ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU
A. HAMOUI

Surfaces caustiques dégénérées dans la solution de Tolman. La singularité physique en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, nº 4 (1967), p. 343-364
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_4_343_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 4, 1967, p. 343-364.

Section A :
Physique théorique.

Surfaces caustiques dégénérées dans la solution de Tolman. La singularité physique en relativité générale

par

A. PAPAPETROU et A. HAMOUI
(Institut Henri Poincaré, Paris).

SUMMARY. — A definition is proposed of what should be considered as a physical singularity in general relativity.

A special case of the Tolman solution for the gravitational field of a spherically symmetric distribution of dust-like matter (without pressure) is discussed in detail. The characteristic feature of this particular solution is that at a certain moment $t = T$ the totality of matter lies on a spherical surface $r = a \neq 0$. It follows that the density of matter and consequently also certain curvature invariants will be infinitely large, like the Dirac function $\delta(r - a)$, on the sphere $r = a$, $t = T$. In spite of this infinity there is no singularity on this sphere according to the definition we propose: It is shown in detail that from the given Tolman solution which is valid for $t < T$ it is possible to determine the motion of the material distribution as well as the gravitational field for $t \geqslant T$.

Our result shows that the equations of motion allow a certain weakening of the Lichnerowicz differentiability conditions on the metric tensor.

RÉSUMÉ. — Une définition est proposée pour ce qui devrait être considéré comme singularité physique en relativité générale.

Un cas particulier de la solution de Tolman donnant le champ gravitationnel d'un gaz parfait sans pression est discuté en détail. La propriété caractéristique de cette solution particulière est qu'à un instant donné $t = T$ toute la matière se trouve sur une surface sphérique $r = a \neq 0$. Il s'ensuit

que la densité de matière, et par conséquent certains invariants de courbure, sont infinis sur la sphère $r = a$, $t = \mathrm{T}$ comme la fonction de Dirac $\delta(r - a)$. Mais il n'y a pas de singularité physique sur cette surface d'après la définition que nous proposons. En effet, nous démontrons en détail qu'à partir de la solution de Tolman valable pour $t < \mathrm{T}$ il est possible de déterminer le mouvement de la distribution matérielle ainsi que le champ gravitationnel pour $t \geqslant \mathrm{T}$.

Nos résultats montrent que les équations du mouvement permettent un certain affaiblissement des conditions de Lichnerowicz sur la différentiabilité du tenseur métrique.

I. — INTRODUCTION. UNE DÉFINITION DE LA SINGULARITÉ PHYSIQUE

La relativité générale est tout d'abord une théorie des champs gravitationnels *macroscopiques*. Il est évident que le tenseur de matière $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ qui décrit une distribution macroscopique doit être fini partout. Si l'on remarque que les équations du champ gravitationnel contiennent les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$ on arrive presque immédiatement aux conditions de Lichnerowicz [*1*] : Les $g_{\mu\nu}$ doivent être des fonctions de classe C^1, C^3 par morceaux.

Il n'est pas certain qu'on ait à postuler que les densités soient finies, également dans les problèmes microphysiques. Mais ces problèmes, qui en tout cas ne pourraient pas être traités à l'aide des équations du champ classique, ne nous intéressent pas ici. Par contre nous rappelons qu'en théorie classique du champ électromagnétique il y a un cas, qui constitue une approximation physique particulièrement utile, où la densité devient infinie. C'est le cas d'une charge distribuée sur une surface, qui est devenu indispensable pour l'étude par exemple du champ électrostatique créé par des conducteurs chargés. Il est à souligner qu'il s'agit ici d'une approximation physique : L'aspect mathématique constitue un problème bien déterminé qui est discuté rigoureusement. Nous allons poser la question suivante : Y a-t-il des situations analogues en relativité générale ? En d'autres termes serait-il possible et utile d'affaiblir les conditions de différentiabilité de Lichnerowicz sans entrer en contradiction avec les équations du champ ?

Nous arriverons à un autre aspect de la même question en examinant la notion de singularité. Rappelons la définition élémentaire : Un point de l'espace-temps est régulier s'il existe des systèmes de coordonnées tels que toutes les composantes $g_{\mu\nu}$ en ce point sont finies et en même temps det $g_{\mu\nu} \neq 0$. Si ceci n'est pas le cas nous disons que le point est singulier. En relativité générale on utilise aussi une autre définition. On dit qu'un point est singulier si un (au moins) des invariants de courbure devient infini en ce point. Cette deuxième définition n'est pas équivalente à la première. D'après les conditions de Lichnerowicz on devrait considérer la deuxième définition comme la définition d'une *singularité physique.*

Nous proposerons une autre définition de la singularité physique qui nous semble plus satisfaisante. Le problème physique fondamental est celui du mouvement des particules matérielles. Il est par conséquent raisonnable de dire qu'un point de l'espace-temps est régulier au point de vue physique s'il est possible d'étudier le mouvement des particules à travers ce point. Considérons des particules d'épreuve de structure monopolaire soumises à l'action du champ gravitationnel seulement. Leurs trajectoires sont des lignes géodésiques de l'espace-temps. Nous dirons qu'un point est singulier si, en ce point, la géométrie de l'espace-temps dégénère de manière qu'il n'est pas possible de continuer les géodésiques à travers ce point. Dans le cas contraire nous dirons que le point est régulier.

L'équation des géodésiques ne contient que les $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\alpha}$. Il sera donc possible de continuer une géodésique à travers un point si ces quantités sont finies en ce point. On remarquera qu'il n'est pas nécessaire que les $g_{\mu\nu,\alpha}$ soient aussi continues en ce point. D'autre part quand les $g_{\mu\nu,\alpha}$ sont discontinues sur une surface (1) le tenseur de courbure y devient infini. Mais il n'y aura pas de singularité sur cette surface d'après la définition que nous venons de proposer.

La question qui se pose est de savoir si les équations du champ permettent des solutions possédant des points avec ces propriétés : $g_{\mu\nu,\alpha}$ finies mais discontinues en ce point, invariants de courbure infinis. Nous donnerons dans la suite deux exemples qui montrent que la réponse est positive. Le premier ne sera traité que très brièvement. Par contre le deuxième exemple sera étudié en détail. Cette étude nous donnera des renseignements généraux sur le contenu physique de telles solutions. Elle constitue en même temps une contribution à la discussion de la solution de Tolman [*2*] qui détermine le champ gravitationnel et le mouvement d'un gaz incohérent à symétrie sphérique.

---

(1) Il s'agit ici de discontinuités intrinsèques et non de discontinuités qui résultent de l'utilisation d'un « mauvais » système de coordonnées.

II. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Nous commençons par quelques remarques qualitatives concernant d'abord le champ électromagnétique en relativité restreinte. L'équation du mouvement d'une particule d'épreuve chargée contient la force électromagnétique qui est proportionnelle au champ $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$. L'étude du mouvement sera toujours possible quand le champ $F_{\mu\nu}$ est fini. C'est-à-dire le mouvement sera déterminé si les dérivées $A_{\mu,\nu}$ du potentiel-vecteur sont finies. Mais il n'est pas nécessaire que ces dérivées soient aussi continues.

Supposons maintenant qu'une quantité de sources électromagnétiques, par exemple une charge totale $e \neq 0$, est distribuée sur une surface d'aire finie. Il est bien connu que dans ce cas le champ $F_{\mu\nu}$ reste fini au voisinage de cette surface et est discontinu à travers la surface. Il s'ensuit que le mouvement des particules d'épreuve est déterminé à travers cette surface bien que la densité ordinaire de charge y soit infinie.

La situation change si l'on a la charge totale e distribuée sur un segment de ligne. Le champ devient infini quand on s'approche du segment. Le champ $F_{\mu\nu}$ tend vers l'infini de telle manière que l'intégrale du champ sur une ligne qui passe par un point du segment chargé diverge. Il est donc raisonnable de dire que les points du segment chargé constituent des singularités en ce qui concerne le mouvement des particules d'épreuve. On aura aussi une singularité si la charge totale est concentrée en un seul point. Cette singularité est plus forte que la précédente : l'intégrale du champ $F_{\mu\nu}$ sur une ligne passant par le point chargé diverge plus fortement que dans le cas du segment chargé.

Considérons maintenant le champ gravitationnel en relativité générale. Il est facile de montrer par un exemple particulièrement simple qu'on a la même situation quand une quantité donnée de matière est distribuée sur une surface. En effet prenons la solution de Schwarzschild en coordonnées isotropes :

$$ds^2 = \left(\frac{1 - m/2r}{1 + m/2r}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{1}$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Nous supposerons que cette métrique est valable pour $r > a$. Pour $r < a$ nous prenons une métrique à valeurs $g_{\mu\nu}$ constantes choisies de manière que $g_{\mu\nu}$ soit continu sur la sphère $r = a$:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - 2m/a}{1 + 2m/a}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2a}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{2}$$

La métrique déterminée par (1) et (2) a des valeurs $g_{\mu\nu,\alpha}$ finies partout, mais discontinues à travers la sphère $r = a$. On peut par conséquent étudier le mouvement des particules d'épreuve sans aucune limitation, ce qui signifie qu'il n'y a pas de points singuliers d'après la définition que nous avons proposée. D'autre part on a $T_{\mu\nu} = 0$ pour $r > a$ mais aussi pour $r < a$: La matière qui constitue la source du champ est distribuée sur la sphère $r = a$. Ceci est en accord avec le fait que les $g_{\mu\nu,\alpha}$ sont discontinus sur $r = a$: Les composantes $T_{\mu\nu}$ qui ne s'annulent pas à cause de la symétrie sphérique deviennent infinies pour $r = a$ comme les fonctions de Dirac $\delta(r - a)$.

L'analogie avec le champ électromagnétique suggère les propositions suivantes. Quand une quantité de matière est distribuée sur un segment de ligne les points de ce segment seront singuliers. De même, si la quantité de matière est concentrée en un point, ce point sera singulier. La dernière proposition est vérifiée par la singularité « réelle » de Schwarzschild ($r = 0$).

L'exemple donné par la métrique (1) et (2) n'est pas tout à fait satisfaisant. En effet on peut étudier dans ce champ les mouvements des particules d'épreuve indépendantes. Mais il n'est pas possible d'étudier les mouvements des particules constituant la matière qui est la source du champ, car ces particules se trouvent constamment sur l'hypersurface $r = a$ sur laquelle les $g_{\mu\nu,\alpha}$ ne sont pas déterminés.

III. — LA SOLUTION DE TOLMAN

Le deuxième exemple que nous allons maintenant étudier en détail n'a pas cet inconvénient. Il s'agit des mouvements particuliers d'un gaz incohérent dont le champ gravitationnel à symétrie sphérique est donné sous sa forme générale par la solution de Tolman. Il sera possible dans cet exemple de déterminer aussi les mouvements des particules de la matière qui est la source du champ.

Nous récapitulons brièvement la solution de Tolman. Dans des coordonnées en co-mouvement la métrique a la forme

$$ds^2 = dt^2 - e^{\omega} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \tag{3}$$

avec $\omega \equiv \omega(r, t)$ et $R \equiv R(t, r)$. Des équations du champ on déduit après deux intégrations par rapport à t les relations

$$e^{\omega} = R'^2/(1 + f), \tag{4}$$

$$\dot{R}^2 = f + F/R. \tag{5}$$

où $f(r)$ et $F(r)$ sont deux fonctions arbitraires et $R' \equiv \partial R/\partial r$, $\dot{R} \equiv \partial R/\partial t$. Pour déterminer complètement la métrique il suffit d'intégrer l'équation (5). Mais la forme de R qu'on trouve de cette manière dépend du signe de f et n'est pas commode pour nos calculs. Nous préférons remarquer que l'équation (5) détermine $R(t, r)$ quand on se donne la fonction $R(T, r)$ à un instant quelconque $t = T$. La solution générale de Tolman dépend des 3 fonctions arbitraires $f(r)$, $F(r)$ et $R(T, r)$.

Pour l'intégration de l'équation (5) on doit d'abord écrire

$$\dot{R} = \pm \sqrt{f + F/R}. \tag{5'}$$

Le signe du deuxième membre a une signification physique immédiate. En effet la quantité $\dot{R}$ peut être considérée comme la vitesse de la particule. Par conséquent nous aurons le signe $+$ dans (5') quand le gaz est en mouvement centrifuge. Par contre le signe $-$ correspond au mouvement centripète.

Toutes les composantes T^{μ}_{ν} sont nulles à l'exception de T^{0}_{0}. L'équation du champ correspondante conduit à la relation

$$T^{0}_{0} \equiv \varepsilon = \frac{1}{8\pi} F'/R^2R'. \tag{6}$$

La quantité ε est (à un facteur constant près) la densité de masse propre du gaz. La relation (6) montre que la fonction $F(r)$ est liée à la distribution de la masse propre. D'après la relation (5) on peut dire que la fonction $f(r)$ est liée à la distribution des vitesses des particules. Le fait qu'il y a la troisième fonction arbitraire $R(T, r)$ correspond à la covariance de la théorie. Nous devrons demander $\varepsilon \geqslant 0$ et en même temps $R' \geqslant 0$. On déduit alors de (6) $F' \geqslant 0$.

La formule (4) nous donne une condition pour f :

$$1 + f > 0. \tag{7}$$

En effet $1 + f < 0$ conduit à une signature inacceptable tandis que $1 + f = 0$ rend la métrique (3) singulière.

Les transformations

$$\bar{t} = t \quad , \quad \bar{r} = \bar{r}(r) \tag{8}$$

conservent la forme (3) de la métrique. Elles sont les seules possibles dans un domaine où $F' \neq 0$. Dans ces transformations la fonction f, ainsi que la fonction F se comportent comme des scalaires. Il s'ensuit que la condition (7) a une signification invariante. Quand (7) est satisfait la métrique (3) présente deux types de singularité. Le premier type correspond à $R = 0$

et le deuxième à $R' = 0$. C'est ce deuxième type de singularité que nous allons discuter en détail.

Il est facile de montrer que dans le « plan » (t, r) la courbe, dont l'équation est $R' = 0$, est une courbe caustique (²). En effet considérons deux particules voisines correspondant aux valeurs r et $r + dr$ de la coordonnée radiale. La distance propre des positions simultanées de ces particules est donnée par

$$dl = e^{\omega/2} dr = \frac{R'}{\sqrt{1+f}}\, dr.$$

Cette distance s'annule quand les particules sont sur la courbe caustique. Ceci signifie que leurs trajectoires se rencontrent en ce point. La même remarque explique le fait que la densité ε devient, d'après (6), infinie aux points de la courbe caustique. Il sera utile de souligner que nous supposons que le gaz est incohérent, c'est-à-dire la pression est nulle, même quand $\varepsilon \to \infty$. Une autre manière de décrire la situation est la suivante. Nous supposons que les particules qui constituent le gaz ne sont soumises qu'à leur interaction gravitationnelle même quand leurs distances tendent vers zéro. Ceci n'est pas satisfaisant au point de vue physique. Mais nous sommes contraints d'introduire cette idéalisation mathématique car c'est seulement dans le cas $p = 0$ que nous connaissons la solution exacte et générale des équations du champ.

La courbe $R' = 0$ ne sera pas en général parallèle à une des « droites » $t =$ const. Mais dans des cas particuliers on peut avoir $R' = 0$ sur un segment d'une droite $t =$ const. Ceci signifie que R a la même valeur en tous les points du segment défini par $t = T$ et $a < r < b$. Nous dirons alors que nous avons une courbe caustique dégénérée. On voit immédiatement que dans ce cas toutes les particules contenues dans l'intervalle $a < r < b$ seront au même point à l'instant $t = T$. (Plus exactement toutes les particules contenues dans la couche sphérique $a < r < b$ se trouvent sur une surface sphérique à l'instant $t = T$.) Par conséquent pour $t = T$ la densité ε sera infinie comme la fonction $\delta(r - a)$. Par contre dans le cas d'une courbe caustique non dégénérée la densité devient infinie d'une manière moins forte. Nous allons étudier ici en détail les courbes caustiques dégénérées. Le cas non dégénéré sera traité dans un travail ultérieur.

(²) Plus exactement il s'agit d'une hypersurface caustique : il y a encore les coordonnées θ et φ dont ne dépendent pas R et e^{ω} dans la métrique (3).

IV. — UNE SOLUTION DE TOLMAN PARTICULIÈRE AYANT UNE SURFACE CAUSTIQUE DÉGÉNÉRÉE

Pour déterminer une solution de Tolman il faut choisir les fonctions $f(r)$, $F(r)$ et $R(T, r)$. Nous commencerons par le choix de $R(T, r)$ qui doit être fait de manière qu'il y ait une courbe caustique dégénérée. Pour ceci il suffit de prendre : $R(T, r)$ fonction croissante quelconque pour $r < a$, $R(T, r) =$ const. pour $a < r < b$ et de nouveau $R(T, r)$ fonction croissante pour $b < r$. Sans restreindre la généralité nous pouvons simplifier ces données à l'aide d'une des transformations (8). Nous prenons finalement

$$(9) \qquad R(T, r) = r \quad \text{pour} \quad r < a \quad , \quad R(T, r) = a \quad \text{pour} \quad a < r < b$$

et par exemple $R(T, r) = a + r - b$ pour $b < r$.

Afin de séparer la question qui nous intéresse ici d'autres questions indépendantes nous introduirons l'hypothèse suivante : Il n'y a pas de matière en dehors de l'intervalle $a < r < b$. Nous aurons par conséquent l'espace minkowskien pour $r < a$ et l'espace de Schwarzschild pour $b < r$. La relation (6) donne alors pour $F(r)$ les conditions

$$(10) \qquad F = 0 \quad \text{pour} \quad r \leqslant a \quad , \quad F = \text{const} = F(b) \quad \text{pour} \quad b \leqslant r.$$

Nous n'étudierons dans la suite que le champ de Tolman dans l'intervalle $a < r < b$ et son raccordement avec l'espace minkowskien intérieur. Le raccordement du champ de Tolman avec le champ extérieur de Schwarzschild constitue un problème indépendant qui d'ailleurs ne présente pas des difficultés particulières.

Dans le domaine $a < r < b$ où il y a de la matière la fonction f est univoquement déterminée. Elle doit par conséquent être choisie de manière qu'elle corresponde aux données physiques du problème. Par contre dans le domaine $r < a$ où il n'y a pas de matière la fonction f n'a aucune signification physique et peut être choisie tout à fait arbitrairement. Nous profiterons de cet arbitraire pour obtenir quelques simplifications dans le domaine $r < a$. Il sera d'abord utile d'avoir f continu pour $r = a$ afin d'éviter une discontinuité de la métrique en ce point. D'autre part il est évidemment préférable de prendre $f =$ const. dans $r < a$. Nous prendrons donc

$$(11) \qquad f(r) = f_1 \equiv f(a) \qquad \text{pour} \qquad r < a,$$

$f(a)$ étant la valeur de la fonction $f(r)$ valable dans $a < r < b$ pour $r = a$.

Nous allons maintenant calculer la fonction $R(t, r)$ par intégration de l'équation (5'). Dans l'exemple que nous allons étudier en détail nous prendrons cette équation avec le signe négatif,

$$\dot{R} = -\sqrt{f + F/R}. \tag{12}$$

Nous commençons par le domaine $r < a$ où l'intégration est immédiate. En effet on trouve de (10), (11) et (12)

$$\dot{R} = -\sqrt{f_1}.$$

La solution est

$$R = \chi(r) - \sqrt{f_1}\,t.$$

La fonction $\chi(r)$ sera déterminée par la forme (9) que nous avons choisie pour $R(T, r)$ dans $r < a$:

$$r = \chi(r) - \sqrt{f_1}\,T.$$

Donc finalement

$$R(t, r) = r - \sqrt{f_1}(t - T) \quad \text{pour} \quad r < a. \tag{13}$$

La formule (4) nous donne alors

$$e^{\omega} = \frac{1}{1 + f_1} \quad \text{pour} \quad r < a. \tag{14}$$

Dans l'intervalle $a < r < b$ l'intégration exacte de (12) ne présente pas de difficultés. Mais la forme de l'intégrale dépend du signe de f et elle devient trop compliquée pour nos calculs. Il nous suffira ici de déterminer R dans le voisinage immédiat de la ligne $t = T$ sous forme d'une série Taylor par rapport à la variable t :

$$R(t, r) = R(T, r) + \dot{R}(T, r)\cdot(t - T) + \ddot{R}(T, r)\cdot\frac{1}{2}(t - T)^2 + \dots$$

Les relations (9) et (12) donnent

$$R(T, r) = a \quad , \quad \dot{R}(T, r) = -\sqrt{f + F/a} \equiv -A(r).$$

En dérivant (12) ou (5) par rapport à t on trouve :

$$2\ddot{R} = -F/R^2.$$

Par conséquent

$$\ddot{R}(T, r) = -F/2a^2.$$

On trouve ainsi pour le voisinage de $t = \mathrm{T}$:

$$\mathrm{R}(t, r) = a - \mathrm{A}(t - \mathrm{T}) - \frac{\mathrm{F}}{4a^2}(t - \mathrm{T})^2 + \ldots \tag{15}$$

On déduit de (15)

$$\mathrm{R}' = - \mathrm{A}'(t - \mathrm{T}) - \frac{\mathrm{F}'}{4a^2}(t - \mathrm{T})^2 + \ldots \tag{16}$$

La relation (6) montre alors qu'au voisinage de la ligne $t = \mathrm{T}$ on a pour la densité ε la formule

$$8\pi\varepsilon = - \mathrm{F}'/a^2\mathrm{A}'(t - \mathrm{T}) + \ldots \tag{17}$$

De cette formule on déduit qu'avec les fonctions $f(r)$ et $\mathrm{F}(r)$ données on ne peut pas avoir $\varepsilon \geqslant 0$ aussi bien pour $t < \mathrm{T}$ que pour $t > \mathrm{T}$: La solution de Tolman déterminée par les fonctions $f(r)$, $\mathrm{F}(r)$ et $\mathrm{R}(\mathrm{T}, r)$ ne peut être admissible que pour $t < \mathrm{T}$ si $\mathrm{A}' > 0$ ou pour $t > \mathrm{T}$ si $\mathrm{A}' < 0$. Nous supposerons que la solution de Tolman que nous étudions ici est valable dans le domaine $t < \mathrm{T}$. Ceci impose aux fonctions $f(r)$ et $\mathrm{F}(r)$ une nouvelle condition qualitative : La quantité $\mathrm{A} \equiv \sqrt{f + \mathrm{F}/a}$ doit être une fonction croissante de r.

V. — ÉLIMINATION DE LA SINGULARITÉ DUE AUX COORDONNÉES (r, t)

La métrique que nous étudions est singulière pour $t = \mathrm{T}$. Nous allons montrer que cette singularité n'est pas intrinsèque : Nous pourrons l'éliminer par une transformation de coordonnées que nous allons déterminer. La structure de cette transformation est suggérée par la remarque que pour $t = \mathrm{T}$ on a une ligne caustique dégénérée : Le segment $t = \mathrm{T}$, $a < r < b$ n'est en réalité qu'un point. Nous prenons donc au voisinage de $t = \mathrm{T}$ une transformation de la forme

$$\bar{t} = \mathrm{T} + \bar{t}_1(r)\cdot(t - \mathrm{T}) \quad , \quad \bar{r} = a + \bar{r}_1(r)\cdot(t - \mathrm{T}). \tag{18}$$

(Les deux autres coordonnées ne changent pas, $\bar{\theta} = \theta$ et $\bar{\varphi} = \varphi$.)

La formule générale

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}$$

nous donne avec (18) en posant $t = x^0$, $r = x^1$:

$$\bar{g}^{00} = \bar{t}_1^2 - \frac{1+f}{R'^2}\bar{t}_1'^2(t-T)^2,$$

$$\bar{g}^{01} = \bar{t}_1\bar{r}_1 - \frac{1+f}{R'^2}\bar{t}_1'\bar{r}_1'(t-T)^2,$$

$$\bar{g}^{11} = \bar{r}_1^2 - \frac{1+f}{R'^2}\bar{r}_1'^2(t-T)^2.$$

D'autre part on déduit de (16)

$$(19) \qquad 1/R' = \frac{1}{A'(T-t)}\left\{1 + \frac{F'}{4a^2A'}(T-t) + \dots\right\}.$$

Par conséquent

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} \bar{g}^{00} &= \left\{\bar{t}_1^2 - \left(\frac{d\bar{t}_1}{d\Omega}\right)^2\right\} - B\left(\frac{d\bar{t}_1}{d\Omega}\right)^2(T-t) + \dots, \\ \bar{g}^{01} &= \left\{\bar{t}_1\bar{r}_1 - \frac{d\bar{t}_1}{d\Omega}\frac{d\bar{r}_1}{d\Omega}\right\} - B\frac{d\bar{t}_1}{d\Omega}\frac{d\bar{r}_1}{d\Omega}(T-t) + \dots, \\ \bar{g}^{11} &= \left\{\bar{r}_1^2 - \left(\frac{d\bar{r}_1}{d\Omega}\right)^2\right\} - B\left(\frac{d\bar{r}_1}{d\Omega}\right)^2(T-t) + \dots. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules nous avons posé

$$(21) \qquad \frac{F'}{2a^2A'} = B \quad , \quad \frac{A'}{\sqrt{1+f}} = \frac{d\Omega}{dr} \equiv \Omega'.$$

Notre intention est de trouver des coordonnées $\bar{x}^\mu$ telles que les $\bar{g}_{\mu\nu}$ et $\bar{g}^{\mu\nu}$ ainsi que les $\partial\bar{g}^{\mu\nu}/\partial\bar{x}^\alpha$ restent finis quand $t \to T$. Pour que les $\partial\bar{g}^{\mu\nu}/\partial\bar{x}^\alpha$ soient finis il faut que les $\bar{g}^{\mu\nu}$ soient continus. Il s'ensuit que pour $t = T$ les $\bar{g}^{\mu\nu}$ doivent être indépendants de r. C'est-à-dire : les premiers termes des développements (20) seront des constantes. Nous pouvons choisir ces constantes de manière qu'il y aura continuité de cette métrique avec la métrique dans l'intervalle $r < a$. (Nous laisserons cette dernière métrique inchangée en y appliquant la transformation identique $\bar{x}^\mu = x^\mu$.) Nous demanderons donc que les $g^{\mu\nu}$ donnés par (20) deviennent

$$(22) \quad \bar{g}^{00} = 1 \quad , \quad \bar{g}^{01} = 0 \quad , \quad \bar{g}^{11} = -(1+f_1) \quad \text{lorsque} \quad t = T.$$

La première des équations (20) nous donne alors

$$\bar{t}_1^2 - \left(\frac{d\bar{t}_1}{d\Omega}\right)^2 = 1.$$

On déduit par intégration

$$\bar{t}_1 = \cosh \Omega, \tag{23a}$$

la constante d'intégration étant absorbée dans Ω : La fonction Ω est définie par (21) et n'est, par conséquent, déterminée qu'à une constante additive près. Les deux dernières équations (20) donnent

$$\bar{r}_1 \cosh \Omega - \frac{d\bar{r}_1}{d\Omega} \sinh \Omega = 0 \quad , \quad \bar{r}_1^2 - \left(\frac{d\bar{r}_1}{d\Omega}\right)^2 = -(1+f_1).$$

La solution est

$$\bar{r}_1 = -\sqrt{1+f_1} \sinh \Omega \tag{23b}$$

sans nouvelle constante d'intégration. (Le signe de $\bar{r}_1$ a été choisi arbitrairement.)

En introduisant (23) dans (20) on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} \bar{g}^{00} &= 1 + \mathrm{B} \sinh^2 \Omega\,(t-\mathrm{T}) + \dots, \\ \bar{g}^{01} &= -\sqrt{1+f_1}\mathrm{B} \sinh \Omega \cosh \Omega\,(t-\mathrm{T}) + \dots, \\ \bar{g}^{11} &= -(1+f_1) + (1+f_1)\mathrm{B} \cosh^2 \Omega\,(t-\mathrm{T}) + \dots \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Ces formules nous permettent de calculer les dérivées $\partial \bar{g}^{\mu\nu}/\partial \bar{x}^\alpha$. On trouve :

$$\partial \bar{g}^{00}/\partial \bar{t} = \partial \bar{g}^{00}/\partial t \cdot \partial t/\partial \bar{t} + \partial \bar{g}^{00}/\partial r \cdot \partial r/\partial \bar{t},$$

$$\partial \bar{g}^{00}/\partial \bar{r} = \partial \bar{g}^{00}/\partial t \cdot \partial t/\partial \bar{r} + \partial \bar{g}^{00}/\partial r \cdot \partial r/\partial \bar{r}.$$

Les valeurs des dérivées $\partial x^\mu/\partial \bar{x}^\nu$ seront calculées à partir des $\partial \bar{x}^\nu/\partial x^\mu$ à l'aide des relations $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}\dfrac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda$. Le résultat final est

$$\left\{\begin{aligned} \partial \bar{g}^{00}/\partial \bar{t} &= \mathrm{B} \sinh^2 \Omega \cosh \Omega - (\mathrm{B} \sinh^2 \Omega)' \frac{\sinh \Omega}{\Omega'} + \dots, \\ \partial \bar{g}^{00}/\partial \bar{r} &= \mathrm{B} \sinh^2 \Omega \frac{\sinh \Omega}{\sqrt{1+f_1}} - (\mathrm{B} \sinh^2 \Omega)' \frac{\cosh \Omega}{\Omega' \sqrt{1+f_1}} + \dots, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

les termes omis ayant le facteur $t - \mathrm{T}$.

Les formules (25) ainsi que les formules analogues pour les autres dérivées $\partial \bar{g}^{\mu\nu}/\partial \bar{x}^\alpha$ montrent que ces dérivées restent finies quand $t \to \mathrm{T}$. Mais il y a un détail qui apparaît à première vue étrange : Les valeurs des $\partial \bar{g}^{\mu\nu}/\partial \bar{x}^\alpha$ pour $t = \mathrm{T}$ dépendent de r bien qu'il s'agisse, dans les coordonnées $\bar{x}^\mu$, d'un seul point. Il est pourtant facile de montrer, à l'aide d'un exemple électromagnétique, que ce résultat est normal dans le problème que nous étudions.

En effet considérons le problème analogue dans la théorie de Maxwell (en relativité restreinte). Soit une distribution de particules chargées en mouvement à symétrie sphérique. Supposons encore que les trajectoires de ces particules sont représentées, dans le plan $(\bar{t}, \bar{r})$, par des lignes qui passent par le point (T, a) sans se couper ailleurs dans le domaine considéré. A cause de la symétrie sphérique il n'y aura qu'un champ électrique radial. Ce champ est donné par la formule

$$E(\bar{t}, \bar{r}) = Q(\bar{t}, \bar{r})/\bar{r}^2,$$

$Q(\bar{t}, \bar{r})$ étant la charge totale contenue dans la sphère de rayon $\bar{r}$ à l'instant $\bar{t}$. A ce champ correspond un potentiel-vecteur de la forme réduite $A_0 \equiv A_0(\bar{t}, r)$, $A_i = 0$ de manière que

$$E = \frac{\partial A_0}{\partial \bar{r}}.$$

Considérons maintenant la trajectoire d'une des particules chargées. La charge $Q(\bar{t}, \bar{r})$ aura la même valeur pour tous les points de cette ligne correspondant à $\bar{t} < T$. Appelons Q_1 cette valeur. Si nous approchons le point (T, a) le long de cette ligne nous trouvons

$$\lim_{\bar{t}\to T} \partial A_0/\partial \bar{r} = Q_1/a^2.$$

Répétons le même raisonnement avec la trajectoire d'une autre particule sur laquelle $Q(\bar{t}, \bar{r}) \equiv Q_2 \neq Q_1$. Si nous approchons le point (T, a) le long de cette trajectoire nous trouvons

$$\lim_{\bar{t}\to T} \partial A_0/\partial \bar{r} = Q_2/a^2.$$

La conclusion est que $\partial A_0/\partial \bar{r}$ est fini partout mais ne tend pas vers une limite déterminée quand $\bar{t} \to T$: C'est exactement le même résultat que celui que nous avions trouvé précédemment pour les dérivées $\partial \bar{g}^{\mu\nu}/\partial \bar{x}^\alpha$.

VI. — LA DESCRIPTION DE L'ÉTAT DU GAZ A L'INSTANT $t = T$

Nous reprenons la discussion du problème gravitationnel et nous rappelons que toutes les particules du gaz se trouvent au point $\bar{r} = a$ à l'instant $\bar{t} = T$. Mais en ce point les particules ont des vitesses différentes. Il est facile de calculer ces vitesses dans le système de coordonnées $(\bar{t}, \bar{r})$. On remarquera que dans les coordonnées en co-mouvement (t, r) la vitesse de chaque particule, en mouvement sur une des lignes $r =$ const., est $u^\alpha = (1, 0)$. Considérons une de ces particules à un instant $t < \mathrm{T}$ et appliquons la transformation $x^\mu \to \bar{x}^\mu$. Nous trouvons

$$\bar{u}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} u^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial t} = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right).$$

En tenant compte de (18) et (23) nous trouvons finalement

$$\bar{u}^\alpha = \left(\cosh \Omega \,,\, -\sqrt{1 + f_1} \sinh \Omega\right). \tag{26}$$

Ces valeurs ne dépendent pas de t et par conséquent elles sont valables aussi quand $t = \mathrm{T}$; mais ceci est équivalent à $\bar{t} = \mathrm{T}$.

La fonction Ω a été définie par la deuxième des équations (21). La solution de Tolman que nous discutons a $\mathrm{A}' > 0$. Par conséquent Ω est une fonction croissante de r. Pour déterminer la constante d'intégration contenue dans Ω nous posons

$$\Omega(a) = 0. \tag{27}$$

Ce choix a la conséquence que la ligne $r = a$ a la même équation, $\bar{r} = a$, dans les coordonnées $(\bar{t}, \bar{r})$. Cette ligne constitue la frontière entre les deux domaines $r < a$ et $a < r < b$. Le fait que cette frontière ne change pas dans la transformation (18) nous permet de prendre dans l'intervalle $r < a$ la transformation identique $\bar{t} = t$, $\bar{r} = r$.

Nous allons comparer les directions $\bar{u}^\alpha$ à une direction ayant une signification géométrique bien déterminée : C'est la direction $\bar{e}^\alpha$ de la ligne d'univers du centre de symétrie. Cette ligne a l'équation invariante $\mathrm{R} = 0$. Nous remarquerons encore que dans l'intervalle $r < a$ l'espace est minkowskien et par conséquent toutes les lignes $\mathrm{R} =$ const. sont des géodésiques parallèles. Il s'ensuit que $\bar{e}^\alpha$ est aussi la direction de la ligne $\mathrm{R} =$ const. passant par le point $\bar{t} = \mathrm{T}$, $\bar{r} = a$. La formule (13) montre qu'on a sur cette ligne $dr/dt = \sqrt{f_1}$. C'est-à-dire

$$\bar{e}^\alpha = \left(\lambda \,,\, \lambda\sqrt{f_1}\right).$$

Pour déterminer le facteur λ on écrira que $\bar{e}^\alpha$ est un vecteur unitaire :

$$\lambda^2 - \lambda^2 \frac{f_1}{1 + f_1} = 1.$$

Ceci nous donne $\lambda = \sqrt{1 + f_1}$ et

$$\bar{e}^\alpha = (\sqrt{1 + f_1}\,,\ \sqrt{f_1(1 + f_1)}). \tag{28}$$

Nous calculons maintenant le produit scalaire de $\bar{u}^\alpha$ et $\bar{e}^\alpha$:

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{u}^\alpha\bar{e}^\beta = \sqrt{1 + f_1} \cosh \Omega + \sqrt{f_1} \sinh \Omega.$$

Si nous posons

$$\sqrt{1 + f_1} = \cosh \omega_1 \quad , \quad \sqrt{f_1} = \sinh \omega_1, \tag{29}$$

nous trouvons finalement

$$\bar{u}^\alpha\bar{e}_\alpha = \cosh (\Omega + \omega_1). \tag{30}$$

Cette formule signifie que la quantité

$$\tilde{\Omega} \equiv \Omega + \omega_1 \tag{31}$$

est l' « angle » formé par les directions $\bar{u}^\alpha$ et $\bar{e}^\alpha$. Il sera préférable d'utiliser dans la suite $\tilde{\Omega}$ au lieu de Ω. On voit immédiatement que $\tilde{\Omega}$ satisfait, comme Ω, à la même équation (21),

$$\tilde{\Omega}' = \frac{1}{\sqrt{1 + f}} A'. \tag{32}$$

Les « angles » $\tilde{\Omega}$ correspondant aux particules du gaz que nous étudions sont compris dans l'intervalle

$$\tilde{\Omega}(a) \equiv \tilde{\Omega}_1 \leqslant \tilde{\Omega} \leqslant \Omega_2 \equiv \tilde{\Omega}(b). \tag{33}$$

La valeur $\tilde{\Omega}_1 = \omega_1$ est donnée immédiatement par (29). Par contre $\tilde{\Omega}_2$ ne peut être déterminé, à partir des fonctions $f(r)$ et $F(r)$ données dans l'intervalle $a < r < b$, qu'après l'intégration de (21) ou (32).

Pour la description complète de l'état du gaz à l'instant $\bar{t} = T$ nous aurons besoin de la distribution, sur l'intervalle (33), d'une quantité physique conservée. Cette quantité est la masse propre du gaz. En effet la loi de conservation $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ donne pour un gaz incohérent avec le tenseur de matière $T^{\mu\nu} = \rho\bar{u}^\mu u^\nu$:

$$\frac{d\rho}{ds} + \rho u^\nu{}_{;\nu} = 0.$$

D'autre part si on considère un tube formé par des trajectoires des particules du gaz on trouve pour la section normale de ce tube, c'est-à-dire pour le volume propre δV_0 :

$$\frac{d}{ds}(\delta V_0) = u^{\nu}{}_{;\nu}\, \delta V_0.$$

En combinant ces deux relations on trouve

$$\frac{d}{ds}(\rho \delta V_0) = 0. \tag{34}$$

Nous appliquons ce résultat à la solution de Tolman dans les coordonnées en co-mouvement. La vitesse étant dans ce système $u^{\alpha} = u_{\alpha} = (1, 0)$ on voit immédiatement que la quantité ε définie par (6) est, à un facteur constant près, identique à la densité de masse propre ρ. La masse propre $m_0(r)$ contenue à l'intérieur de la sphère $S(r)$ de rayon r sera donnée par

$$m_0(r) = \int_{S(r)} \varepsilon \sqrt{-\det g_{ik}}\, dx^1 dx^2 dx^3.$$

La densité ε est donnée par (6). On a d'autre part

$$\sqrt{-\det g_{ik}} = \frac{R^2 R'}{\sqrt{1+f}} \sin\theta \quad , \quad \int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi.$$

Donc finalement

$$m_0(r) = \int_a^r \frac{F'}{2\sqrt{1+f}}\, dr. \tag{35}$$

On a aussi

$$m_0' \equiv \frac{dm_0}{dr} = \frac{F'}{2\sqrt{1+f}}. \tag{35'}$$

La masse propre totale du gaz sera donnée par

$$m_0 = m_0(b) = \int_a^b \frac{F'}{2\sqrt{1+f}}\, dr. \tag{36}$$

Notons que cette quantité est en général différente de la masse totale du gaz représentée par la constante m qui apparaît dans la solution extérieure de Schwarzschild. La relation de m avec les quantités qui entrent dans la solution de Tolman peut être obtenue par la discussion du raccordement du champ de Tolman et du champ extérieur de Schwarzschild. Les détails de cette discussion seront donnés dans un autre travail. Nous donnons ici le résultat final qui est particulièrement simple :

$$2m = F(b). \tag{37}$$

Nous sommes maintenant en mesure de décrire complètement l'état du gaz à l'instant $\bar{t} = T$. On a d'abord besoin de l'intervalle (33) des angles que forment les vitesses $\bar{u}^\alpha$ des particules du gaz avec la direction $\bar{e}^\alpha$. De plus on doit donner la distribution de la masse propre du gaz dans l'intervalle (33). Cette distribution se déduit immédiatement de (35′) si on y introduit la variable $\tilde{\Omega}$ au lieu de r. On trouve

$$\frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2\sqrt{1+f}} \frac{dF}{d\tilde{\Omega}}. \tag{38}$$

VII. — LA DESCRIPTION DE L'ÉTAT DU GAZ POUR $\bar{t} < T$

L'intervalle (33) et la distribution (38) de la masse propre déterminent complètement l'état du gaz. En effet en partant de ces données on peut déterminer le mouvement et le champ gravitationnel du gaz aussi bien pour $\bar{t} < T$ que pour $\bar{t} > T$. Nous le démontrerons ici en détail pour $\bar{t} < T$; c'est-à-dire nous retrouverons les fonctions $f(r)$ et $F(r)$, mais comme fonctions $f(\tilde{\Omega})$ et $F(\tilde{\Omega})$, en partant de (33) et (38).

Pour déterminer les deux fonctions f et F on doit remarquer qu'à côté de l'équation (38) on a aussi la relation (32) :

$$\sqrt{1+f} = \frac{d}{d\tilde{\Omega}} \sqrt{f + F/a}. \tag{39}$$

Nous avons donc deux équations différentielles du premier ordre pour les deux fonctions inconnues f et F. Il sera utile de remplacer f et F par deux nouvelles fonctions :

$$\sqrt{1+f} \equiv X(\tilde{\Omega}) \quad , \quad \frac{F-a}{a} \equiv Y(\tilde{\Omega}). \tag{40}$$

Les équations (38) et (39) deviennent alors

$$\frac{dY}{d\tilde{\Omega}} = \frac{2X}{a}\frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}} \quad , \quad \frac{d}{d\tilde{\Omega}}\sqrt{X^2+Y} = X. \tag{41}$$

En combinant ces équations et en tenant compte de la condition (7), $X \neq 0$, on trouve

$$\sqrt{X^2+Y} = \frac{dX}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{a\,d\tilde{\Omega}}. \tag{41'}$$

L'élimination de $\sqrt{X^2+Y}$ entre (41) et (41') nous donne une équation du deuxième ordre pour X :

$$\frac{d^2X}{d\tilde{\Omega}^2} - X + \frac{d^2m_0}{ad\tilde{\Omega}^2} = 0. \tag{42}$$

Quand on connaît X on détermine Y à l'aide de (41') :

$$Y = \left(\frac{dX}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{ad\tilde{\Omega}}\right)^2 - X^2. \tag{43}$$

La solution générale de (42) est

$$X = C \cosh \tilde{\Omega} + K \sinh \tilde{\Omega} + \xi(\tilde{\Omega}). \tag{44}$$

C et K sont les deux constantes d'intégration et $\xi(\tilde{\Omega})$ une solution particulière quelconque de (42) qu'on doit déterminer après avoir introduit dans (42) la fonction $m_0(\tilde{\Omega})$ donnée. On déduit alors de (43)

$$Y = \left(C \sinh \tilde{\Omega} + K \cosh \tilde{\Omega} + \frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right)^2 - (C \cosh \tilde{\Omega} + K \sinh \tilde{\Omega} + \xi)^2. \tag{45}$$

Les constantes d'intégration seront déterminées à l'aide des valeurs initiales de X et Y. Pour $r = a$, c'est-à-dire pour $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_1 = \omega_1$ on a

$$X(\tilde{\Omega}_1) = \sqrt{1+f_1} = \cosh \omega_1 \quad , \quad Y(\tilde{\Omega}_1) = -1$$

car $F(\tilde{\Omega}_1) = F(a) = 0$. Nous trouvons finalement

$$\left\{\begin{aligned} C &= -\xi_1 \cosh \tilde{\Omega}_1 + \left(\frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right)_1 \sinh \tilde{\Omega}_1 + 1, \\ K &= -\left(\frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right)_1 \cosh \tilde{\Omega}_1 + \xi_1 \sinh \tilde{\Omega}_1 \end{aligned}\right. \tag{46}$$

avec $\xi_1 \equiv \xi(\tilde{\Omega}_1)$ et $\left(\frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right)_{\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}_1}$. Nous avons ainsi déterminé les fonctions $X(\tilde{\Omega})$ et $Y(\tilde{\Omega})$ et par conséquent aussi les fonctions $f(\tilde{\Omega})$, $F(\tilde{\Omega})$ qui définissent la solution de Tolman pour $\bar{t} < T$ à partir des données initiales (33) et (38).

VIII. — L'ÉTAT DU GAZ POUR $\bar{t} > T$

L'évolution du gaz pour $\bar{t} > T$ sera déterminée à partir des mêmes données (33) et (38) à l'aide des deux remarques suivantes.

1) A l'instant $\bar{t} = T$ toutes les particules du gaz se trouvent au même point mais elles ont des vitesses différentes. Par conséquent les particules auront pour $\bar{t} > T$ des trajectoires qui ne se rencontrent pas dans un intervalle fini $0 < \bar{t} - T < T_1$. Mais ceci signifie que dans cet intervalle le mouvement et le champ gravitationnel du gaz seront de nouveau décrits par une solution de Tolman ([3]). Notons que d'après la remarque qui suit la formule (17) cette nouvelle solution de Tolman sera définie par deux nouvelles fonctions $\bar{f}(r)$ et $\bar{F}(r)$. Notre problème est de déterminer les fonctions $\bar{f}(r)$ et $\bar{F}(r)$.

2) Les particules ayant pour $\bar{t} < T$ la trajectoire $r = a$, c'est-à-dire les particules qui étaient les plus proches du centre de symétrie, seront pour $\bar{t} > T$ les plus éloignées. Inversement les particules les plus éloignées pour $\bar{t} < T$ seront les plus proches pour $\bar{t} > T$.

Notons encore que le point $\bar{t} = T$, $\bar{r} = a$ est un point régulier pour les trajectoires des particules du gaz. Ceci signifie que la vitesse d'une quelconque de ces particules forme le même angle $\tilde{\Omega}$ avec $\bar{\varepsilon}^{\alpha}$ aussi bien pour $\bar{t} = T - 0$ que pour $\bar{t} = T + 0$. On devra par conséquent faire correspondre à chaque particule la même valeur de $\tilde{\Omega}$ pour $\bar{t} > T$ comme pour $\bar{t} < T$. La remarque 2) montre qu'on aura pour $\bar{t} > T$ la valeur maximale $\tilde{\Omega}_2$ de $\tilde{\Omega}$ attribuée à la particule la plus proche du centre et la valeur minimale $\tilde{\Omega}_1$ à la particule la plus éloignée. Ceci signifie que si l'on revient à la coordonnée radiale r on aura dans le domaine $\bar{t} > T$

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dr} < 0.$$

D'autre part la formule (17) montre que dans ce domaine la demande $\varepsilon > 0$ entraîne la condition

$$\frac{d}{dr}\sqrt{\bar{f} + \bar{F}/a} < 0.$$

([3]) Soulignons que ceci n'est vrai que pour le cas particulier que nous avons étudié, caractérisé par une ligne caustique dégénérée rencontrée par les trajectoires de toutes les particules du gaz. Dans tous les autres cas on n'aura plus une solution de Tolman au-delà de la ligne caustique.

Ce double changement de signe a pour conséquence que nous aurons dans le domaine $\bar{t} > T$ une équation identique à (32) ou (39) :

$$\sqrt{1+\bar{f}} = \frac{d}{d\tilde{\Omega}} \sqrt{\bar{f} + \bar{F}/a}.$$

Pour la nouvelle fonction $\bar{m}_0(r)$ valable dans le domaine $\bar{t} > T$ nous aurons à demander de nouveau

$$\bar{m}_0(a) \equiv \bar{m}_0(\tilde{\Omega}_2) = 0 \quad , \quad \frac{d\bar{m}_0}{dr} > 0.$$

Il sera donc $\dfrac{d\bar{m}_0}{d\tilde{\Omega}} < 0$. La loi de conservation (34) de la masse propre conduit à la relation

$$\left| \frac{d\bar{m}_0}{d\tilde{\Omega}} \right| = - \frac{d\bar{m}_0}{d\tilde{\Omega}} = \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}.$$

Il s'ensuit que l'équation (38) devient pour $\bar{t} > T$

$$- \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\bar{f}}} \frac{d\bar{F}}{d\tilde{\Omega}}.$$

Ceci est en accord avec $\bar{F}(a) \equiv \bar{F}(\tilde{\Omega}_2) = 0$ et $\dfrac{d\bar{F}}{dr} > 0$, c'est-à-dire $\dfrac{d\bar{F}}{d\tilde{\Omega}} < 0$.

En introduisant les fonctions $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ définies par des formules identiques à (40),

$$\sqrt{1+\bar{f}} \equiv \bar{X}(\tilde{\Omega}) \quad , \quad \frac{\bar{F}-a}{a} \equiv \bar{Y}(\tilde{\Omega}),$$

on aboutit finalement à deux équations qui ne diffèrent de (42) et (43) que par les signes des dérivées de $\bar{m}_0$:

(47) $$\frac{d^2\bar{X}}{d\tilde{\Omega}^2} - \bar{X} - \frac{d^2m_0}{d\tilde{\Omega}^2} = 0,$$

(48) $$\bar{Y} = \left(\frac{d\bar{X}}{d\tilde{\Omega}} - \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}} \right)^2 - \bar{X}^2.$$

Nous prendrons comme solution particulière de (47) la fonction $\bar{\xi}(\tilde{\Omega}) = - \xi(\tilde{\Omega})$, $\xi(\tilde{\Omega})$ étant la fonction utilisée dans (44). La solution générale de (47) est alors

(49) $$\bar{X} = \bar{C} \cosh \tilde{\Omega} + \bar{K} \sinh \tilde{\Omega} - \xi(\tilde{\Omega}).$$

Pour $\overline{\mathrm{Y}}$ on déduit de (48) et (49)

$$(50)\quad \overline{\mathrm{Y}} = \left(\overline{\mathrm{C}} \sinh \tilde{\Omega} + \overline{\mathrm{K}} \cosh \tilde{\Omega} - \frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} - \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right)^2 - (\overline{\mathrm{C}} \cosh \tilde{\Omega} + \overline{\mathrm{K}} \sinh \tilde{\Omega} - \xi)^2.$$

Il ne reste qu'à déterminer les nouvelles constantes d'intégration $\overline{\mathrm{C}}$ et $\overline{\mathrm{K}}$. Les valeurs initiales de $\overline{\mathrm{X}}$ et $\overline{\mathrm{Y}}$ étant

$$(51)\qquad \overline{\mathrm{X}}(a) \equiv \overline{\mathrm{X}}(\tilde{\Omega}_2) = \cosh \tilde{\Omega}_2 \quad , \quad \overline{\mathrm{Y}}(a) \equiv \overline{\mathrm{Y}}(\tilde{\Omega}_2) = -1,$$

on trouve finalement par un calcul élémentaire :

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathrm{C}} &= \left[\xi \cosh \tilde{\Omega} - \left(\frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right) \sinh \tilde{\Omega}\right]_{\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}_2} + 1, \\ \overline{\mathrm{K}} &= \left[\left(\frac{d\xi}{d\tilde{\Omega}} + \frac{dm_0}{d\tilde{\Omega}}\right) \cosh \tilde{\Omega} - \xi \sinh \tilde{\Omega}\right]_{\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}_2}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons ainsi déterminé complètement la solution de Tolman qui décrit, pour $t > \mathrm{T}$, le mouvement du gaz dont le mouvement pour $t < \mathrm{T}$ était décrit par les fonctions initiales f et F. Notons encore que les nouvelles fonctions $\bar{f}$ et $\overline{\mathrm{F}}$ ont été déterminées comme fonctions de $\tilde{\Omega}$. Le passage de la variable $\tilde{\Omega}$ à la coordonnée de Tolman r n'est pas univoque : on peut prendre n'importe quelle fonction décroissante $r(\tilde{\Omega})$ satisfaisant seulement aux conditions $r(\tilde{\Omega}_2) = a$ et $r(\tilde{\Omega}_1) = b$.

Notons finalement qu'à l'aide des résultats précédents on peut vérifier directement la relation

$$\overline{\mathrm{Y}}(\tilde{\Omega}_1) = \mathrm{Y}(\tilde{\Omega}_2).$$

C'est-à-dire $\overline{\mathrm{Y}}(b) = \mathrm{Y}(b)$ ou encore

$$(53)\qquad \overline{\mathrm{F}}(b) = \mathrm{F}(b).$$

Ceci signifie d'après (37) que la constante m de la solution de Schwarzschild valable pour $r > b$ a la même valeur pour $t < \mathrm{T}$ et $t > \mathrm{T}$, comme on devrait d'ailleurs l'exiger. Ainsi la relation (53) constitue un contrôle pour l'ensemble de nos calculs.

IX. — CONCLUSIONS

En conclusion nous soulignons que d'après nos résultats une ligne caustique de la solution de Tolman ne constitue pas une limite dans le sens qu'au-delà de cette ligne il serait fondamentalement impossible de suivre l'évolution du mouvement et du champ gravitationnel du gaz : nous avons montré que même dans le cas le plus grave, qui est celui d'une ligne caustique dégénérée, on peut suivre cette évolution à travers et au-delà de cette ligne en tout détail bien que la densité de masse propre devienne pour $t = \mathrm{T}$ infinie comme la fonction $\delta(r - a)$. Par conséquent cette ligne ne constitue pas une singularité d'après la définition que nous avons proposée au § I.

RÉFÉRENCES

[1] A. Lichnerowicz, Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme. Masson, Paris, 1955.
Voir aussi : Y. Choquet, *C. R. Acad. Sc.* (Paris), 1959, p. 1782.

[2] R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 20, 1934 *a*, p. 169.
Voir aussi : B. Datt, *Z. Physik* (Allemagne), 108, 1938, p. 314.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1966.