le résultat le plus notable de ce travail est sans doute le suivant : alors que, pour les ondes soniques et les ondes d'Alfven, la direction des rayons demeure invariante par l'opérateur de discontinuité infinitésimale $\boldsymbol{\delta}$, *il n'en est plus de même pour les rayons associés aux ondes magnétosoniques.*

En dehors du cas où le champ magnétique est tangentiel, *il n'y a invariance, pour ces ondes, de la direction des rayons que dans le cas singulier* (S). On sait que dans ce cas *le cône d'ondes magnétosoniques admet deux génératrices doubles.*

La démonstration donnée fait appel aux éléments invariants mis en évidence dans l'étude des ondes de choc [5]. Le présent travail est cependant rédigé de façon à se suffire à lui-même.

I. — TENSEURS-DISTRIBUTIONS

1. — Notion de tenseur-distribution sur une variété riemannienne.

a) Soit V_{n+1} une variété différentiable, orientée, de dimension $n + 1$, de classe $C^{h+1} (h \geqslant 2)$, munie d'une métrique riemannienne de signature quelconque, de classe C^h; cette métrique peut s'écrire localement

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n)$$

Étant donné deux p-tenseurs T et U, nous désignons par $(T, U)_x$ le produit scalaire de T et U au point x de V_{n+1}. En coordonnées locales, nous avons :

$$(T, U)_x = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) U^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) \tag{1-1}$$

Soit $\mathfrak{D}^{(p)}(V_{n+1})$ l'espace des p-tenseurs U de V_{n+1}, de classe C^h, à support S(U) compact. Si $U \in \mathfrak{D}^{(p)}(V_{n+1})$ nous pouvons poser pour tout p-tenseur T :

$$\langle T, U \rangle = \int_{V_{n+1}} (T, U)_x \eta(x) \tag{1-2}$$

où η est l'élément de volume riemannien. Localement :

$$\eta = \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{I-3}$$

Un p-tenseur-distribution T *de* V_{n+1} *est une fonctionnelle linéaire continue à valeurs scalaires sur les p-tenseurs à support compact de classe* C^h. Si $U \in \mathfrak{D}^{(p)}(V_{n+1})$ nous désignons par T[U] ou $\langle T, U \rangle$ la valeur pour U du tenseur-distribution T.

Un tenseur ordinaire T définit un tenseur-distribution noté T^D (ou parfois T par abus de notation) par l'intermédiaire de la formule (1-2) dans laquelle la structure riemannienne intervient. On a ainsi $T^D[U] = \langle T, U \rangle$.

b) Si T est un scalaire-distribution et V un p-tenseur ordinaire, TV est le p-tenseur-distribution défini par :

$$(TV)[U] = T[(V, U)].$$

Cela posé, soit Ω le domaine d'un système de coordonnées locales (x^α) et donnons-nous dans Ω, n^p scalaires distributions $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. L'expression

$$T = T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_p} \tag{1-4}$$

définit un p-tenseur-distribution : si (e_α) est le repère dual du corepère (dx^α) :

$$U = U^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p}$$

et T[U] est donné par la somme :

$$T[U] = T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}[U^{\alpha_1 \dots \alpha_p}]$$

Inversement tout p-tenseur-distribution T dans Ω peut être représenté par une telle expression : désignons par $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ les scalaires-distributions définis par :

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}[f] = T[f e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p}] \qquad f \in \mathfrak{D}^0(\Omega)$$

On a :

$$T[U] = T[U^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p}] = T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}[U^{\alpha_1 \dots \alpha_p}]$$

et T admet bien l'expression (1-4). Ainsi, dans le domaine d'un système de coordonnées locales, tout p-tenseur-distribution peut être, comme un p-tenseur ordinaire, rapporté à ces coordonnées, les composantes étant des scalaires-distributions [*3*].

c) Soit T un p-tenseur ordinaire, ∇T sa dérivée covariante dans la connexion riemannienne. Si $U \in \mathfrak{D}^{(p+1)}(V_{n+1})$

$$\langle \nabla T, U \rangle = \int_{V_{n+1}} \nabla_\rho T_{\alpha_1 \dots \alpha_t} U^{\rho \alpha_1 \dots \alpha_p} \eta$$

soit, par intégration par parties :

$$\langle \nabla \mathrm{T}, \mathrm{U} \rangle = \int_{\mathrm{V}_{n+1}} \nabla_\rho (\mathrm{T}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \mathrm{U}^{\rho\alpha_1 \ldots \alpha_p})\eta - \int_{\mathrm{V}_{n+1}} \mathrm{T}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \nabla_\rho \mathrm{U}^{\rho\alpha_1 \ldots \alpha_p}\eta$$

Le premier terme du second membre est nul. Nous sommes ainsi conduits à introduire l'opérateur δ dit de *codifférentiation* sur les $(p + 1)$-tenseurs défini par :

$$\delta : \mathrm{U}_{\beta_1 \ldots \beta_{p+1}} \to -\nabla_\rho \mathrm{U}^\rho{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$$

Ainsi la formule précédente s'écrit :

$$\langle \nabla \mathrm{T}, \mathrm{U} \rangle = \langle \mathrm{T}, \delta \mathrm{U} \rangle \tag{1-5}$$

Cela posé, *nous définissons la dérivée covariante d'un p-tenseur-distribution* T *comme le* $(p + 1)$*-tenseur-distribution* ∇T *déterminé par la relation* (1-5) où $\mathrm{U} \in \mathfrak{D}^{(p)}(\mathrm{V}_{n+1})$. On démontre aisément que les propriétés classiques de la dérivation covariante dans une connexion riemannienne et les formules correspondantes sont valables pour les tenseurs-distributions.

2. — Les distributions Y^+, Y^- et $\bar{\delta}$ relatives à une hypersurface.

a) Sur un domaine ouvert Ω de coordonnées de V_{n+1}, soit Σ une hypersurface régulièrement plongée, d'équation locale $\varphi = 0$ (φ de classe C^2) qui partage Ω en deux domaines Ω^+ et Ω^- vérifiant respectivement $\varphi > 0$ et $\varphi < 0$. Nous désignons par l_α le vecteur non nul $\partial_\alpha \varphi$ [1].

Soit Y^+_φ, ou plus brièvement Y^+ (resp. Y^-_φ ou Y^-) la fonction sur Ω qui vaut 1 (resp. 0) dans Ω^+ et 0 (resp. 1) dans Ω^- ; ces fonctions définissent dans Ω des distributions désignées par les mêmes notations, par l'intermédiaire des formules :

$$\langle \mathrm{Y}^+, f \rangle = \int_\Omega \mathrm{Y}^+ f\eta = \int_{\Omega^+} f\eta \tag{2-1}$$

et :

$$\langle \mathrm{Y}^-, f \rangle = \int_\Omega \mathrm{Y}^- f\eta = \int_{\Omega^-} f\eta \tag{2-2}$$

où $f \in \mathfrak{D}^0(\Omega)$.

---

[1] Dans toute la suite $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$

b) Considérons maintenant la classe des n-formes ω de Leray vérifiant la relation :

$$\eta = d\varphi \wedge \omega = l \wedge \omega \tag{2-3}$$

Si ω et ω' sont deux formes de cette classe, il existe une $(n - 1)$-forme γ telle que :

$$\omega' = \omega + d\varphi \wedge \gamma \tag{2-4}$$

Si $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$ sont les bords sur Σ de Ω^+ et Ω^- $(\partial\Omega^+ = - \partial\Omega^-)$, l'intégrale

$$\int_{\partial\Omega^+} f\omega = - \int_{\partial\Omega^-} f\omega \qquad (f \in \mathcal{D}^0(\Omega))$$

a, d'après (2-4), une valeur bien définie indépendante du choix de ω vérifiant (2-3). Nous sommes ainsi conduits à définir des distributions $\bar\delta_\varphi$, ou plus brièvement $\bar\delta$, par la relation :

$$\langle \bar\delta, f \rangle = - \int_{\partial\Omega^+} f\omega = \int_{\partial\Omega^-} f\omega \tag{2-5}$$

où $f \in \mathcal{D}^{(0)}(\Omega)$.

c) Proposons-nous d'évaluer les tenseurs-distributions dérivés des *scalaires*-distributions Y^+ et Y^-. A cet effet, il est commode d'introduire dans Ω un système de coordonnées (y^α) tel que $y^0 = \varphi$. Dans ce système, l a pour composantes covariantes $l_0 = 1$, $l_i = 0$ (i, tout indice latin $= 1, 2, \ldots, n$). De l'expression de η dans ces coordonnées locales

$$\eta = \sqrt{|g|}\, dy^0 \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{2-6}$$

on déduit que la n-forme :

$$\omega = \sqrt{|g|}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \tag{2-7}$$

vérifie la relation (2-3).

Si U est un vecteur à support compact dans $\Omega (U \in \mathcal{D}^{(1)}(\Omega))$, on a d'après la définition de la dérivée covariante :

$$\langle \nabla Y^+, U \rangle = \langle Y^+, \delta U \rangle$$

En coordonnées (y^α), il vient :

$$\begin{aligned}\langle \nabla Y^+, U \rangle &= - \langle Y^+, \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (U^\alpha \sqrt{|g|}) \rangle \\ &= - \int_{\Omega^+} \partial_\alpha (U^\alpha \sqrt{|g|}) dy^0 \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n\end{aligned}$$

Il résulte de la formule de Stokes que le dernier membre vaut, compte tenu de (2-7),

$$- \int_{\partial\Omega^+} U^0 \sqrt{|g|}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = - \int_{\partial\Omega^+} l_\alpha U^\alpha \omega$$

On obtient ainsi d'après (2-5) :

$$\langle \nabla Y^+, U \rangle = \langle l\bar{\delta}, U \rangle$$

pour tout $U \in \mathfrak{D}^{(1)}(\Omega)$, soit, au sens des distributions :

$$\nabla Y^+ = l\bar{\delta} \tag{2-8}$$

On établit de même, à partir de (2-5) :

$$\nabla Y^- = - l\bar{\delta} \tag{2-9}$$

d) Soit V un champ de vecteurs dans Ω tangent aux hypersurfaces φ = const. On a donc :

$$i(V)l = l_\alpha V^\alpha = 0 \tag{2-10}$$

où $i(V)$ représente ici le produit intérieur par V. Proposons-nous d'évaluer la dérivée du scalaire-distribution $\bar{\delta}$ relativement à V, soit $i(V)\nabla\bar{\delta}$. Pour tout $f \in \mathfrak{D}^0(\Omega)$:

$$\langle i(V)\nabla\bar{\delta}, f \rangle = \langle \nabla\bar{\delta}, fV \rangle = \langle \bar{\delta}, \delta(fV) \rangle$$

En coordonnées locales (y^α), (2-10) s'écrit $V^0 = 0$ et il vient :

$$\langle i(V)\nabla\bar{\delta}, f \rangle = \int_{\partial\Omega^+} \partial_\alpha(fV^\alpha\sqrt{|g|})dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} \partial_i(fV^i\sqrt{|g|})dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$$

Il résulte de la formule de Stokes que le dernier membre vaut :

$$\int_{\Omega^+} \partial_0\{\partial_i(fV^i\sqrt{|g|})\}dy^0 \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$$

$$= \int_{\Omega^+} \partial_i\{\partial_0(fV^i\sqrt{|g|})\}dy^0 \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$$

Par intégration de chaque terme du dernier membre par rapport à y^i et compte tenu du support de f, on voit que ce dernier membre est nul. Il vient ainsi :

$$i(V)\nabla\bar{\delta} = 0$$

ou, en coordonnées $(y^\alpha)\nabla_i\bar{\delta} = 0$. Il en résulte qu'il existe un scalaire-distribution $\bar{\delta}'$ de support Σ tel que :

$$\nabla\bar{\delta} = l\bar{\delta}' \tag{2-11}$$

Nous n'aurons pas besoin ici de l'expression de $\bar{\delta}'$.

3. — Discontinuités tensorielles à la traversée d'une hypersurface.

a) Considérons un p-tenseur T dans Ω satisfaisant les hypothèses suivantes.

1° *Dans chacun des domaines* Ω^+ *et* Ω^-, *le tenseur* T *est un p-tenseur ordinaire de classe* C^1.

2° *Quand* φ *tend vers 0 par valeurs positives (resp. négatives)* T *et* ∇T *tendent uniformément vers des fonctions à valeurs tensorielles définies sur* Σ *et notées* T^+, $(\nabla T)^+$ *(resp.* T^-, $(\nabla T)^-$*).*

Nous pouvons introduire sur Σ les tenseurs-discontinuités :

$$[T] = T^+ - T^- \qquad [\nabla T] = (\nabla T)^+ - (\nabla T)^-$$

Dans Ω, se trouvent définis de manière naturelle les tenseurs-distributions Y^+T, $Y^+\nabla T$, Y^-T, $Y^-\nabla T$. Si T^D est le tenseur-distribution défini par le tenseur T défini presque partout dans Ω, on a manifestement :

$$T^D = Y^+T + Y^-T \tag{3-1}$$

On définit aussi de manière évidente les tenseurs-distributions $\bar{\delta}T^+$, $\bar{\delta}(\nabla T)^+$, δT^-, $\bar{\delta}(\nabla T)^-$ à support sur Σ. Comme tenseurs-distributions à support sur Σ, on a encore

$$\bar{\delta}[T] = \bar{\delta}(T^+ - T^-) = \bar{\delta}T^+ - \bar{\delta}T^-$$
$$\bar{\delta}[\nabla T] = \bar{\delta}((\nabla T)^+ - (\nabla T)^-) = \bar{\delta}(\nabla T)^+ - \bar{\delta}(\nabla T)^-$$

b) Proposons-nous d'évaluer le tenseur-distribution ∇T^D dérivé du tenseur-distribution T^D. A cet effet, d'après (3-1) évaluons le tenseur-distribution dérivé de Y^+T. On vérifie aisément sur les définitions posées, à partir de (2-8), que l'on a :

$$\nabla(Y^+T) = l\bar{\delta}T^+ + Y^+\nabla T \tag{3-2}$$

On a de même :

$$\nabla(Y^-T) = -\,l\bar{\delta}T^- + Y^-\nabla T \tag{3-3}$$

Par addition de (3-2) et (3-3), il vient compte tenu de (3-1) :

(3-4) $$\nabla T^{D} = l\bar{\delta}[T] + (\nabla T)^{D}$$

Dans la formule (3-4), ∇T^{D} est le tenseur-distribution dérivé, au sens des distributions, du tenseur-distribution T^{D}. Le terme (∇T^{D}) désigne le tenseur-distribution défini par la dérivée covariante usuelle ∇T du tenseur T, tenseur ordinaire défini presque partout. Quant à $l\bar{\delta}[T]$, elle est dite la *O-couche tensorielle* attachée au tenseur-discontinuité [T] sur Σ.

c) Nous sommes ainsi conduits à étudier la dérivée du tenseur-distribution $\bar{\delta}[T]$ de Ω. En coordonnées locales (y^{α}), on voit aisément que :

$$\nabla_{i}(\bar{\delta}[T]) = \nabla_{i}\bar{\delta}[T] + \bar{\delta}\nabla_{i}[T]$$

où $\nabla_{i}\bar{\delta} = l_{i}\bar{\delta}' = 0$. D'après les hypothèses de convergence uniforme faites, on a

$$\nabla_{i}[T] = [\nabla_{i}T]$$

Il vient ainsi :

$$\bar{\delta}[\nabla_{i}T] = \nabla_{i}(\bar{\delta}[T])$$

Il en résulte qu'il existe un p-tenseur-distribution, noté $\boldsymbol{\delta}T$, à support sur Σ tel que l'on ait la formule :

(3-5) $$\bar{\delta}[\nabla T] = \nabla(\bar{\delta}[T]) + l\boldsymbol{\delta}T$$

4. — Cas d'un tenseur continu.

a) Supposons maintenant *le tenseur* T continu dans Ω et satisfaisant toujours aux hypothèses du § 3. Les tenseurs correspondants engendrent de manière naturelle une algèbre $\mathcal{A}$ de tenseurs. La formule (3-5) s'écrit :

(4-1) $$\bar{\delta}[\nabla_{\alpha}T] = l_{\alpha}\boldsymbol{\delta}T$$

Considérons l'application :

$$\boldsymbol{\delta} : T \in \mathcal{A} \to \boldsymbol{\delta}T$$

qui à un tenseur continu satisfaisant aux hypothèses du § 3 fait correspondre un tenseur-distribution à support sur Σ. De (4-1), on déduit immédiatement que l'application $\boldsymbol{\delta}$ est une *dérivation* : si a, b sont deux réels et si T, U $\in \mathcal{A}$ sont deux p-tenseurs, il résulte de (4-1) que :

(4-2) $$\boldsymbol{\delta}(aT + bU) = a\boldsymbol{\delta}T + b\boldsymbol{\delta}U$$

Si T, U $\in \mathcal{A}$ sont un p-tenseur et un q-tenseur, on voit aussi que :

$$\boldsymbol{\delta}(T \otimes U) = \boldsymbol{\delta}T \otimes U + T \otimes \boldsymbol{\delta}U \tag{4-3}$$

A $\boldsymbol{\delta}$ nous donnons le nom d'*opérateur de discontinuité infinitésimale*; $\boldsymbol{\delta}T$ est dite la « *discontinuité infinitésimale* » de T.

b) Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses suivantes :

1° *Le tenseur* T *est continu dans* Ω. *Dans chacun des domaines* Ω^+ *et* Ω^-, T *est un tenseur de classe* C^2.

2° *Quand* φ *tend vers 0 par valeurs positives (resp. négatives),* ∇T *et* $\nabla\nabla T$ *tendent uniformément vers des fonctions à valeurs tensorielles définies sur* Σ *et notées* $(\nabla T)^+$, $(\nabla\nabla T)^+$ *(resp.* $(\nabla T)^-$, $(\nabla\nabla T)^-$*).*

Ainsi le tenseur ∇T satisfait lui-même aux hypothèses de § 3. De (3-5) appliqué à ∇T, il résulte

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha(\bar{\delta}[\nabla_\beta T]) + l_\alpha \boldsymbol{\delta} \nabla_\beta T$$

On en déduit d'après (4-1) :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha(l_\beta \boldsymbol{\delta} T) + l_\alpha \boldsymbol{\delta} \nabla_\beta T$$

soit :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} T + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} T + l_\alpha \boldsymbol{\delta} \nabla_\beta T \tag{4-4}$$

Dans les hypothèses faites sur la métrique, le tenseur de courbure de la variété est continu à la traversée de Σ. De l'identité de Bianchi et de cette continuité du tenseur de courbure il résulte :

$$[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = [\nabla_\beta \nabla_\alpha T] \tag{4-5}$$

Comme $\nabla_\alpha l_\beta = \nabla_\beta l_\alpha = \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi$, on déduit de (4-4) et (4-5) :

$$l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} T + l_\alpha \boldsymbol{\delta} \nabla_\beta T = l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} T + l_\beta \boldsymbol{\delta} \nabla_\alpha T$$

soit :

$$l_\alpha(\boldsymbol{\delta} \nabla_\beta T - \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} T) - l_\beta(\boldsymbol{\delta} \nabla_\alpha T - \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} T) = 0 \tag{4-6}$$

On déduit de (4-6) qu'il existe un p-tenseur-distribution $\bar{T}$ à support sur Σ tel que :

$$\boldsymbol{\delta} \nabla_\beta T - \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} T = l_\beta \bar{T}$$

En substituant dans (4-4), nous obtenons une formule qui nous sera constamment utile dans la suite [7] :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} T + l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} T + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} T + l_\alpha l_\beta \bar{T} \tag{4-7}$$

II. — HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

5. — Les équations fondamentales de l'hydrodynamique relativiste.

a) Dans la suite nous considérons un espace-temps V_4 satisfaisant aux hypothèses du § 1 en ce qui concerne sa métrique de type hyperbolique normal, de signature $+ \ldots.$ Dans V_4 un fluide parfait est décrit par un tenseur d'énergie [*4*] :

(5-1) $$T^{(f)}_{\alpha\beta} = c^2 r f u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}$$

où r est la densité propre de matière du fluide, p sa pression, u_α le vecteur vitesse unitaire orienté vers le futur. L'indice f du fluide est donné par :

(5-2) $$f = 1 + \frac{i}{c^2}$$

où i est *l'enthalpie spécifique*. La température propre Θ du fluide et son *entropie spécifique* S peuvent être définies comme en hydrodynamique classique par la relation différentielle

(5-3) $$\Theta d\mathrm{S} = di - \frac{dp}{r}$$

soit

(5-4) $$\Theta d\mathrm{S} = c^2 df - \frac{dp}{r}$$

Il peut être commode, selon les cas, d'adopter comme variables thermodynamiques fondamentales soit p et S, soit f et S. Dans ce paragraphe, nous considérons r comme une fonction donnée $r = r(f, \mathrm{S})$ des variables f et S, ce qui constitue l'équation d'état du fluide.

b) Le système différentiel de l'hydrodynamique relativiste est fourni par les considérations suivantes : tout d'abord nous postulons, comme propriété de la densité de matière, que celle-ci est conservatrice au cours du mouvement. Nous avons

(5-5) $$\nabla_\alpha(r u^\alpha) = 0$$

D'autre part, les équations de la dynamique relativiste sont fournies par la conservation du tenseur d'énergie :

(5-6) $$\nabla_\alpha T^{(f)\alpha\beta} = 0$$

Le système (5-6) s'écrit explicitement :

(5-7) $$\nabla_\alpha(c^2 r f u^\alpha)u_\beta + c^2 r f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \partial_\beta p = 0$$

Par produit par u^β il vient, compte tenu du caractère unitaire du vecteur-vitesse

(5-8) $$\nabla_\alpha(c^2 r f u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0$$

soit :

$$c^2 f \nabla_\alpha(r u^\alpha) + c^2 r u^\alpha \partial_\alpha f - u^\alpha \partial_\alpha p = 0$$

D'après (5-4) cette relation peut s'écrire :

$$c^2 f \nabla_\alpha(r u^\alpha) + r\, \Theta\, u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$

Ainsi la relation (5-5) entraîne la relation :

(5-9) $$u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$

qui régit l'évolution de l'entropie le long des lignes de courant.

En reportant (5-8) dans (5-7), on obtient le système différentiel aux lignes de courant :

(5-10) $$f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\left(\partial_\alpha f - \frac{\Theta}{c^2}\partial_\alpha S\right) = 0$$

Le système (5-5), (5-6) est équivalent au système formé par (5-5), (5-9) et le système différentiel (5-10) aux lignes de courant.

6. — Ondes soniques.

a) Dans un domaine Ω où les variables thermodynamiques f, S et le vecteur vitesse u^α sont continus, soit Σ une hypersurface d'équation locale $\varphi = 0$ *(φ de classe C^2), non engendrée par des lignes de courant* ($u^\alpha \partial_\alpha \varphi = u^\alpha l_\alpha \neq 0$). Nous supposons qu'à la traversée de Σ, f, S et u^α vérifient les hypothèses sur les tenseurs étudiés au § 4. D'après (4-1), nous posons dans la suite :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha f] = l_\alpha \boldsymbol{\delta} f \quad , \quad \bar{\delta}[\nabla_\alpha S] = l_\alpha \boldsymbol{\delta} S \quad , \quad \bar{\delta}[\nabla_\alpha u^\beta] = l_\alpha \boldsymbol{\delta} u^\beta$$

Étudions à quelle condition l'une au moins des distributions $\boldsymbol{\delta} f$, $\boldsymbol{\delta} S$, $\boldsymbol{\delta} u^\beta$ est non nulle.

Si nous posons

(6-1) $$\gamma = \frac{f r_f'}{r}$$

la relation (5-5) peut s'écrire, compte tenu de (5-9) :

(6-2) $$\nabla_\alpha u^\alpha + \frac{\gamma}{f} u^\alpha \partial_\alpha f = 0$$

En écrivant cette relation de part et d'autre de Σ et retranchant, il vient après produit par $\bar{\delta}$

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha u^\alpha] = -\frac{\gamma}{f} u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha f]$$

ce qui s'écrit :

(6-3) $$l_\alpha \boldsymbol{\delta} u^\alpha = -\frac{\gamma}{f}(u^\alpha l_\alpha)\boldsymbol{\delta} f$$

On déduit de même de la relation (5-9) :

$$u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha \mathrm{S}] = 0$$

soit :

$$(u^\alpha l_\alpha)\boldsymbol{\delta}\mathrm{S} = 0$$

et comme $(u^\alpha l_\alpha) \neq 0$, il vient :

(6-4) $$\boldsymbol{\delta}\mathrm{S} = 0$$

Enfin le système (5-10) donne :

$$f u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha u^\beta] - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\left(\bar{\delta}[\nabla_\alpha f] - \frac{\Theta}{c^2}\bar{\delta}[\nabla_\alpha \mathrm{S}]\right) = 0$$

soit, compte tenu de (6-4),

(6-5) $$f(u^\alpha l_\alpha)\boldsymbol{\delta} u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha \boldsymbol{\delta} f = 0$$

Ainsi si $\boldsymbol{\delta} f = 0$, on a $\boldsymbol{\delta} u^\beta = 0$. Nous sommes ainsi conduits, d'après (6-3), à multiplier (6-5) par l_β. Il vient ainsi :

$$f(u^\alpha l_\alpha) l_\beta \boldsymbol{\delta} u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} f = 0$$

soit d'après (6-3)

$$\{(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta + \gamma(u^\alpha l_\alpha)^2\}\,\boldsymbol{\delta} f = 0$$

Ainsi si $\boldsymbol{\delta} f \neq 0$, l'hypersurface Σ vérifie l'équation :

(6-6) $$\mathrm{P}(l) \equiv (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta + \gamma(u^\alpha l_\alpha)^2 = 0 \qquad (l_\alpha = \partial_\alpha \varphi)$$

qui est *l'équation aux ondes soniques* du fluide envisagé; (6-6) exprime que ces ondes, qui sont naturellement des *caractéristiques* du système différentiel (5-5), (5-6) sont les hypersurfaces tangentes aux cônes du second degré définis par dualité à partir du tenseur :

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + (\gamma - 1) u^\alpha u^\beta$$

La génératrice de contact de Σ avec le cône est définie par le vecteur :

$$N^\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial P(l)}{\partial l_\beta} = h^{\alpha\beta} l_\alpha = l^\beta + (\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha) u^\beta \tag{6-7}$$

Soit v^β la composante tangentielle pour Σ de la vitesse u^β du fluide :

$$u^\beta = v^\beta + \frac{u^\alpha l_\alpha}{l^\alpha l_\alpha} l^\beta \qquad (v^\beta l_\beta = 0)$$

Il est à noter que, N^β étant tangent à Σ, *la direction de* N^β *est celle de* v^β :

$$N^\beta = (\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha) v^\beta \tag{6-8}$$

La vitesse v_0 par rapport au fluide des ondes soniques (6-6) est donnée [*4 b*, § 36] par :

$$\frac{v_0^2}{c^2} = -\frac{(u^\alpha l_\alpha)^2}{(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta}$$

soit :

$$\frac{v_0^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma}$$

Il en résulte que l'on doit avoir $\gamma \geqslant 1$. Le tenseur $h^{\alpha\beta}$ définit alors une forme quadratique de type hyperbolique normal. Nous désignons par $h_{\alpha\beta}$ le tenseur covariant inverse de $h^{\alpha\beta}$.

7. — Propriété fondamentale des rayons.

a) Les bicaractéristiques ou *rayons* associés aux ondes soniques (et qui les engendrent) sont les trajectoires du champ des vecteurs $N^\beta = h^{\alpha\beta} l_\alpha$, c'est-à-dire, comme il est bien connu, les géodésiques isotropes relatives à la métrique hyperbolique normale définie par $h_{\alpha\beta}$.

Nous notons qu'il résulte de (6-5) que :

$$\delta u^\beta = \frac{(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha}{f u^\alpha l_\alpha} \delta f \tag{7-1}$$

s'exprime simplement en fonction de δf.

Soit Σ une onde sonique. Nous nous proposons de montrer que δf (et par suite les δu^β) *se propage le long des rayons*, c'est-à-dire que δf vérifie un système différentiel de la forme :

$$N^\beta \nabla_\beta \delta f + A \delta f = 0$$

De la formule (4-7) il résulte qu'il existe des distributions $\bar{f}$, $\bar{S}$, $\bar{u}^\lambda$ telles que l'on ait sous les hypothèses faites :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f] = \nabla_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} f + l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} f + l_\alpha l_\beta \bar{f} \tag{7-2}$$

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta S] = l_\alpha l_\beta \bar{S} \tag{7-3}$$

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\lambda] = \nabla_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\alpha l_\beta \bar{u}^\lambda \tag{7-4}$$

b) Partons de la relation (6-2) et dérivons-la dans Ω. Il vient :

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\alpha + \frac{\gamma}{f} u^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha f + \nabla_\beta\left(\frac{\gamma}{f} u^\alpha\right) \nabla_\alpha f = 0$$

En écrivant cette relation de part et d'autre de Σ et retranchant, on obtient :

$$\bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\alpha] + \frac{\gamma}{f} u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha f] + \bar{\delta}\left[\nabla_\beta\left(\frac{\gamma}{f} u^\alpha\right) \nabla_\alpha f\right] = 0 \tag{7-5}$$

Or :

$$\bar{\delta}\left[\nabla_\beta\left(\frac{\gamma}{f} u^\alpha\right) \nabla_\alpha f\right] = \{ \nabla_\alpha f \}^{+} \bar{\delta}\left[\nabla_\beta\left(\frac{\gamma}{f} u^\alpha\right)\right] + \left\{ \nabla_\beta\left(\frac{\gamma}{f} u^\alpha\right)\right\}^{-} \bar{\delta}[\nabla_\alpha f]$$

est une combinaison linéaire de termes en $\boldsymbol{\delta} f$ et $\boldsymbol{\delta} u^\lambda$ et est donc proportionnel à $\boldsymbol{\delta} f$. Nous écrirons (7-5) sous la forme :

$$\bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla \alpha u^\alpha] + \frac{\gamma}{f} u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha f] \simeq 0 \tag{7-6}$$

où le symbole $\simeq$ signifie *modulo des termes proportionnels à* $\boldsymbol{\delta} f$.

En procédant de même sur la relation (5-9) relative à l'entropie, on obtient :

$$u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta \bar{S}] \simeq 0$$

soit, d'après (7-3),

$$u^\alpha l_\alpha l_\beta \bar{S} \simeq 0$$

Ainsi $\bar{S}$ est $\simeq 0$ et il vient :

$$\bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha S] \simeq 0 \tag{7-7}$$

Enfin, en se livrant au même raisonnement sur (5-10), il vient :

$$f u^\beta \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\alpha] - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f] \simeq 0 \tag{7-8}$$

c) En tenant compte de (7-7) et (7-6) dans (7-8), on obtient :

$$\gamma u^\alpha u^\beta \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f] + (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f] \simeq 0$$

soit, d'après (7-2),

$$h^{\alpha\beta}(l_\alpha \nabla_\beta \delta f + l_\beta \nabla_\alpha \delta f + l_\alpha l_\beta \bar{f}) \simeq 0$$

La fonction φ étant telle que $l_\alpha = \partial_\alpha \varphi$ vérifie $P(l) = 0$, *le terme en $\bar{f}$ disparaît* et il reste :

$$h^{\alpha\beta} l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f \simeq 0$$

soit :

$$N^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f \simeq 0 \tag{7-9}$$

Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les distributions $\boldsymbol{\delta} f$, $\boldsymbol{\delta} u^\lambda$ à supports sur l'onde sonique Σ se propagent le long des rayons associés selon les systèmes différentiels*

$$N^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f \simeq 0 \qquad N^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda \simeq 0$$

Il s'agit là de *la propriété fondamentale des rayons.*

d) Nous avons vu au § 4 que l'application $\boldsymbol{\delta}$ définit une *dérivation.* Dans cette dérivation, on a manifestement sous les hypothèses faites :

$$\boldsymbol{\delta} g^{\alpha\beta} = 0 \qquad \boldsymbol{\delta} l_\alpha = 0$$

On peut mettre les équations fondamentales relatives aux ondes soniques sous une forme commode. En écrivant (5-5) de part et d'autre de Σ et retranchant, il vient immédiatement :

$$\boldsymbol{\delta}(r u^\alpha l_\alpha) = 0$$

Ainsi le scalaire

$$a = r u^\alpha l_\alpha \tag{7-10}$$

est *invariant par la dérivation $\boldsymbol{\delta}$.*

De même en écrivant (5-6) de part et d'autre de Σ et retranchant, on obtient :

$$\boldsymbol{\delta}(T^{(f)\alpha\beta} l_\alpha) = 0$$

et le vecteur

$$W^\beta = c^2 r f (u^\alpha l_\alpha) u^\beta - p l^\beta = c^2 a f u^\beta - p l^\beta \tag{7-11}$$

est *invariant par $\boldsymbol{\delta}$.* Ce vecteur peut s'écrire :

$$W^\beta = c^2 a f v^\beta + \left(c^2 a f \frac{u^\alpha l_\alpha}{l^\alpha l_\alpha} - p\right) l^\beta$$

et ses composantes tangentielle et normale par rapport à Σ sont invariantes. Ainsi :

$$\boldsymbol{\delta}(fv^{\beta}) = 0$$

Il en résulte que *la direction de* N^{β}, *qui est d'après* (6-8) *celle de* v^{β}, *est invariante par la dérivation* $\boldsymbol{\delta}$.

III. — MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

8. — Les équations fondamentales de la magnétohydrodynamique relativiste.

a) Un champ électromagnétique est défini par deux 2-formes H et G; H est dit *le tenseur champ électrique-induction magnétique:* si $*\,H$ est la 2-forme duale de H, les vecteurs orientés dans l'espace :

$$e_{\beta} = u^{\alpha}H_{\alpha\beta} \qquad b_{\beta} = u^{\alpha}(*\,H)_{\alpha\beta}$$

sont respectivement le champ électrique et l'induction magnétique relatifs à la direction temporelle u et l'on a $u^{\beta}e_{\beta} = u^{\beta}b_{\beta} = 0$. Si μ (constante donnée) est la *perméabilité magnétique* du fluide envisagé

$$b_{\beta} = \mu h_{\beta}$$

où h est le champ magnétique. Symétriquement G est *le tenseur champ magnétique-induction électrique.* H et G satisfont respectivement les deux groupes d'équations de Maxwell; le courant électrique J est en général la somme de deux termes

$$J^{\beta} = \tau u^{\beta} + \sigma e^{\beta}$$

où τ est la densité propre de charge électrique et σ la *conductivité* du fluide

b) La magnétohydrodynamique est l'étude des propriétés d'un fluide parfait (§ 5) *de conductivité infinie* $\sigma = \infty$; J et par suite σe étant essentiellement finis, le vecteur e est nécessairement nul. *Le champ électromagnétique est réduit, par rapport à la direction temporelle définie par le vecteur vitesse u du fluide, au champ magnétique h.* On sait que le tenseur d'énergie de ce champ peut s'écrire [*4*]

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left\{ |\,h\,|^2\left(u_{\alpha}u_{\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\right) - h_{\alpha}h_{\beta} \right\}$$

où $|h|^2 = -h^\rho h_\rho$ est strictement positif pour $h^\rho \neq 0$. Le tenseur d'énergie complet est $T_{\alpha\beta} = T^f_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$, soit :

$$T_{\alpha\beta} = (c^2rf + \mu\,|h|^2)u_\alpha u_\beta - qg_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta \quad \left(q = p + \frac{1}{2}\mu\,|h|^2\right) \tag{8-1}$$

Le système différentiel de la magnétohydrodynamique relativiste est constitué par l'équation de conservation de la densité de matière :

$$\nabla_\alpha(ru^\alpha) = 0 \tag{8-2}$$

par les équations de Maxwell qui se réduisent ici à :

$$\nabla_\alpha(h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha) = 0 \tag{8-3}$$

et par les équations de la dynamique relativiste :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{8-4}$$

où $T^{\alpha\beta}$ est donné par (8-1).

9. — Conséquences des équations fondamentales.

a) Nous utiliserons dans la suite un certain nombre de relations conséquences du système (8-2), (8-3), (8-4) ([2]). Partons des équations de Maxwell explicitées sous la forme :

$$h^\beta\nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha\nabla_\alpha h^\beta - u^\beta\nabla_\alpha h^\alpha - h^\alpha\nabla_\alpha u^\beta = 0 \tag{9-1}$$

Par produits scalaires successivement par les deux vecteurs orthogonaux u et h, il vient les deux relations suivantes :

$$u^\alpha u^\beta\nabla_\alpha h_\beta - \nabla_\alpha h^\alpha = 0 \tag{9-2}$$

$$\frac{1}{2}u^\alpha\nabla_\alpha\,|h|^2 + |h|^2\nabla_\alpha u^\alpha - h^\alpha u^\beta\nabla_\alpha h_\beta = 0 \tag{9-3}$$

b) En explicitant (8-4), on a :

$$\nabla_\alpha\{(c^2rf + \mu|h|^2)u^\alpha\}\,u_\beta + (c^2rf + \mu|h|^2)u^\alpha\nabla_\alpha u_\beta - \partial_\beta\left(p + \frac{1}{2}\mu|h|^2\right) - \mu\nabla_\alpha h^\alpha h_\beta - \mu h^\alpha\nabla_\alpha h_\beta = 0 \tag{9-4}$$

Par produit par u^β, on en déduit :

$$\nabla_\alpha\{(c^2rf + \mu\,|h|^2)u^\alpha\} - u^\alpha\partial_\alpha\left(p + \frac{1}{2}\mu\,|h|^2\right) - \mu h^\alpha u^\beta\nabla_\alpha h_\beta = 0 \tag{9-5}$$

([2]) Pour des démonstrations plus détaillées de ces relations voir [*4*].

qui, compte tenu de (9-3), peut s'écrire :

$$\nabla_\alpha(c^2 r f u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0$$

relation identique à (5-8). Si l'on y fait intervenir Θ et S on a donc :

$$c^2 f \nabla_\alpha(r u^\alpha) + r\Theta u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$

Ainsi (8-2) entraîne encore la relation :

$$u^\alpha \partial_\alpha S = 0 \tag{9-6}$$

En utilisant (9-5) pour transformer (9-4), on obtient le système différentiel aux lignes de courant :

$$(c^2 r f + \mu |h|^2) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\partial_\alpha\left(p + \frac{1}{2}\mu |h|^2\right) + \mu h^\lambda u^\mu \nabla_\lambda h_\mu u^\beta - \mu \nabla_\alpha h^\alpha u^\beta - \mu h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta = 0$$

D'après (9-3) et (5-4), ce système peut se mettre sous la forme :

$$(c^2 r f + \mu |h|^2) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)(c^2 r \partial_\alpha f - r\Theta \partial_\alpha S) - \frac{1}{2}\mu g^{\alpha\beta}\partial_\alpha |h|^2 + \mu u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha |h|^2 + \mu |h|^2 \nabla_\alpha u^\alpha . u^\beta - \mu \nabla_\alpha h^\alpha h^\beta - \mu h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta = 0 \tag{9-7}$$

Par produit par h_β, on déduit de (9-7) après simplifications et compte tenu de (9-2) (voir [*4*]) :

$$\nabla_\alpha h^\alpha + \frac{h^\alpha}{f}\left(\partial_\alpha f - \frac{\Theta}{c^2}\partial_\alpha S\right) = 0 \tag{9-8}$$

10. — Ondes magnétosoniques et ondes d'Alfven.

a) Dans un domaine Ω où f, S, les vecteurs u^α et h^α sont continus, soit Σ une hypersurface d'équation locale $\varphi = 0$ *(φ de classe C^2), non engendrée par des lignes de courant* ($u^\alpha \partial_\alpha \varphi = u^\alpha l_\alpha \neq 0$). Nous supposons encore qu'à la traversée de Σ, f, S, u^α et h^α vérifiant les hypothèses sur les tenseurs étudiés au § 4. Comme précédemment, nous posons :

$$\bar\delta[\nabla_\alpha f] = l_\alpha \delta f \quad , \quad \bar\delta[\nabla_\alpha S] = l_\alpha \delta S \quad , \quad \bar\delta[\nabla_\alpha u^\beta] = l_\alpha \delta u^\beta \quad , \quad \bar\delta[\nabla_\alpha h^\beta] = l_\alpha \delta h^\beta$$

Le système différentiel (8-2), (8-3), (8-4) est équivalent au système différentiel formé par (8-2), (8-3), (9-6), (9-7). Les relations (8-2) et (9-6) donnent d'abord, exactement comme dans le cas de l'hydrodynamique :

$$l_\alpha \delta u^\alpha = -\frac{\gamma}{f}(u^\alpha l_\alpha)\delta f \tag{10-1}$$

et

$$\delta S = 0 \tag{10-2}$$

Des équations de Maxwell (8-3) ou (9-1), on déduit par un raisonnement identique à celui du § 6 :

$$u^\beta l_\alpha \delta h^\alpha + (h^\alpha l_\alpha)\delta u^\beta - h^\beta l_\alpha \delta u^\alpha - (u^\alpha l_\alpha)\delta h^\beta = 0 \tag{10-3}$$

Enfin, compte tenu de (10-2), le système différentiel (9-7) aux lignes de courant donne de manière analogue le système :

$$(c^2 rf + \mu |h|^2)(u^\alpha l_\alpha)\delta u^\beta - c^2 r(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha \delta f - \frac{1}{2}\mu l^\beta \delta |h|^2$$
$$+ \mu(u^\alpha l_\alpha)u^\beta \delta |h|^2 + \mu |h|^2 u^\beta l_\alpha \delta u^\alpha - \mu h^\beta l_\alpha \delta h^\alpha - \mu(h^\alpha l_\alpha)\delta h^\beta = 0 \tag{10-4}$$

b) Étudions d'abord à quelle condition les distributions δf, $l_\alpha \delta u^\alpha$, $l_\alpha \delta h^\alpha$, $\delta \mid h|^2$ ne sont pas toutes nulles. Des relations (9-2) et (9-3), conséquences des équations de Maxwell, on déduit les relations suivantes, conséquences de (10-3) :

$$l_\alpha \delta h^\alpha - (u^\alpha l_\alpha)u^\beta \delta h_\beta = 0$$

$$\frac{1}{2}(u^\alpha l_\alpha)\delta \mid h \mid^2 + \mid h \mid^2 l_\alpha \delta u^\alpha - (h^\alpha l_\alpha)u^\beta \delta h_\beta = 0$$

Par élimination de $u^\beta \delta h_\beta$ entre ces deux relations, il vient :

$$\frac{1}{2}(u^\alpha l_\alpha)^2 \delta \mid h \mid^2 + \mid h \mid^2 (u^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta u^\beta - (h^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta h^\beta = 0 \tag{10-5}$$

Considérons maintenant la relation (9-8) conséquence de (9-7). Compte tenu de (10-2), on en déduit la relation suivante, conséquence de (10-4) :

$$f l_\alpha \delta h^\alpha + (h^\alpha l_\alpha)\delta f = 0 \tag{10-6}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\delta(f h^\alpha l_\alpha) = 0 \tag{10-6'}$$

Ainsi *le scalaire* $b = f h^\alpha l_\alpha$ *est invariant par la dérivation* δ.

Enfin multiplions (10-4) par l_β. Il vient :

$$(c^2 rf + \mu \mid h \mid^2)(u^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta u^\beta - c^2 r(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta \delta f - \frac{1}{2}\mu l^\beta l_\beta \delta \mid h \mid^2$$
$$+ \mu(u^\alpha l_\alpha)^2 \delta \mid h \mid^2 + \mu \mid h \mid^2 (u^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta u^\beta - 2\mu(h^\beta l_\beta) l_\alpha \delta h^\alpha = 0$$

c'est-à-dire :

$$c^2 rf(u^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta u^\beta - c^2 r(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta \delta f - \frac{1}{2}\mu l^\beta l_\beta \delta \mid h \mid^2$$
$$+ \mu \{ 2 \mid h \mid^2 (u^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta u^\beta + (u^\alpha l_\alpha)^2 \delta \mid h \mid^2 \} - 2(h^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta h^\beta = 0$$

D'après (10-5), il vient :

$$(10\text{-}7) \qquad c^2rf(u^\alpha l_\alpha)l_\beta \delta u^\beta - c^2r(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta \delta f - \frac{1}{2}\mu l^\beta l_\beta \delta \mid h \mid^2 = 0$$

Éliminons $\delta \, |h|^2$ entre (10-5) et (10-7). Par produit de (10-5) par $-\mu l^\rho l_\rho$, de (10-7) par $(u^\alpha l_\alpha)^2$ et addition on obtient :

$$c^2rf(u^\alpha l_\alpha)^3 l_\beta \delta u^\beta - c^2r(u^\alpha l_\alpha)^2(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta \delta f \\ - \mu l^\rho l_\rho(h^\alpha l_\alpha . l_\beta \delta h^\beta - \mid h \mid^2 u^\alpha l_\alpha l_\beta \delta u^\beta) = 0$$

ce qui peut s'écrire :

$$(10\text{-}8) \qquad \{ c^2rf(u^\alpha l_\alpha)^2 + \mu \mid h \mid^2 g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu \} u^\alpha l_\alpha l_\beta \delta u^\beta - c^2r(u^\alpha l_\alpha)^2(g^{\lambda\mu}l_\lambda l_\mu - (u^\alpha l_\alpha)^2)\delta f \\ - \mu(h^\alpha l_\alpha)g^{\lambda\mu}l_\lambda l_\mu l_\beta \delta h^\beta = 0$$

A cette relation, nous pouvons adjoindre (10-1) soit :

$$l_\beta \delta u^\beta + \frac{\gamma}{f}(u^\alpha l_\alpha)\delta f = 0$$

et (10-6) soit :

$$(h^\alpha l_\alpha)\delta f + f l_\beta \delta h^\beta = 0$$

Le déterminant de ces trois équations linéaires aux inconnues $l_\beta \delta u^\beta$, δf, $l_\beta \delta h^\beta$ s'écrit :

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \{ c^2rf(u^\alpha l_\alpha)^2 + \mu \mid h \mid^2 g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu \} u^\alpha l_\alpha, & -c^2r(u^\alpha l_\alpha)^2(g^{\lambda\mu}l_\lambda l_\mu - (u^\alpha l_\alpha)^2), & -\mu(h^\alpha l_\alpha)g^{\lambda\mu}l_\lambda l_\mu \\ 1 & \frac{\gamma}{f}(u^\alpha l_\alpha) & 0 \\ 0 & (h^\alpha l_\alpha) & f \end{vmatrix}$$

soit après développement :

$$\mathrm{H} = \{ c^2rf(u^\alpha l_\alpha)^2 + \mu \mid h \mid^2 g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu \} \gamma(u^\alpha l_\alpha)^2 + c^2rf(u^\alpha l_\alpha)^2 \{ g^{\lambda\mu}l_\lambda l_\mu - (u^\alpha l_\alpha)^2 \} \\ - \mu(h^\alpha l_\alpha)^2 g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu$$

Pour que le système considéré admette des solutions autres que la solution nulle, il faut et il suffit que $\mathrm{H} = 0$. Les relations (10-1), (10-6), (10-5) fournissent $l_\beta \delta u^\beta$, $l_\beta \delta h^\beta$, $\delta \mid h \mid^2$ en fonction de δf.

c) L'étude précédente concernait δf et les composantes normales à Σ de u^β et h^β. Décomposons ces vecteurs selon leurs composantes tangentielles et normales à Σ. Il vient :

$$u^\beta = v^\beta + \frac{u^\alpha l_\alpha}{l^\alpha l_\alpha} l^\beta \qquad h^\beta = t^\beta + \frac{h^\alpha l_\alpha}{l^\alpha l_\alpha} l^\beta$$

où $v^\beta l_\beta = t^\beta l_\beta = 0$. Compte tenu du b, les formules (10-3) et (10-4) fournissent les relations de la forme :

(10-9) $$(h^\alpha l_\alpha)\delta v^\beta - (u^\alpha l_\alpha)\delta t^\beta \simeq 0$$

(10-10) $$(c^2 rf + \mu \mid h \mid^2)(u^\alpha l_\alpha)\delta v^\beta - \mu(h^\alpha l_\alpha)\delta t^\beta \simeq 0$$

où le symbole $\simeq 0$ â la même signification qu'au § 7 (c'est-à-dire modulo des termes proportionnels à δf). Le déterminant des équations (10-9), (10-10) aux inconnues δv^β, δt^β s'écrit :

$$\mathrm{D}(l) = (c^2 rf + \mu \mid h \mid^2)(u^\alpha l_\alpha)^2 - \mu(h^\alpha l_\alpha)^2$$

d) Nous avons ainsi mis en évidence deux types d'ondes. Si $\delta f \neq 0$, on a nécessairement $\mathrm{H} = 0$ soit :

(10-11)
$$\mathrm{P}(l) \equiv c^2 rf(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^4 + (c^2 rf + \mu \mid h \mid^2 \gamma)(u^\alpha l_\alpha)^2 g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu - \mu(h^\alpha l_\alpha)^2 g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu = 0$$

On voit ainsi que l'hypersurface Σ, d'équation locale $\varphi = 0$, doit vérifier l'équation :

$$\mathrm{P}^{\lambda\mu\nu\rho}\partial_\lambda\varphi\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\partial_\rho\varphi = 0$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{P}^{\lambda\mu\nu\rho} = c^2 rf(\gamma - 1)u^\lambda u^\mu u^\nu u^\rho + (c^2 rf + \mu \mid h \mid^2 \gamma)u^{(\lambda} u^\mu g^{\nu\rho)} - \mu h^{(\lambda} h^\mu g^{\nu\rho)}$$

Nous avons ainsi trouvé *les ondes magnétosoniques* que l'on a pu aussi mettre en évidence et étudier comme caractéristiques, lors de l'étude du problème de Cauchy [*4*]. Ces ondes sont les hypersurfaces tangentes aux cônes définis à partir du tenseur $\mathrm{P}^{\lambda\mu\nu\rho}$. La génératrice de contact de Σ avec le cône est définie par le vecteur

$$\mathrm{N}^\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{P}(l)}{\partial l_\beta}$$

soit :

(10-12) $$\mathrm{N}^\beta = 2c^2 rf(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^3 u^\beta + (c^2 rf + \mu \mid h \mid^2 \gamma)u^\alpha l_\alpha(g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu u^\beta + (u^\alpha l_\alpha) l^\beta) - \mu h^\alpha l_\alpha(g^{\lambda\mu} l_\lambda l_\mu h^\beta + (h^\alpha l_\alpha) l^\beta)$$

Si (10-11) n'est pas satisfaite, il ne peut y avoir discontinuité effective que des dérivées des composantes tangentielles v^β et t^β de la vitesse et du champ magnétique, et l'on a alors $\mathrm{D}(l) = 0$. L'hypersurface Σ, d'équation locale $\varphi = 0$, vérifie l'équation :

(10-13) $$(c^2 rf + \mu \mid h \mid^2)(u^\alpha \partial_\alpha \varphi)^2 - \mu(h^\alpha \partial_\alpha \varphi)^2 = 0$$

Nous retrouvons ainsi les ondes d'Alfven, autre système de caractéristiques du système de la magnétohydrodynamique. Posons pour abréger les notations $\beta = \sqrt{(c^2rf + \mu \mid h \mid^2)/\mu}$. L'équation (10-13) peut s'écrire :

$$\{ (\beta u^\alpha + h^\alpha)\partial_\alpha \varphi \} \{ (\beta u^\alpha - h^\alpha)\partial_\alpha \varphi \} = 0$$

Ainsi les ondes d'Alfven sont engendrées par les trajectoires soit du champ de vecteurs :

$$\text{(10-14)} \qquad A^\alpha = \beta u^\alpha + h^\alpha$$

(ondes d'espèce A), soit du champ de vecteurs :

$$\text{(10-15)} \qquad B^\alpha = \beta u^\alpha - h^\alpha$$

(ondes d'espèce B). Ces vecteurs sont manifestement temporels.

e) Nous avons placé antérieurement, les unes par rapport aux autres, les vitesses relatives au fluide des ondes précédentes [*4 b*, § 36]. Étudions dans quels cas on a simultanément $P(l) = 0$, $D(l) = 0$. S'il en est ainsi, il vient immédiatement :

$$(u^\alpha l_\alpha)^2(\gamma - 1) \{ c^2rf(u^\alpha l_\alpha)^2 + \mu \mid h \mid^2 l^\rho l_\rho \} = 0$$

Par la suite ou bien $\gamma = 1$, ou bien

$$\text{(10-16)} \qquad c^2rf(u^\alpha l_\alpha)^2 + \mu \mid h \mid^2 l^\rho l_\rho = 0$$

En termes du champ magnétique, cette relation peut s'écrire, compte tenu de $D(l) = 0$,

$$\text{(10-17)} \qquad (h^\alpha l_\alpha)^2 + \mid h \mid^2 (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta = 0$$

Cette relation exprime que h^β est colinéaire à la direction spatiale $\{ (u^\alpha l_\alpha) u^\beta - l^\beta \}$ de propagation des ondes.

f) Pour $\gamma > 1$, $h^\beta \neq k \{ (u^\alpha l_\alpha) u^\beta - l^\beta \}$, $D(l)$ est certainement $\neq 0$ pour une *onde magnétosonique*. Ainsi, pour une telle onde, les « discontinuités infinitésimales » δu^β, δh^β peuvent être évaluées de manière unique en fonction de δf. Nous aurons besoin en particulier de l'expression de $\delta \mid h \mid^2$. D'après (10-7) :

$$\frac{1}{2} \mu l^\rho l_\rho \delta \mid h \mid^2 = c^2rf(u^\alpha l_\alpha) l_\beta \delta u^\beta - c^2 r \{ l^\rho l_\rho - (u^\alpha l_\alpha)^2 \} \delta f$$

On en déduit en exprimant $l_\beta \delta u^\beta$ à partir de (10-1) :

$$\frac{1}{2} \mu f l^\rho l_\rho \delta \mid h \mid^2 = - c^2 rf\gamma (u^\alpha l_\alpha)^2 \delta f - c^2 rf \{ l^\rho l_\rho - (u^\alpha l_\alpha)^2 \} \delta f$$

c'est-à-dire :

(10-18) $$\frac{1}{2}\mu f l^\rho l_\rho \boldsymbol{\delta} \mid h \mid^2 = -c^2 r f \{ (\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^2 + l^\rho l_\rho \} \boldsymbol{\delta} f$$

11. — Propriété fondamentale des rayons associés aux ondes magnétosoniques.

a) Soit φ une solution de l'équation (10-11) aux ondes magnétosoniques. Les bicaractéristiques ou rayons associés à ces ondes sont les trajectoires du champ des vecteurs N^β définis par (10-12). Ces vecteurs étant tangents aux ondes magnétosoniques, (10-12) peut encore s'écrire en prenant les composantes tangentielles des différents termes :

(11-1) $$N^\beta = 2c^2 r f(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^3 v^\beta + (c^2 r f + \mu \mid h \mid^2 \gamma)(u^\alpha l_\alpha)(l^\rho l_\rho) v^\beta - \mu (h^\alpha l_\alpha)(l^\rho l_\rho) t^\beta$$

Nous nous proposons de montrer que $\boldsymbol{\delta} f$ (et par suite les $\boldsymbol{\delta} u^\beta$, $\boldsymbol{\delta} h^\beta$) *se propagent le long des rayons*, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\delta} f$ vérifie un système différentiel de la forme :

$$N^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f \simeq 0$$

où le symbole $\simeq 0$ a même signification qu'au § 7. De la formule (4-7) il résulte qu'il existe des distributions $\bar{f}$, $\bar{S}$, $\bar{u}^\lambda$, $\bar{h}^\lambda$ telles que l'on ait sous les hypothèses faites :

(11-2) $$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f] = \nabla_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} f + l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} f + l_\alpha l_\beta \bar{f}$$

(11-3) $$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta S] = l_\alpha l_\beta \bar{S}$$

(11-4) $$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\lambda] = \nabla_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\alpha l_\beta \bar{u}^\lambda$$

(11-5) $$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta h^\lambda] = \nabla_\alpha l_\beta \boldsymbol{\delta} h^\lambda + l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} h^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} h^\lambda + l_\alpha l_\beta \bar{h}^\lambda$$

b) Des relations (10-1) et (10-2), on déduit comme au § 7 :

(11-6) $$\bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\alpha] + \frac{\gamma}{f} u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha f] \simeq 0$$

et

(11-7) $$\bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha S] \simeq 0$$

Des relations (9-2) et (9-3), conséquences des équations de Maxwell, on déduit par dérivation en raisonnant comme au § 7 :

$$\bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] - u^\alpha u^\lambda \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha h_\lambda] \simeq 0$$

et

$$\frac{1}{2} u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta \mid h \mid^2] + \mid h \mid^2 \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\alpha] - h^\alpha u^\lambda \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha h_\lambda] \simeq 0$$

En multipliant la première de ces relations par h^β, la seconde par u^β et retranchant, on obtient :

$$(11\text{-}8)\quad \frac{1}{2}u^\alpha u^\beta \bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta \mid h\mid^2] + \mid h\mid^2 u^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha] - h^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha h^\alpha] \simeq 0$$

Considérons maintenant la relation (9-8). Par dérivation en ∇_β, il vient :

$$(11\text{-}9)\qquad f\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha h^\alpha] + h^\alpha\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha f] \simeq 0$$

De (11-8) on tire, compte tenu de (11-6) et (11-9) :

$$(11\text{-}10)\qquad \frac{1}{2}fu^\alpha u^\beta\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta \mid h\mid^2] \simeq (\mid h\mid^2\gamma u^\alpha u^\beta - h^\alpha h^\beta)\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta f]$$

c) Prenons enfin la dérivée covariante contractée de (9-7). On obtient, compte tenu de (11-7) :

$$(c^2rf+\mu\mid h\mid^2)u^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha]-c^2r(g^{\alpha\beta}-u^\alpha u^\beta)\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta f]-\frac{1}{2}\mu\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla^\beta\mid h\mid^2]$$
$$+\mu u^\alpha u^\beta\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta\mid h\mid^2]+\mu\mid h\mid^2 u^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha]-2\mu h^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha h^\alpha]\simeq 0$$

ce qui peut s'écrire :

$$c^2rfu^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha] - c^2r(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta f] - \frac{1}{2}\mu\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla^\beta \mid h\mid^2]$$
$$+ \mu\{2\mid h\mid^2 u^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha] + u^\alpha u^\beta\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta\mid h\mid^2] - 2h^\beta\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha h^\alpha]\} \simeq 0$$

où la seconde ligne est nulle en vertu de (11-8). En utilisant (11-6), il vient :

$$(11\text{-}11)\quad c^2r\{(\gamma - 1)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta}\}\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta f] + \frac{1}{2}\mu\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla^\beta\mid h\mid^2] \simeq 0$$

Introduisons l'expression de :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta\mid h\mid^2] = \nabla_\alpha l_\beta\boldsymbol{\delta}\mid h\mid^2 + l_\alpha\nabla_\beta\boldsymbol{\delta}\mid h\mid^2 + l_\beta\nabla_\alpha\boldsymbol{\delta}\mid h\mid^2 + l_\alpha l_\beta\mid\bar{h}\mid^2$$

On a :

$$\frac{1}{2}\bar{\delta}[\nabla_\beta\nabla^\beta\mid h\mid^2] \simeq l^\beta\nabla_\beta\boldsymbol{\delta}\mid h\mid^2 + \frac{1}{2}l^\rho l_\rho\mid\bar{h}\mid^2$$

et (11-10) peut s'écrire :

$$f(u^\alpha l_\alpha)u^\beta\nabla_\beta\boldsymbol{\delta}\mid h\mid^2 + \frac{1}{2}f(u^\alpha l_\alpha)^2\mid\bar{h}\mid^2 \simeq (\mid h\mid^2\gamma u^\alpha u^\beta - h^\alpha h^\beta)\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta f]$$

Après produit par $f(u^\rho l_\rho)^2$, la formule (11-11) prend la forme :

$$c^2rf\{(\gamma - 1)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta}\}(u^\rho l_\rho)^2\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta f] + \mu f(u^\rho l_\rho)^2 l^\beta\nabla_\beta\boldsymbol{\delta}\mid h\mid^2$$
$$+ \mu l^\rho l_\rho\{-f(u^\rho l_\rho)u^\beta\nabla_\beta\boldsymbol{\delta}\mid h\mid^2 + (\mid h\mid^2\gamma u^\alpha u^\beta - h^\alpha h^\beta)\bar{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta f]\} \simeq 0$$

soit en ordonnant :

(11-12)
$$\{ c^2 rf(\gamma - 1)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta} \} (u^\rho l_\rho)^2 + \{ \mu |h|^2 \gamma l^\rho l_\rho u^\alpha u^\beta - \mu l^\rho l_\rho h^\alpha h^\beta \} \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f]$$
$$+ \mu f(u^\rho l_\rho) \{ (u^\rho l_\rho) l^\beta - (l^\alpha l_\alpha) u^\beta \} \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} |h|^2 \simeq 0$$

Substituons à $\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f]$ sa valeur tirée de (11-2). Le coefficient de $\bar{f}$ est

$$c^2 rf \{ (\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^2 + l^\alpha l_\alpha \} (u^\alpha l_\alpha)^2 + \mu \mid h \mid^2 \gamma l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha)^2 - \mu l^\rho l_\rho (h^\alpha l_\alpha)^2$$

soit :

$$c^2 rf(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^4 + (c^2 rf + \mu \mid h \mid^2 \gamma) l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha)^2 - \mu l^\rho l_\rho (h^\alpha l_\alpha)^2 = \mathrm{P}(l)$$

Ainsi *le coefficient de $\bar{f}$ est nul.* Il vient ainsi à partir de (11-12) :

(11-13)
$$2 \{ c^2 rf(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^3 u^\beta + c^2 rf(u^\alpha l_\alpha)^2 l^\beta + \mu \mid h \mid^2 \gamma l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha u^\beta$$
$$- \mu l^\rho l_\rho (h^\alpha l_\alpha) h^\beta \} \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f + \mu f(u^\alpha l_\alpha) \{ (u^\alpha l_\alpha) l^\beta - l^\rho l_\rho u^\beta \} \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} \mid h \mid^2 \simeq 0$$

D'après le calcul précédent concernant le coefficient de $\bar{f}$, le vecteur coefficient de $\nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f$ dans (11-13) est tangent. Il en est manifestement de même pour le vecteur coefficient de $\nabla_\beta \delta \mid h \mid^2$. La relation précédente peut donc s'écrire, après division par 2 :

$$\{ c^2 rf(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^3 v^\beta + \mu \mid h \mid^2 \gamma l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha) v^\beta - \mu l^\rho l_\rho (h^\alpha l_\alpha) t^\beta \} \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f$$
$$- \frac{1}{2} \mu f l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha) v^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} \mid h \mid^2 \simeq 0$$

soit d'après la relation (10-18) :

$$\{ 2c^2 rf(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^3 v^\beta + (c^2 rf + \mu |h|^2 \gamma) l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha) v^\beta - \mu l^\rho l_\rho (h^\alpha l_\alpha) t^\beta \} \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f \simeq 0$$

c'est-à-dire en vertu de (11-1) :

$$\mathrm{N}^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f \simeq 0$$

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant qui correspond à celui du § 7 :

THÉORÈME. — *Les distributions $\boldsymbol{\delta} f$, $\boldsymbol{\delta} u^\lambda$, $\boldsymbol{\delta} h^\lambda$ à supports sur l'onde magnétosonique Σ se propagent le long des rayons associés selon les systèmes différentiels :*

$$\mathrm{N}^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} f \simeq 0 \qquad \mathrm{N}^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda \simeq 0 \qquad \mathrm{N}^\beta \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} h^\lambda = 0$$

où $\simeq 0$ signifie modulo des termes proportionnels par exemple à $\boldsymbol{\delta} f$.

12. — Propriété des rayons associés aux ondes d'Alfven.

a) Soit φ une solution de l'équation aux ondes d'Alfven par exemple d'espèce A. On a :

$$A^\alpha \partial_\alpha \varphi = A^\alpha l_\alpha = (\beta u^\alpha + h^\alpha) l_\alpha = 0 \tag{12-1}$$

Sous les hypothèses faites ($\gamma > 1$, h^β non proportionnel à $(u^\alpha l_\alpha) u^\beta - l^\beta$), on a $P(l) \neq 0$. Par suite :

$$\boldsymbol{\delta} f = 0 \qquad l_\alpha \boldsymbol{\delta} u^\alpha = 0 \qquad l_\alpha \boldsymbol{\delta} h^\alpha = 0 \qquad \boldsymbol{\delta} \mid h \mid^2 = 0$$

De plus (11-12) se réduit à :

$$P(l) \bar{f} = 0$$

et par suite $\bar{f} = 0$. Ainsi :

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta f] = 0 \tag{12-2}$$

De (11-6), (11-9), (11-10) il résulte :

$$\bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\alpha] = 0 \qquad \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] = 0 \qquad \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta \mid h \mid^2] = 0 \tag{12-3}$$

b) Pour les ondes d'Alfven envisagées ici, seules les « discontinuités infinitésimales » $\boldsymbol{\delta} v^\lambda$, $\boldsymbol{\delta} t^\lambda$ peuvent être différentes de zéro. Des relations (10-9), (10-10), où $u^\alpha l_\alpha \neq 0$ et où les seconds membres sont nuls, on déduit que $\boldsymbol{\delta} t^\lambda$ est proportionnel à $\boldsymbol{\delta} v^\lambda$. Le symbole $\simeq$ signifie, dans ce paragraphe, modulo des termes linéaires par rapport aux $\boldsymbol{\delta} v^\lambda$ (ou aux $\boldsymbol{\delta} t^\lambda$).

Compte tenu de (12-2), (12-3), les équations de Maxwell (9-1) et le système différentiel aux lignes de courant (9-7) donnent par dérivation :

$$h^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\lambda] - u^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\lambda] \simeq 0 \tag{12-4}$$

et :

$$\beta^2 u^\beta \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\lambda] - h^\beta \bar{\delta}[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\lambda] \simeq 0 \tag{12-5}$$

Si nous multiplions (12-4) par h^β et (12-5) par u^α, puis retranchons, il vient :

$$(\beta^2 u^\alpha u^\beta - h^\alpha h^\beta) \bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\lambda] \simeq 0$$

soit en explicitant :

$$(\beta^2 u^\alpha u^\beta - h^\alpha h^\beta)(l_\alpha \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\delta} u^\lambda + l_\alpha l_\beta \bar{u}^\lambda) \simeq 0$$

Le coefficient de $\bar{u}^\lambda$ est nul d'après l'équation aux ondes d'Alfven. Il reste ainsi :

$$\{ \beta^2 (u^\alpha l_\alpha) u^\beta - (h^\alpha l_\alpha) h^\beta \} \nabla_\beta \boldsymbol{\delta} u^\lambda \simeq 0$$

soit en utilisant (12-1) :

$$\beta(u^\alpha l_\alpha) A^\beta \nabla_\beta \delta u^\lambda \simeq 0$$

Nous obtenons :

$$A^\beta \nabla_\beta \delta v^\lambda \simeq 0$$

Nous énonçons :

THÉORÈME. — *Les distributions δv^λ, δt^λ à supports sur une onde d'Alfven Σ d'espèce A se propagent le long des rayons associés selon les systèmes différentiels*

$$A^\beta \nabla_\beta \delta v^\lambda \simeq 0 \qquad A^\beta \nabla_\beta \delta t^\lambda \simeq 0$$

où $\simeq$ signifie modulo des termes linéaires par rapport aux δv^μ (resp. δt^μ).

Des résultats symétriques sont valables pour une onde d'Alfven d'espèce B.

c) Reprenons une onde d'espèce A et étudions l'action de la dérivation δ sur le vecteur

$$A^\beta = \beta u^\beta + h^\beta$$

D'après l'étude du *a*, on a :

$$\delta\beta = 0 \qquad l_\alpha \delta u^\alpha = 0 \qquad l_\alpha \delta h^\alpha = 0$$

Il en résulte :

$$\delta A^\beta = \beta \delta v^\beta + \delta t^\beta$$

soit, d'après (10-9) où le second membre est nul,

$$(u^\alpha l_\alpha)\delta A^\beta = (\beta u^\alpha l_\alpha + h^\alpha l_\alpha)\delta v^\beta$$

De (12-1) il résulte donc [5]

$$\delta A^\beta = 0$$

Ainsi, *pour des ondes d'Alfven d'espèce* A, *le vecteur* A^β *lui-même, et sa direction en particulier sont invariants par la dérivation* δ.

13. — Autre forme des équations du § 10.

a) A partir des équations fondamentales (8-2), (8-3), (8-4), on déduit directement par un raisonnement identique à celui du § 6 le système complet de relations suivant, valable pour une onde Σ arbitraire, d'équation locale

$\varphi = 0$ (φ de classe C^2), que nous supposons *non engendrée par des lignes de courant* ($u^\alpha \partial_\alpha \varphi = u^\alpha l_\alpha \neq 0$) :

$$(\boldsymbol{\delta} r u^\alpha l_\alpha) = 0 \tag{13-1}$$

$$\boldsymbol{\delta}(h^\alpha l_\alpha u^\beta - u^\alpha l_\alpha h^\beta) = 0 \tag{13-2}$$

$$\boldsymbol{\delta}(T^\alpha l_\alpha) = 0 \tag{13-3}$$

Ces relations expriment (voir [5], § 4) l'invariance par la dérivation $\boldsymbol{\delta}$ du scalaire :

$$a = r u^\alpha l_\alpha \neq 0 \tag{13-4}$$

du vecteur manifestement tangent à l'onde Σ :

$$V^\beta = (h^\alpha l_\alpha) u^\beta - \frac{a}{r} h^\beta \tag{13-5}$$

et du vecteur :

$$W^\beta = \left(c^2 \frac{f}{r} + \mu \frac{|h|^2}{r^2}\right) a r u^\beta - q l^\beta - \mu (h^\alpha l_\alpha) h^\beta \tag{13-6}$$

b) De (13-4) et (13-5), il résulte l'invariance par $\boldsymbol{\delta}$ du scalaire :

$$H = \frac{1}{a^2} V^\beta V_\beta = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2} \tag{13-7}$$

Nous posons dans la suite (voir [5]) :

$$\tau = \frac{f}{r} \qquad \alpha = c^2 r - \mu H$$

En tirant h^β de (13-5) et reportant dans (13-6), il vient :

$$W^\beta = a \alpha r u^\beta - q l^\beta + \mu \frac{r}{a} (h^\alpha l_\alpha) V^\beta$$

soit en décomposant W^β selon ses composantes tangente et normale à Σ :

$$W^\beta = X^\beta - \left(q - \frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha} \alpha\right) l^\beta \tag{13-8}$$

avec :

$$X^\beta = a \alpha r v^\beta + \mu \frac{r}{a} (h^\alpha l_\alpha) V^\beta \tag{13-9}$$

Il en résulte que le vecteur X^β et le scalaire

$$n = q - \frac{a^2}{l^\alpha l_\alpha} \alpha \tag{13-10}$$

sont invariants par $\boldsymbol{\delta}$. Il en est de même pour le produit scalaire

$$X^\beta V_\beta = W^\beta V_\beta = c^2 a f h^\alpha l_\alpha$$

et par suite pour le scalaire (voir (10-6'))

$$b = f h^\alpha l_\alpha \tag{13-11}$$

Nous notons enfin que dans l'expression :

$$V^\beta = (h^\alpha l_\alpha) v^\beta - \frac{a}{r} t^\beta$$

v^β est temporel et non nul, t^β est spatial et ne peut être nul pour $| h | \neq 0$ puisque :

$$t^\beta V_\beta = h^\beta V_\beta = \frac{a}{r} | h |^2$$

Ainsi V^β et v^β ne sont pas colinéaires. Si $\alpha \neq 0$, V^β et X^β ne sont pas colinéaires et définissent un *2-plan* π_x, *en* $x \in \Sigma$, *invariant par* $\boldsymbol{\delta}$ *et contenant les composantes tangentielles de la vitesse du fluide et du champ magnétique.*

Pour que $\alpha = 0$, il faut et il suffit que :

$$\left(c^2 \frac{f}{r} + \mu \frac{| h |^2}{r^2}\right) (r u^\alpha l_\alpha)^2 - \mu (h^\alpha l_\alpha)^2 = 0 \tag{13-12}$$

c'est-à-dire que Σ soit onde d'Alfven.

14. — Étude de la direction du vecteur N^β.

a) Soit φ une solution de l'équation aux ondes magnétosoniques (10-11) satisfaisant aux hypothèses du § 10; en particulier on a $\gamma > 1$ et

$$c^2 r f (u^\alpha l_\alpha)^2 + \mu | h |^2 l^\rho l_\rho \neq 0$$

Il en résulte que $\alpha \neq 0$.

Nous allons transformer l'équation (10-11) en y introduisant certaines des variables et certains des invariants mis en évidence au § 13. Il vient ainsi pour cette équation :

$$c^2 \tau \frac{a^2}{r^2} (\gamma - 1) + \left(c^2 \tau + \mu \frac{| h |^2}{r^2} \gamma\right) l^\rho l_\rho - \mu \frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{a^2} l^\rho l_\rho = 0 \tag{14-1}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{r^2} (c^2 a^2 \tau + \mu | h |^2 l^\rho l_\rho)(\gamma - 1) + \left(c^2 \tau + \mu \frac{| h |^2}{r^2} - \mu \frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{a^2}\right) l^\rho l_\rho = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{r^2}(c^2a^2\tau + \mu\,|\,h\,|^2 l^\rho l_\rho)(\gamma - 1) + \alpha l^\rho l_\rho = 0$$

Nous obtenons ainsi :

$$(\gamma - 1) = - \frac{r^2 l^\rho l_\rho}{c^2a^2\tau + \mu\,|\,h\,|^2 l^\rho l_\rho}\,\alpha \tag{14-2}$$

b) Transformons de même l'expression du vecteur N^β qui donne la direction du rayon :

$$N^\beta = 2c^2 r f(\gamma - 1)(u^\alpha l_\alpha)^3 v^\beta + (c^2 r f + \mu\,|\,h\,|^2\,\gamma)(u^\alpha l_\alpha)(l^\rho l_\rho)v^\beta - \mu(h^\alpha l_\alpha)(l^\rho l_\rho)t^\beta$$

Ce vecteur est manifestement situé dans le *2-plan invariant* π_x et nous allons le rapporter aux vecteurs invariants X^β et V^β. On peut d'abord écrire :

$$N^\beta = 2c^2 r(\gamma - 1)\frac{a^2}{r^2}arv^\beta + \left(c^2\tau + \mu\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\gamma\right)(l^\rho l_\rho)arv^\beta - \mu(h^\alpha l_\alpha)l^\rho l_\rho t^\beta$$

Compte tenu de :

$$t^\beta = \frac{r}{a}(h_\alpha l^\alpha)v^\beta - \frac{r}{a}V^\beta$$

il vient :

$$N^\beta = \left\{2c^2\tau\frac{a^2}{r^2}(\gamma - 1) + \left(c^2\tau + \mu\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\gamma\right)l^\rho l_\rho - \mu\frac{(h^\alpha l_\alpha)^2}{a^2}l^\rho l_\rho\right\}arv^\beta + \mu\frac{r}{a}(h^\alpha l_\alpha)l^\rho l_\rho V^\beta$$

Il résulte de (14-1) que :

$$N^\beta = c^2\tau\frac{a^2}{r^2}(\gamma - 1)arv^\beta + \mu\frac{r}{a}(h^\alpha l_\alpha)l^\rho l_\rho V^\beta$$

c'est-à-dire, d'après (14-2),

$$N^\beta = - \frac{c^2a^2\tau l^\rho l_\rho}{c^2a^2\tau + \mu\,|\,h\,|^2 l^\rho l_\rho}\,a\alpha rv^\beta + \mu\frac{r}{a}(h^\alpha l_\alpha)l^\rho l_\rho V^\beta$$

On déduit de (13-9)

$$N^\beta = - \frac{c^2a^2\tau l^\rho l_\rho}{c^2a^2\tau + \mu\,|\,h\,|^2 l^\rho l_\rho}\left(X^\beta - \mu\frac{r}{a}h^\alpha l_\alpha V^\beta\right) + \mu\frac{r}{a}(h^\alpha l_\alpha)l^\rho l_\rho V^\beta$$

La direction de N^β est donc celle du vecteur

$$- c^2a^2\tau X^\beta + \mu \frac{r}{a} (h^\alpha l_\alpha)(2c^2a^2\tau + \mu \mid h \mid^2 l^\rho l_\rho) V^\beta$$

En utilisant $b = f h^\alpha l_\alpha$ et en divisant par τ, on obtient le vecteur colinéaire à N^β :

(14-3) $$M^\beta = - c^2a^2X^\beta + 2\mu \frac{b}{a} QV^\beta$$

où l'on a posé :

(14-4) $$Q = \frac{c^2a^2}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{\mu \mid h \mid^2}{\tau^2} l^\rho l_\rho$$

Pour que la direction de N^β soit invariante par δ il faut et il suffit que :

$$\delta M^\beta = 2\mu \frac{b}{a} \delta QV^\beta = 0$$

Il en est donc en particulier ainsi si $b = 0$, c'est-à-dire si le champ magnétique est tangentiel au point envisagé de Σ.

c) Cherchons à évaluer δQ. Il vient :

(14-5) $$\tau^2\delta Q = - c^2a^2\delta\tau + \frac{1}{2} l^\rho l_\rho \mu \delta \mid h \mid^2 - l^\rho l_\rho \mu \mid h \mid^2 \frac{\delta\tau}{\tau}$$

Or d'après la définition de τ

$$\frac{\delta\tau}{\tau} = \frac{\delta f}{f} - \frac{\delta r}{r} = \frac{\delta f}{f}\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)$$

soit

(14-6) $$\frac{\delta\tau}{\tau} = - (\gamma - 1) \frac{\delta f}{f}$$

D'autre part, d'après l'invariance par δ de n donné par (13-10), on obtient :

$$\delta\left(p + \frac{1}{2} \mu \mid h \mid^2\right) - \frac{c^2a^2}{l^\rho l_\rho} \delta\tau = 0$$

Comme $\delta p = c^2r\delta f$, il vient :

(14-7) $$- c^2a^2\delta\tau + \frac{1}{2} l^\rho l_\rho \mu \delta \mid h \mid^2 + l^\rho l_\rho c^2 r \delta f = 0$$

En tenant compte de (14-7) et (14-6) dans (14-5), on obtient :

(14-8) $$\tau^2\delta Q = l^\rho l_\rho \{ - c^2rf + (\gamma - 1)\mu \mid h \mid^2 \} \frac{\delta f}{f}$$

Pour que δQ soit nul, il faut et il suffit que

$$\gamma = \frac{c^2 r f + \mu \mid h \mid^2}{\mu \mid h \mid^2} \tag{14-9}$$

Nous avons ainsi établi que, contrairement aux résultats concernant les rayons associés aux ondes soniques (en hydrodynamique) et aux ondes d'Alfven (en magnétohydrodynamique), *la direction des rayons associés aux ondes magnétosoniques n'est pas en général invariante par l'opérateur* δ *de discontinuité infinitésimale.*

Il y a invariance seulement si le champ magnétique est tangentiel ou si la relation (14-9) entre les variables thermodynamiques et $\mid h \mid$ est satisfaite. *Cette relation correspond au cas où le cône défini par l'équation* $P(l) = 0$ *admet deux génératrices doubles, c'est-à-dire où l'opérateur* $P(l)$ *n'est pas strictement hyperbolique* [*4 b*, § 40].

A l'approximation classique, la relation (14-9) s'écrit :

$$\mu \mid h \mid^2 = r v_0^2 \tag{14-10}$$

où v_0 est la vitesse des ondes soniques.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Y. Choquet-Bruhat, *Astron. Acta*, t. 6, 1960, p. 354-365.
[*2*] M. Kanwal, *J. Math. Mech.*, t. 15, 1966, p. 279.
[*3*] A. Lichnerowicz, Propagateurs et commutateurs en Relativité générale, Publ. Math. *Inst. Ét. Scient.*, nº 10, 1961, p. 7-9.
[*4*] A. Lichnerowicz, *a*) *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 44-49; *b*) Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics. W. A. Benjamin, New York, 1967 ou Conférences miméographiées, South-west Center of Adv. Stud., 1965.
[*5*] A. Lichnerowicz, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 5, 1966, p. 37-75.
[*6*] Pham-Mau-Quan, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 2, 1965, p. 151-165.
[*7*] G. Pichon, *Thèse*, Paris, 1964.
[*8*] A. Pratelli, *Ann. di Matem. pura e applic.*, t. 69, 1965, p. 41-88.
[*9*] R. Polovin, *Sov. Phys. Usp.*, t. 2, 1961, p. 677-688.
[*10*] A. H. Taub, *Phys. Rev.*, t. 74, 1948, p. 328-334.

(Manuscrit reçu le 29 mai 1967).