

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

C. BOURRELY

**Nouvelles considérations sur le modèle statique. II.  
- Application à la diffusion  $\pi$  - N en ondes P**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 6, n° 3 (1967), p. 255-265

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1967\\_\\_6\\_3\\_255\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_3_255_0)

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Nouvelles considérations sur le modèle statique

### II. — Application à la diffusion $\pi$ — N en ondes P

par

**C. BOURRELY (\*)**

Physique théorique, Faculté des Sciences,  
Place Victor-Hugo, 13-Marseille (3<sup>e</sup>).

---

**SOMMAIRE.** — Une nouvelle méthode a été proposée par J. Mandelbrojt et S. Mandelbrojt pour remplacer de façon non ambiguë le procédé de coupure (cutoff) utilisé en théorie des champs. Nous envisageons une application à la diffusion pion-nucléon en ondes P dans le modèle de Chew et Low. A l'aide de la fonction de source évaluée par cette méthode et sans introduire de paramètres arbitraires, on trouve la résonance (3,3) de 1 230 MeV et une résonance (1,1) à 1 420 MeV.

**ABSTRACT.** — A new method has been suggested by J. Mandelbrojt and S. Mandelbrojt to replace in an unambiguous way the cutoff procedure often used in fields theory. We investigate an application to the Chew Low model for P waves pion-nucleon scattering. With the source function evaluated by this procedure and without arbitrary parameters, we find that the (3,3) resonance is obtained at 1 230 MeV and a (1,1) resonance is predicted at 1 420 MeV.

---

### INTRODUCTION

Récemment J. Mandelbrojt et S. Mandelbrojt [1] ont formulé une méthode de convergence canonique qui utilise certains théorèmes sur les fonctions entières, cette méthode a été appliquée à l'étude de la fonction de source dans le modèle statique (1).

---

(\*) Cet article est tiré d'une thèse qui doit être présentée à l'Université d'Aix-Marseille en vue d'obtenir le titre de « Docteur ès Sciences ».

(1) Voir [3] (article précédent).

Nous proposons d'utiliser ces résultats pour la diffusion pion-nucléon en ondes P à basse énergie d'après le modèle de Chew et Low [2]. Notre étude diffère des travaux précédents par l'introduction d'une fonction de source non arbitraire du fait qu'elle est étroitement liée à la forme du potentiel. D'autre part la valeur de la coupure sur les intégrales (cutoff) que Chew et Low trouvent phénoménologiquement à  $6\mu$  apparaît ici naturellement comme une conséquence de la forme asymptotique du potentiel.

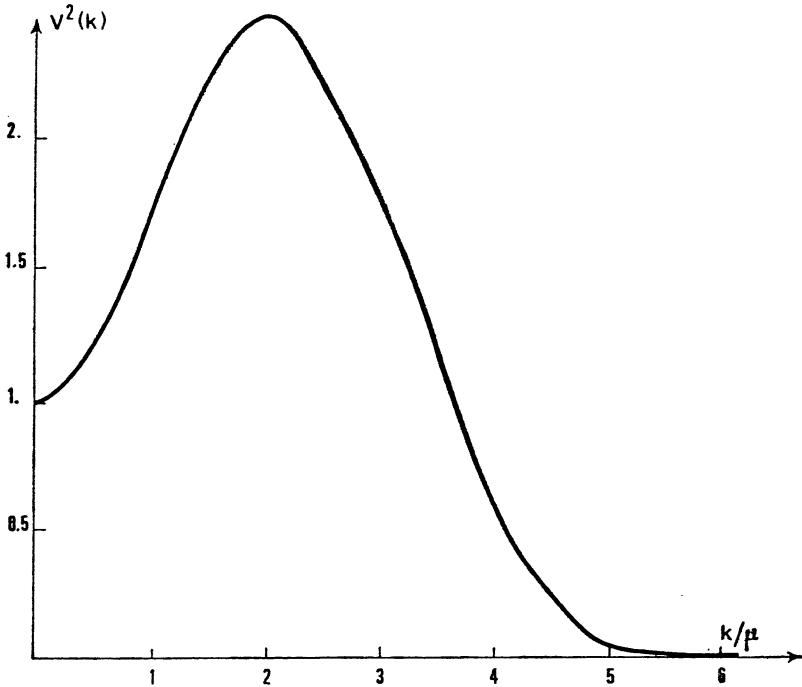


FIG. 1. —  $v^2(k)$  en fonction de  $k/\mu$ .

Ces raisons nous ont conduit à étudier la diffusion méson-nucléon dans le modèle statique pour mieux tester le procédé de convergence canonique, par ailleurs étant donné le caractère particulier de notre fonction de source (elle diffère notablement des types de source considérés jusqu'ici, voir fig. 1) il était intéressant de résoudre ce modèle pour vérifier la validité de nos résultats, c'est le but du développement qui va suivre.

Dans la section suivante sont données les principales formules relatives au modèle, on trouvera la justification de celles-ci dans la littérature à ce sujet [2] et [4].

A la section II sera précisée l'influence de la fonction de source sur les résultats, on trouve que ceux-ci dépendent de la forme de la source contrairement à l'idée couramment admise.

Nous discuterons dans la section III les méthodes pour résoudre par un processus itératif les équations intégrales de Low dans l'approximation à un méson. Les résultats sont donnés à la section IV, la solution numérique des équations donne des résultats satisfaisants pour les états (1,1) et (3,3) jusqu'au seuil inélastique. On trouve la position de la résonance (3,3) pour  $\omega = 2\mu$ , et dans l'état (1,1) on trouve une première résonance à  $\omega = 3,4\mu$  qui pourrait correspondre à l'isobare de 1 400 MeV qui a été signalé par les expérimentateurs [9], et une seconde résonance à  $\omega = 8,4\mu$  mais la valeur de cette dernière se situe à une énergie où la validité du modèle est douteuse.

## I. — LE MODÈLE DE CHEW ET LOW

Pour résoudre le problème de la diffusion dans l'approximation à un méson Chew et Low [2] introduisent une fonction  $h_\alpha(z)$

$$(1) \quad h_\alpha(z) = \frac{\lambda_\alpha}{z} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \left\{ \frac{\text{Im } h_\alpha(\omega')}{\omega' - z} + \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{\text{Im } h_\beta(\omega')}{\omega' - z} \right\}$$

$\alpha$  prend les valeurs 1, 2, 3, pour les états (1,1), (1,3), (3,1) et (3,3) respectivement.

$$(2) \quad \text{Im } h_\alpha(\omega) = p^3 v^2(p) |h_\alpha(\omega)|^2 \quad \text{pour } \omega > 1$$

$\omega = (p^2 + 1)^{1/2}$  est l'énergie du pion,  $A_{\alpha\beta}$  la matrice de croisement,  $v(p)$  la fonction de source;  $\hbar$ ,  $c$ , et la masse du pion au repos sont prises comme unité.

$$\lambda_\alpha = \frac{2}{3} f^2 \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A_{\alpha\beta} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$h_\alpha(\omega)$  est relié aux déphasages par :

$$(3) \quad h_\alpha(\omega) = \frac{\exp(i\delta_\alpha(\omega)) \sin \delta_\alpha(\omega)}{p^3 v^2(p)}$$

$f$  est la constante de couplage renormalisée (nous prendrons par la suite  $(f/\mu)^2 = 0,08$ ).

Pour résoudre (1) et éliminer le pôle à l'origine, Chew et Low définissent la fonction

$$(4) \quad g_\alpha(z) = \frac{\lambda_\alpha}{z} [h_\alpha(z)]^{-1}$$

qui satisfait la condition de symétrie de croisement

$$(5) \quad \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \frac{1}{g_\beta(\omega)} = \frac{1}{g_\alpha(-\omega)}$$

Pour  $f^2$  suffisamment petit, et si  $h_\alpha(z)$  n'a pas de zéros, et aucun autre pôle que celui pour  $z = 0$ ,  $g_\alpha(z)$  satisfait l'équation intégrale

$$(6) \quad g_\alpha(z) = 1 + \frac{z}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \left\{ \frac{\text{Im } g_\alpha(\omega')}{\omega' - z} - \frac{\text{Im } g_\alpha(-\omega')}{\omega' - z} \right\}$$

avec

$$(7) \quad \text{Im } g_\alpha(\omega) = -\lambda_\alpha p^3 v^2(p)/\omega \quad \text{pour } \omega > 1$$

$$(8) \quad \text{Re } g_\alpha(\omega) = \lambda_\alpha \frac{p^3 v^2(p)}{\omega} \cotg \delta_\alpha(\omega)$$

Dans la limite  $\omega \rightarrow 0$ , nous définissons la portée effective par les relations

$$(9) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} [\omega h_\alpha(\omega)/\lambda_\alpha] \approx 1 + r'_\alpha \omega$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} g_\alpha(\omega) \approx 1 - r_\alpha \omega$$

$$(10) \quad r'_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha \pi} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \left\{ 1 + \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \text{Im } h_\beta(\omega') \right\}$$

$$r_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \left\{ -\text{Im } g_\alpha(\omega') + \text{Im } g_\alpha(-\omega') \right\}$$

## II. — INFLUENCE DE LA FONCTION DE SOURCE SUR LE MODÈLE

Pour montrer l'influence de la fonction de source rappelons certains résultats établis dans le travail précédent. On a déterminé deux sources  $v_m(k)$  et  $v(k)$  par les conditions respectives suivantes :

$$(11, a) \quad |F(r)| \leq \frac{\mu^2}{4\pi} \frac{e^{\mu r}}{r}$$

$$(11, b) \quad |F(r)| \leq e^{-C(r)}$$

avec  $C(r)$  donné par (11, a) dans la région extérieure et  $C(r)$  déterminé par un potentiel phénoménologique dans la région intermédiaire.

$$(12) \quad v(0) = 1$$

En utilisant (11, a) et (12) on a déterminé une source  $v_M(k)$ . A l'aide de (11, b) on trouve  $\mu_4, \dots, \mu_n$  déterminés par  $C(r)$  dans la région  $\mu r > 1,25$  et  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  avec  $C(r)$  dans la région intermédiaire, si l'on ajoute la condition (12) ceci détermine  $v(k)$ .

Anticipons les résultats; en résolvant le système d'équations intégrales avec ces deux fonctions de source on trouve que :

Re  $g_3(\omega)$  correspondant à  $v_M(k)$  a un minimum positif pour  $\omega = 2\mu$ ; la fonction Re  $g_3(\omega)$  associée à  $v(k)$  possède un minimum nul pour  $\omega = 2\mu$  ce qui met en évidence la résonance (3,3) puisque les zéros de Re  $g_\alpha(\omega)$  donnent leur position.

On voit donc que les résultats dépendent effectivement de la source, le résultat relatif à  $v_M(k)$  (minimum non nul) montre qualitativement qu'il pourrait se produire une résonance pour  $\omega = 2\mu$ , mais c'est en tenant compte des effets du potentiel dans la région intermédiaire que l'on obtient effectivement une résonance. Il faut noter dans les deux cas que seule la valeur du minimum de Re  $g_3(\omega)$  varie mais non sa position, ce qui permet de déduire que la partie à longue portée du potentiel donne une description qualitative des résultats.

### III. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

En premier lieu, les équations intégrales donnant les fonctions Re  $g_\alpha(\omega)$  et Re  $g_\alpha(-\omega)$  sont résolues par un processus itératif, puis en utilisant la relation  $h_\alpha(\omega) = \lambda_\alpha/(\omega g_\alpha(\omega))$ , Im  $h_\alpha(\omega)$  est calculé, et au moyen de (1) on obtient Re  $h_\alpha(\omega)$ .

Cette façon de procéder est imposée du fait que seulement Im  $g_\alpha(\omega)$  est indépendant de  $g_\alpha(\omega)$ , par contre il n'existe pas de propriété équivalente pour Im  $h_\alpha(\omega)$ .

Nous obtenons Im  $g_\alpha(-\omega)$  par symétrie de croisement, ainsi nous pouvons écrire les deux relations équivalentes :

$$(13) \quad \text{Im } g_\alpha(-\omega) = \text{Re } g_\alpha(-\omega) \frac{N_\alpha(\omega)}{D_\alpha(\omega)}$$

$$(14) \quad \text{Im } g_\alpha(-\omega) = \frac{N_\alpha(\omega)}{[N_\alpha(\omega)]^2 + [D_\alpha(\omega)]^2}$$

où

$$(15) \quad \begin{aligned} N_\alpha(\omega) &= \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \frac{\text{Im } g_\beta(\omega)}{|g_\beta(\omega)|^2} \\ D_\alpha(\omega) &= \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \frac{\text{Re } g_\beta(\omega)}{|g_\beta(\omega)|^2} \end{aligned}$$

Les relations (13) et (14) ont été mises en évidence du fait qu'elles impliquent deux façons différentes de résoudre les équations intégrales.

La fonction  $\text{Im } g_\alpha(-\omega)$  évaluée par (13) nécessite la résolution d'un système d'équations couplées, c'est-à-dire  $\text{Re } g_\alpha(\omega)$  et  $\text{Re } g_\alpha(-\omega)$ , par contre si l'on utilise (14),  $\text{Re } g_\alpha(\omega)$  et  $\text{Re } g_\alpha(-\omega)$  sont évaluées indépendamment.

On trouve que seul le second procédé converge numériquement, le défaut du premier est dû au noyau associé à une valeur principale. En résumé, nous partons d'une fonction d'essais  $\text{Im } g_\alpha(-\omega) = \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \text{Im } g_\beta(\omega)$  (soit  $g_\alpha(\omega) = 1$ ) [6], on calcule  $\text{Re } g_\alpha(\omega)$  et  $\text{Re } g_\alpha(-\omega)$  suivant (5) et  $\text{Im } g_\alpha(-\omega)$  d'après (14), ensuite le processus d'itération est répété jusqu'à ce que la convergence soit obtenue (10 itérations sont nécessaires). Les intégrales sont calculées par la méthode des trapèzes en utilisant 100 points dans l'intervalle d'intégration  $\mu \leq \omega \leq 6\mu$ , et 150 points dans l'intervalle d'itération  $\mu \leq \omega \leq 20\mu$ .

Notons que nous avons utilisé  $6\mu$  comme limite supérieure d'intégration, ce qui est justifié d'après la forme de  $v(k)$ , cependant si des contributions particulières se produisent au-delà de l'intervalle d'intégration, on en tiendra compte de la manière suivante : dans l'état  $\alpha = 1$ ,  $\text{Re } g_1(\omega) = 0$  pour  $\Omega = 8,36\mu$  et au voisinage de cette valeur  $\text{Im } g_1(\omega) \approx 0$ , la contribution qui en résulte pour  $h_\alpha(\omega)$  est donnée par [6]

$$\Delta \text{Re } h_\alpha(\omega) \approx -\frac{\lambda_1}{\Omega} \left( \frac{\delta_{\alpha 1}}{\Omega - \omega} + \frac{A_{\alpha 1}}{\Omega - \omega} \right) / \left[ \frac{d}{d\omega} \text{Re } g_1(\omega) \right]_{\omega=\Omega}$$

Ensuite la symétrie de croisement (5) est examinée numériquement, puis en introduisant les résultats obtenus pour les équations (6) et (14) dans (1) nous vérifierons dans quelle mesure ces derniers sont solution.

Il est important de noter que ces équations ne possèdent pas une solution unique comme l'ont montré Castillejo, Dalitz et Dyson [8], mais nous ne sommes pas intéressés par les états liés du système.

#### IV. — RÉSULTATS

La solution numérique de l'équation (6) est représentée par la figure 2, à partir de (3) et (8) on voit que les zéros de  $\text{Re } h_\alpha(\omega)$  et  $\text{Re } g_\alpha(\omega)$  sont reliés à l'existence de résonances.

Pour  $\text{Re } g_3(\omega)$  nous obtenons un minimum nul à  $\omega = 2\mu$ , ce zéro met en évidence la résonance classique (3,3) et un minimum pour  $\text{Re } g_3(\omega)$  implique une résonance large ce qui est confirmé par l'expérience. L'état  $\alpha = 1$  fait apparaître un zéro pour  $\omega = 3,4\mu$  et  $\omega = 8,36\mu$ .

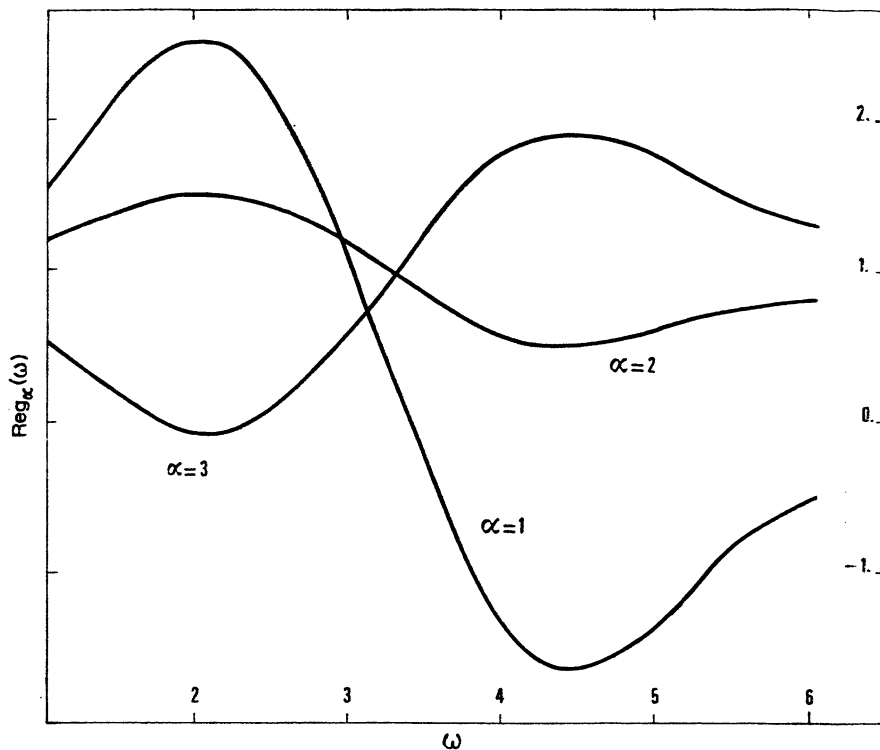


FIG. 2. —  $\text{Re } g_\alpha(\omega)$  d'après (5) en fonction de  $\omega$  (en unité de  $\mu$ ).

La possibilité d'une résonance pour  $\omega = 3,4 \mu$  (1 420 MeV, négligeant le recul du nucléon) n'est pas encore très bien établie par les expérimentateurs [9], mais d'après Ch. Peyrou on doit s'attendre à une résonance dans l'état  $P_{11}$  avec une masse de 1 400 MeV et une largeur 200 MeV. La seconde résonance ( $\omega = 8,36\mu$ ) se situe à trop haute énergie pour être correctement décrite par le modèle.

Les courbes représentant  $\text{Re } g_\alpha(-\omega)$  calculées à partir de (6) (voir fig. 3) montrent l'influence de la résonance (3,3) sur l'état  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ , et réciproquement l'influence de la résonance (1,1) sur l'état  $\alpha = 3$ .



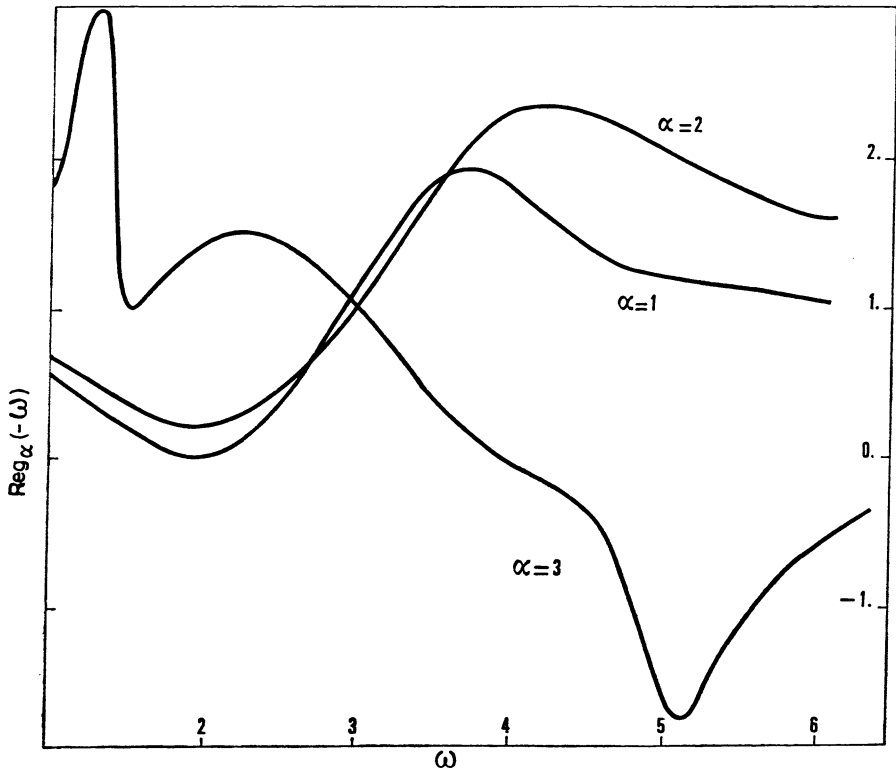


FIG. 3. —  $\text{Re } g_{\alpha}(-\omega)$  d'après (5) (en unité de  $\mu$ ).

La symétrie de croisement (5) a été mise en évidence en tabulant

$$\text{Partie réelle} \quad \left| \left\{ \frac{\text{Re } g_{\alpha}(-\omega)}{|g_{\alpha}(-\omega)|^2} - N_{\alpha}(\omega) \right\} N_{\alpha}(\omega)^{-1} \right|$$

et

$$\text{Partie imaginaire} \quad \left| \left\{ \frac{\text{Im } g_{\alpha}(-\omega)}{|g_{\alpha}(-\omega)|^2} - D_{\alpha}(\omega) \right\} D_{\alpha}(\omega)^{-1} \right|$$

voir table I, nous trouvons qu'elle est à peu près vérifiée pour l'état  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 3$  à basse énergie, le désaccord devient important dans le voisinage des résonances. L'état  $\alpha = 2$  ne satisfait pas à la symétrie de croisement et généralement la solution numérique obtenue pour cet état n'est pas aussi bonne que celles obtenues pour les états  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 3$ .

TABLE I. — *Symétrie de croisement.*

$\omega/\mu$		1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$\alpha=1$	Réel.	0,01	0,02	1	0,05	0,007	0,02	0,05	0,08	0,11	0,14	0,19
	Img.	0,03	0,06	0,001	0,01	0,03	0,05	0,09	0,16	0,22	0,25	0,35
$\alpha=2$	Réel.	0,09	0,20	2	2,1	2,5	2,2	1,72	1,39	1,37	1,36	1,2
	Img.	0,18	0,53	0,03	0,024	0,22	0,51	0,74	0,86	0,86	0,86	0,91
$\alpha=3$	Réel.	0,003	0,011	0,0023	0,0012	0,011	0,064	0,37	0,11	0,01	0,026	0,038
	Img.	0,007	0,014	0,013	0,008	0,005	0,003	0,001	0,01	0,046	0,05	0,078

Une fois déterminé  $\text{Re } g_\alpha(\omega)$ , on peut évaluer  $\text{Re } h_\alpha(\omega)$  au moyen de (1) (fig. 4) : pour l'état  $\alpha = 3$ , on trouve également un minimum nul donnant la position de la résonance (3,3). Dans l'état  $\alpha = 1$ , la résonance apparaît

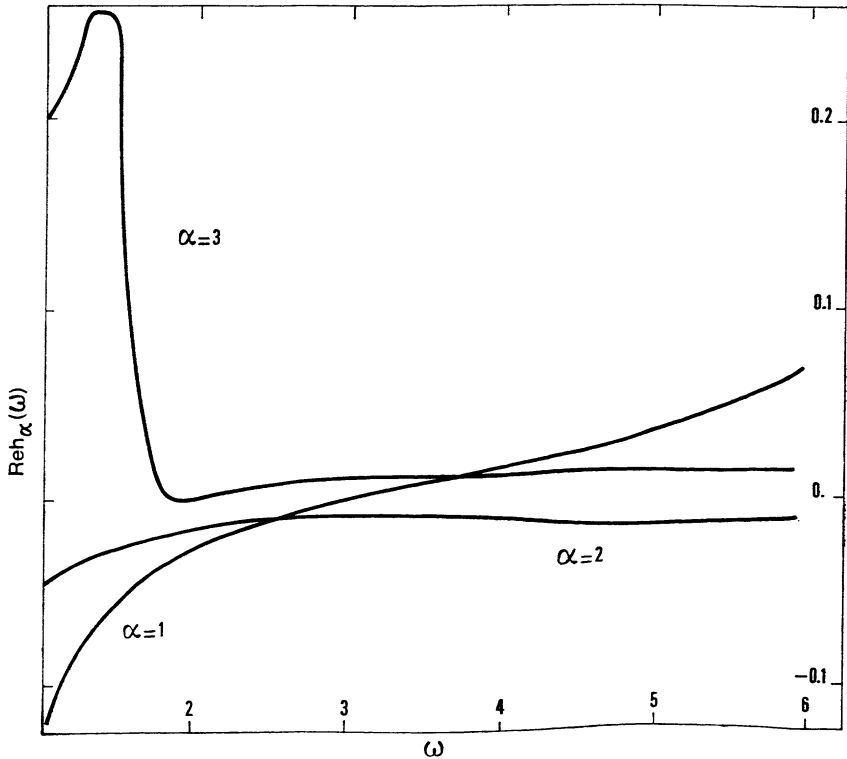


FIG. 4. —  $\text{Re } g_\alpha(\omega)$  obtenu à partir de (1) en utilisant  $|[(\lambda_\alpha/\omega)g_\alpha(\omega)]|^2$  pour  $|h_\alpha(\omega)|^2$  (en unité de  $\mu$ ).

déplacée à  $\omega = 3,11\mu$  mais on voit que la pente de la courbe est faible, si bien qu'il existe une plus grande incertitude quant à sa position.

La comparaison des résultats sur  $\text{Re } h_x(\omega)$  et  $\text{Re } [\lambda_x/(\omega g_x(\omega))]$  donne un accord seulement à basse énergie.

En effectuant l'approximation de la portée effective pour  $\text{Re } g_x(\omega)$  et  $\text{Re } h_x(\omega)$  les paramètres  $r_x$  et  $r'_x$  sont évalués selon (9) et (10) (voir table II).

TABLE II. — Paramètres de la portée effective.

$\alpha$	$r_x$	$r'_x$
1	— 0,397	— 0,268
2	— 0,209	— 0,292
3	0,461	0,448

## CONCLUSION

Les résultats obtenus par le procédé de convergence canonique sont dans l'ensemble satisfaisants à basse énergie. Si l'on se réfère aux autres travaux effectués sur ce modèle on peut constater que les fonctions de source utilisées sont soit du type de Gauss ou de Yukawa [6] et [7]; de plus la coupure (cutoff) pour éliminer les divergences est un paramètre phénoménologique. Dans l'application que nous venons de faire nous avons éliminé cet aspect trop phénoménologique, du fait que la source que nous utilisons est simplement reliée à la fonction de convergence canonique ( $\widehat{\Pi}(k)$ ) qui est déterminée elle-même sans ambiguïté à partir du potentiel nucléaire.

Avec cette fonction de source le modèle a donné la résonance classique (3,3) de 1 230 MeV et une résonance N (1/2) de 1 400 MeV, la possibilité de trouver cette résonance s'explique par le fait que nous avons tenu compte de la forme du potentiel dans la région intermédiaire, d'autre part qu'elle n'est pas trop éloignée du seuil inélastique.

## REMERCIEMENTS

C'est avec plaisir que je remercie le Professeur J. Mandelbrojt qui m'a aidé par ses commentaires et ses critiques à réaliser ce travail.

Je souhaite remercier le Professeur H. Morel du « Centre de Calcul Numérique de Marseille » de m'avoir permis d'utiliser le calculateur.

L'auteur est redevable au « Commissariat à l'Énergie Atomique » de son aide sous forme d'une Bourse de Thèse.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDELBROJT et S. MANDELBROJT, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 974.
- [2] G. F. CHEW et F. E. LOW, *Phys. Rev.*, t. 101, 1956, p. 1570.
- [3] C. BOURRELY, J. MANDELBROJT et J. PASCALE (article précédent).
- [4] S. SCHWEBER, *An introduction to relativistic quantum field theory*. Row, Peterson and Co., 1961. Ce livre contient de nombreuses références.
- [5] M. J. MORAVCSIK et H. P. NOYES, *Ann. Rev. Nuclear Sci.*, t. 11, 1961, p. 95.
- [6] G. SALZMAN et F. SALZMAN, *Phys. Rev.*, t. 108, 1957, p. 1619.
- [7] W. M. LAYSON, *Nuovo Cimento*, t. 20, 1961, p. 1207.
- [8] L. CASTILLEJO, R. H. DALITZ et F. J. DYSON, *Phys. Rev.*, t. 101, 1956, p. 453.
- [9] P. BAREYRE *et al.*, *Phys. Letters*, t. 8, 1964, p. 137.  
L. D. ROPPER, *Phys. Rev. Letters*, t. 12, 1964, p. 340.  
S. L. ADELMAN, *Phys. Rev. Letters*, t. 14, 1965, p. 1043.  
Ch. PEYROU, Oxford Int. Conf. on Elementary Particles (sept. 1965).

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1966).

---