ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. LOUPIAS
S. MIRACLE-SOLE

C^*-algèbres des systèmes canoniques. II

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, n° 1 (1967), p. 39-58
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_1_39_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 1, 1967, p. 39-58.

Section A :
Physique théorique.

C*-Algèbres des systèmes canoniques. II

par

G. LOUPIAS et S. MIRACLE-SOLE
(Physique Théorique, Université d'Aix-Marseille).

ABSTRACT. — The « twisted convolution » of measures on the phase space $\mathfrak{E}$ of a system with n degrees of freedom (an algebraic version of phase-space quantum mechanics) is extended to distributions on $\mathfrak{E}$ using the standard notion of convolution of distributions on a locally compact group applied to a central extension of $\mathfrak{E}$ by the circle. We study the algebra $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ of functions on $\mathfrak{E}$ which are mapped into trace class operators by the Schrödinger representation and show that $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ contains the set $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ of infinitely differentiable functions decreasing rapidly at infinity, this inclusion being continuous. This allows to interpret the bounded operators on the Hilbert space of the Schrödinger representation as tempered distributions on $\mathfrak{E}$, the twisted convolution of distributions corresponding to the product of operators.

INTRODUCTION

La construction de C*-algèbres associées aux relations de commutation canoniques conduit à définir le « produit de convolution gauche » des fonctions sur l'espace de phase [*2*]. Dans le cas d'un nombre fini de degrés de liberté, ce formalisme constitue une version algébrique de la première quantification décrite à l'aide de fonctions sur l'espace de phase du système.

Dans un article précédent [*1*], nous avons décrit ce formalisme en utilisant la notion standard de convolution sur un groupe localement compact ([*21*], § 28) appliquée à une extension centrale $\mathfrak{W}$ du groupe additif de l'espace de phase $\mathfrak{E}$ par le tore $\mathfrak{T}$ à une dimension (groupe de Weyl). Nous nous proposons ici, en adoptant toujours le même point de vue, de poursuivre notre étude de ce formalisme.

Dans la section I, nous étendons à l'espace $\mathfrak{D}'(\mathfrak{E})$ des distributions sur l'espace symplectique $(\mathfrak{E}, \sigma)$ la notion de produit de convolution gauche, et en donnons les principales propriétés.

Dans la section II, nous considérons l'espace noté $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ dans [*1*], anti-image des opérateurs à trace par la représentation de Schrödinger π_ω. Nous montrons en particulier que $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ contient l'espace $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide, l'inclusion étant continue.

Dans la section III, nous étudions l'algèbre de Von Neumann des opérateurs bornés et interprétons ses éléments comme des distributions tempérées, le produit des opérateurs correspondant au produit de convolution gauche des distributions. Ce résultat fournit le cadre naturel d'une exposition rigoureuse du formalisme de WIGNER-MOYAL tel que nous l'avons présenté dans ([*1*], Section III).

Dans une première lecture, on pourra se contenter de lire les définitions de la section I, cette dernière étant indépendante des suivantes.

Les principaux résultats de cet article ont été annoncés, sous des formes parfois différentes, dans [*3*] [*4*] [*5*] [*6*]. Les définitions et les notations adoptées sont celles de [*1*] et [*2*].

SECTION I

PRODUIT DE CONVOLUTION GAUCHE DES DISTRIBUTIONS

Nous travaillerons, comme dans [*1*], par transport de structure à partir de la notion de produit de convolution usuel des distributions sur le groupe de Lie nilpotent, connexe (unimodulaire) $\mathfrak{W}$, telle qu'on la trouve définie dans ([*7*], p. 107).

Nous désignerons par $D_0, D_1, \cdots, D_{2n}$ une base de l'espace des champs de vecteurs invariants à droite sur $\mathfrak{W}$, et par $\mathfrak{D}_Q(\mathfrak{W})$ (resp. $\mathfrak{D}(\mathfrak{W})$, $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathfrak{W}$ à support dans le compact Q de $\mathfrak{W}$ (resp. indéfiniment différentiables à support compact, indéfiniment différentiables) muni de sa topologie usuelle. Nous rappelons simplement que $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$ est un espace de Fréchet si l'on définit sa topologie par la famille de semi-normes :

$$N_{Q,m}(f) = \sup_{\substack{(\alpha,\psi)\in Q \\ |p|\leq m}} |D_0^{p_0} D_1^{p_1} \dots D_{2n}^{p_{2n}} f(\alpha, \psi)|, \quad \begin{cases} m \text{ entier } \geqslant 0 \\ p_i \text{ entier } \geqslant 0 \\ |p| = \sum_{i=1}^{2n} p_i \end{cases} \tag{1}$$

Les $\mathcal{D}_Q(\mathfrak{W})$ sont alors munis de la topologie induite par celle de $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$, et $\mathcal{D}(\mathfrak{W})$ est la limite inductive des espaces de Fréchet $\mathcal{D}_Q(\mathfrak{W})$.

Il est également possible de définir l'espace $\mathcal{S}(\mathfrak{W})$ comme celui des fonctions indéfiniment différentiables f sur $\mathfrak{W}$ telles que, pour tout polynôme P sur $\mathfrak{E}$ considéré comme une fonction sur $\mathfrak{W}$, et tout opérateur différentiel D invariant à droite sur $\mathfrak{W}$, la fonction

$$P(\psi) D f(\alpha, \psi) \tag{2}$$

reste bornée sur $\mathfrak{W}$. $\mathcal{S}(\mathfrak{W})$ est alors un espace de Fréchet si l'on définit sa topologie par la famille de semi-normes :

$$N_{l,m}(f) = \sup_{\substack{(\alpha,\psi)\in\mathfrak{W} \\ |p|\leq m}} \left| \{ 1 + s(\psi, \psi) \}^l D_0^{p_0} D_1^{p_1} \dots D_{2n}^{p_{2n}} f(\alpha, \psi) \right|, \; l, m \text{ entiers } \geqslant 0 \tag{3}$$

LEMME 1. — *L'application* $\Phi : f \to e^{in\alpha} \otimes f$ *(n entier* > 0 *ou* < 0*) est un isomorphisme vectoriel topologique de* $\mathcal{D}_K(\mathfrak{E})$ *(resp.* $\mathcal{D}(\mathfrak{E})$, $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$, $\mathcal{E}(\mathfrak{E})$*) dans* $\mathcal{D}_{\mathfrak{T}\times K}(\mathfrak{W})$ *(resp.* $\mathcal{D}(\mathfrak{W})$, $\mathcal{S}(\mathfrak{W})$, $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$*), où* K *désigne un compact de* $\mathfrak{E}$.

Cette application est évidemment linéaire et injective. D'autre part, $\mathfrak{W}$ étant nilpotent, tout opérateur différentiel invariant à droite est de la forme ([*8*], lemme 1).

$$\sum_i P_i(\psi) \frac{\partial^{p^i}}{\partial\alpha^{p_0^i} \partial\psi_1^{p_1^i} \dots \partial\psi_{2n}^{p_{2n}^i}}, \; p^i = (p_0^i, p_1^i, \dots, p_{2n}^i), \; p_j^i \text{ entier} \geqslant 0$$

où les P_i sont des polynômes sur $\mathfrak{E}$, comme on peut également s'en convaincre par un calcul direct ([*6*], ch. VI, lemme 1). Il ressort alors de l'expression des semi-normes (1) et (3) que Φ est continue de $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ (resp. $\mathcal{E}(\mathfrak{E})$) dans $\mathcal{S}(\mathfrak{W})$ (resp. $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$). En outre, $\Phi(\mathcal{S}(\mathfrak{E}))$ (resp. $\Phi(\mathcal{E}(\mathfrak{E}))$) est fermé dans $\mathcal{S}(\mathfrak{W})$ (resp. $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$). En effet, si $\mathcal{S}_m(\mathfrak{W})$ (resp. $\mathcal{E}_m(\mathfrak{W})$) désigne le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathfrak{W})$ (resp. $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$) des fonctions dont le coefficient de Fourier d'ordre m selon $\mathfrak{T}$ est nul, ces images sont identiques à $\bigcap_{m\neq n} \mathcal{S}_n(\mathfrak{W})$ $\left(\text{resp. } \bigcap_{m\neq n} \mathcal{E}_m(\mathfrak{W})\right)$ et il suffit de montrer que chaque $\mathcal{S}_m(\mathfrak{W})$ (resp. $\mathcal{E}_m(\mathfrak{W})$) est fermé, ce qui provient du fait qu'il est image réciproque de 0 pour l'application continue de $\mathcal{S}(\mathfrak{W})$ (resp. $\mathcal{E}(\mathfrak{W})$) dans $\mathcal{C}_0(\mathfrak{E})$:

$$f(\alpha, \psi) \to \int e^{-im\alpha} f(\alpha, \psi) d\alpha$$

En vertu du théorème du graphe fermé, il en résulte que Φ est bicontinue. Elle l'est encore si on la restreint à $\mathcal{D}_K(\mathfrak{E})$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{T}\times K}(\mathfrak{W})$, et par conséquent elle est continue de $\mathcal{D}_K(\mathfrak{E})$ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{W})$: elle est encore continue de $\mathcal{D}(\mathfrak{E})$ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{W})$ ([*9*], § 3, n° 15). Comme précédemment, $\Phi(\mathcal{D}(\mathfrak{E}))$ est fermé dans $\mathcal{D}(\mathfrak{W})$ car $\mathcal{D}_m(\mathfrak{W})$ est fermé dans $\mathcal{D}(\mathfrak{W})$ en tant qu'image réciproque de 0 par l'application

$$f(\alpha, \psi) \to \int e^{-im\alpha} f(\alpha, \psi) d\alpha,$$

dont il suffit de savoir qu'elle est continue de $\mathcal{D}_Q(\mathfrak{W})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathfrak{E})$, où Q est un compact de $\mathfrak{W}$. On en déduit alors la bicontinuité de Φ grâce au théorème du paragraphe fermé généralisé à des limites inductives d'espaces de Fréchet ([*20*], Intr. IV, Th. B).

COROLLAIRE. — *On a les décompositions* :

$$\mathcal{D}(\mathfrak{W}) = \{ e^{in\alpha} \otimes f,\ f \in \mathcal{D}(\mathfrak{E}) \} \oplus \mathcal{D}_n(\mathfrak{W}) = \Phi(\mathcal{D}(\mathfrak{E})) \oplus \mathcal{D}_n(\mathfrak{W})$$
$$\mathcal{S}(\mathfrak{W}) = \{ e^{in\alpha} \otimes f,\ f \in \mathcal{S}(\mathfrak{E}) \} \oplus \mathcal{S}_n(\mathfrak{W}) = \Phi(\mathcal{S}(\mathfrak{E})) \oplus \mathcal{S}_n(\mathfrak{W})$$
$$\mathcal{E}(\mathfrak{W}) = \{ e^{in\alpha} \otimes f,\ f \in \mathcal{E}(\mathfrak{E}) \} \oplus \mathcal{E}_n(\mathfrak{W}) = \Phi(\mathcal{E}(\mathfrak{E})) \oplus \mathcal{E}_n(\mathfrak{W})$$

en somme directe de deux sous-espaces fermés.

Muni de la topologie induite, $\Phi(\mathcal{D}(\mathfrak{E}))$ (*resp.* $\Phi(\mathcal{S}(\mathfrak{E}))$, $\Phi(\mathcal{E}(\mathfrak{E}))$) *est isomorphe à* $\mathcal{D}(\mathfrak{E})$ (*resp.* $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$, $\mathcal{E}(\mathfrak{E})$).

LEMME 2. — *La correspondance* Φ' : $S \to e^{in\alpha} \otimes S$ *est un isomorphisme vectoriel topologique de* $\mathcal{D}'(\mathfrak{E})$ (*resp.* $\mathcal{S}'(\mathfrak{E})$, $\mathcal{E}'(\mathfrak{E})$) *dans* $\mathcal{D}'(\mathfrak{W})$ (*resp.* $\mathcal{S}'(\mathfrak{W})$, $\mathcal{E}'(\mathfrak{W})$).

Puisque $\langle e^{in\alpha} \otimes S,\ e^{im\alpha} \otimes f \rangle = \delta_{n,-m} \langle S, f \rangle$, ce lemme découle par dualité du précédent et de son corollaire.

COROLLAIRE. — *On a les décompositions* :

$$\mathcal{D}'(\mathfrak{W}) = \{ e^{in\alpha} \otimes S,\ S \in \mathcal{D}'(\mathfrak{E}) \} \oplus \mathcal{D}_n(\mathfrak{W}) = \Phi'(\mathcal{D}'(\mathfrak{E})) \oplus \mathcal{D}'_n(\mathfrak{W})$$
$$\mathcal{S}'(\mathfrak{W}) = \{ e^{in\alpha} \otimes S,\ S \in \mathcal{S}'(\mathfrak{E}) \} \oplus \mathcal{S}_n(\mathfrak{W}) = \Phi'(\mathcal{S}'(\mathfrak{E})) \oplus \mathcal{S}'_n(\mathfrak{W})$$
$$\mathcal{E}'(\mathfrak{W}) = \{ e^{in\alpha} \otimes S,\ S \in \mathcal{E}'(\mathfrak{E}) \} \oplus \mathcal{E}'_n(\mathfrak{W}) = \Phi'(\mathcal{E}'(\mathfrak{E})) \oplus \mathcal{E}'_n(\mathfrak{W})$$

en somme directe de deux sous-espaces fermés, $\mathfrak{D}'_n(\mathfrak{W})$ (*resp.* $\mathcal{S}'_n(\mathfrak{W})$, $\mathcal{E}'_n(\mathfrak{W})$) *désignant le sous-espace des éléments de* $\mathfrak{D}'(\mathfrak{W})$ (*resp.* $\mathcal{S}'(\mathfrak{W})$, $\mathcal{E}'(\mathfrak{W})$) *de coefficient de Fourier d'ordre n selon* $\mathfrak{T}$ *égal à zéro* ([*11*], ch. VII, § 1). *Muni de la topologie induite,* $\Phi'(\mathfrak{D}'(\mathfrak{E}))$ (*resp.* $\Phi'(\mathcal{S}'(\mathfrak{E}))$, $\Phi'(\mathcal{E}'(\mathfrak{E}))$) *est isomorphe à* $\mathfrak{D}'(\mathfrak{E})$ (*resp.* $\mathcal{S}'(\mathfrak{E})$, $\mathcal{E}'(\mathfrak{E})$).

Nous sommes maintenant en mesure de poser la

DÉFINITION 1. — *Soient* S_1 *et* S_2 *deux éléments de* $\mathfrak{D}'(\mathfrak{E})$, *l'un au moins étant à support compact. Alors*

$$\{ e^{i\alpha} \otimes S_1 \} * \{ e^{i\alpha} \otimes S_2 \} = e^{i\alpha} \otimes S \tag{4}$$

avec

$$\langle S, f \rangle = \langle S_1(\psi) \otimes S_2(\varphi),\ e^{-i\sigma(\psi,\varphi)} f(\psi + \varphi) \rangle, \qquad f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \tag{5}$$

Plus généralement, soient A_1 *et* A_2 *les supports respectifs de* S_1 *et* S_2, *et supposons que l'application* $\{ \psi, \varphi \} \to \psi + \varphi$ *de* $A_1 \times A_2$ *dans* $A_1 + A_2$ *est régulière à l'infini. Alors* (4) *et* (5) *ont encore un sens. La distribution* S *est dite produit de convolution gauche des distributions* S_1 *et* S_2, *et notée* $S_1 \times S_2$.

En effet, d'après le lemme 2, $e^{i\alpha} \otimes S_1$ et $e^{i\alpha} \otimes S_2$ appartiennent à $\mathfrak{D}'(\mathfrak{W})$, l'une d'elles étant à support compact. Alors ([7], (1, 10)), si

$$g \otimes f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{T}) \otimes \mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{W}),$$

$$\begin{aligned}
&\langle \{ e^{i\alpha} \otimes S_1 \} * \{ e^{i\alpha} \otimes S_2 \},\ g \otimes f \rangle \\
&\quad = \langle \{ e^{i\alpha} \otimes S_1(\psi) \} \otimes \{ e^{i\alpha} \otimes S_2(\varphi) \},\ g(\alpha + \beta + \sigma(\psi, \varphi)) \otimes f(\psi + \varphi) \rangle \\
&\quad = \langle S_1(\psi) \otimes S_2(\varphi),\ \int e^{i\alpha} g(\alpha) d\alpha \otimes e^{-i\sigma(\psi,\varphi)} f(\psi + \varphi) \rangle = \langle e^{i\alpha} \otimes S,\ g \otimes f \rangle
\end{aligned}$$

Plus généralement, si l'application $\{ \psi, \varphi \} \to \psi + \varphi$ est régulière à l'infini, il en est de même de l'application

$$\{ (\alpha, \psi), (\beta, \varphi) \} \to (\alpha + \beta + \sigma(\psi, \varphi), \psi + \varphi)$$

de $(\mathfrak{T} \times A_1) \times (\mathfrak{T} \times A_2)$ dans $\mathfrak{T} \times (A_1 + A_2)$.

COROLLAIRE. — a) *Si* $S_1 \times S_2$ *existe, il en est de même de* $S_2 \times S_1$ *mais en général* $S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1$.

b) *Le produit de convolution gauche de plusieurs distributions, qui sont toutes, sauf au plus une, à support compact, est associatif.*

c) *Le produit de convolution gauche de plusieurs distributions de supports* *respectifs* A_i, $i \in I$ *fini, sera associatif si les* A_i *sont tels que l'application*

$$\{\psi_i\} \to \sum_{i \in I} \psi_i \textit{ de } \prod_{i \in I} A_i \textit{ dans } \sum_{i \in I} A_i$$

soit régulière à l'infini.

On démontrera alors par transport de structure ([7], p. 108), ([10], § 6), ou directement comme en ([11], ch. VI, Th. II, III, IV, V) les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Si* S_1 *et* S_2 *ont pour support respectif* A_1 *et* A_2, *le support de* $S_1 \times S_2$ *est contenu dans* $A_1 + A_2$. *Donc si* $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(\mathfrak{E})$, $S_1 \times S_2 \in \mathcal{E}'(\mathfrak{E})$. *La valeur de* $S_1 \times S_2$ *dans l'ouvert* $\Omega \subset \mathfrak{E}$ *ne dépend que de celle de* S_2 *(resp.* S_1*) dans l'ouvert* $\Omega - A_1$ *(resp.* $\Omega - A_2$*).*

THÉORÈME 2. — a) *L'application* $\{S_1, S_2\} \to S_1 \times S_2$ *de* $\mathcal{E}'(\mathfrak{E}) \times \mathcal{E}'(\mathfrak{E})$ *dans* $\mathcal{E}'(\mathfrak{E})$ *est bilinéaire continue.*

b) *Cette même application est bilinéaire hypocontinue de* $\mathcal{E}'(\mathfrak{E}) \times \mathcal{D}'(\mathfrak{E})$ *dans* $\mathcal{E}'(\mathfrak{E})$.

Le produit de convolution gauche des distributions se différencie toutefois essentiellement du produit de convolution usuel par le théorème qui suit. Nous poserons d'abord la

DÉFINITION 2. — *Pour tout* $\psi \in (\mathfrak{E}, \sigma)$ *et* $S \in \mathcal{D}'(\mathfrak{E})$, *on notera* $\tau_\psi^\pm S$ *la nouvelle distribution sur* $\mathfrak{E}$ *définie par*

$$\langle \tau_\psi^\pm S, f \rangle = \langle S(\varphi), e^{\pm i\sigma(\varphi,\psi)} f(\psi + \varphi) \rangle, \; f \in \mathcal{D}(\mathfrak{E}) \tag{6}$$

THÉORÈME 3. — *Soit* (e_i), $i = 1, 2, \dots 2n$ *une base quelconque de* $(\mathfrak{E}, \sigma)$.

Pour tout $\psi = \sum_{i=1}^{2n} \psi^i e_i \in (\mathfrak{E}, \sigma)$ *et* $S \in \mathcal{D}'(\mathfrak{E})$,

$$\delta_\psi \times S = \tau_\psi^+ S \; ; \qquad S \times \delta_\psi = \tau_\psi^- S \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta_0}{\partial \psi^i} \times S &= i\sigma(e_i, \psi).S + \frac{\partial S}{\partial \psi^i} \\ S \times \frac{\partial \delta_0}{\partial \psi^i} &= - i\sigma(e_i, \psi).S + \frac{\partial S}{\partial \psi^i} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

En effet,

$$\langle \delta_\psi \times S, f \rangle = \langle \delta_\psi(\xi) \otimes S(\eta), e^{-i\sigma(\xi,\eta)} f(\xi + \eta) \rangle = \langle S(\eta), e^{-i\sigma(\psi,\eta)} f(\psi + \eta) \rangle$$

tandis que

$$\left\langle \frac{\partial \delta_0}{\partial \psi^i} \times \mathrm{S}, f \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \delta_0}{\partial \xi^i}(\xi) \otimes \mathrm{S}(\eta),\ e^{-i\sigma(\xi,\eta)} f(\xi+\eta) \right\rangle$$

$$= -\left\langle \mathrm{S}(\eta), \left\langle \delta_0(\xi), -i\sigma(e_i,\ \eta) e^{-i\sigma(\xi,\eta)} f(\xi+\eta) + e^{-i\sigma(\xi,\eta)} \frac{\partial f}{\partial \psi^i}(\xi+\eta) \right\rangle \right\rangle$$

$$= \left\langle i\sigma(e_i,\ \eta) . \mathrm{S}(\eta) + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \eta^i}(\eta),\ f(\eta) \right\rangle$$

On voit donc, en particulier, que pour dériver un produit de convolution gauche il ne suffit plus de dériver l'un des facteurs.

Notre méthode de transport de structure nous conduit alors naturellement à associer à la régularisation des distributions sur $\mathfrak{W}$ une opération analogue sur $(\mathfrak{E}, \sigma)$ relativement à la convolution gauche.

DÉFINITION 3. — *Le produit de convolution gauche de la distribution* S *et de la fonction indéfiniment différentiable* f $\big(\mathrm{S} \in \mathcal{D}'(\mathfrak{E})$ *et* $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{E})$, *ou* $\mathrm{S} \in \mathcal{E}'(\mathfrak{E})$ *et* $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{E})\big)$ *est une fonction indéfiniment différentiable au sens usuel dite* σ*-régularisée à droite de* S *par* f *et donnée par la formule*

$$\{ \mathrm{S} \times f \}\ (\psi) = \langle \mathrm{S}(\varphi),\ e^{-i\sigma(\varphi,\psi)} f(\psi - \varphi) \rangle \tag{9}$$

On définirait de même la σ*-régularisée à gauche de* S *par* f *comme*

$$\{ f \times \mathrm{S} \}\ (\psi) = \langle \mathrm{S}(\varphi),\ e^{i\sigma(\varphi,\psi)} f(\psi - \varphi) \rangle \tag{10}$$

En effet ([7] (1, 11) et (1, 12))

$$\{ (e^{i\beta} \otimes \mathrm{S}) * (e^{i\beta} \otimes f) \}\ (\alpha, \psi) = e^{i\alpha} \otimes \{ \mathrm{S} \times f \}\ (\psi)$$
$$= \langle e^{i\beta} \otimes \mathrm{S}(\varphi),\ e^{i(\alpha - \beta + \sigma(\psi,\varphi))} f(\psi - \varphi) \rangle = e^{i\alpha} \otimes \langle \mathrm{S}(\varphi),\ e^{-i\sigma(\varphi,\psi)} f(\psi - \varphi) \rangle$$

Cette opération jouit alors des mêmes propriétés que la régularisation usuelle ([7], proposition 1, 2) :

THÉORÈME 4. — *L'application* $\{ \mathrm{S}, f \} \to \mathrm{S} \times f$ (*ou* $f \times \mathrm{S}$) *est hypocontinue de* $\mathcal{D}'(\mathfrak{E}) \times \mathcal{D}(\mathfrak{E})$ *dans* $\mathcal{E}(\mathfrak{E})$, *ou de* $\mathcal{E}'(\mathfrak{E}) \times \mathcal{E}(\mathfrak{E})$ *dans* $\mathcal{E}(\mathfrak{E})$.

Si (f_j) est une suite de fonctions indéfiniment différentiables tendant vers δ_0 dans $\mathcal{E}'(\mathfrak{E})$, le théorème 2 assure que les σ-régularisées $\mathrm{S} \times f$ tendent vers S dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{E})$, ce qui fournit un procédé d'approximation d'une distribution par des fonctions indéfiniment différentiables, elles-mêmes approchables par des fonctions de $\mathcal{D}(\mathfrak{E})$ (par exemple par troncature).

En outre, si l'on désigne par $\check{\mathrm{S}}$ la distribution définie par

$$\langle \check{\mathrm{S}}, f \rangle = \langle \mathrm{S}, \check{f} \rangle, \qquad f \in \mathcal{D}(\mathfrak{E}),\ \check{f}(\psi) = f(-\psi) \tag{11}$$

il résulte de (9) et (10) que

$$\langle S, f \rangle = \{ S \times \check{f} \}(0) = \{ \check{f} \times S \}(0) = \{ \check{S} \times f \}(0) = \{ f \times \check{S} \}(0) \qquad (12)$$

On en déduit que, dans un produit scalaire de fonctions et de distributions où interviennent des produits de convolution gauche, on peut faire passer un élément d'un côté à l'autre après lui avoir fait subir l'opération $\vee$, à condition de conserver à l'ensemble des facteurs le même ordre à une permutation circulaire près. Par exemple,

$$\left.\begin{aligned} &\langle S \times U, V \times W \times f \times g \rangle = \langle S \times U \times \check{V} \times \check{W}, f \times g \rangle \\ &\quad = \langle S, \check{U} \times V \times W \times f \times g \rangle = \langle \check{f} \times \check{g} \times S, \check{U} \times V \times W \rangle \\ &\quad = \{ S \times U \times \check{V} \times \check{W} \times \check{f} \times \check{g} \}(0) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

COROLLAIRE. — *Si* $S \times f = 0$ *pour tout* $f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$, *alors* $S = 0$.

Il suffit d'appliquer la formule (12).

On trouvera dans [*6*] la démonstration d'une série de théorèmes fins sur les distributions faisant intervenir le produit de convolution gauche. Nous les omettons ici car ils ne sont pas indispensables pour la suite.

SECTION II

L'*-ALGÈBRE DE BANACH $\mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$. $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ EN TANT QU'ESPACE D'OPÉRATEURS A TRACE

$\mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ est le sous-espace de $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ ([*1*], Th. 3) des fonctions h telles que $\pi_\omega(h)$ soit un opérateur à trace sur l'espace de Hilbert de la représentation de Schrödinger. Puisque tout opérateur à trace se décompose en produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, il vient

$$\pi_\omega(h) = \pi_\omega(f)\pi_\omega(g^*) = \pi_\omega(f \times g^*), \qquad f, g \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \qquad (14)$$

soit ([*2*], Th. 14),

$$h = f \times g^* \qquad (15)$$

presque partout.

Les fonctions $h \in \mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ sont caractérisées dans le

THÉORÈME 5. — *Soit h une fonction sur* $(\mathfrak{E}, \sigma)$. *h est un élément de* $\mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ *si et seulement si l'une quelconque des éventualités suivantes est réalisée* :

a) *h est presque partout égale à une combinaison linéaire complexe de fonctions continues de type positif sur* $(\mathfrak{E}, \sigma)$, *au sens de* ([*2*], p. 26, Définition).

b) *Il existe une représentation* π *des relations de commutation dans l'espace de Hilbert* H_π, et Ψ, $\Psi' \in H_\pi$, *tels que*

$$h(\psi) = (\Psi' \mid \pi\{\psi\}\Psi)$$

presque partout.

c) *h est bornée et*

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{f \in \mathcal{K}(\mathfrak{E}) \\ \|f\| \leqslant 1}} \left| \int f(\psi)h(\psi)d\psi \right| < \infty$$

où $\mathcal{K}(\mathfrak{E})$ *désigne l'espace des fonctions continues à support compact et* $\|\cdot\|$ *la norme de Schrödinger* ([*2*], (69)).

Puisque $\mathcal{K}(\mathfrak{E})$ est dense dans $\overline{\mathfrak{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$, anti-image des opérateurs compacts par la représentation de Schrödinger ([*2*], Th. 19), il résulte des formules

$$\int f(\psi)h(\psi)d\psi = \{\check{f} \times h\}(0) = \frac{1}{a}\operatorname{Tr}\,[\pi_\omega(\check{f})\pi_\omega(h)] \qquad ([1], (29))$$

que *c*) exprime le fait bien connu que l'espace des opérateurs à trace s'identifie au dual de l'espace des opérateurs compacts.

b) est évident si l'on remarque que π est, d'après le théorème d'unicité ([*2*], Th. 15), équivalente à une sous-représentation de la représentation régulière gauche π_2 des relations de commutation, et que

$$(\check{g} \mid \pi_2\{\psi\}\check{f})_2 = \{f \times g^*\}(\psi)$$

Si $h = f \times g^*$ presque partout, *a*) est vrai grâce à ([*1*], Th. 4) et à l'identité

$$4f \times g^* = (f+g) \times (f+g)^* - (f-g) \times (f-g)^* \\ + i(f+ig) \times (f+ig)^* - i(f-ig) \times (f-ig)^*.$$

Nous aurons terminé en montrant que *a*) entraîne *b*). C'est évident si *h* est presque partout égale à une fonction continue de type positif d'après ([*1*], Th. 4). Sinon supposons *h* presque partout égale à $\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2$ où Φ_1 et Φ_2 sont continues de type positif. Soient π_1, $\Psi_1 \in H_{\pi_1}$; π_2, $\Psi_2 \in H_{\pi_2}$ les représentations et vecteurs cycliques définis par Φ_1 et Φ_2 respectivement ([*2*], Th. 7 *a*). $\pi_1 \oplus \pi_2$ est une représentation sur $H_{\pi_1} \oplus H_{\pi_2}$ et on a

$$\lambda_1\Phi_1(\psi) + \lambda_2\Phi_2(\psi) = \lambda_1(\Psi_1 \mid \pi_1\{\psi\}\Psi_1) + \lambda_2(\Psi_2 \mid \pi_2\{\psi\}\Psi_2) \\ = ((\Psi_1, \Psi_2) \mid [\pi_1 \oplus \pi_2]\{\psi\} \mid (\lambda_1\Psi_1, \lambda_2\Psi_2)).$$

COROLLAIRE. — $\mathcal{C}(\mathfrak{E}, \sigma)$ *est une *-algèbre de Banach pour le produit* $\times$, *l'opération * et la norme* :

$$\|h\|_{\mathcal{C}} = \operatorname{Tr}\,[\pi_\omega(h)^*\pi_\omega(h)]^{1/2} = \operatorname*{Sup}_{\substack{f \in \mathcal{K}(\mathfrak{E}) \\ \|f\| \leqslant 1}} a \left| \int f(\psi)h(\psi)d\psi \right| \qquad (16)$$

Cette norme jouit d'un certain nombre de propriétés que nous avons réunies dans le

THÉORÈME 6. — *Soit* $h \in \mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$.

$$|\operatorname{Tr} \pi_\omega(h)| = a\,|\{f \times g^*\}(0)| \leqslant \|h\|_{\mathcal{T}} \quad \text{si} \quad h = f \times g^* \text{ p.p.} \tag{17}$$

$$\|h\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}\|h\|_{\mathcal{T}} \tag{18}$$

$$\|h\| \leqslant \sqrt{a}\,\|h\|_2 \leqslant \|h\|_{\mathcal{T}} \tag{19}$$

ces dernières inégalités étant des égalités sur le sous-espace $\overline{\mathfrak{J}_\Omega}$ *de* $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ ([*2*], Th. 18)

$$\|h\|_{\mathcal{T}} \leqslant a\,\|f\|_2\,\|g\|_2 \quad si \quad h = f \times g^* \text{ p. p.} \tag{20}$$

Inversement, il existe, parmi tous les couples f_i, $g_i \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ *tels que* $h = f_i \times g_i^*$ p. p., *un couple* f_0, g_0 *tel que*

$$\|h\|_{\mathcal{T}} = a\,\|f_0\|_2\,\|g_0\|_2. \tag{21}$$

Les inégalités (17) (19) (20) sont bien connues si on les écrit en termes d'opérateurs : A désignant un opérateur à trace, B et C deux opérateurs de Hilbert-Schmidt tels que A = BC, on a

$$|\operatorname{Tr} A| \leqslant \|A\|_{\mathcal{T}} \qquad ([12], \text{ p. } 289)$$

$$\|A\| \leqslant \|A\|_{\mathcal{H}-\mathcal{S}} \leqslant \|A\|_{\mathcal{T}} \qquad ([12], \text{ p. } 289)$$

$$\|BC\|_{\mathcal{T}} \leqslant \|B\|_{\mathcal{H}-\mathcal{S}}\,\|C\|_{\mathcal{H}-\mathcal{S}} \qquad [13]$$

d'où les inégalités voulues grâce à ([*1*], (29)) et ([*1*], Th. 3). Si en particulier $h \in \overline{\mathfrak{J}_\Omega}$ (donc appartient à $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ car $\overline{\mathfrak{J}_\Omega} \subset \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ et $h = h \times \Omega$ ([*1*], p. 35, lemme)),

$$\sqrt{a}\,\|h\|_2 \leqslant \|h\|_{\mathcal{T}} = \|h \times \Omega\|_{\mathcal{T}} \leqslant a\,\|h\|_2\,\|\Omega\|_2 = \sqrt{a}\,\|h\|_2$$

ce qui complète ([*1*], p. 35, lemme).

L'inégalité (18) est immédiate grâce à $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_1$ ([*2*], 69 *a*) car

$$\|h\|_\infty = \sup_{\substack{f \in \mathcal{K}(\mathfrak{E}) \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \left|\int f(\psi)h(\psi)d\psi\right| \leqslant \sup_{\substack{f \in \mathcal{K}(\mathfrak{E}) \\ \|f\| \leqslant 1}} \left|\int f(\psi)h(\psi)d\psi\right| = \frac{1}{a}\|h\|_{\mathcal{T}}$$

Enfin soit

$$\pi_\omega(h) = V\,|\pi_\omega(h)|$$

la décomposition polaire de $\pi_\omega(h)$. $|\pi_\omega(h)|$ est un opérateur à trace positif, donc

$$\pi_\omega(h) = \mathrm{V}\pi_\omega(g_0)\pi_\omega(g_0^*)$$

où $g_0 \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$. V étant partiellement isométrique, $\mathrm{V}\pi_\omega(g_0)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc de la forme $\pi_\omega(f_0), f_0 \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$, d'où $h = f_0 \times g_0$ presque partout. En outre

$$\sqrt{a}\,\| f_0 \|_2 = \| \mathrm{V}\pi_\omega(g_0) \|_{\mathcal{H}-\mathcal{S}} \leqslant \| \mathrm{V} \| \;\; \| \pi_\omega(g_0) \|_{\mathcal{H}-\mathcal{S}} = \sqrt{a}\,\| g_0 \|_2$$

de sorte que

$$\| h \|_{\mathcal{T}} = \mathrm{Tr}\,|\pi_\omega(h)| = a \| g_0 \|_2^2 \geqslant a \| f_0 \|_2 \| g_0 \|_2$$

d'où l'égalité (21) en comparant avec (20).

Il serait intéressant de caractériser analytiquement (et non point seulement algébriquement) les éléments de $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$. Nous ne sommes, pour l'instant, en mesure de le faire que pour certains sous-espaces denses de $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$, en particulier $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$.

Nous commencerons par prouver le

LEMME 3. — *Soit* $\mu \in \mathrm{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$, $h \in \mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ *et posons* $g = \{ \mathcal{F}_2\mu \}\cdot h$ *où* $\mathcal{F}_2$ *est la transformation de Fourier symplectique d'échelle 2* ([*1*], p. 40, Définition). *Alors* $g \in \mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ *et* $\| g \|_{\mathcal{T}} \leqslant \| \mu \|_1 \| h \|_{\mathcal{T}}$.

L'identité :

$$\{ \delta_\xi \times h \times \delta_{-\xi} \}(\psi) = e^{2i\sigma(\psi,\xi)}h(\psi)$$

permet d'écrire

$$g(\psi) = \int e^{2i\sigma(\psi,\xi)}h(\psi)d\mu(\xi) = \int \{ \delta_\xi \times h \times \delta_{-\xi} \}(\psi)d\mu(\xi)$$

$\delta_\xi \times h \times \delta_{-\xi}$ est une fonction sur $\mathfrak{E}$ à valeurs dans $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ et l'intégrale

$$\int \{ \delta_\xi \times h \times \delta_{-\xi} \}\, d\mu(\xi)$$

existe au sens de Bochner ([*14*], V, 5, Th. 1 et Corollaire 1), définissant un élément de $\mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$. En effet, pour tout opérateur borné B,

$$\left| \int \mathrm{Tr}\;[\mathrm{B}\pi_\omega(\delta_\xi)\pi_\omega(h)\pi_\omega(\delta_{-\xi})]d\mu(\xi) \right| \leqslant \| \mathrm{B} \| \;\; \| h \|_{\mathcal{T}} \| \mu \|_1$$

et

$$\| g \|_{\mathcal{T}} \leqslant \int \| \delta \;\; \times h \times \delta_{-\xi} \|_{\mathcal{T}}\, d\,|\mu|\,(\xi) \leqslant \| h \|_{\mathcal{T}} \| \mu \|_1$$

Pour la simplicité des notations, nous donnerons la démonstration du théorème en supposant que $(\mathfrak{E}, \sigma)$ est de dimension 2, avec, pour tout $\psi \in (\mathfrak{E}, \sigma)$,

$$\psi = xe_1 + ye_2,$$

(e_1, e_2) base symplectique de $(\mathfrak{E}, \sigma)$.

Nous désignerons par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{22}$$

le polynôme de Hermite d'ordre n à une dimension, et par

$$h_n(x) = \left\{ 2^n n ! \sqrt{\pi} \right\}^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) \tag{23}$$

la fonction de Hermite correspondante.

Ils jouissent des propriétés connues ci-dessous

$$\int h_n(x)h_m(x)dx = \delta_{nm} \qquad \text{([15], chap. X, § 13, (1))} \tag{24}$$

$$h_n(-x) = (-1)^n h_n(x) \qquad \text{([15], chap. X, § 13, (14))} \tag{25}$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \qquad \text{([15], chap. X, § 13, (10))} \tag{26}$$

d'où

$$xh_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\, h_{n+1}(x) + \sqrt{\frac{n}{2}}\, h_{n-1}(x) \tag{27}$$

$$\int e^{i\xi x} h_n(\xi)d\xi = \sqrt{2\pi}(i)^n h_n(x) \qquad \text{([16], chap. III, § 3.8)} \tag{28}$$

Enfin nous aurons besoin des intégrales classiques suivantes, où Y désigne la fonction d'Heaviside à une dimension ([*17*] (V, 1; 45)) :

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 \{ \delta(\alpha)Y(\beta)e^{-\beta} \} &= \frac{1}{1-2ix} = \frac{1}{u(x)} \\
\mathcal{F}_2 \{ Y(\alpha)e^{-\alpha}\delta(\beta) \} &= \frac{1}{1+2iy} = \frac{1}{v(y)} \\
\mathcal{F}_2 \{ Y(\alpha)e^{-\alpha}Y(\beta)e^{-\beta} \} &= \frac{1}{(1-2ix)(1+2iy)} = \frac{1}{u(x)v(y)}
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Nous pouvons alors prouver le

THÉORÈME 7. — *$\mathcal{C}(\mathfrak{E}, \sigma)$ contient $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ en tant que sous-espace, l'inclusion étant continue.*

Les formules (28) et (26) nous permettent d'écrire, en posant $\varphi=\xi e_1+\eta e_2$,

$$h_m(x)h_n(y)=f_{mn}(\psi)=\frac{1}{2\pi}(-i)^{n+m}(-1)^n\int e^{i(\eta x-\xi y)}h_m(\eta)h_n(\xi)d\xi d\eta$$
$$=\frac{1}{2\pi}(-i)^{n+m}(-1)^n\int e^{-i\sigma(\varphi,\psi)}f_{nm}(\varphi)d\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}(-i)^{n+m}(-1)^n\int e^{-i\sigma(\varphi,\psi)}f_{nm}(\varphi)\frac{u(x)v(y)+2i\xi v(y)-2i\eta u(x)+4\xi\eta}{u(x-\xi)v(y-\eta)}d\varphi$$

soit encore

$$\frac{f_{mn}(\psi)}{u(x)v(y)}=\frac{1}{2\pi}(-i)^{n+m}(-1)^n\int e^{-i\sigma(\varphi,\psi)}f_{nm}(\varphi)\frac{1}{u(x-\xi)v(y-\eta)}$$
$$\cdot\left\{1+\frac{2i\xi}{u(x)}-\frac{2i\eta}{v(y)}+\frac{4\xi\eta}{u(x)v(y)}\right\}d\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}(-i)^{n+m}(-1)^n\quad\left\{f_{nm}\times\frac{1}{u.v}\right\}(\psi)$$
$$+\frac{1}{\pi}(-i)^{n+m+1}(-1)^{n+1}\left\{\mathcal{F}_2[\delta(\alpha)Y(\beta)e^{-\beta}]\left[\xi f_{nm}\times\frac{1}{u.v}\right]\right\}(\psi)$$
$$+\frac{1}{\pi}(-i)^{n+m+1}(-1)^n\left\{\mathcal{F}_2[Y(\alpha)e^{-\alpha}\delta(\beta)]\left[\eta f_{nm}\times\frac{1}{u.v}\right]\right\}(\psi)$$
$$+\frac{2}{\pi}(-i)^{n+m}(-1)^n\left\{\mathcal{F}_2[Y(\alpha)e^{-\alpha}Y(\beta)e^{-\beta}]\left[\xi\eta f_{nm}\times\frac{1}{u.v}\right]\right\}(\psi)$$

En sachant que

$$\|\delta(\alpha)Y(\beta)e^{-\beta}\|_1=\|Y(\alpha)e^{-\alpha}\delta(\beta)\|_1=\|Y(\alpha)e^{-\alpha}Y(\beta)e^{-\beta}\|_1=1$$

et

$$\left\|\frac{1}{u.v}\right\|_2=\frac{\pi}{2}$$

il vient alors, d'après la formule (20) et le lemme 3,

$$\left\|\frac{f_{mn}}{u.v}\right\|_{\mathcal{C}}\leqslant\frac{a}{4}\{\|f_{nm}\|_2+2\|\xi f_{nm}\|_2+2\|\eta f_{nm}\|_2+4\|\xi\eta f_{nm}\|_2\}$$

Mais les formules (27) et (24) donnent immédiatement

$$\|\xi h_n\|_2^2=\int\left[\sqrt{\frac{n+1}{2}}h_{n+1}(\alpha)+\sqrt{\frac{n}{2}}h_{n-1}(\alpha)\right]^2d\alpha=\frac{2n+1}{2}$$

Par conséquent

$$\left\|\frac{f_{mn}}{u.v}\right\|_{\mathcal{C}}\leqslant K'\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

où

$$K' = a\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$$

Mais d'autre part, la formule (27) s'écrit encore

$$h_m(x) = \frac{h_m(x)}{u(x)} + i\sqrt{2(m+1)}\,\frac{h_{m+1}(x)}{u(x)} + i\sqrt{2m}\,\frac{h_{m-1}(x)}{u(x)}$$

ou bien

$$h_n(y) = \frac{h_n(y)}{v(y)} - i\sqrt{2(n+1)}\,\frac{h_{n+1}(y)}{v(y)} - i\sqrt{2n}\,\frac{h_{n-1}(y)}{v(y)}$$

et l'on en déduit que

$$\| f_{mn} \|_{\mathcal{C}} \leqslant K''\left(m + \frac{3}{2}\right)\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

avec

$$K'' = 4a\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)^2$$

Or on sait que tout $h \in \mathcal{S}(\mathfrak{C})$ est limite dans $\mathcal{S}(\mathfrak{C})$ d'une série de la forme

$$\sum_{m,n} c_{m,n} f_{m,n}$$

où $\{ c_{m,n} \}$ est une suite à décroissance rapide (c'est-à-dire qui décroît plus rapidement que $\dfrac{1}{m^p n^p}$ quel que soit l'entier p) ([*11*], ch. VII, § 7, n° 7). La correspondance

$$h \to \{ c_{m,n} \}$$

est alors un isomorphisme vectoriel topologique entre $\mathcal{S}(\mathfrak{C})$ et l'espace des suites à décroissance rapide lorsqu'on munit ce dernier de la topologie définie par la famille de normes

$$N_{p,q}(\{ c_{m,n} \}) = \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} | c_{m,n} |^2 m^p n^q \right\}^{1/2} \tag{30}$$

Par conséquent, si $h \in \mathcal{S}(\mathfrak{C})$,

$$\left.\begin{aligned} \| h \|_{\mathcal{C}} &\leqslant \sum_{m,n} | c_{m,n} | \, \| f_{m,n} \|_{\mathcal{C}} \leqslant K \sum_{m,n} | c_{m,n} | \, mn \\ &\leqslant K \left\{ \sum_{m,n} | c_{m,n} |^2 m^4 n^4 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{m,n} \frac{1}{m^2 n^2} \right\}^{1/2} = K \left\{ \sum_{m,n} \frac{1}{m^2 n^2} \right\} N_{4,4}(\{ c_{m,n} \}) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

d'où l'affirmation du théorème.

La démonstration ci-dessus ne fait appel qu'à des notions élémentaires. L'inclusion ensembliste $\mathcal{S}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ aurait pu, grâce à l'égalité ci-dessous ([*1*] (16)) :

$$\pi_{\Omega^-}(e^{i\alpha} \otimes h) = \int e^{i\alpha} h(\psi) e^{-i\alpha} \pi_{\Omega^-} \{ 0, \psi \} \, d\alpha d\psi = \pi_\omega(h) \qquad (32)$$

être déduite des résultats de DIXMIER ([*18*], Th. 1) et KIRILLOV ([*19*], Th. 7.3) sur les représentations des groupes de Lie nilpotents, l'inclusion topologique découlant alors, grâce au théorème du graphe fermé, du fait que $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ et $\mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ sont tous deux topologiquement inclus dans $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ (1).

COROLLAIRE 1. — *$\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ est dense dans $\mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$.*

Il suffit de prouver la densité de $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \times \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. Soit $h \in \mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$, $f, g \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ tels que $h = f \times g^*$ p. p., et $(f_i), (g_i) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ deux suites telles que

$$\| f - f_i \|_2 \underset{i=\infty}{\longrightarrow} 0 \, ; \qquad \| g - g_i \|_2 \underset{i=\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors, d'après (20),

$$\begin{aligned} \| h - (f_i \times g_i^*) \|_{\mathfrak{T}} &\leqslant a \| f - f_i \|_2 \| g \|_2 + a \| f_i \|_2 \| g - g_i \|_2 \\ &\leqslant a\varepsilon \{ \| f \|_2 + \| g \|_2 + \varepsilon \}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2. — *Pour tout $h \in \mathcal{S}(\mathfrak{E})$, il existe f et $g \in \mathfrak{L}_2 (\mathfrak{E}, \sigma)$ telles que $h = f \times g^*$.*

En effet, $h = f \times g^*$ p. p., et donc partout puisque les deux membres sont continus.

COROLLAIRE 3. — *Pour que $h \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ appartienne à $\mathfrak{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$, il suffit que $x^4y^4h \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ et $\frac{\partial^8 h}{\partial x^4 \partial y^4} \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ ainsi que toutes les dérivées d'ordre inférieur.*

Posons

$$T_x^+ = x + \frac{d}{dx}, \qquad T_y^+ = y + \frac{d}{dy}.$$

Les formules (22), (23) et (27) permettent d'établir que

$$\{ T_x^+ h_n \} (x) = \sqrt{2n} \, h_{n-1}(x)$$

---

(1) Nous avions également annoncé le résultat du théorème 7 dans [*4*] et [*6*]. La démonstration qui l'accompagnait ne prouvait que l'inclusion ensembliste, mais il aurait suffi, pour la compléter, d'invoquer le même type d'argument que ci-dessus, en se fondant sur le théorème du graphe fermé étendu à des limites inductives de Fréchet ([*20*], Intr. IV, Th. B).

soit

$$\{ (T_x^+)^4 h_n \} (x) = 4\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\, h_{n-4}(x)$$

On sait que tout $h \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ est limite dans $\mathcal{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ d'une série de la forme

$$\sum_{m,n} c_{m,n} f_{m,n} \quad , \quad \sum_{m,n} | c_{m,n} |^2 < \infty$$

et que la correspondance

$$h \rightarrow \{ c_{m,n} \}$$

est un isomorphisme vectoriel topologique entre $\mathcal{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ et l'espace des suites de carré sommable avec

$$\| h \|_2^2 = \sum_{m,n} | c_{m,n} |^2$$

L'inégalité (31) montre alors que $h \in \mathcal{C}(\mathfrak{E}, \sigma)$ dès que

$$\sum_{m,n} | c_{m,n} |^2 m^4 n^4 < \infty$$

ce qui sera le cas si

$$(T_x^+)^4 (T_y^+)^4 h \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$$

d'où l'énoncé du corollaire.

Nous mentionnons, pour terminer, que les formules (8) incitent à penser que $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ pourrait être un idéal pour la convolution gauche. En fait, il n'en est rien car on aurait alors, avec les notations de [*2*],

$$\mathcal{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma) \times \Omega \subset \mathfrak{J}_\Omega \subset \bar{\mathfrak{J}}_\Omega \subset \mathcal{S}(\mathfrak{E}) \times \Omega \subset \mathcal{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma) \times \Omega$$

soit $\mathfrak{J}_\Omega = \bar{\mathfrak{J}}_\Omega$, ce qui est absurde ([*2*], Th. 17).

SECTION III

$\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ COMME ALGÈBRE DE DISTRIBUTIONS TEMPÉRÉES

Dans [*1*], nous avions considéré les deux algèbres de Von Neumann $U(\mathcal{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma))$ et $\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$, adhérence faible de $\pi_2(\mathcal{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma))$ et $\pi_\omega(\mathcal{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma))$ respectivement. π_ω étant irréductible, $\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ est l'algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de la représentation de Schrödinger, et π_2 étant un multiple de π_ω, $\mathrm{U}(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma))$ lui est isomorphe : on passe de l'une à l'autre par induction et ampliation :

$$\mathrm{A} \in \mathrm{U}(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)) \to \mathrm{A}_\Omega \in \mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)\ ; \quad \mathrm{B} \in \mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma) \to \tilde{\mathrm{B}} \in \mathrm{U}(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)) \tag{33}$$

Désignant par τc l'*-algèbre de Banach des opérateurs à trace, il résulte du théorème 7 et de ses corollaires que l'application

$$\mathcal{S}(\mathfrak{E}) \overset{\pi_\omega}{\to} \tau c$$

est une injection continue de $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ dans un sous-espace dense de τc.

THÉORÈME 8. — *Il existe une injection continue*

$$\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma) \overset{i}{\to} \mathcal{S}'(\mathfrak{E})$$

associant à tout opérateur borné B *une distribution tempérée* $i\mathrm{B} = \mathrm{S}_\mathrm{B}$, *vérifiant les formules*

$$\mathrm{S}_\mathrm{B} \times g = \tilde{\mathrm{B}}g \quad , \quad g \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \tag{34}$$

$$\mathrm{S}_\mathrm{B} \times h = \mathrm{S}_{\mathrm{B}\pi_\omega(h)} \quad , \quad h \in \mathcal{C}(\mathfrak{E}, \sigma) \tag{35}$$

$\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ (munie de la topologie de la norme) et $\mathcal{S}'(\mathfrak{E})$ étant le dual fort de τc et $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ respectivement, il résulte de la théorie de la transposition ([9], § 6, n$^{\text{os}}$ 16, 17, 18) que ${}^t\pi_\omega = i$ est une injection continue de $\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{E})$ telle que, pour tout $h \in \mathcal{S}(\mathfrak{E})$,

$$\langle \mathrm{S}_\mathrm{B}, h \rangle = \langle {}^t\pi_\omega \mathrm{B}, h \rangle = \langle \mathrm{B}, \pi_\omega(h) \rangle$$

Définissant la dualité entre $\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ et τc par

$$\langle \mathrm{B}, \pi_\omega(h) \rangle = \frac{1}{a} \mathrm{Tr}\ [\mathrm{B}\pi_\omega(\check{h})]$$

il vient, si $h = f \times g^*$ (Section II, Corollaire 2),

$$\left.\begin{aligned} \langle \mathrm{S}_\mathrm{B}, h \rangle &= \frac{1}{a}\mathrm{Tr}\ [\mathrm{B}.\pi_\omega(\check{h})] = \frac{1}{a}\mathrm{Tr}\ [\tilde{\mathrm{B}}_\Omega.\pi_2(\check{h})_\Omega] \\ &= \frac{1}{a}\mathrm{Tr}\ [\{\tilde{\mathrm{B}}.\pi_2(\check{h})\}_\Omega] = \frac{1}{a}\mathrm{Tr}\ [\pi_2(\tilde{\mathrm{B}}\check{h})_\Omega] \\ &= \frac{1}{a}\mathrm{Tr}\ [\pi_\omega(\tilde{\mathrm{B}}\check{h})] = \frac{1}{a}\mathrm{Tr}\ [\pi_\omega(\tilde{\mathrm{B}}\check{f} \times \bar{g})] \\ &= \{\tilde{\mathrm{B}}\check{f} \times \bar{g}\}(0) = \{\tilde{\mathrm{B}}\check{h}\}(0) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

où nous avons utilisé le fait que les éléments de $\mathrm{U}(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma))$ commutent avec les convolutions à droite ([1], Section II, Appendice).

Il vient alors, grâce à (9),

$$\{ S_B \times f \} (\psi) = \langle S_B(\xi), \{ \check{f} \times \delta_\psi \} (\xi) \rangle = \{ \tilde{B}f \times \delta_{-\psi} \} (0) = \{ \tilde{B}f \} (\psi)$$

pour tout $f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. Comme

$$\| S_B \times f \|_2 = \| \tilde{B}f \|_2 \leqslant \|B\| \|f\|_2 \tag{37}$$

l'égalité ci-dessus peut se prolonger par continuité à $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$, donnant un sens (en tant que fonction) au produit $S_B \times g$, $g \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$, d'où (34).

De même,

$$\langle S_B \times h, f \rangle = \langle S_B, \check{h} \times f \rangle = \frac{1}{a} \operatorname{Tr} [B\pi_\omega(h)\pi_\omega(\check{f})] = \langle S_{B\pi_\omega(h)}, f \rangle$$

pour tout $h, f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. Comme

$$\| S_B \times h \|_{\mathcal{T}} = \| B\pi_\omega(h) \|_{\mathcal{T}} \leqslant \| B \| \| h \|_{\mathcal{T}},$$

l'égalité ci-dessus se prolonge à tout $h \in \mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$, d'où (35). On remarquera, pour terminer, que l'on peut poser $i = {}^t\pi_\omega = \pi_\omega^{-1}$, cette notation étant cohérente sur $\overline{\mathcal{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ avec les précédentes.

Corollaire 1. — *Soit* $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ *et* $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ *ou* $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$. *Alors*

$$S_{\pi_\omega(\mu)} = \mu\,; \qquad S_{\pi_\omega(f)} = f \tag{38}$$

En effet, grâce à (34),

$$S_{\pi_\omega(\mu)} \times g = \pi_2(\mu)g = \mu \times g$$

d'où la conclusion grâce à (Section I, p. 11, Corollaire).

Corollaire 2. — *L'application i identifie* $\mathcal{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ *à l'ensemble* $\mathcal{T}'(\mathfrak{E}, \sigma)$ *des distributions qui, par convolution gauche, appliquent continûment* $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ *dans lui-même. Ces dernières sont alors des distributions tempérées.*

D'après (37), on sait déjà que S_B applique continûment $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ dans lui-même. Inversement, soit $S \in \mathfrak{D}'(\mathfrak{E})$ telle que

$$\| S \times g \|_2 \leqslant K \| g \|_2, \qquad g \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$$

et (Section II, Corollaire 2 et (21))

$$h = f \times g^*, \qquad h \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E}), f, g \in \mathcal{K}(\mathfrak{E})$$

avec

$$\| h \|_{\mathcal{T}} = a \| f \|_2 \| g \|_2.$$

Alors

$$S \times h = S \times f \times g^* \in \mathcal{T}(\mathfrak{E}, \sigma) \cap \mathcal{C}_0(\mathfrak{E})$$

et (Section II (17), (20), (21))

$$a \,|\, \{ S \times h \} (0) \,| \leqslant \| S \times f \times g^* \|_{\mathcal{C}} \leqslant a \| S \times f \|_2 \| g \|_2$$
$$\leqslant a\mathrm{K} \| f \|_2 \| g \|_2 = \mathrm{K} \| h \|_{\mathcal{C}}$$

S définit donc une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathfrak{E}, \sigma)$. Par conséquent S est une distribution tempérée; d'autre part on saura lui associer un élément B de $\mathfrak{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ défini de manière unique par

$$\frac{1}{a} \operatorname{Tr} [\mathrm{B}\pi_\omega(\check{h})] = \{ S \times h \} (0) = \langle S, h \rangle, \qquad h \in \mathcal{S}(\mathfrak{E})$$

et donc tel que la distribution S_B associée soit précisément S.

Notons enfin que $\mathcal{C}'(\mathfrak{E}, \sigma)$ est strictement contenu dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{E})$. Il suffit en effet de comparer (8) avec ([*1*], (70), (72), (75)) pour voir que la distribution tempérée $\frac{\partial \delta_0}{\partial \psi^i}$ est l'homologue de l'opérateur non borné $- i\mathrm{A} \{ e_i \}$ défini par

$$\pi_\omega(\delta_{e_i}) = e^{i\mathrm{A}\{e_i\}}$$

THÉORÈME 9. — *$\mathcal{C}'(\mathfrak{E}, \sigma)$ est une *-algèbre pour le produit de convolution gauche et l'opération $S \to S^*$ des distributions.*

En effet, si $f, g \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$,

$$(g \,|\, S_{B^*} \times f)_2 = (g \,|\, \tilde{B}^* f)_2 = (\tilde{B} g \,|\, f)_2$$
$$= (S_B \times g \,|\, f)_2 = (g \,|\, S_B^* \times f)_2$$

tandis que, si $B_1, B_2 \in \mathfrak{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ et $f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$,

$$S_{B_1B_2} \times f = \tilde{B}_1\tilde{B}_2 f = S_{B_1} \times \tilde{B}_2 f = S_{B_1} \times (S_{B_2} \times f) = (S_{B_1} \times S_{B_2}) \times f$$

ce qui donne un sens au produit $S_{B_1} \times S_{B_2}$.

Dans ([*1*], Section III), nous avions décrit le formalisme de WIGNER-MOYAL en termes de transformation de Fourier symplectique des éléments de $\mathfrak{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$. Dans l'isomorphisme

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{E}, \sigma) \xrightarrow{i} \mathcal{C}'(\mathfrak{E}, \sigma)$$

cette dernière coïncide avec la notion de transformation de Fourier symplectique des distributions tempérées, obtenue par transposition à partir de la transformation de Fourier symplectique sur $\mathcal{S}(\mathfrak{E})$ définie dans ([*1*], Section III). Ceci rend d'autant plus naturelle l'exposition rigoureuse que nous avons donnée du formalisme de WIGNER-MOYAL.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à exprimer leur reconnaissance au Professeur D. KASTLER qui les a conseillés tout au long de ce travail. Ils expriment leurs remerciements au Professeur A. GUICHARDET qui s'est livré à une lecture critique de [*6*] et leur a signalé l'existence de la référence [*19*], au Professeur J. DIXMIER qui leur a communiqué une traduction de cette dernière, au Professeur M. ZERNER auquel ils sont redevables d'utiles discussions.

Ce travail a été accompli grâce au soutien du Centre National de la Recherche Scientifique.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] LOUPIAS, G. et MIRACLE-SOLE, S., *Commun. math. Phys.*, t. 2, 1966, p. 31.
[*2*] KASTLER, D., *Commun. math. Phys.*, t. 1, 1965, p. 14.
[*3*] LOUPIAS, G., *Comptes Rendus Acad. Sciences*, t. 262, 1966, p. 469.
[*4*] LOUPIAS, G., *Comptes Rendus Acad. Sciences*, t. 262, 1966, p. 799.
[*5*] MIRACLE-SOLE, S., *Comptes Rendus Acad. Sciences* (à paraître).
[*6*] LOUPIAS, G., Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Marseille, 1966.
[*7*] BRUHAT, F., *Bull. Soc. Math. France*, t. 84, 1956, p. 97.
[*8*] DIXMIER, J., *Bull. Soc. Math. France*, t. 87, 1959, p. 65.
[*9*] BOURBAKI, N., Espaces vectoriels topologiques. *Fascicule des résultats.* Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris, Hermann, 1955.
[*10*] BRUHAT, F., *Bull. Soc. Math. France*, t. 89, 1961, p. 43.
[*11*] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions.* Tome II. Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris, Hermann, 1959.
[*12*] RICKART, C. E., *General theory of Banach algebras.* Princeton-London-Toronto, Van Nostrand, 1960.
[*13*] SCHATTEN, R., *Norm ideal of completely continuous operators.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.
[*14*] YOSIDA, K., *Functional analysis.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.
[*15*] ERDELYI-MAGNUS-OBERHETTINGER-TRICOMI, *High transcendental functions.* Vol. II, New-York-Toronto-London, MacGraw-Hill, 1953.
[*16*] TITCHMARSH, E. C., *Introduction to the theory of Fourier integrals.* Oxford, University Press, 1948.
[*17*] SCHWARTZ, L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Paris, Hermann, 1961.
[*18*] DIXMIER, J., *Bull. Soc. Math. France*, t. 87, 1959, p. 65.
[*19*] KIRILLOV, A. A., *Uspehki Mat. Nauk.*, t. 17, 1962, p. 57 (en russe).
[*20*] GROTHENDIECK, A., *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 16, 1955.
[*21*] NEUMARK, M. A., *Normierte ringe.* Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

(Manuscrit reçu le 22 juillet 1966).