

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARIE-CLAIRE BARTHÉLEMY

Contribution à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac. I

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, n° 4 (1967), p. 365-393

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_4_365_0

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Contribution à l'étude de la diffusion
par un potentiel central
dans la théorie de l'électron de Dirac. I.**

par

Marie-Claire BARTHÉLEMY
(Institut Henri Poincaré).

SOMMAIRE. — Cet article constitue la première partie d'un travail d'ensemble consacré à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac.

Après avoir examiné les propriétés des fonctions propres $f^{(\alpha,m)}(\theta, \varphi)$ de l'opérateur $U = \alpha_4[(\vec{L} \cdot \vec{\sigma}) + \hbar]$, nous montrons que le système orthonormé des $f^{(\alpha,m)}(\theta, \varphi)$ vérifie une relation de Parseval. Le développement de la partie stationnaire de l'onde plane $a(\vec{k})e^{ikz}$ sur les fonctions propres de U et la méthode des déphasages nous permettent ensuite d'obtenir une expression simple de la section efficace de diffusion et de l'amplitude de diffusion. L'approximation de Born pour les déphasages ainsi que le théorème optique sont discutés.

ABSTRACT. — This is the first of three articles about a study of potential scattering in the Dirac electron theory.

In this part, the eigenfunctions $f^{(\alpha,m)}(\theta, \varphi)$ of the operator $U = \alpha_4[(\vec{L} \cdot \vec{\sigma}) + \hbar]$ are investigated. We prove that these eigenfunctions form a complete set in the sense that we can simultaneously expand four arbitrary functions of θ and φ in terms of them. The expansion of the time-independent plane wave part $a(\vec{k})e^{ikz}$ in terms of eigenfunctions of U and the phase-shifts method allow us to obtain a simple expression of the scattering cross-section and of the scattering amplitude. Born approximation is then studied for the phase-shifts. The application at the optical theorem conclude this article.

De nombreux ouvrages ont été consacrés à l'étude de la diffusion d'une particule par un champ potentiel central. Ces travaux ont été réunis essentiellement dans le cas non relativiste par N. F. Mott et H. S. W. Massey [1], H. S. W. Massey [2], Wu et Ohmura [3] qui donnent de nombreuses références.

Notre but a été de reprendre cette étude dans le cas relativiste, plus exactement dans le cas de l'électron de Dirac en interaction avec un potentiel électrostatique central.

Plusieurs auteurs ont déjà étudié ce problème notamment G. Parzen [4], Tietz [5] dans le cas d'un potentiel central quelconque et D. M. Fradkin, T. A. Weber, C. L. Hammer [6], R. L. Gluckstern et S. R. Lin [7], A. Baker [8] dans le cas du potentiel coulombien.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques points de la théorie de l'électron de Dirac et nous mettons en évidence un système de fonctions des variables angulaires θ et φ à quatre composantes, orthonormé complet, qui nous sera utile dans la suite.

Le second chapitre est consacré à la méthode des déphasages. Cette méthode a été introduite en mécanique quantique par Faxen et Holtzmark [9] et est analogue à une méthode employée par Lord Rayleigh dans la théorie classique de la diffusion. Elle fut d'abord appliquée à l'équation de Dirac par Mott [10] dans le calcul de la diffusion coulombienne des électrons rapides. Reprise par Parzen [4] pour l'électron dans un champ électrique, elle utilise des développements sur les fonctions de Legendre $P_l^m(\cos \theta)$ comme dans le cas de l'équation de Schrödinger, chaque composante de la fonction d'onde étant développée séparément.

En théorie de Dirac, puisque le moment cinétique orbital \vec{L} n'est plus une intégrale première, il nous a semblé préférable de substituer au nombre quantique orbital l le nombre quantique κ , $-\kappa$ valeur propre de l'opérateur $U = \alpha_4(\vec{L} \cdot \vec{\sigma} + \hbar)$, U étant intégrale première [11].

Les fonctions d'ondes seront développées sur le système orthonormé complet de fonctions propres de U mis en évidence dans le premier chapitre. Ceci nous conduira à une expression de la section efficace de diffusion, de l'amplitude de diffusion, au théorème optique et à l'approximation de Born pour les déphasages.

Dans un troisième et un quatrième chapitre, nous étudierons les propriétés des fonctions d'ondes radiales et d'autres quantités en rapport avec l'analyse en ondes partielles de la théorie de la diffusion, comme fonction de la quantité de mouvement réduite k .

Cette étude a été faite par R. G. Newton [12] dans le cas de l'équation non relativiste de Schrödinger. Nous la développerons dans le cas de l'équation relativiste de Dirac.

Les chapitre I et II constituent la première partie de notre travail.

Les chapitres III et IV feront l'objet d'une seconde partie.

I. — FORMALISME GÉNÉRAL

Considérons un faisceau de particules incidentes se propageant dans la direction de l'axe Oz, tombant sur un centre diffuseur situé à l'origine des coordonnées.

Ces particules sont décrites par l'équation de Dirac :

$$i \frac{\partial \Psi_j(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \mu \alpha_4 + V(r)]_{jl} \Psi_l(\vec{x}, t), \quad (j, l = 1, 2, 3, 4),$$

dans laquelle nous avons utilisé les unités $\hbar = c = 1$ ($\vec{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$, μ est la masse réduite, les matrices α_λ sont telles que $\alpha_\lambda \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\lambda = 2\delta_{\lambda\nu}$, $\lambda, \nu = 1, 2, 3, 4$).

$V(r)$ est un potentiel dépendant seulement de r et tendant vers zéro plus vite que $\frac{1}{r^2}$ quand r tend vers $+\infty$.

Si toutes les particules du faisceau incident ont la même masse et la même vitesse initiale \vec{v} , on peut représenter la partie indépendante du temps de l'onde plane, solution du cas $V = 0$, par $a_\lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, $a_\lambda(\vec{k})$ étant un spineur à quatre composantes ($\lambda = 1, 2, 3, 4$).

Si les électrons diffusés sont représentés par une onde sphérique divergente, qui, à grandes distances du diffuseur, a la forme $g_\lambda(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$, ($g_\lambda(\theta, \varphi)$ étant un spineur à quatre composantes), la section efficace différentielle est alors :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{\sum_{\lambda=1}^4 |g_\lambda(\theta, \varphi)|^2}{\sum_{\lambda=1}^4 |a_\lambda|^2}.$$

Par suite, pour déterminer la section efficace différentielle, nous devons chercher une solution de l'équation de Dirac stationnaire pour le mouvement d'électrons d'énergie E dans un champ d'énergie potentielle $V(r)$, possédant le comportement asymptotique :

$$\Psi_{\lambda}(\vec{r}) = a_{\lambda}(\vec{k})e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} g_{\lambda}(\theta, \varphi), \quad \text{avec} \quad \lambda = 1, 2, 3, 4.$$

1. Séparation des variables.

Nous suivons ici une méthode due à Dirac [11] et développée par Temple [13], Sauter [14] et Sommerfeld [15].

Le potentiel étant statique, nous pouvons considérer les fonctions d'ondes de la forme $\Psi_{\lambda}(\vec{x}, t) = \Psi_{\lambda}(r, \theta, \varphi)e^{-iEt}$. L'équation de Dirac indépendante du temps s'écrit :

$$(I-1) \quad [E - (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) - \mu\alpha_4]_{\lambda\nu} \Psi_{\nu}(\vec{r}) = V(r)\Psi_{\lambda}(\vec{r}); \quad (\lambda \text{ et } \nu = 1, 2, 3, 4),$$

ou encore $H\Psi = E\Psi$ avec $H = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \mu\alpha_4 + V(r)$.

Nous savons [11] que l'opérateur $U = \alpha_4(\vec{L} \cdot \vec{\sigma} + 1)$ est intégrale première et que

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) = \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{\alpha}}{r} \right) \left(p_r - \frac{i}{r} \right) + \left(\frac{\vec{x} \cdot i\alpha\alpha_4}{r} \right) \frac{U}{r} \quad \text{avec} \quad p_r = -i \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{r}.$$

Soit $\Psi^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi)$ une solution de l'équation (I-1) pour laquelle :

$$U\Psi^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi) = -\kappa\Psi^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi).$$

L'équation (I-1) s'écrit :

$$(E - V)\Psi^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi) = \left[\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{\alpha}}{r} \right) \left(p_r - \frac{i}{r} \right) - \left(i \frac{\vec{x} \cdot \vec{\alpha}\alpha_4}{r} \right) \frac{\kappa}{r} + \mu\alpha_4 \right] \Psi^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi),$$

en appelant :

$$\rho_3 = \alpha_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}; \quad \rho_2 = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{\alpha})}{r}; \quad \rho_1 = \frac{-i(\vec{x} \cdot \vec{\alpha})\alpha_4}{r},$$

on remarque que $\rho_p'^2 = \mathbf{I}$; $\rho_p'\rho_q' = i\rho_r'$; $\rho_p'\rho_q' + \rho_q'\rho_p' = 0$ ($p \neq q$) et, par suite, il existe une transformation unitaire S telle que $S^{-1}\rho_p'S = \rho_p$; les matrices ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant respectivement :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbf{I} \\ i\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_3 = \alpha_4,$$

I désignant la matrice unité à 2 lignes et 2 colonnes, on a :

$$S = \frac{1 + \alpha_4}{2} - i \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{\sigma}}{r} \right) \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right).$$

Si on pose $\Psi^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi) = S\Psi'^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi)$ on obtient alors :

$$(E - V)\Psi'^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi) = \left[\rho_2 \left(p_r - \frac{i}{r} \right) + \rho_1 \frac{\kappa}{r} + \mu \rho_3 \right] \Psi'^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi).$$

On remarque que l'opérateur du second membre ne fait intervenir que la variable r . On peut donc écrire : $\Psi'_\lambda{}^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi) = \Psi'_\lambda{}^{(\kappa)}(r) \Psi'_\lambda{}^{(\kappa)}(\theta, \varphi)$. Les fonctions $\Psi'_\lambda{}^{(\kappa)}(\theta, \varphi)$ sont les transformées des fonctions propres orthonormées de U par une transformation unitaire. En multipliant à gauche par $\Psi'^{(\kappa)*t}(\theta, \varphi)$ (* désignant la conjugaison complexe et t la transposition), en intégrant sur les angles et en revenant à $\Psi^{(\kappa)}$ on trouve que :

$$(I-2) \quad \Psi^{(\kappa)}(r, \theta, \varphi) = \left[G_\kappa(r) \frac{1 + \alpha_4}{2} + F_\kappa(r) \frac{1 - \alpha_4}{2} \right] f^{(\kappa)}(\theta, \varphi),$$

$f^{(\kappa)}(\theta, \varphi)$ étant fonctions propres orthonormées de U et F_κ et G_κ vérifiant le système :

$$(I-3) \quad \begin{aligned} (E - V - \mu)G_\kappa(r) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} \right) F_\kappa(r) &= 0 \\ (E - V + \mu)F_\kappa(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} \right) G_\kappa(r) &= 0. \end{aligned}$$

2. Fonctions propres de U.

Soit $f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi)$ une fonction propre de U pour la valeur propre $-\kappa$ telle que :

$$\begin{aligned} Uf^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi) &= -\kappa f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi), \\ M_z f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi) &= \left(m + \frac{1}{2} \right) f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

M_z étant la composante sur Oz du moment cinétique total $\vec{M} = \vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}$, κ prenant les valeurs entières positives et négatives, $\kappa \neq 0$. En écrivant :

$$\begin{aligned} Uf^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi) &= \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) (\vec{L} \cdot \vec{\sigma} + 1) - \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) (\vec{L} \cdot \vec{\sigma} + 1) \right] f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi) \\ &= -\kappa f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que α_4 commute avec $\vec{L} \cdot \vec{\sigma}$, on trouve les fonctions propres suivantes :

$$\begin{aligned} x > 0, f^{(x,m)}(\theta, \varphi) &= \begin{bmatrix} c_1 Y_x^m(\theta, \varphi) \\ -c_1 \left(\frac{x+m+1}{x-m}\right)^{\frac{1}{2}} Y_x^{m+1}(\theta, \varphi) \\ c_3 Y_{x-1}^m(\theta, \varphi) \\ c_3 \left(\frac{x-m-1}{x+m}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{x-1}^{m+1}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}; \\ x < 0, f^{(x,m)}(\theta, \varphi) &= \begin{bmatrix} C_1 Y_{|x|-1}^m(\theta, \varphi) \\ C_1 \left(\frac{|x|-m-1}{|x|+m}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{|x|-1}^{m+1}(\theta, \varphi) \\ C_3 Y_{|x|}^m(\theta, \varphi) \\ -C_3 \left(\frac{|x|+m+1}{|x|-m}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{|x|}^{m+1}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

les harmoniques sphériques orthonormées $Y_x^m(\theta, \varphi)$ étant définies par

$$Y_x^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \left(\frac{2x+1}{4\pi} \frac{(x-m)!}{(x+m)!}\right)^{\frac{1}{2}} P_x^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

On remarque que $\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ et $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ anticommulent avec U, tandis que α_4 commute avec U. On en déduit donc le fait suivant : si $f^{(x,m)}(\theta, \varphi)$ est fonction propre de U avec la valeur propre $-x$, $\rho_1 f^{(x,m)}(\theta, \varphi)$ et $\Omega f^{(x,m)}(\theta, \varphi)$ sont fonctions propres avec la valeur propre $+x$, tandis que $\alpha_4 f^{(x,m)}(\theta, \varphi)$ est fonction propre avec la valeur propre $-x$.

Si nous changeons x en $-x$, V en $-V$, E en $-E$ dans (I-3), nous remarquons que $G_{-x} = F_x$ et $F_{-x} = G_x$.

Effectuons le même changement dans (I-1) ; on obtient :

$$[(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \mu \alpha_4 - V + E] \Psi^{(-x)}(\vec{r}) = 0.$$

On passera de (I-1) à cette équation par la transformation unitaire S :

$$\Psi^{(x)}(\vec{r}) = S \Psi^{(-x)}(\vec{r}),$$

S étant telle que $S^{-1} \alpha_\mu S = -\alpha_\mu$.

La matrice $S = e^{i\zeta} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ est une matrice convenable, la phase ζ étant

arbitraire dans la représentation adoptée, en prenant $\zeta = \frac{\pi}{2}$, nous aurons la matrice S réelle :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, connaissant $\Psi^{(\kappa)}(\vec{r})$ pour κ positif, nous en déduisons $\Psi^{(\omega)}(\vec{r})$ pour κ négatif et en utilisant la remarque concernant $F_{-\kappa}$ et $G_{-\kappa}$ nous obtenons :

$$c_1(\kappa) = C_3(|\kappa|) \quad \text{et} \quad c_3(\kappa) = -C_1(|\kappa|).$$

Les fonctions propres de U , $f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi)$ devant être normées à l'unité sur la sphère de rayon 1 :

$$(I-4) \quad \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(\kappa,m)*}(\theta, \varphi) f^{(\kappa',m')}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{mm'}.$$

Ceci implique : $|c_1| = \left(\frac{\kappa - m}{2(2\kappa + 1)}\right)^{\frac{1}{2}}$, $|c_3| = \left(\frac{\kappa + m}{2(2\kappa - 1)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Nous avons

$$c_1 = |c_1| e^{i\beta}, \quad c_3 = |c_3| e^{i\gamma}.$$

De plus l'opération U étant hermitien, nous en déduisons que $\cos(\beta - \gamma) = 0$ d'où

$$\beta - \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Finalement les fonctions propres orthonormées de U seront les suivantes :

$$(I-5) \quad \begin{aligned} \kappa > 0, f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\kappa - m}{2(2\kappa + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_\kappa^m(\theta, \varphi) \\ - \left(\frac{\kappa + m + 1}{2(2\kappa + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_\kappa^{m+1}(\theta, \varphi) \\ - i \left(\frac{\kappa + m}{2(2\kappa - 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{\kappa-1}^m(\theta, \varphi) \\ - i \left(\frac{\kappa - m - 1}{2(2\kappa - 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{\kappa-1}^{m+1}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}; \\ \kappa < 0, f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi) &= \begin{bmatrix} i \left(\frac{|\kappa| + m}{2(2|\kappa| - 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{|\kappa|-1}^m(\theta, \varphi) \\ i \left(\frac{|\kappa| - m - 1}{2(2|\kappa| - 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{|\kappa|-1}^{m+1}(\theta, \varphi) \\ \left(\frac{|\kappa| - m}{2(2|\kappa| + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{|\kappa|}^m(\theta, \varphi) \\ - \left(\frac{|\kappa| + m + 1}{2(2|\kappa| + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{|\kappa|}^{m+1}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En plus de la relation d'orthogonalité (I-4), les fonctions $f^{(\alpha, m)}(\theta, \varphi)$ vérifient aussi :

$$(I-6) \quad \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(\alpha', m')} * I(\theta, \varphi) \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) f^{(\alpha, m)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{mm'}}{2},$$

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(\alpha', m')} * I(\theta, \varphi) \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) f^{(\alpha, m)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{mm'}}{2}.$$

3. Relation de fermeture des fonctions propres de U.

Titchmarsh [16] a montré que les fonctions d'ondes de Dirac forment un système complet. Les $f^{(\alpha, m)}(\theta, \varphi)$ formant un système orthonormé sur la sphère unité, une condition suffisante pour que ce système soit complet est que nous puissions écrire une relation de Parseval. Suivant Titchmarsh, nous rappellerons que : si $\Phi(\theta, \varphi)$ est une fonction de θ et φ possédant un développement en séries de Fourier, on peut écrire :

$$(I-7) \quad \Phi(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c^{(m)}(\theta) e^{im\varphi},$$

avec les coefficients

$$c^{(m)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(\theta, \varphi') e^{-im\varphi'} d\varphi',$$

et la formule de Parseval :

$$(I-8) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} |\Phi(\theta, \varphi)|^2 d\varphi = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c^{(m)}(\theta)|^2.$$

Le développement de Legendre de $c^{(m)}(\theta)$ est :

$$(I-9) \quad c^{(m)}(\theta) = \sum_{l=|m|}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} d^{(m, l)} P_l^m(\cos \theta),$$

$$(I-10) \quad \text{où } d^{(m, l)} = \int_0^\pi c^{(m)}(\theta') P_l^m(\cos \theta') \sin \theta' d\theta'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(\theta', \varphi') P_l^m(\cos \theta') e^{-im\varphi'} \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

La formule de Parseval correspondante est :

$$(I-11) \quad \int_0^\pi |c^{(m)}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \sum_{l=|m|}^\infty \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} |d^{(m,l)}|^2.$$

De (I-7) et (I-9), nous déduisons :

$$\Phi(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} d^{(m,l)} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

avec la formule de Parseval correspondante déduite de (I-8), (I-11) :

$$(I-12) \quad \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} |\Phi(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \pi \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} (2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} |d^{(m,l)}|^2.$$

La série converge vers $\Phi(\theta, \varphi)$ si Φ est continue en (θ, φ) , ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre.

Soit $\Psi(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(\theta, \varphi) \\ \Psi_2(\theta, \varphi) \\ \Psi_3(\theta, \varphi) \\ \Psi_4(\theta, \varphi) \end{bmatrix}$ une fonction arbitraire à quatre composantes de carré sommable sur la sphère.

Soit $\Gamma^{(\alpha, m)} = a^{(\alpha, m)} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + b^{(\alpha, m)} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right)$, $a^{(\alpha, m)}$ et $b^{(\alpha, m)}$ étant définis de la façon suivante :

$$a^{(\alpha, m)} = 2 \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(\alpha, m)*l}(\theta, \varphi) \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) \Psi(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$b^{(\alpha, m)} = 2 \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(\alpha, m)*l}(\theta, \varphi) \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \Psi(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Nous allons calculer $\sum_{\alpha, m} (|a^{(\alpha, m)}|^2 + |b^{(\alpha, m)}|^2)$.

Pour $\alpha > 0$, en utilisant (I-10) :

$$a^{(\alpha, m)} = (-1)^m \left(\frac{(\alpha - m - 1)!}{(\alpha + m)!} 2\pi\right)^{\frac{1}{2}} [(\alpha - m) a_1^{(m, \alpha)} + a_2^{(m+1, \alpha)}],$$

pour $\alpha < 0$:

$$a^{(\alpha, m)} = (-1)^{m+1} i \left(2\pi \frac{(|\alpha| - m - 1)!}{(|\alpha| + m)!}\right)^{\frac{1}{2}} [(|\alpha| + m) a_1^{(m, |\alpha|-1)} - a_2^{(m+1, |\alpha|-1)}].$$

De même pour $b^{(x,m)}$:

$$\begin{aligned} x > 0, \quad b^{(x,m)} &= (-1)^m i \left(2\pi \cdot \frac{(x-m-1)!}{(x+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} [(\chi+m)d_3^{(m,x-1)} - d_4^{(m+1,x-1)}], \\ x < 0, \quad b^{(x,m)} &= (-1)^m \left(2\pi \cdot \frac{(|x|-m-1)!}{(|x|+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} [(|x|-m)d_3^{(m,|x|)} + d_4^{(m+1,|x|)}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x,m} (|a^{(x,m)}|^2 + |b^{(x,m)}|^2) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{m=-x}^{x-1} \frac{(x-m-1)!}{(x+m)!} 2\pi \\ & \quad [|(\chi-m)d_1^{(m,x)} + d_2^{(m+1,x)}|^2 + |(\chi+m)d_3^{(m,x-1)} - d_4^{(m+1,x-1)}|^2] \\ &+ \sum_{|x|=1}^{\infty} \sum_{m=-|x|}^{|x|-1} \frac{(|x|-m-1)!}{(|x|+m)!} 2\pi \\ & \quad [|(|x|+m)d_1^{(m,|x|-1)} - d_2^{(m+1,|x|-1)}|^2 + |(|x|-m)d_3^{(m,|x|)} + d_4^{(m+1,|x|)}|^2] \end{aligned}$$

ce qui s'écrit en réunissant les termes en d_1, d_2 et ceux en d_3, d_4 et en remplaçant $(|x|-1)$ par x dans les termes en $d_1^{(m,|x|-1)}, d_3^{(m, x-1)}$, et avec $d_4^{(x+1, x)} = 0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{m=-x}^{x-1} 2\pi \frac{(x-m-1)!}{(x+m)!} [|(\chi-m)d_1^{(m,x)} + d_2^{(m+1,x)}|^2 + |(\chi-m)d_3^{(m,x)} + d_4^{(m+1,x)}|^2] \\ &+ \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{m=-x-1}^x 2\pi \frac{(x-m)!}{(x+m+1)!} \\ & \quad [|(\chi+m+1)d_1^{(m,x)} - d_2^{(m+1,x)}|^2 + |(\chi+m+1)d_3^{(m,x)} - d_4^{(m+1,x)}|^2]. \end{aligned}$$

Si $x \geq 1, -x \leq m \leq x-1$, le coefficient de $|d_1^{(m,x)}|^2$ s'écrit :

$$2\pi \frac{(x-m-1)!}{(x+m)!} (x-m)^2 + 2\pi \frac{(x-m)!}{(x+m+1)!} (x+m+1)^2 = 2\pi \frac{(x-m)!}{(x+m)!} (2x+1).$$

Ceci est également vrai si $m = x$, de plus $d_1^{(-x-1, x)} = 0$ et le coefficient de $|d_1^{(0,0)}|^2$ est nul.

Si $x \geq 1, -x \leq m \leq x-1$, le coefficient de $|d_2^{(m+1,x)}|^2$ est :

$$2\pi \frac{(x-m-1)!}{(x+m)!} + 2\pi \frac{(x-m)!}{(x+m+1)!} = 2\pi(2x+1) \frac{(x-m-1)!}{(x+m+1)!}.$$

Ceci est également vrai si $m = -x - 1$ et si $x = 0, m = -1$. Le terme en $(d_1^* d_2 + d_1 d_2^*)$ disparaît :

$$2\pi \frac{(x - m - 1)!}{(x + m)!} (x - m) - 2\pi \frac{(x - m)!}{(x + m + 1)!} (x + m + 1) = 0.$$

Nous avons les mêmes résultats pour les coefficients de $|d_3^{(m,x)}|^2$ et $|d_4^{(m+1,x)}|^2$ et finalement, il reste :

$$\begin{aligned} \sum_{x,m} (|a^{(x,m)}|^2 + |b^{(x,m)}|^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{m=-x}^{+x} 2\pi \frac{(x - m)!}{(x + m)!} (2x + 1) |d_1^{(m,x)}|^2 \\ &+ \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{m=-x-1}^{x-1} 2\pi(2x + 1) \frac{(x - m - 1)!}{(x + m + 1)!} |d_2^{(m+1,x)}|^2 \\ &+ \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{m=-x}^{+x} 2\pi \frac{(x - m)!}{(x + m)!} (2x + 1) |d_3^{(m,x)}|^2 \\ &+ \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{m=-x-1}^{x-1} 2\pi(2x + 1) \frac{(x - m - 1)!}{(x + m + 1)!} |d_4^{(m+1,x)}|^2, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit d'après (I-12) :

$$2 \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} [|\Psi_1(\theta, \varphi)|^2 + |\Psi_2(\theta, \varphi)|^2 + |\Psi_3(\theta, \varphi)|^2 + |\Psi_4(\theta, \varphi)|^2] \sin \theta d\theta d\varphi = 2 \langle \Psi, \Psi \rangle.$$

Nous obtenons ainsi la relation de Parseval :

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x,m} [|a^{(x,m)}|^2 + |b^{(x,m)}|^2].$$

Les fonctions $\Psi(\theta, \varphi)$ doivent être telles que chaque composante vérifie séparément les conditions de convergence du développement de Fourier-Legendre, c'est-à-dire doit être continue et avoir des dérivées jusqu'au second ordre continues.

On a alors le développement :

$$\Psi(\theta, \varphi) = \sum_{x,m} \left[a^{(x,m)} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) + b^{(x,m)} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right] f^{(x,m)}(\theta, \varphi).$$

II. — MÉTHODE DES DÉPHASAGES

L'onde plane en propagation dans la direction de l'axe Oz avec spin dans la direction d'incidence, normalisée sur la sphère unité s'écrit :

$$(II-1) \quad a(k)e^{ikz} = \left(\frac{E+\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \\ E+\mu \\ 0 \end{bmatrix} e^{ikz}.$$

1. Développement de $a(k)e^{ikz}$ sur les fonctions propres de U.

Écrivons :

$$a(k) = \left(\frac{E+\mu}{2E} \cdot \frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + \frac{k}{E+\mu} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notre développement s'exprime par :

$$a_\lambda(k)e^{ikz} = \sum_{\alpha, m} \left[a^{(\alpha, m)} \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)_{\lambda\nu} + b^{(\alpha, m)} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)_{\lambda\nu} \right] f_\nu^{(\alpha, m)}(\theta, \varphi),$$

avec :

$$a^{(\alpha, m)} = 2 \left(\frac{E+\mu}{2E} \cdot \frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(\alpha, m)*\iota}(\theta, \varphi) \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$b^{(\alpha, m)} = 2 \left(\frac{E+\mu}{2E} \cdot \frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k}{E+\mu} \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(\alpha, m)*\iota}(\theta, \varphi) \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

ce qui nous donne en utilisant les expressions de $f^{(\alpha, m)}(\theta, \varphi)$ données en (I-5) et la relation :

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta = 2i^l j_l(kr),$$

[j_l étant la fonction de Bessel sphérique, $j_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$],

$$a^{(\alpha, m)} = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq 0 \quad \forall \alpha \text{ positif ou négatif,} \\ \left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} (2\alpha)^{\frac{1}{2}} i^{\alpha} j_{\alpha}(k\alpha) & \text{si } \alpha > 0, \quad m = 0, \\ -\left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} (2|\alpha|)^{\frac{1}{2}} i^{|\alpha|} j_{|\alpha|-1}(k|\alpha|) & \text{si } \alpha < 0, \quad m = 0, \end{cases}$$

$$b^{(\alpha, m)} = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq 0 \quad \forall \alpha \text{ positif ou négatif,} \\ \left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k}{E + \mu} (2\alpha)^{\frac{1}{2}} i^{\alpha} j_{\alpha-1}(k\alpha) & \text{si } \alpha > 0, \quad m = 0, \\ \left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k}{E + \mu} (2|\alpha|)^{\frac{1}{2}} i^{|\alpha|} j_{|\alpha|}(k|\alpha|) & \text{si } \alpha < 0, \quad m = 0. \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$(II-2) \quad a(k)e^{ikz} = \sum_{\alpha > 0} \left(\frac{E + \mu}{2E} \cdot 2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} i^{\alpha} \left[j_{\alpha}(k\alpha) \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + \frac{k}{E + \mu} j_{\alpha-1}(k\alpha) \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] f^{(\alpha, 0)}(\theta, \varphi) + \sum_{\alpha < 0} \left(\frac{E + \mu}{2E} \cdot 2|\alpha|\right)^{\frac{1}{2}} i^{|\alpha|} \left[-j_{|\alpha|-1}(k|\alpha|) \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + \frac{k}{E + \mu} j_{|\alpha|}(k|\alpha|) \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] f^{(\alpha, 0)}(\theta, \varphi).$$

2. Amplitude de diffusion.

Puisque nous étudions la diffusion d'un électron incident avec spin dans la direction d'incidence, nous allons considérer, suivant en cela Mott et Massey [1], une série infinie des fonctions d'ondes associées à des valeurs de α positives ou négatives, de forme asymptotique donnée :

$$(II-3) \quad \Psi_{\lambda} \sim a_{\lambda}(k)e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} g_{\lambda}(\theta, \varphi).$$

La direction du spin nous donne un moment cinétique total dans la direction Oz, donc $m = 0$. Soit

$$\Psi = \sum_{\alpha = -\infty}^{+\infty} \left[G_{\alpha}(r) \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + F_{\alpha}(r) \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] f^{(\alpha, 0)}(\theta, \varphi) e^{i\left(\tau_{\alpha} + \frac{|\alpha|\pi}{2}\right)} (2|\alpha|)^{\frac{1}{2}} \quad \text{cette série.}$$

Les fonctions $F_x(r)$ et $G_x(r)$ sont solutions du système (I-3). Si $V(r)$ tend vers zéro plus vite que $\frac{1}{r^2}$ à l'infini, alors les fonctions $F_x(r)$ et $G_x(r)$ ont les comportements asymptotiques suivants :

$$\begin{cases}
 x > 0 \\
 x < 0
 \end{cases}
 \begin{cases}
 F_x(r) \sim \left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k}{E + \mu} \frac{\cos \left[kr - \frac{x\pi}{2} + \eta_x \right]}{kr} \\
 G_x(r) \sim \left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \left[kr - \frac{x\pi}{2} + \eta_x \right]}{kr}; \\
 F_x(r) \sim \left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k}{E + \mu} \frac{\sin \left[kr + \frac{x\pi}{2} + \eta_x \right]}{kr} \\
 G_x(r) \sim - \left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \left[kr + \frac{x\pi}{2} + \eta_x \right]}{kr},
 \end{cases}$$

η_x représentant un déphasage associé au potentiel.

Par suite, en réunissant les termes en e^{ikr} et les termes en e^{-ikr} , Ψ a le comportement asymptotique :

$$\begin{aligned}
 \Psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} & \sum_{x > 0} \left(2x \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{i(kr + 2\eta_x)}}{2ikr} \mathcal{A} - \frac{e^{-i(kr - x\pi)}}{2ikr} \mathcal{B} \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi) \\
 & + \sum_{x < 0} \left(2|x| \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{e^{i(kr + 2\eta_x)}}{2kr} \mathcal{A} - \frac{e^{-i(kr + x\pi)}}{2kr} \mathcal{B} \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi),
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \frac{1 + \alpha_4}{2} + i \frac{k}{E + \mu} \frac{1 - \alpha_4}{2} \\
 \mathcal{B} &= \frac{1 + \alpha_4}{2} - i \frac{k}{E + \mu} \frac{1 - \alpha_4}{2}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs le comportement asymptotique du développement (II-2) étant

$$\begin{aligned}
 a_x(k) e^{ikz} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} & \sum_{x > 0} \left(2x \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{ikr}}{2ikr} \mathcal{A} - \frac{e^{-i(kr - x\pi)}}{2ikr} \mathcal{B} \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi) \\
 & + \sum_{x < 0} \left(2|x| \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{e^{ikr}}{2kr} \mathcal{A} - \frac{e^{-i(kr - |x|\pi)}}{2kr} \mathcal{B} \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi),
 \end{aligned}$$

\mathcal{A} et \mathcal{B} étant définis ci-dessus.

Nous avons donc :

$$\Psi \sim a(k)e^{ikz}$$

$$+ \sum_{\substack{r \rightarrow \infty \\ x > 0}} \left(2x \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{ikr}}{2ikr} (e^{2i\eta_x} - 1) \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) + \frac{ik}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi)$$

$$+ \sum_{x < 0} \left(2|x| \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{ikr}}{2kr} (1 - e^{2i\eta_x}) \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) + \frac{ik}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi).$$

La forme asymptotique de Ψ devant être donnée par (II-3), nous déduisons de l'expression précédente l'amplitude de diffusion :

(II-4)

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{x > 0} \left(2x \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2i\eta_x} - 1}{-2ik} \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) + \frac{ik}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi)$$

$$+ \sum_{x < 0} \left(2|x| \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 - e^{2i\eta_x}}{2k} \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) + \frac{ik}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right] f^{(x,0)}(\theta, \varphi).$$

Nous pouvons maintenant calculer la section efficace totale :

$$\sigma = \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} I(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sum_{\lambda=1}^4 |g_\lambda(\theta, \varphi)|^2}{\sum_{\lambda=1}^4 |a_\lambda|^2} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

En remarquant que : $\sum_{\lambda=1}^4 |g_\lambda(\theta, \varphi)|^2 = g^{*t}(\theta, \varphi) \cdot g(\theta, \varphi)$, avec :

$$g^{*t}(\theta, \varphi)$$

$$= \sum_{x > 0} \left(2x \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-2i\eta_x} - 1}{-2ik} \right) f^{*t(x,0)}(\theta, \varphi) \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) - \frac{ik}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right]$$

$$+ \sum_{x < 0} \left(2|x| \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - e^{-2i\eta_x}}{2k} \right) f^{*t(x,0)}(\theta, \varphi) \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) - \frac{ik}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right],$$

on obtient finalement après intégration sur les angles θ et φ et utilisation des relations (I-6) :

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} |x| \sin^2 \eta_x.$$

Nous remarquons immédiatement qu'à l'approximation non relativiste, obtenue en faisant tendre E vers μ , $\kappa = l$ pour $\kappa > 0$, $\kappa = -l - 1$ pour κ négatif, $\eta_l = \eta_{-l-1}$, on retrouve :

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l,$$

qui est l'expression bien connue de la section efficace dans le cas de l'équation de Schrödinger. Quant à l'amplitude de diffusion, on retrouve bien à partir de (II-4) l'amplitude usuelle de diffusion de Schrödinger :

$$g_1(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{2i\eta_l} - 1}{2ik} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (2l+1) P_l(\cos \theta), \quad g_2(\theta) = g_3(\theta) = g_4(\theta) \equiv 0.$$

Le facteur $\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ qui s'introduit ici provient du fait que l'onde plane utilisée a été normalisée à un sur la sphère de rayon unité.

3. Approximation de Born.

Revenons à l'équation de Dirac indépendante du temps :

$$[E - (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) - \mu\alpha_4]_{\lambda\nu} \Psi_{\nu}(\vec{r}) = V(r) \Psi_{\lambda}(\vec{r}).$$

En appliquant à gauche l'opérateur $E + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \mu\alpha_4$, il vient en utilisant les relations :

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 = p^2; \quad \vec{\alpha}\alpha_4 = -\alpha_4\vec{\alpha},$$

$$(\nabla + k^2) \Psi_{\lambda}(\vec{r}) = [E + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \mu\alpha_4]_{\lambda\nu} V(r) \Psi_{\nu}(\vec{r})$$

avec $k^2 = E^2 - \mu^2$.

Soit $a_{\lambda}(\vec{k}_0) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$ une onde plane incidente. En utilisant la fonction de Green

associée au premier membre $-\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ nous obtenons l'équation intégrale :

$$\Psi_{\lambda}(\vec{r}) = a_{\lambda}(\vec{k}_0) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} [E + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}') + \mu\alpha_4]_{\lambda\nu} V(r') \Psi_{\nu}(\vec{r}') d\vec{r}',$$

qui devient en intégrant par parties :

$$(II-5) \quad \Psi_{\lambda}(\vec{r}) = a_{\lambda}(\vec{k}_0) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - [E + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \mu \alpha_4]_{\lambda\nu} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r') \Psi_{\nu}(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

La forme asymptotique de (II-5) qui nous donnera l'amplitude de diffusion est fournie par (II-3) et :

$$g_{\lambda}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} [E + (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) + \mu \alpha_4]_{\lambda\nu} \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} V(r) \Psi_{\nu}(\vec{r}) d\vec{r},$$

où \vec{k} est le vecteur impulsion dans la direction (θ, φ) par rapport à la direction de \vec{k}_0 . Nous avons ainsi une expression générale pour l'amplitude de diffusion. L'approximation de Born sera obtenue à partir de celle-ci en remplaçant $\Psi_{\nu}(\vec{r})$ sous le signe intégral par son approximation d'ordre zéro $a_{\nu}(\vec{k}_0) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$. Il vient :

$$g_{\lambda}(\theta, \varphi)_{\text{BORN}} = -\frac{1}{4\pi} [E + (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) + \mu \alpha_4]_{\lambda\nu} a_{\nu}(\vec{k}_0) \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} V(r) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} d\vec{r},$$

que nous pouvons écrire sous la forme :

$$(II-6) \quad g_{\lambda}(\theta, \varphi)_{\text{BORN}} = \frac{1}{2\mu} [E + (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) + \mu \alpha_4]_{\lambda\nu} a_{\nu}(\vec{k}_0) g_{\text{non rel.}}(\theta),$$

où $g_{\text{non rel.}}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} 2\mu V(r) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} d\vec{r},$

$g_{\text{non rel.}}(\theta)$ représentant l'amplitude de diffusion correspondant à l'approximation de Born pour l'équation non relativiste de Schrödinger. Elle ne dépend que de l'angle θ . Cette expression est bien connue : Massey [2]. En utilisant la représentation habituelle des matrices $\vec{\alpha}, \alpha_4$ et en prenant pour $a(\vec{k}_0)$ le spineur donné en (II-1), l'amplitude de diffusion $g(\theta, \varphi)$ donnée en (II-6) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} g_1(\theta, \varphi) \\ g_2(\theta, \varphi) \\ g_3(\theta, \varphi) \\ g_4(\theta, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{E + \mu}{2\mu} \left(\frac{E + \mu}{2E} \cdot \frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \cos \theta \right) g_{\text{non rel.}}(\theta) \\ \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \sin \theta e^{i\varphi} g_{\text{non rel.}}(\theta) \\ \frac{k}{E + \mu} \left(\cos \theta + \frac{E - \mu}{E + \mu} \right) g_{\text{non rel.}}(\theta) \\ \frac{k}{E + \mu} \sin \theta e^{i\varphi} g_{\text{non rel.}}(\theta) \end{bmatrix}.$$

En comparant avec (II-4) on trouve :

$$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E + \mu}{2\mu} \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + \frac{k}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \cos \theta \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \sin \theta e^{i\varphi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta)$$

$$= \sum_{\alpha > 0} c f^{(\alpha, 0)}(\theta, \varphi) + \sum_{\alpha < 0} d f^{(\alpha, 0)}(\theta, \varphi),$$

avec :

$$c = (2\alpha)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2i\eta\alpha} - 1}{2ik} \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + i \frac{k}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right]$$

$$d = (2|\alpha|)^{\frac{1}{2}} \frac{1 - e^{2i\eta\alpha}}{2k} \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + i \frac{k}{E + \mu} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right].$$

En multipliant à gauche par

$$f^{*i(\alpha', 0)}(\theta, \varphi) \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) - i \frac{E + \mu}{k} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] \sin \theta d\theta d\varphi$$

et en intégrant sur les angles, compte tenu des relations (I-6) on obtient :
pour $\alpha > 0$:

$$(II-7-a) \quad (2\alpha)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2i\eta\alpha} - 1}{2ik} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E + \mu}{2\mu}$$

$$\times \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*i(\alpha, 0)}(\theta, \varphi) \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) - i \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \cos \theta \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \sin \theta e^{i\varphi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

pour $\kappa < 0$:

$$(II-7-b) \quad (2|\kappa|)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2i\pi\kappa} - 1}{2k} = - \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E + \mu}{2\mu} \\ \times \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*r(\kappa,0)}(\theta, \varphi) \left[\left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) - i \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \cos \theta \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \sin \theta e^{i\varphi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Afin de calculer ces intégrales, nous allons développer respectivement :

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta) \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{c} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \cos \theta \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \sin \theta e^{i\varphi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta),$$

sur le système des fonctions $f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi)$. Nous obtenons :

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta) = \sum_{\kappa,m} \left[\beta_1^{(\kappa,m)} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) + \beta_2^{(\kappa,m)} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] f^{(\kappa,m)}(\theta, \varphi),$$

avec :

$$\beta_1^{(\kappa,m)} = 2 \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*r(\kappa,m)}(\theta, \varphi) \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$\beta_2^{(\kappa,m)} = 2 \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*r(\kappa,m)}(\theta, \varphi) \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \end{array} \right] g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

En explicitant les $f^{(\kappa, m)}(\theta, \varphi)$ on obtient :

$$\beta_1^{(\kappa, m)} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq 0 \quad \forall \kappa \text{ positif ou négatif,} \\ \left(\frac{\kappa}{2} \cdot 4\pi\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi P_\kappa(\cos \theta) g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta \text{ pour } \kappa \text{ positif, } m = 0, \\ -i \left(\frac{|\kappa|}{2} \cdot 4\pi\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi P_{|\kappa|-1}(\cos \theta) g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta \text{ pour } \kappa \text{ négatif,} \\ m = 0, \end{cases}$$

$$\beta_2^{(\kappa, m)} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq 0 \quad \forall \kappa \text{ positif ou négatif,} \\ i \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \left(\frac{\kappa}{2} \cdot 4\pi\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi P_{\kappa-1}(\cos \theta) g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta \text{ pour } \kappa > 0, \\ m = 0, \\ \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \left(\frac{|\kappa|}{2} \cdot 4\pi\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi P_{|\kappa|}(\cos \theta) g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta d\theta, \\ \text{pour } \kappa \text{ négatif, } m = 0. \end{cases}$$

Si nous reprenons l'expression $g_{\text{non rel.}}(\theta)$ définie en (II-6) et si nous la développons en série de polynômes de Legendre, [2] Massey, p. 240, nous obtenons :

$$(II-8) \quad g_{\text{non rel.}}(\theta) = -2\mu \int_0^\infty V(r) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [j_n(kr)]^2 P_n(\cos \theta) \right] r^2 dr.$$

En portant ceci dans les expressions de β_1^κ et β_2^κ ci-dessus, nous avons après intégration en θ :

$$\beta_1^{(\kappa, m)} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq 0, \\ (2\kappa \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta_\kappa}{k} \text{ pour } \kappa > 0, m = 0, \\ -i(2|\kappa| \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta_{|\kappa|-1}}{k} \text{ pour } \kappa < 0, m = 0, \end{cases}$$

$$\beta_2^{(\kappa, m)} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq 0, \\ i \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 (2\kappa \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta_{\kappa-1}}{k} \text{ pour } \kappa > 0, m = 0, \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 (2|\kappa| \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta_{|\kappa|}}{k} \text{ pour } \kappa < 0, m = 0, \end{cases}$$

avec :

$$(II-9) \quad \Delta_\kappa = -k \int_0^\infty 2\mu V(r) [j_\kappa(kr)]^2 r^2 dr,$$

et finalement :

$$(II-10) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \end{bmatrix} g_{\text{non rel.}}(\theta) \\ = \sum_{\kappa > 0} \frac{(2\kappa \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}}}{k} \mathcal{C} f^{(\kappa, 0)}(\theta, \varphi) + \sum_{\kappa < 0} -i \frac{(2|\kappa| \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}}}{k} \mathcal{D} f^{(\kappa, 0)}(\theta, \varphi),$$

avec

$$\mathcal{C} = \Delta_{\kappa} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) + i \left(\frac{k}{E + \mu} \right)^2 \Delta_{\kappa-1} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right),$$

$$\mathcal{D} = \Delta_{|\kappa|-1} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) + i \left(\frac{k}{E + \mu} \right)^2 \Delta_{|\kappa|} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right).$$

De la même manière en notant que :

$$(II-11) \quad \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \cos \theta \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \sin \theta e^{i\varphi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{bmatrix} g_{\text{non rel.}}(\theta) \\ = \cos \theta g_{\text{non rel.}}(\theta) \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + g_{\text{non rel.}}(\theta) \sin \theta e^{i\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

on obtient respectivement :

$$(II-12) \quad \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} g_{\text{non rel.}}(\theta) \\ = \sum_{\kappa > 0} \frac{(2\kappa \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}}}{k} \mathcal{E} f^{(\kappa, 0)}(\theta, \varphi) + \sum_{\kappa < 0} -i \frac{(2|\kappa| \cdot 4\pi)^{\frac{1}{2}}}{k} \mathcal{F} f^{(\kappa, 0)}(\theta, \varphi),$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_x \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + i \Delta_{x-1} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right), \\ \mathcal{F} &= \left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_{|x|-1} \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + i \Delta_{|x|} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right), \\ \text{(II-13)} \quad &\begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g_{\text{non rel.}}(\theta) \\ &= \sum_{x>0} \frac{(4\pi \cdot 2|x|)^{\frac{1}{2}}}{k} \mathcal{G} f^{(x,-1)}(\theta, \varphi) + \sum_{x<0} i \frac{(4\pi \cdot 2|x|)^{\frac{1}{2}}}{k} \mathcal{H} f^{(x,-1)}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -\left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_x \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + i \Delta_{x-1} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right), \\ \mathcal{H} &= -\left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_{|x|-1} \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + i \Delta_{|x|} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right). \end{aligned}$$

En revenant maintenant à l'expression (II-7) des déphasages, on a, en utilisant les développements (II-10), (II-11), (II-12) et (II-13) :

1° Pour x positif :

$$\begin{aligned} (2x)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2i\eta x} - 1}{2i} &= \frac{E+\mu}{2\mu} \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*i(x,0)}(\theta, \varphi) \\ &\quad \left[\sum_{x'>0} (2x')^{\frac{1}{2}} \left[\Delta_{x'} \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + \left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_{x'-1} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) \right] f^{(x',0)}(\theta, \varphi) \right. \\ &\quad + \sum_{x'<0} -i(2|x'|)^{\frac{1}{2}} \left[\Delta_{|x'|-1} \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + \left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_{|x'|} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) \right] f^{(x',0)}(\theta, \varphi) \\ &\quad + \sum_{x'>0} (2x')^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_{x'} \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) (\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) - \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)) \right. \\ &\quad \quad \left. + \Delta_{x'-1} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) (\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) + \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)) \right] \\ &\quad \left. + \sum_{x'<0} -i(2|x'|)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{k}{E+\mu}\right)^2 \Delta_{|x'|-1} \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) (\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) + \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)) \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + \Delta_{|x'|} \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) (\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) - \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)) \right] \right] \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (I-6) et les relations :

$$x' > 0 \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) - \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \\ & = \frac{2(x'(x'+1))^{\frac{1}{2}}}{(2x'+1)} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) f^{(x'+1,0)}(\theta, \varphi) - i \frac{\rho_1}{(2x'+1)} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) f^{(x',0)}(\theta, \varphi), \\ & \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) + \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \\ & = \frac{2[x'(x'-1)]^{\frac{1}{2}}}{(2x'-1)} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) f^{(x'-1,0)}(\theta, \varphi) - i \frac{\rho_1}{(2x'-1)} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) f^{(x',0)}(\theta, \varphi), \end{aligned} \right.$$

$$x' < 0 \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) + \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \\ & = \frac{2[|x'|(|x'|-1)]^{\frac{1}{2}}}{(2|x'|-1)} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) f^{(x'+1,0)}(\theta, \varphi) + i \frac{\rho_1}{(2|x'|-1)} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) f^{(x',0)}(\theta, \varphi), \\ & \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) - \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \\ & = \frac{2[|x'|(|x'|+1)]^{\frac{1}{2}}}{(2|x'|+1)} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) f^{(x'-1,0)}(\theta, \varphi) + \frac{i\rho_1}{(2|x'|+1)} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) f^{(x',0)}(\theta, \varphi), \end{aligned} \right.$$

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*l(x',m')}(\theta, \varphi) \rho_1 \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) f^{(x,m)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \left[\begin{aligned} & 0 \text{ si } x \text{ et } x' \text{ sont de} \\ & \quad \text{même signe,} \\ & \frac{1}{2} \delta_{mm'} \delta_{x|x'|} \text{ si } x' < 0 \\ & \quad \text{et } x > 0, \\ & -\frac{1}{2} \delta_{mm'} \delta_{x'|x} \text{ si } x' > 0 \\ & \quad \text{et } x < 0, \end{aligned} \right.$$

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*l(x',m')}(\theta, \varphi) \rho_1 \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) f^{(x,m)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \left[\begin{aligned} & 0 \text{ si } x \text{ et } x' \text{ sont de} \\ & \quad \text{même signe,} \\ & -\frac{1}{2} \delta_{mm'} \delta_{x|x'|} \text{ si } x' < 0 \\ & \quad \text{et } x > 0, \\ & \frac{1}{2} \delta_{mm'} \delta_{x'|x} \text{ si } x' > 0 \\ & \quad \text{et } x < 0, \end{aligned} \right.$$

on obtient finalement pour x positif :

$$(II-14) \quad \frac{e^{2i\eta x} - 1}{2i} = \frac{E + \mu}{2\mu} \left[\Delta_x + \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \Delta_{x-1} \right].$$

2° Pour x négatif :

de la même manière on obtient :

$$\begin{aligned}
 (2|x|)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2i\eta x} - 1}{2} &= \frac{E + \mu}{2\mu} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^{*t(x,0)}(\theta, \varphi) \\
 &\left[\sum_{x' > 0} (2x')^{\frac{1}{2}} \left[-\Delta_{x'} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) - \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \Delta_{x'-1} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right] f^{(x',0)}(\theta, \varphi) \right. \\
 &+ \sum_{x' < 0} -i(2|x'|)^{\frac{1}{2}} \left[-\Delta_{|x'|-1} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) - \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \Delta_{|x'|} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) \right] f^{(x',0)}(\theta, \varphi) \\
 &+ \sum_{x' > 0} (2x')^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{k^2}{(E + \mu)^2} \Delta_{x'} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) - \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \right. \\
 &\quad \left. - \Delta_{x'-1} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) + \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \right] \\
 &+ \sum_{x' < 0} i(2|x'|)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{k^2}{(E + \mu)^2} \Delta_{|x'|-1} \left(\frac{1 + \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) + \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_{|x'|} \left(\frac{1 - \alpha_4}{2} \right) [\cos \theta f^{(x',0)}(\theta, \varphi) - \sin \theta e^{i\varphi} f^{(x',-1)}(\theta, \varphi)] \right] \Big] \sin \theta d\theta d\varphi,
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne après calculs pour x négatif :

$$(II-15) \quad \frac{e^{2i\eta x} - 1}{2i} = \frac{E + \mu}{2\mu} \left[\Delta_{|x|-1} + \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \Delta_{|x|} \right].$$

Finalement l'approximation de Born pour les déphasages est équivalente aux expressions (II-14) et (II-15).

A l'approximation non relativiste, $\frac{E + \mu}{2\mu} \rightarrow 1$, $\frac{k}{E + \mu} \rightarrow \frac{k}{2\mu}$ qui est négligeable, $|x| - 1 = l$, on retrouve l'expression bien connue [2] :

$$\frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} = \Delta_l = -k \int_0^{\infty} 2\mu V(r) [j_l(kr)]^2 r^2 dr.$$

Nous pouvons également obtenir le développement de l'amplitude de diffu-

sion sur les fonctions $f^{(\alpha,m)}(\theta, \varphi)$ pour l'approximation de Born. Pour cela nous utiliserons :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k^3}{(E + \mu)^3} \\ 0 \end{bmatrix} g_{\text{non rel.}}(\theta) = \sum_{x > 0} -4\mu \left(4\pi \cdot \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty V(r) \left[(j_x(kr))^2 \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{k^3}{(E + \mu)^3} (j_{x-1}(kr))^2 \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] r^2 dr \right] f^{(\alpha,0)}(\theta, \varphi) \\ + \sum_{x < 0} 4\mu i \left(4\pi \cdot \frac{|x|}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty V(r) \left[(j_{|x|-1}(kr))^2 \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{k^3}{(E + \mu)^3} (j_{|x|}(kr))^2 \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] r^2 dr \right] f^{(\alpha,0)}(\theta, \varphi),$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \\ k \\ E + \mu \\ 0 \end{bmatrix} \cos \theta g_{\text{non rel.}}(\theta) = \sum_{x > 0} -4\mu \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \left(4\pi \cdot \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} c f^{(\alpha,0)}(\theta, \varphi) \\ + \sum_{x < 0} i \frac{k^2}{(E + \mu)^2} 4\mu \left(\frac{|x|}{2} \cdot 4\pi\right)^{\frac{1}{2}} d f^{(\alpha,0)}(\theta, \varphi),$$

avec :

$$c = \int_0^\infty V(r) \left[\left[\frac{x}{(2x + 1)} (j_{x-1}(kr))^2 + \frac{x + 1}{(2x + 1)} (j_{x+1}(kr))^2 \right] \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) \right. \\ \left. + i \frac{E + \mu}{k} \left[\frac{x - 1}{2x - 1} (j_{x-2}(kr))^2 + \frac{x}{2x - 1} (j_x(kr))^2 \right] \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] r^2 dr,$$

$$d = \int_0^\infty V(r) \left[\left[\frac{|x| - 1}{2|x| - 1} (j_{|x|-2}(kr))^2 + \frac{|x|}{2|x| - 1} (j_{|x|}(kr))^2 \right] \left(\frac{1 + \alpha_4}{2}\right) \right. \\ \left. + i \frac{E + \mu}{k} \left[\frac{|x|}{2|x| + 1} (j_{|x|-1}(kr))^2 + \frac{|x| + 1}{2|x| + 1} (j_{|x|+1}(kr))^2 \right] \left(\frac{1 - \alpha_4}{2}\right) \right] r^2 dr,$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{k}{E + \mu}\right)^2 \\ 0 \\ k \\ E + \mu \end{bmatrix} \sin \theta e^{i\varphi} g_{\text{non rel.}}(\theta) = \sum_{x > 0} -4\mu \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \left(4\pi \cdot \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e f^{(\alpha,0)}(\theta, \varphi) \\ + \sum_{x < 0} -4i\mu \frac{k^2}{(E + \mu)^2} \left(\frac{|x|}{2} \cdot 4\pi\right)^{\frac{1}{2}} g \cdot f^{(\alpha,0)}(\theta, \varphi),$$

avec :

$$e = \int_0^\infty V(r) \left[\frac{(x+1)}{(2x+1)} [(j_{x-1}(kr))^2 - (j_{x+1}(kr))^2] \left(\frac{1+\alpha_4}{2} \right) - i \frac{E+\mu}{k} \frac{(x-1)}{(2x-1)} [(j_{x-2}(kr))^2 - (j_x(kr))^2] \left(\frac{1-\alpha_4}{2} \right) \right] r^2 dr,$$

$$g = \int_0^\infty V(r) \left[\frac{(|x|-1)}{(2|x|-1)} [(j_{|x|-2}(kr))^2 - (j_{|x|}(kr))^2] \left(\frac{1+\alpha_4}{2} \right) - i \frac{E+\mu}{k} \frac{(|x|+1)}{(2|x|+1)} [(j_{|x|-1}(kr))^2 - (j_{|x|+1}(kr))^2] \left(\frac{1-\alpha_4}{2} \right) \right] r^2 dr.$$

En portant ces développements dans (II-6) nous obtenons :

$$g(\theta, \varphi)_{\text{BORN}} = \left(\frac{E+\mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} (E+\mu) \left[\sum_{x>0} - (2x)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty V(r) \mathcal{A} r^2 dr f^{(x,0)}(\theta, \varphi) + \sum_{x<0} i (2|x|)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty V(r) \mathcal{B} r^2 dr f^{(x,0)}(\theta, \varphi) \right],$$

avec :

$$\mathcal{A} = \left[(j_x(kr))^2 + \frac{k^2}{(E+\mu)^2} (j_{x-1}(kr))^2 \right] \left(\frac{1+\alpha_4}{2} \right) + i \left[\frac{k^3}{(E+\mu)^3} (j_{x-1}(kr))^2 + \frac{k}{E+\mu} (j_x(kr))^2 \right] \left(\frac{1-\alpha_4}{2} \right),$$

$$\mathcal{B} = \left[(j_{|x|-1}(kr))^2 + \frac{k^2}{(E+\mu)^2} (j_{|x|}(kr))^2 \right] \left(\frac{1+\alpha_4}{2} \right) + i \left[\frac{k^3}{(E+\mu)^3} (j_{|x|}(kr))^2 + \frac{k}{E+\mu} (j_{|x|-1}(kr))^2 \right] \left(\frac{1-\alpha_4}{2} \right).$$

En égalant ce développement et le développement (II-4) incluant les déphasages, nous retrouvons bien l'approximation de Born pour les déphasages donnée en (II-14) et (II-15).

4. Théorème optique.

Reprenons l'expression générale de l'amplitude de diffusion (II-4), $g(\theta, \varphi)$ étant essentiellement complexe, nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$g(\theta, \varphi) = \text{Re } g(\theta, \varphi) + i \text{Im } g(\theta, \varphi).$$

La partie imaginaire $\text{Im } g(\theta, \varphi)$ est donnée par :

$$\text{Im } g(\theta, \varphi) = \sum_{x>0} \left(2x \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \eta_x}{k} + \sum_{x<0} \left(2|x| \cdot \frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \eta_x}{k}$$

$$\begin{bmatrix} \sin \eta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \sin(\eta_x + \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \frac{k}{E + \mu} \sin \eta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{ik}{E + \mu} e^{-i\varphi} \sin(\eta_x + \varphi) \end{bmatrix} f^{(x,0)}(\theta, \varphi)$$

$$\begin{bmatrix} -i \sin \eta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\varphi} \sin(\eta_x + \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{E + \mu} \sin \eta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{E + \mu} e^{-i\varphi} \sin(\eta_x + \varphi) \end{bmatrix} f^{(x,0)}(\theta, \varphi)$$

En faisant $\theta = 0$, nous obtenons pour la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion, l'expression :

$$\text{Im } g(0, \varphi) = \sum_x \left(\frac{E + \mu}{2E} \cdot \frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|x|}{k} \sin^2 \eta_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \\ E + \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$

De l'expression de la section efficace $\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_x |x| \sin^2 \eta_x$, on déduit que :

$$(II. 17) \quad \text{Im } g(0, \varphi) = \left(\frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k\sigma}{4\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \\ E + \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$

A l'approximation non relativiste $\left(\frac{E + \mu}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 1, \frac{k}{E + \mu} \rightarrow 0$, on retrouve le théorème optique associé à l'équation de Schrödinger :

$$\text{Im } g_1(0, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k\sigma}{4\pi} \text{ tandis que } \text{Im } g_2(0, \varphi) = \text{Im } g_3(0, \varphi) = \text{Im } g_4(0, \varphi) = 0.$$

Nous pouvons chercher la première correction relativiste en développant (II-17) suivant les puissances de k . On obtient :

$$\left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{k^2}{8\mu^2} \quad \text{et} \quad \frac{k}{E + \mu} \simeq \frac{k}{2\mu} \quad \text{en se limitant au premier terme.}$$

(II-17) devient :

$$\text{Im } g(0, \varphi) \simeq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k\sigma}{4\pi} \left(1 - \frac{k^2}{8\mu^2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{2\mu} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ceci nous donne bien l'approximation non relativiste :

$$\text{Im } g(0, \varphi) \simeq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k\sigma}{4\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et la première correction de relativité :

$$- \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k\sigma}{4\pi} \frac{k^2}{8\mu^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{2\mu} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nous remarquons que cette correction provient uniquement de la variation du terme $\left(\frac{E + \mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Nous étudierons dans une seconde partie qui paraîtra ultérieurement, les propriétés analytiques des fonctions d'ondes radiales comme fonctions de la quantité de mouvement réduite k .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. F. MOTT et H. S. W. MASSEY, *Theory of Atomic Collisions*. Clarendon Press, Oxford (2^e édition), 1949.
- [2] H. S. W. MASSEY, *Theory of Atomic Collisions*. Atome II. *Handbuch der Physik*, vol. XXXVI, 1956, p. 232.
- [3] T. Y. WU et T. OHMURA, *Quantum Theory of Scattering*. Prentice Hall, 1962.
- [4] G. PARZEN, *Phys. Rev.*, 80, 1950, p. 261 ; *Phys. Rev.*, 81, 1951, p. 808 ; *Phys. Rev.*, 104, 1956, p. 835.
- [5] TIETZ, *Acta phys. Hungaria*, 12, 1960, p. 85.

- [6] D. M. FRADKIN, T. A. WEBER et C. L. HAMMER, *Annals of Physics*, 27, 1964, p. 338.
- [7] R. L. GLUCKSTERN et S. R. LIN, *Phys. Rev.*, 136 3B, 1964, p. 859; *Journal of Math. Physics*, 5, 1964, 11, p. 1594.
- [8] A. BAKER, *Phys. Rev.*, 134, 1B, 1964, p. 240.
- [9] FAXEN et HOLTZMARK, *Z. Physik*, 45, 1927, p. 307.
Lord RAYLEIGH, *Theory of Sound*, vol. II, 1896, p. 272.
- [10] N. F. MOTT, *Proc. Roy. Soc.*, A, 124, 1929, p. 426.
- [11] P. A. M. DIRAC, 1^{er} Mémoire.
- [12] R. G. NEWTON, *J. of Math. Phys.*, 1, n° 4, 1960, p. 319.
- [13] TEMPLE, *Proc. Roy. Soc.*, A 127, 1930, p. 349-360.
- [14] SAUTER, *Zeit. f. Phys.*, 63, 1930, p. 803-814 ; 64, 1930, p. 295-303.
Voir aussi BECHERT, *Zeit. f. Phys.*, 79, 1932, p. 26.
- [15] SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, vol. II (2^e édition), 1951, chap. IV, Vieweg. Braunschweig.
- [16] E. C. TITCHMARSCH, *Proc. Roy. Soc.*, A 262, n° 1311, 1961, p. 489.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1966).