

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

FRANÇOISE MORET-BAILLY

Le champ neutrinique en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, n° 4 (1966), p. 301-355

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_4_301_0

© Gauthier-Villars, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Le champ neutrinique en relativité générale

par

Françoise MORET-BAILLY
(Faculté des Sciences de Dijon).

INTRODUCTION

Le présent travail a deux buts : d'une part étudier une théorie spinorielle des neutrinos dans le cadre de la relativité générale, d'un point de vue classique puis quantique; d'autre part réaliser la fusion d'un neutrino et d'un antineutrino convenablement choisis, de façon à construire un photon, et plus généralement de quatre neutrinos pour obtenir un champ de spin 2.

La théorie des neutrinos développée ici ne se réduit pas, même dans le cas de la relativité restreinte, à la théorie de Yang et Lee; elle prévoit l'existence de deux neutrinos ν_e et ν_μ et de deux antineutrinos $\bar{\nu}_e$ et $\bar{\nu}_\mu$, correctement liés par conjugaison de charge. A. Lichnerowicz, qui a posé les fondements de cette théorie, m'a demandé de participer à son élaboration.

En supposant que les corpuscules physiques élémentaires soient tous de spin $\frac{1}{2}$ et que les particules dont le spin est différent de $\frac{1}{2}$ résultent de l'union de corpuscules élémentaires, j'ai repris l'idée de fusion de L. de Broglie : l'opération physique de fusion de deux corpuscules s'exprime mathématiquement par le produit tensoriel des champs qui les décrivent. L'étude d'un tel champ résultant de la fusion de deux particules de spin $\frac{1}{2}$ et de masse non nulle est l'objet de la théorie classique de Pétiau-Duffin-Kemmer. Généralisée à un espace-temps courbe par A. Lichnerowicz cette théorie de spin maximum 1 établit que la fusion de deux électrons conduit à un mélange de particules de spin 1 et de spin 0. Possédant une

théorie spinorielle des neutrinos satisfaisante, et guidée par le fait que neutrinos et photons sont des particules de *masse nulle*, nous avons tenté d'adapter la méthode de Pétiau, pour réaliser la fusion d'un neutrino et de son antiparticule. Nous obtenons un photon. En réitérant ce processus de fusion nous avons construit un champ de spin 2 à partir de deux photons c'est-à-dire de 4 neutrinos.

Ce travail est divisé en cinq chapitres : le chapitre premier est consacré aux spineurs sur une variété espace-temps courbe. Les spineurs envisagés sont toujours des « spineurs à 4 composantes ». Nous avons systématiquement adopté un système de matrices de Dirac à blocs diagonaux nuls, très rarement utilisé par ailleurs, et qui dans le cadre de nos préoccupations apporte des simplifications remarquables.

L'introduction de l'opérateur ξ permet de décomposer l'espace des 1-spineurs en somme directe de deux sous-espaces propres dont les éléments sont appelés *spineurs de type pur*. La notion de spineur de type pur est fondamentale, elle permettra de montrer l'existence de 4 neutrinos.

Le chapitre II est tout d'abord un rappel de la théorie du champ de Dirac classique sur un espace-temps courbe quelconque. Nous y avons ajouté une étude complète des champs de tenseurs associés à un champ de 1-spineurs. L'analyse précise du vecteur courant et du vecteur de spin montre que ces vecteurs peuvent être *isotropes* et conduit naturellement à la définition des spineurs singuliers. Un spineur peut-il satisfaire aux équations de Dirac et être singulier de façon non accidentelle ? Nous n'avons pu répondre complètement à cette question. Cependant nous donnons une solution particulière de ce problème de permanence du champ de Dirac singulier, dans le cas de la relativité restreinte.

Le chapitre III est consacré à la théorie du champ neutrinique considéré comme un champ de Dirac *sans terme de masse*. La décomposition d'un 1-spineur en spineurs de types purs est utilisée ici de façon essentielle. Appliquée à un champ ψ de 1-spineurs et à son conjugué de charge, tous deux solutions des équations de Dirac sans masse, elle conduit à l'existence de 4 neutrinos. Nous remarquerons que le vecteur courant et le vecteur de spin associés à un neutrino ou à un antineutrino sont toujours isotropes. Nous obtenons d'autre part les anticommutateurs rigoureux de ces neutrinos par décomposition en types purs des anticommutateurs du champ de Dirac sans masse.

La méthode de fusion est développée dans le chapitre IV. Nous exploitons essentiellement ici la correspondance classique entre les formes extérieures et les spineurs d'ordre 2. Dans une première partie nous construisons un 2-spineur Φ par produit tensoriel des 1-spineurs décrivant un neutrino

et l'antineutrino correspondant. Par analogie avec l'opérateur de Dirac sur les 1-spineurs nous définissons un opérateur différentiel sur les 2-spineurs et posons a priori les équations de champ appelées équations de fusion. Nous constatons alors que le champ tensoriel canoniquement associé au champ spinoriel Φ a les propriétés du champ électromagnétique singulier complexe et polarisé circulairement. Étudié par L. Mariot ce champ de spin 1 est interprété comme un fluide de photons. Quatre cas de fusion de deux neutrinos sont ainsi réalisables et nous montrons réciproquement que ce sont les seuls cas de fusion de deux particules de spin $\frac{1}{2}$ qui puissent donner un photon seul.

Dans une deuxième partie nous envisageons la fusion de deux photons : à partir d'une 2-forme complexe décrivant un champ électromagnétique pur singulier, et de son 2-spineur associé, nous construisons un champ de 4-spineurs et la double 2-forme associée. L'étude algébrique et différentielle de cette double 2-forme et de sa partie réelle en particulier permet de l'identifier à un champ gravitationnel pur (champ de spin 2) au sens de A. Lichnerowicz.

En résumé, partant de la théorie spinorielle du neutrino, la méthode de fusion fournit une théorie en formalisme spinoriel du photon et du champ de spin 2. Nous remarquerons d'une part, que les équations de champ des trois types de spineurs correspondants généralisent naturellement l'équation de Dirac du neutrino et que d'autre part, la fusion de champs neutriniques a donné naissance à un champ électromagnétique pur singulier et à un champ gravitationnel pur, tous les deux représentés par des formes singulières, qui jouent donc un rôle essentiel dans cette étude des particules de masse nulle.

CHAPITRE PREMIER

LES SPINEURS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1. Rappels (1).

a) Soit V_4 une variété différentiable de dimension 4, de classe C^∞ . Nous supposons cette variété munie d'une structure riemannienne dont la métrique ds^2 est de type hyperbolique normal. Nous avons en coordonnées locales (x^α) (α , tout indice grec = 0, 1, 2, 3) de V_4 :

$$(1-1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\alpha) dx^\alpha dx^\beta$$

(1) Les notations sont généralement celles de A. Lichnerowicz [3] et [4].

Nous rapportons systématiquement l'espace-temps V_4 à des repères orthonormés, éléments d'un espace fibré principal $\mathfrak{E}(V_4)$ sur la base V_4 , ayant pour groupe structural le groupe de Lorentz homogène $L(4)$. Relativement à ces repères $y = \{e_0, e_A\}$ ($A = 1, 2, 3$) la métrique peut s'écrire localement sur un voisinage ouvert de V_4

$$(1-2) \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta$$

où les θ^α sont des formes de Pfaff linéairement indépendantes et où $\eta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $\eta_{00} = 1$, $\eta_{AA} = -1$.

La variété V_4 est munie d'une orientation totale ε et d'une orientation temporelle ρ que nous choisissons arbitrairement.

La donnée de ε et de ρ définit sur V_4 une orientation spatiale $\sigma = \varepsilon\rho$.

L'espace-temps V_4 envisagé sera toujours supposé globalement hyperbolique dans le sens suivant : l'ensemble des chemins temporels joignant deux points est toujours soit vide, soit compact.

b) Introduisons un système $\{\gamma_\alpha\}$ de quatre matrices 4×4 de Dirac à éléments complexes.

$$\gamma_\alpha = (\gamma_{\alpha \ a}^a)$$

Les indices grecs α, β, \dots sont dits indices tensoriels, les indices latins a, b, \dots ($= 1, 2, 3, 4$) indices spinoriels. Pour que les matrices γ_α soient un système de matrices de Dirac il faut et il suffit qu'elles vérifient les conditions fondamentales

$$(1-3) \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2\eta_{\alpha\beta} e$$

où e est la matrice identité.

Considérons maintenant le groupe spinoriel ⁽²⁾ que nous notons $\text{spin}(4)$. $\text{Spin}(4)$ est un sous-groupe du groupe des éléments réguliers de l'algèbre de Clifford réelle engendrée par les γ_α . On désigne par $\text{spin}_0(4)$ la composante de l'unité de $\text{spin}(4)$ et par $L_0(4)$ celle de $L(4)$ et on démontre le théorème suivant :

Le groupe $\text{Spin}(4)$ (resp. $\text{Spin}_0(4)$) est le revêtement d'ordre 2 du groupe de Lorentz $L(4)$ (resp. $L_0(4)$). $\text{Spin}_0(4)$ est simplement connexe.

c) Nous supposons que la variété V_4 est telle que du fibré principal $\mathfrak{E}(V_4)$ des repères orthonormés, on puisse déduire par extension un fibré principal $\mathfrak{J}(V_4)$ de groupe structural $\text{Spin}(4)$. Lorsqu'il en est ainsi nous disons que V_4 admet une structure spinorielle; un point z de $\mathfrak{J}(V_4)$ est appelé un

(2) Sur la théorie du groupe spinoriel voir Lichnerowicz [4].

repère spinoriel et $\mathcal{Y}(V_4)$ l'espace fibré des repères spinoriels. Nous notons π la projection canonique de $\mathcal{Y}(V_4)$ sur V_4 et p la projection de $\mathcal{Y}(V_4)$ sur $\mathcal{E}(V_4)$. Un tenseur de V_4 , ou une orientation, est dit rapporté à un repère spinoriel s'il est rapporté au repère orthonormé $y = pz$ correspondant à z .

Soit M un espace vectoriel de matrices 1×4 à éléments complexes sur lequel opère le groupe Spin (4). Un *1-spineur contravariant* ψ au point x de V_4 est une application $z \rightarrow \psi(z)$ de $\pi^{-1}(x)$ dans M telle que :

$$(1-4) \quad \psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z) \quad (\Lambda \in \text{spin}(4))$$

Si $\psi(z) = (\psi^a)$, les ψ^a sont les composantes de ψ par rapport au repère spinoriel z . Si $\psi(z\Lambda^{-1}) = (\psi^{b'})$, les $\psi^{b'}$ sont les composantes de ψ par rapport à $z\Lambda^{-1}$ et (1-4) s'écrit :

$$\psi^{b'} = \Lambda_a^{b'} \psi^a \quad (\Lambda = (\Lambda_a^{b'})).$$

Un *1-spineur covariant* φ en x est une application $z \rightarrow \varphi(z)$ de $\pi^{-1}(x)$ dans l'espace dual M' de M telle que :

$$(1-5) \quad \varphi(z\Lambda^{-1}) = \varphi(z)\Lambda^{-1} \quad (\Lambda \in \text{spin}(4))$$

Si $\varphi(z) = (\varphi_a)$, les φ_a sont les composantes de φ par rapport à z et (1-5) s'écrit :

$$\varphi_{b'} = \Lambda^a_{b'} \varphi_a \quad (\Lambda^{-1} = (\Lambda^a_{b'})).$$

Les 1-spineurs contravariants forment un espace vectoriel \mathcal{Y}_x sur les complexes, les 1-spineurs covariants l'espace vectoriel dual \mathcal{Y}'_x , la forme bilinéaire fondamentale étant

$$(1-6) \quad (\varphi, \psi)_x = \varphi_a \psi^a.$$

Par produits tensoriels de \mathcal{Y}_x et \mathcal{Y}'_x , nous obtenons l'espace vectoriel des spineurs de type (p, q) , contravariants d'ordre p , covariant d'ordre q . Si nous introduisons l'espace T_x^c , complexifié de l'espace tangent en x , nous obtenons la notion de tenseur-spineur.

d) Connexion spinorielle

Nous considérons ici la *connexion spinorielle* σ dite *canonique correspondante à la connexion riemannienne* ω de V_4 .

La matrice

$$\sigma = -\frac{1}{4} \omega^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta = -\frac{1}{4} \omega^\alpha_{\beta} \gamma_\alpha \gamma^\beta$$

définit la connexion spinorielle correspondant à ω . Les éléments de σ sont les 1-formes locales

$$\sigma^a_b = -\frac{1}{4} \omega^\alpha_{\beta\gamma\alpha} \gamma^a_r \gamma^{\beta r}_b.$$

Si l'on désigne par $K^\rho_{\sigma\alpha}$ les coefficients de la connexion ω par rapport aux repères orthonormés, les coefficients correspondants de σ sont

$$\begin{aligned} C^a_{b\alpha} &= -\frac{1}{4} K^\sigma_{\rho\alpha} (\gamma_\rho \gamma^\sigma)^a_b \\ &= -\frac{1}{4} K_{\rho\sigma\alpha} (\gamma^\rho \gamma^\sigma)^a_b. \end{aligned}$$

Soit ∇ l'opérateur de dérivation covariante correspondant à la connexion spinorielle. La dérivée covariante d'un 1-spineur contravariant est le tenseur spineur de composantes

$$(1-7) \quad \nabla_\alpha \psi^a = \partial_\alpha \psi^a + C^a_{b\alpha} \psi^b$$

où ∂_α désigne la dérivée pfaffienne par rapport aux formes $\{\theta^\alpha\}$. Pour un 1-spineur covariant

$$(1-6) \quad \nabla_\alpha \varphi_a = \partial_\alpha \varphi_a - C^b_{a\alpha} \varphi_b.$$

2. Adjonction de Dirac et conjugaison de charge.

Nous désignons par * le passage d'une matrice à la matrice conjuguée, et par \sim le passage d'une matrice à la matrice adjointe.

a) Nous supposons dans la suite que le système de matrices de Dirac γ^α choisi (*) est le suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \gamma^0 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right), & \gamma_1 = -\gamma^1 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \gamma_2 = -\gamma^2 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ \hline 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), & \gamma_3 = -\gamma^3 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(*) Ce système de matrices est distinct des systèmes « de Dirac » et « de Majorana » habituellement utilisés.

Nous appellerons ce système de matrices, le système des *matrices « standard »*. On vérifie facilement que ces matrices satisfont à la condition fondamentale (1-3). On remarquera que les blocs diagonaux sont tous nuls. La raison de ce choix apparaîtra dans la décomposition d'un spineur en parties positive et négative. Les calculs relatifs à la méthode de fusion seront ainsi remarquablement simplifiés.

b) Nous notons \mathcal{A} l'adjonction de Dirac, application antilinéaire de \mathcal{F}_x sur \mathcal{F}_x définie par :

$$\psi \rightarrow \mathcal{A}\psi = \bar{\psi} = \rho \tilde{\psi} \beta$$

où β est une matrice de carré e , vérifiant $\beta \tilde{\gamma}_\alpha = -\gamma_\alpha \beta$.

Pour le système de matrices standard β est symétrique et réelle

$$\beta = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

et on a explicitement

$$\mathcal{A} : \psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\psi} = \rho(\psi^{3*}, \psi^{4*}, \psi^{1*}, \psi^{2*}).$$

A \mathcal{A} correspond une forme sesquilinéaire non dégénérée définie par :

$$(\psi_1, \mathcal{A}\psi_2) = (\psi_2, \mathcal{A}\psi_1)^*$$

où ψ_1, ψ_2 sont des 1-spineurs contravariants.

La conjugaison de charge \mathcal{C} est une application antilinéaire de \mathcal{F}_x sur lui-même définie par

$$\mathcal{C} : \psi \rightarrow \mathcal{C}\psi = \alpha \psi^*$$

où α est une matrice de carré e vérifiant $\alpha^{-1} \gamma_\alpha \alpha = \gamma_\alpha^*$.

Dans le système de matrices standard $\alpha = -\gamma_2$ et on a explicitement

$$\mathcal{C} : \psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{C}\psi = \begin{pmatrix} \psi^{4*} \\ -\psi^{3*} \\ -\psi^{2*} \\ \psi^{1*} \end{pmatrix}$$

Par dualité et produit tensoriel, \mathcal{A} et \mathcal{C} s'étendent aux spineurs de type quelconque et anticommulent sur les 1-spineurs.

3. Le 2-spineur ξ et la décomposition d'un spineur en parties positive et négative.

a) THÉORÈME. — *Le module des 2-spineurs sur l'anneau des fonctions à valeurs complexes de V_4 et l'algèbre extérieure des formes à valeurs complexes de V_4 sont isomorphes en tant que modules.*

En effet, à toute forme non homogène $\alpha = \sum_{p=0}^4 \alpha^{(p)}$, où $\alpha^{(p)}$ est une p -forme à valeurs complexes, nous pouvons faire correspondre le 2-spineur

$$(3-1) \quad S\alpha = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \gamma^{p_1} \gamma^{p_2} \dots \gamma^{p_p} \alpha_{p_1 \dots p_p}^{(p)}$$

Inversement tout (1-1) spineur Φ admet une expression unique de la forme

$$\Phi = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \gamma^{p_1} \gamma^{p_2} \dots \gamma^{p_p} \alpha_{p_1 \dots p_p}^{(p)}$$

où les $\alpha^{(p)}$ sont des p -formes à valeurs complexes.

Nous obtenons ainsi un isomorphisme.

$$S : \psi \rightarrow \Phi = S\alpha,$$

défini par la formule (3-1).

b) Sur la variété V_4 munie de l'orientation ε est définie la forme élément de volume η . L'isomorphisme S fait correspondre à cette forme le (1-1) spineur $S\eta$. Nous posons

$$\xi = iS\eta$$

Un calcul rapide montre que $\xi = i\varepsilon\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Pour le système de matrices de Dirac standard, ξ est réel et diagonal, il s'écrit :

$$\xi = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que ξ satisfait

$$(3-2) \quad \xi^2 = e$$

et

$$(3-3) \quad \xi\gamma^\alpha + \gamma^\alpha\xi = 0$$

c) Soit \mathcal{B} (resp. $\overline{\mathcal{B}}$) l'automorphisme de \mathcal{I}_x (resp. \mathcal{I}'_x) défini par

$$\mathcal{B} : \psi \rightarrow \xi\psi \quad , \quad \overline{\mathcal{B}} : \varphi \rightarrow \varphi\xi,$$

et étudions les propriétés de \mathcal{B} et $\overline{\mathcal{B}}$. Transformons $\mathcal{B}\psi$ par conjugaison de charge il vient :

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\psi = \alpha(\xi\psi)^* = \alpha\xi\psi^* = -\xi\alpha\psi^* = -\mathcal{B}\mathcal{C}\psi.$$

Ainsi :

$$(3-4) \quad \mathcal{C}\mathcal{B} = -\mathcal{B}\mathcal{C} \quad , \quad \mathcal{C}\overline{\mathcal{B}} = -\overline{\mathcal{B}}\mathcal{C}.$$

En ce qui concerne l'adjonction de Dirac, on a d'après (3-3) :

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\psi = \rho\tilde{\psi}\tilde{\xi}\beta = \rho\tilde{\psi}\xi\beta = -\rho\tilde{\psi}\beta\xi = -\overline{\psi}\xi = -\overline{\mathcal{B}}\mathcal{A}\psi.$$

Ainsi :

$$(3-5) \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = -\overline{\mathcal{B}}\mathcal{A} \quad , \quad \mathcal{A}\overline{\mathcal{B}} = -\mathcal{B}\mathcal{A}$$

D'après (3-2), l'opérateur \mathcal{B} est tel que $\mathcal{B}^2 = \mathbf{I}$, où \mathbf{I} est l'opérateur identité. Il en résulte que \mathcal{B} admet les valeurs propres ± 1 et \mathcal{I}_x peut être décomposé en somme directe $\mathcal{I}_{x^+} \oplus \mathcal{I}_{x^-}$ de sous-espaces propres de \mathcal{B} . Un élément de \mathcal{I}_{x^+} (resp. \mathcal{I}_{x^-}) est appelé un spineur de *type pur positif* (resp. *négatif*) ou, en abrégé, un spineur positif ou négatif. Si ψ_+ est un spineur positif (resp. ψ_- un spineur négatif)

$$\mathcal{B}\psi_+ = \psi_+ \quad (\text{resp. } \mathcal{B}\psi_- = -\psi_-)$$

Par conjugaison de charge, on a :

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\psi_+ = \mathcal{C}\psi_+,$$

soit d'après (3-4)

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}\psi_+) = -\mathcal{C}\psi_+.$$

\mathcal{C} applique ainsi \mathcal{I}_{x^-} sur \mathcal{I}_{x^+} et réciproquement. Les dimensions de \mathcal{I}_{x^+} et \mathcal{I}_{x^-} sont donc égales entre elles et égales à 2.

Si $\psi \in \mathcal{I}_{x^+}$, on a :

$$\psi = \psi_+ + \psi_-$$

où $\psi_+ \in \mathcal{I}_{x^+}$, $\psi_- \in \mathcal{I}_{x^-}$. On en déduit :

$$\mathcal{B}\psi = \psi_+ - \psi_-.$$

Il en résulte

$$(3-6) \quad \psi_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathcal{B})\psi, \quad \psi_- = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathcal{B})\psi.$$

Dans le système de matrices de Dirac standard, explicitons les opérateurs $I + \mathcal{B}$ et $I - \mathcal{B}$, il vient :

$$I + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}, \quad I - \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Si ψ^a sont les composantes de $\psi \in \mathcal{F}_x$, on en déduit :

$$(3-7) \quad \psi_+ = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad \varepsilon = +1 :$$

et

$$(3-8) \quad \psi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad \varepsilon = -1.$$

Les matrices de Dirac utilisées ici mettent bien en évidence la nullité de deux des composantes des spineurs de type positif ou négatif. Nous pourrions être tentés de poursuivre une théorie des « spineurs à 2 composantes ». *La théorie poursuivie ici est une théorie à 4 composantes.* Elle conduira à des résultats plus complets et permettra de montrer l'existence de 4 neutrinos.

Les résultats et la terminologie sont semblables pour $\overline{\mathcal{B}}$. Nous écrivons $\mathcal{F}'_x = \mathcal{F}'_{x^+} \oplus \mathcal{F}'_{x^-}$. L'application \mathcal{A} vérifiant (3-5) on a :

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}\psi_+) = -\mathcal{A}\psi_+,$$

donc \mathcal{A} change le type des spineurs positifs ou négatifs, c'est-à-dire applique \mathcal{F}_{x^+} (resp. \mathcal{F}_{x^-}) sur \mathcal{F}'_{x^-} (resp. \mathcal{F}'_{x^+}) et inversement.

Un spineur de type (p, q) peut être décomposé d'une manière et d'une seule en somme de spineurs de types purs, c'est-à-dire éléments de produits tensoriels des espaces \mathcal{F}_{x^+} , \mathcal{F}_{x^-} , \mathcal{F}'_{x^+} , \mathcal{F}'_{x^-} .

Nous appellerons cette décomposition, la décomposition selon les types positif et négatif.

d) Soit $\psi \in \mathcal{F}_x$, $\varphi \in \mathcal{F}'_x$ deux 1-spineurs, l'un contravariant, l'autre covariant. On a :

$$(\varphi, \mathcal{B}\psi) = \varphi \xi \psi,$$

et par suite,

$$(3-9) \quad (\varphi, \mathcal{B}\psi) = (\overline{\mathcal{B}}\varphi, \psi).$$

Si $\varphi = \varphi_+$ est de type positif et $\psi = \psi_-$ de type négatif :

$$\begin{aligned}(\varphi_+, \mathcal{B}\psi_-) &= -(\varphi_+, \psi_-), \\ (\mathcal{B}\varphi_+, \psi_-) &= (\varphi_+, \psi_-).\end{aligned}$$

De (3-9) il résulte :

$$(3-10) \quad (\varphi_+, \psi_-) = 0, \quad (\varphi_-, \psi_+) = 0.$$

On en déduit que si $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- \in \mathcal{F}'_x$, $\psi = \psi_+ + \psi_- \in \mathcal{F}_x$ il vient :

$$(3-11) \quad (\varphi, \psi) = (\varphi_+, \psi_+) + (\varphi_-, \psi_-).$$

CHAPITRE II

THÉORIE DU CHAMP DE DIRAC

Dans ce chapitre nous décrivons le champ de Dirac *classique*. De nombreux résultats sont bien connus, et simplement rappelés en utilisant nos notations.

D'un point de vue purement algébrique, il est intéressant de faire une étude systématique des champs de tenseurs associés à un champ de 1-spineurs ψ : nous définissons deux invariants U et V, les vecteurs courant et de spin, enfin un tenseur antisymétrique engendrant le vecteur moment magnétique et le vecteur moment électrique. Nous étudions les relations qui existent entre ces différents tenseurs. L'analyse précise du vecteur courant montre qu'il peut être *isotrope*, le 1-spineur ψ est alors appelé *singulier*, et caractérisé par le fait que les invariants U et V sont nuls. Nous sommes alors naturellement amenés à poser le problème suivant : Étant donné sur une hypersurface S un champ de Dirac singulier, reste-t-il singulier au voisinage de S ? Ce point important de la permanence du champ singulier n'est pas résolu. Nous avons seulement trouvé des solutions particulières, dans le cadre de la relativité restreinte. Comment peut-on physiquement interpréter ces solutions ? La question reste posée.

1. Étude algébrique des champs de tenseurs associés canoniquement à un champ de 1-spineurs.

A un champ de 1-spineurs on peut associer les tenseurs suivants ⁽¹⁾ :

1° Deux scalaires *invariants*

$$U(\psi) = \bar{\psi}\psi, \quad V(\psi) = i\bar{\psi}\xi\psi,$$

⁽¹⁾ Voir Roman [1].

2° le vecteur courant et le vecteur de spin de composantes

$$J^\alpha(\psi) = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi, \quad A^\alpha(\psi) = i\bar{\psi}\xi\gamma^\alpha\psi,$$

3° le tenseur antisymétrique

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i}\bar{\psi}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)\psi$$

qui définit deux vecteurs d'espace : le moment électrique \vec{E} et le moment magnétique \vec{M} de composantes

$$\begin{cases} E^1(\psi) = L^{01} \\ E^2(\psi) = L^{02} \\ E^3(\psi) = L^{03} \end{cases} \quad \begin{cases} M^1(\psi) = L^{23} \\ M^2(\psi) = L^{31} \\ M^3(\psi) = L^{12} \end{cases}$$

Étudions les propriétés de ces grandeurs.

a) Les invariants U et V sont des quantités réelles. En effet de :

$$U = \rho\tilde{\psi}\beta\psi, \quad V = i\rho\tilde{\psi}\xi\psi$$

on déduit par adjonction

$$U^* = \rho\tilde{\psi}\beta\psi, \quad V^* = -i\rho\tilde{\psi}\xi\beta\psi = i\rho\tilde{\psi}\beta\xi\psi ;$$

il en résulte

$$U^* = U, \quad V^* = V.$$

Si ψ a pour composantes ψ^a , on obtient facilement l'expression explicite de U et V pour le système de matrices de Dirac standard.

$$(1-1) \quad \begin{cases} U = \rho(\psi^3\psi^{1*} + \psi^1\psi^{3*} + \psi^1\psi^{2*} + \psi^2\psi^{4*}), \\ V = i\rho\varepsilon(-\psi^3\psi^{1*} + \psi^4\psi^{2*} + \psi^1\psi^{3*} + \psi^2\psi^{4*}). \end{cases}$$

b) Le vecteur courant $J(\psi)$.

— Tout d'abord le vecteur $J(\psi)$ est un vecteur réel. En effet de

$$J^\alpha = i\rho\tilde{\psi}\beta\gamma^\alpha\psi$$

on déduit par adjonction

$$(J^\alpha)^* = -i\rho\tilde{\psi}\tilde{\gamma}^\alpha\beta\psi$$

Or se souvenant que

$$\tilde{\gamma}^\alpha\beta = -\beta\gamma^\alpha$$

on obtient

$$(J^\alpha)^* = i\rho\tilde{\psi}\beta\gamma^\alpha\psi = J^\alpha,$$

ce qui démontre la propriété.

— Relativement au repère spinoriel z , étudions la composante

$$J^0(z) = i\bar{\psi}(z)\gamma^0\psi(z)$$

du vecteur courant. De la définition de la matrice $\beta = i\gamma^0$ il résulte :

$$J^0(z) = i\rho_z\tilde{\psi}(z)\beta\gamma^0\psi(z) = \rho_z\tilde{\psi}(z)\beta^2\psi(z)$$

soit

$$(1-2) \quad J^0(z) = \rho_z\tilde{\psi}(z)\psi(z)$$

où $\tilde{\psi}(z)\psi(z)$ est positif et n'est nul que pour $\psi(z) = 0$, auquel cas le vecteur $J(\psi)$ est nul au point correspondant x de V_4 . Nous supposons qu'il n'en est pas ainsi.

Le vecteur $J(\psi)$ ne peut être orienté dans l'espace en aucun point de V_4 . Sinon on pourrait trouver un repère tel que J soit orthogonal au vecteur temporel e_0 correspondant et la composante J^0 par rapport à ce repère serait nulle. Sur (1-2) on voit que si $\rho_z = 1$, $J^0(z)$ est strictement positif et si $\rho_z = -1$, $J^0(z)$ est strictement négatif.

Ainsi, en chaque point x de V_4 , le vecteur courant $J(\psi)$ est dans ou sur le 1/2 cône futur C_x^+ .

— Le vecteur J peut être isotrope. Pour qu'il le soit, il faut et il suffit que $J^\alpha J_\alpha$ puisse s'annuler. Dans le système de matrices de Dirac standard écrivons les composantes de J .

$$(1-3) \quad \begin{cases} J^0 = \rho(\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*} + \psi^3\psi^{3*} + \psi^4\psi^{4*}) \\ J^1 = -\rho(\psi^2\psi^{1*} + \psi^1\psi^{2*} - \psi^4\psi^{3*} - \psi^3\psi^{4*}) \\ J^2 = -i\rho(\psi^2\psi^{1*} - \psi^1\psi^{2*} - \psi^4\psi^{3*} + \psi^3\psi^{4*}) \\ J^3 = -\rho(\psi^1\psi^{1*} - \psi^2\psi^{2*} - \psi^3\psi^{3*} + \psi^4\psi^{4*}). \end{cases}$$

On en déduit l'expression de $J^\alpha J_\alpha$:

$$(1-4) \quad \begin{aligned} J^\alpha J_\alpha &= (J^0)^2 - (J^1)^2 - (J^2)^2 - (J^3)^2 \\ J^\alpha J_\alpha &= 4(\psi^{1*}\psi^3 + \psi^{2*}\psi^4)(\psi^1\psi^{3*} + \psi^2\psi^{4*}). \end{aligned}$$

Calculons par ailleurs $U^2 + V^2$. De (1-1) il résulte

$$U^2 + V^2 = 4(\psi^{1*}\psi^3 + \psi^{2*}\psi^4)(\psi^1\psi^{3*} + \psi^2\psi^{4*}).$$

Par comparaison avec (1-4) il vient

$$(1-5) \quad J^\alpha J_\alpha = U^2 + V^2.$$

Les quantités U et V étant réelles nous énoncerons le théorème :

En un point x de V_4 le vecteur courant J est isotrope si et seulement si U et V sont nuls en ce point.

c) *Le vecteur de spin $A(\psi)$.*

Le vecteur $A(\psi)$ est un vecteur réel. Cette propriété se démontre pour le vecteur $A(\psi)$ comme on l'a démontrée pour $J(\psi)$.

Les composantes de A , dans le système de matrices de Dirac standard s'écrivent

$$(1-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^0 = -\rho\varepsilon(\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*} - \psi^3\psi^{3*} - \psi^4\psi^{4*}) \\ A^1 = \rho\varepsilon(\psi^2\psi^{1*} + \psi^1\psi^{2*} + \psi^4\psi^{3*} + \psi^3\psi^{4*}) \\ A^2 = i\rho\varepsilon(\psi^2\psi^{1*} - \psi^1\psi^{2*} + \psi^4\psi^{3*} - \psi^3\psi^{4*}) \\ A^3 = -\rho\varepsilon(-\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*} - \psi^3\psi^{3*} + \psi^4\psi^{4*}). \end{array} \right.$$

Si nous explicitons la somme $A^\alpha A_\alpha$ et si nous la comparons à $U^2 + V^2$ il vient :

$$(1-7) \quad A^\alpha A_\alpha = -(U^2 + V^2)$$

où U et V sont réels.

Ainsi, en un point de x de V_4 le vecteur de spin A est isotrope si et seulement si U et V sont nuls en ce point.

On remarquera que $J^\alpha J_\alpha + A^\alpha A_\alpha = 0$ en tout point x , et que le vecteur A n'est pas du genre temps ($A_\alpha A^\alpha \leq 0$).

d) *Le moment électrique et le moment magnétique.*

Le moment électrique \vec{E} est défini par

$$E^i = L^{0i} = \bar{\psi} \frac{\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0}{2i} \psi \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3$$

soit

$$E^i = \frac{1}{i} \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^i \psi,$$

de $\bar{\psi} = i\rho\tilde{\psi}\gamma^0$ on déduit

$$E^i = \rho\tilde{\psi}(\gamma^0)^2\gamma^i\psi,$$

et alors

$$(1-8) \quad E^i = -\rho\tilde{\psi}\gamma^i\psi.$$

Le moment magnétique \vec{M} a pour composantes

$$\begin{cases} M^1 = L^{23} \\ M^2 = L^{31} \\ M^3 = L^{12}. \end{cases}$$

Si j, k sont des indices distincts et égaux à 1, 2 ou 3 on a

$$L^{j,k} = \frac{1}{i} \bar{\psi} \gamma^j \gamma^k \psi = \rho \tilde{\psi} \gamma^0 \gamma^j \gamma^k \psi.$$

Soit $i = 1, 2$ ou 3 et différent de j et k , on peut écrire

$$\gamma^0 \gamma^j \gamma^k = \gamma^0 \gamma^j \gamma^k \gamma^i (\gamma^i)^{-1} = \frac{\epsilon}{i} \xi \gamma^i \epsilon_{1,2,3}^{j,k,i}$$

où $\epsilon_{1,2,3}^{j,k,i}$ est le tenseur d'antisymétrisation de Kronecker. Il en résulte

$$(1-9) \quad M^i = -i \rho \epsilon \tilde{\psi} \xi \gamma^i \psi.$$

Les vecteurs \vec{E} et \vec{M} sont réels. Cette propriété se démontre immédiatement par adjonction de (1-8) et (1-9).

Les composantes de \vec{E} et \vec{M} pour le système de matrices de Dirac standard ont pour expressions explicites :

$$(1-10) \quad \begin{cases} E^1 = -\rho i (-\psi^4 \psi^{1*} - \psi^3 \psi^{2*} + \psi^2 \psi^{3*} + \psi^1 \psi^{4*}) \\ E^2 = -\rho (\psi^4 \psi^{1*} - \psi^3 \psi^{2*} - \psi^2 \psi^{3*} + \psi^1 \psi^{4*}) \\ E^3 = -\rho i (-\psi^3 \psi^{1*} + \psi^4 \psi^{2*} + \psi^1 \psi^{3*} - \psi^2 \psi^{4*}) \end{cases}$$

$$(1-11) \quad \begin{cases} M^1 = \rho (-\psi^4 \psi^{1*} - \psi^3 \psi^{2*} - \psi^2 \psi^{3*} - \psi^1 \psi^{4*}) \\ M^2 = -\rho i (\psi^4 \psi^{1*} - \psi^3 \psi^{2*} + \psi^2 \psi^{3*} - \psi^1 \psi^{4*}) \\ M^3 = \rho (-\psi^3 \psi^{1*} + \psi^4 \psi^{2*} - \psi^1 \psi^{3*} + \psi^2 \psi^{4*}). \end{cases}$$

Pour comparer les vecteurs $\vec{J}, \vec{A}, \vec{E}$ et \vec{M} nous avons exprimé les produits scalaires de ces vecteurs pris deux à deux. Les calculs ont été explicités dans le système de matrices standard, ils conduisent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{M} &= \epsilon UV \\ \vec{E} \cdot \vec{J} &= -A^0 V & \vec{E} \cdot \vec{A} &= -J^0 V \\ \vec{M} \cdot \vec{J} &= -\epsilon A^0 U & \vec{M} \cdot \vec{A} &= -\epsilon J^0 U. \end{aligned}$$

En outre on établit également la formule

$$(\vec{M})^2 - (\vec{E})^2 = U^2 - V^2.$$

e) *Définition d'un 1-spineur ψ singulier*

L'importance du cas particulier où $U = V = 0$ apparaît partout, au cours de cette étude algébrique. Si en un point x de V_4 le spineur ψ est tel que $U = V = 0$ nous dirons qu'il est *singulier*. Alors le vecteur courant J et le vecteur de spin A sont *isotropes*. Le vecteur moment électrique \vec{E} est *orthogonal* au vecteur moment magnétique \vec{M} et $|\vec{E}| = |\vec{M}|$. Les vecteurs \vec{J} ou \vec{A} forment avec \vec{E} et \vec{M} un *trièdre trirectangle*.

Puisque J est isotrope il existe un repère spinoriel en x tel que les composantes de J vérifient

$$(1-12) \quad J^3 + J^0 = 0$$

et

$$(1-13) \quad J^1 = J^2 = 0.$$

L'équation (1-12) s'écrit dans le système de matrices standard

$$\psi^2\psi^{2*} + \psi^3\psi^{3*} = 0$$

Ainsi $\psi^2 = \psi^3 = 0$. Inversement on vérifie que si $\psi^2 = \psi^3 = 0$ (1-13) est vérifié. Un spineur $\psi = (\psi^1, 0, 0, \psi^4)$ est bien singulier. Il lui correspond des vecteurs J et A de composantes

$$\left\{ \begin{array}{l} J^0 = \rho(\psi^1\psi^{1*} + \psi^4\psi^{4*}) \\ J^1 = 0 \\ J^2 = 0 \\ J^3 = -\rho(\psi^1\psi^{1*} + \psi^4\psi^{4*}) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^0 = -\rho\varepsilon(\psi^1\psi^{1*} - \psi^4\psi^{4*}) \\ A^1 = 0 \\ A^2 = 0 \\ A^3 = \rho\varepsilon(\psi^1\psi^{1*} - \psi^4\psi^{4*}). \end{array} \right.$$

On remarque alors que le vecteur courant et le vecteur de spin sont *colinéaires*.

2. Étude des opérateurs différentiels spinoriels.

Les équations du champ de Dirac.

a) *Opérateurs de Dirac et de Klein-Gordon sur les 1-spineurs.*

Si ψ est un 1-spineur contravariant, φ un 1-spineur covariant, nous introduisons les *opérateurs de Dirac*

$$P\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi \quad , \quad \bar{P}\varphi = -\nabla_\alpha \varphi \gamma^\alpha.$$

Considérons le scalaire

$$(\varphi, P\psi) = \varphi \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = \nabla_\alpha (\varphi \gamma^\alpha \psi) - \nabla_\alpha \varphi \gamma^\alpha \psi$$

soit

$$(\varphi, P\psi) = (\bar{P}\varphi, \psi) + \nabla_\alpha(\varphi\gamma^\alpha\psi).$$

Si l'intersection des supports de ψ et φ est compacte, on obtient par « intégration » sur V_4 :

$$(2-1) \quad \langle \varphi, P\psi \rangle = \langle \bar{P}\varphi, \psi \rangle.$$

Des propriétés de l'adjonction de Dirac et de la conjugaison de charge, on déduit facilement les relations

$$(2-2) \quad C P \psi = P C \psi \quad , \quad C \bar{P} \varphi = \bar{P} C \varphi,$$

$$(2-3) \quad \mathcal{A} P \psi = \bar{P} \mathcal{A} \psi \quad , \quad \mathcal{A} \bar{P} \varphi = P \mathcal{A} \varphi.$$

Le *laplacien* d'un 1-spineur contravariant (resp. covariant) est l'opérateur $\Delta = P^2$ (resp. $\Delta = \bar{P}^2$). Cet opérateur a une expression simple en fonction de l'opérateur de dérivation covariante et de la courbure riemannienne scalaire R

$$(2-5) \quad \Delta = - \nabla^\rho \nabla_\rho + \frac{1}{4} R.$$

Il est clair sur (2-5) que Δ est un opérateur spinoriel du second ordre, de type hyperbolique normal, dont le conoïde caractéristique de sommet $x \in V_4$ est le conoïde C_x déduit de la métrique de la variété V_4 .

De (2-1) il résulte que si $S(\varphi) \cap S(\psi)$ est compact

$$(2-6) \quad \langle \Delta\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \Delta\psi \rangle.$$

Enfin on appelle *opérateur de Klein-Gordon* sur les 1-spineurs l'opérateur $(\Delta - m^2)$ où m est une constante.

b) *Les équations du champ de Dirac.*

Un *champ de Dirac* (spin 1/2) *classique* peut être défini par un 1-spineur contravariant ψ astreint à l'équation de champ libre

$$(2-7) \quad (P - m)\psi = 0 \quad (m = \text{const.})$$

où $m\psi$ est le terme de masse. L'adjoint de Dirac $\bar{\psi}$ vérifie alors

$$(2-8) \quad (\bar{P} - m)\bar{\psi} = 0.$$

En vertu de (2-2) les équations (2-7) et (2-8) sont *invariantes par conjugaison de charge*, c'est-à-dire par substitution à ψ de son conjugué de

charge $C\psi$. Comme $(\Delta - m^2) = (P + m)(P - m)$, tout 1-spineur solution de l'équation de Dirac (3-7) est solution de l'équation de Klein-Gordon.

$$(2-9) \quad (\Delta - m^2)\psi = 0.$$

Nous montrerons que tout 1-spineur solution de (2-7) peut se déduire d'une solution de l'équation de Klein-Gordon (2-9) par l'action de l'opérateur $P + m$.

c) *Le formalisme lagrangien. Les relations de conservation.*

On démontre que les équations du champ de Dirac dérivent du *lagrangien*

$$(2-10) \quad L(\psi) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - \nabla_\alpha \bar{\psi}\gamma^\alpha \psi) - m\bar{\psi}\psi.$$

Les raisonnements usuels du formalisme lagrangien conduisent à introduire, le *vecteur courant* $J^\alpha(\psi)$ du champ de Dirac qui coïncide avec celui que l'on a défini précédemment, et le *tenseur canonique d'impulsion énergie* non symétrique :

$$(2-11) \quad T_{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \bar{\psi}\gamma_\beta \psi - \bar{\psi}\gamma_\beta \nabla_\alpha \psi).$$

Si ψ et $\bar{\psi}$ satisfont aux équations (2-7) et (2-8) du champ de Dirac libre, on vérifie facilement que le *vecteur courant* J^α est *conservatif* :

$$(2-12) \quad \nabla_\alpha J^\alpha(\psi) = 0.$$

Pour le vecteur de spin $A^\alpha(\psi) = i\bar{\psi}\xi\gamma^\alpha\psi$ évaluons également

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha A^\alpha(\psi) &= i(\nabla_\alpha \bar{\psi}\xi\gamma^\alpha\psi + \bar{\psi}\xi\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi) \\ &= i(\bar{P}\bar{\psi}\xi\psi + \bar{\psi}\xi P\psi). \end{aligned}$$

Pour une solution des équations de champ il vient

$$\nabla_\alpha A^\alpha(\psi) = 2im\bar{\psi}\xi\psi$$

soit

$$(2-13) \quad \nabla_\alpha A^\alpha(\psi) = 2mV(\psi).$$

Le vecteur de spin n'est *pas en général conservatif*.

Il est aisé de montrer que le tenseur impulsion énergie $T_{\alpha\beta}$ vérifie pour une solution des équations de Dirac les relations

$$(2-14) \quad \nabla_\beta T_x^\beta(\psi) = 0$$

$$(2-15) \quad \nabla_\alpha T^\alpha_\beta(\psi) = 0$$

Nous remarquerons que la trace du tenseur $T_{\alpha\beta}$ s'exprime simplement en fonction de $U(\psi)$

$$T_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi - \nabla_{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi)$$

soit

$$(2-16) \quad T_{\alpha}^{\alpha} = m\bar{\psi}\psi = mU(\psi).$$

Des relations (2-13) et (2-16) on déduit le théorème suivant :

Un champ de 1-spineurs ψ est singulier si et seulement si le vecteur de spin associé est conservatif et la trace du tenseur impulsion énergie est nulle, la masse m étant évidemment supposée non nulle.

3. La permanence d'un champ de Dirac singulier.

a) *Définition du champ de Dirac singulier.*

Rappelons la définition que nous avons donnée d'un spineur singulier : un 1-spineur ψ est *singulier* en un point, si et seulement si, les invariants U et V sont nuls en ce point soit

$$(3-1) \quad U \equiv \bar{\psi}\psi = 0$$

$$(3-2) \quad V \equiv i\bar{\psi}\xi\psi = 0.$$

Le vecteur courant J associé à ψ est alors isotrope et réciproquement, si J est isotrope, les relations (3-1) et (3-2) sont vérifiées.

Dans le système de matrices standard, (3-1) et (3-2) s'écrivent

$$U \equiv \rho(\psi^{3*}\psi^1 + \psi^3\psi^{1*} + \psi^2\psi^{4*} + \psi^{2*}\psi^4) = 0,$$

$$V \equiv i\rho\varepsilon(-\psi^{1*}\psi^3 + \psi^3*\psi^1 - \psi^{2*}\psi^4 + \psi^{4*}\psi^2) = 0.$$

U et V sont réels donc le système des équations (3-1) et (3-2) est équivalent à

$$U + i\varepsilon V = 0,$$

soit

$$(3-3) \quad \psi^{1*}\psi^3 + \psi^{2*}\psi^4 = 0.$$

La relation (3-3) est caractéristique d'un spineur singulier dans le système de matrices standard.

Un champ de Dirac singulier est un champ de 1-spineurs singuliers astreint aux équations de Dirac.

b) *Le problème de la permanence d'un champ de Dirac singulier : Position du problème.*

La considération d'un champ singulier dans un domaine nous amène naturellement à poser le problème suivant :

Étant donné, sur une hypersurface S orientée partout dans l'espace, un champ de Dirac singulier, reste-t-il singulier au voisinage de S ?

D'une façon plus précise le problème de la permanence du champ singulier peut se poser ainsi : étant donné sur une hypersurface S , les quantités ψ^a , existe-t-il une solution pour le système d'équations ?

$$(3-4) \quad \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = m\psi,$$

$$(3-1) \quad \bar{\psi}\psi = 0,$$

$$(3-2) \quad i\bar{\psi}\xi\psi = 0,$$

c'est-à-dire pour le système d'équations équivalent :

$$(3-4) \quad \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = m\psi,$$

$$(3-3) \quad \psi^{1*}\psi^3 + \psi^{2*}\psi^4 = 0.$$

Les quatre fonctions inconnues $\psi^a(x^i)$ doivent donc être solutions d'un système de quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre et d'une équation supplémentaire de type quadratique.

Nous n'avons pas été capable de montrer l'existence de solutions pour le problème ainsi posé en relativité générale. Par contre dans le cadre de la relativité restreinte nous allons mettre en évidence des solutions particulières.

c) *Le cas de la relativité restreinte.*

Les équations (3-4) se simplifient

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi = m\psi,$$

et s'écrivent dans le système de matrices standard

$$(3-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -i(\partial_0\psi^3 + \partial_3\psi^3) + (-i\partial_1\psi^4 - \partial_2\psi^4) = m\psi^1 \\ i(-\partial_0\psi^4 + \partial_3\psi^4) - (i\partial_1\psi^3 + \partial_2\psi^3) = m\psi^2 \\ i(-\partial_0\psi^1 + \partial_3\psi^1) + (i\partial_1\psi^2 - \partial_2\psi^2) = m\psi^3 \\ -i(\partial_0\psi^2 + \partial_3\psi^2) + (i\partial_1\psi^1 + \partial_2\psi^1) = m\psi^4. \end{array} \right.$$

Existe-t-il quatre fonctions ψ^a solutions de ces quatre équations aux dérivées partielles et vérifiant l'équation supplémentaire de type quadratique

$$\psi^{1*}\psi^3 + \psi^{2*}\psi^4 = 0 \quad ?$$

Faisons le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = -i \frac{x_0 + x_3}{2} \\ u_1 = -\frac{ix_1 + x_2}{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_3 = -i \frac{x_0 - x_3}{2} \\ u_2 = \frac{-ix_1 + x_2}{2} \end{array} \right.$$

Sachant que $\frac{\psi^{2*}}{\psi^{1*}} = \frac{-\psi^3}{\psi^4}$ nous sommes amenés à poser

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^2 = \rho\psi^1 \\ \psi^3 = -\rho^*\psi^4 \end{array} \right.$$

Alors ψ^1, ψ^4, ρ et leurs complexes conjugués doivent être solutions des équations déduites de (3-5) et de leurs conjuguées après les changements de variables et de fonctions envisagés soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi^1}{\partial u_3} - \rho \frac{\partial \psi^1}{\partial u_1} = \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \psi^1 + m\rho^*\psi^4 \\ \rho \frac{\partial \psi^1}{\partial u_0} - \frac{\partial \psi^1}{\partial u_2} = -\frac{\partial \rho}{\partial u_0} \psi^1 - m\psi^4 \\ -\rho^* \frac{\partial \psi^4}{\partial u_0} + \frac{\partial \psi^4}{\partial u_1} = \frac{\partial \rho^*}{\partial u_0} \psi^4 - m\psi^1 \\ \frac{\partial \psi^4}{\partial u_3} - \rho^* \frac{\partial \psi^4}{\partial u_2} = \frac{\partial \rho^*}{\partial u_2} \psi^4 - m\rho\psi^1 \\ -\frac{\partial \psi^{1*}}{\partial u_3} + \rho^* \frac{\partial \psi^{1*}}{\partial u_2} = -\frac{\partial \rho^*}{\partial u_3} \psi^{1*} + m\rho\psi^{4*} \\ -\rho^* \frac{\partial \psi^{1*}}{\partial u_0} + \frac{\partial \psi^{1*}}{\partial u_1} = +\frac{\partial \rho^*}{\partial u_0} \psi^{1*} - m\psi^{4*} \\ -\rho \frac{\partial \psi^{4*}}{\partial u_0} + \frac{\partial \psi^{4*}}{\partial u_2} = \frac{\partial \rho}{\partial u_0} \psi^{4*} + m\psi^{1*} \\ \frac{\partial \psi^{4*}}{\partial u_3} - \rho \frac{\partial \psi^{4*}}{\partial u_1} = \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \psi^{4*} + m\rho^*\psi^{1*} \end{array} \right.$$

Nous n'envisageons pas de résoudre ce système d'équations mais seulement de mettre en évidence des *solutions particulières*. Cherchons des solutions de type exponentiel en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^1 = e^\theta \\ \psi^4 = \sigma\psi^1 \end{array} \right.$$

Les fonctions inconnues au nombre de 6 sont alors

$$\theta, \theta^*, \rho, \rho^*, \sigma, \sigma^*$$

elles doivent satisfaire les 8 équations dérivées partielles linéaires suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} m\rho^*\sigma = \frac{\partial\theta}{\partial u_3} - \rho \frac{\partial\theta}{\partial u_1} - \frac{\partial\rho}{\partial u_1} \\ m\sigma = \frac{\partial\theta}{\partial u_2} - \rho \frac{\partial\theta}{\partial u_0} - \frac{\partial\rho}{\partial u_0} \\ -\rho^*\sigma \frac{\partial\theta}{\partial u_0} - \sigma \frac{\partial\theta}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_0}(\rho^*\sigma) - \frac{\partial\sigma}{\partial u_1} - m \\ -\rho^*\sigma \frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \sigma \frac{\partial\theta}{\partial u_3} = \frac{\partial}{\partial u_2}(\rho^*\sigma) - \frac{\partial\sigma}{\partial u_3} - m\rho \end{array} \right.$$

et les 4 équations complexes conjuguées.

On peut éliminer σ et σ^* grâce aux relations

$$\begin{aligned} m\sigma &= \frac{\partial\theta}{\partial u_2} - \rho \frac{\partial\theta}{\partial u_0} - \frac{\partial\rho}{\partial u_0} \\ m\sigma^* &= -\frac{\partial\theta^*}{\partial u_1} + \rho^* \frac{\partial\theta^*}{\partial u_0} + \frac{\partial\rho^*}{\partial u_0} \end{aligned}$$

les quatre inconnues ρ , ρ^* , θ , θ^* sont alors astreintes aux 6 équations suivantes :

$$(3-6) \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_0\partial u_3} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_2} + \frac{\partial\theta}{\partial u_0} \frac{\partial\theta}{\partial u_3} - \frac{\partial\theta}{\partial u_1} \frac{\partial\theta}{\partial u_2} - m^2 = 0$$

$$(3-7) \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial u_3\partial u_0} - \frac{\partial^2\rho}{\partial u_1\partial u_2} + \frac{\partial\rho}{\partial u_0} \frac{\partial\theta}{\partial u_3} - \frac{\partial\rho}{\partial u_1} \frac{\partial\theta}{\partial u_2} - \frac{\partial\rho}{\partial u_2} \frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial\rho}{\partial u_3} \frac{\partial\theta}{\partial u_0} = 0$$

(3-6)' équation (3-6) pour les fonctions θ^* et ρ^* ,

(3-7)' équation (3-7) pour les fonctions θ^* et ρ^* ,

$$(3-8) \quad \rho\rho^* \frac{\partial\theta}{\partial u_0} - \rho \frac{\partial\theta}{\partial u_1} - \rho^* \frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \frac{\partial\theta}{\partial u_3} + \rho^* \frac{\partial\rho}{\partial u_0} - \frac{\partial\rho}{\partial u_1} = 0$$

$$(3-9) \quad \rho\rho^* \frac{\partial\theta^*}{\partial u_0} - \rho^* \frac{\partial\theta^*}{\partial u_2} - \rho \frac{\partial\theta^*}{\partial u_1} + \frac{\partial\theta^*}{\partial u_3} + \rho \frac{\partial\rho^*}{\partial u_0} - \frac{\partial\rho^*}{\partial u_2} = 0.$$

Ce système d'équations admet des solutions particulières de la forme :

$$(3-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho, \text{ constant} \\ \theta = a^2 u_x + b \text{ où } a^2 \text{ et } b \text{ sont des constantes complexes.} \end{array} \right.$$

En effet si ρ est constant les équations (3-7) et (3-7)' sont vérifiées. Pour que les autres équations le soient aussi, il suffit que les constantes ρ et a^α satisfassent aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} a^0 a^3 - a^1 a^2 = m^2 \\ a^{0*} a^{3*} - a^{1*} a^{2*} = m^2 \\ \rho \rho^* a^0 - \rho a^1 - \rho^* a^2 + a^3 = 0 \\ \rho \rho^* a^{0*} - \rho^* a^{2*} - \rho a^{1*} + a^{3*} = 0. \end{array} \right.$$

Ces relations sont compatibles, b est arbitraire, pour ρ et a^α quatre constantes réelles demeurent encore arbitraires. La solution particulière trouvée exprimée à l'aide des constantes ρ , a^α , b s'écrit :

$$(3-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^1 = e^{a^\alpha u_\alpha + b} \\ \psi^2 = \rho \psi^1 \\ \psi^3 = \frac{\rho^*}{m} (\rho a^0 - a^2) \psi^1 \\ \psi^4 = -\frac{1}{m} (\rho a^0 - a^2) \psi^1. \end{array} \right.$$

Cette solution est-elle susceptible d'une interprétation physique ? Il faudrait pour cela que la solution soit normalisée, ce qui malheureusement n'est pas le cas ici. La question reste ouverte de savoir si d'autres solutions, soumises à des conditions aux limites convenables, existent.

Notons pour terminer que nous avons traité la question dans le cadre de la relativité restreinte et que nous n'avons pas été capable de montrer l'existence d'une solution singulière en relativité générale.

CHAPITRE III

THÉORIE DES NEUTRINOS

Le champ neutrinique est un champ de Dirac sans terme de masse. Partant de cette définition, nous décomposons le spineur ψ correspondant au champ neutrinique en parties positive et négative et analysons les propriétés des spineurs de types purs ainsi obtenus. Nous remarquerons surtout que le vecteur courant et le vecteur de spin associés à des spineurs de types purs, sont isotropes. Nous insistons d'autre part sur le fait que les équations de champ obtenues en décomposant les équations de Dirac en parties positive

et négative n'ont un sens que si la masse est nulle, donc que la décomposition d'un spineur en types purs ne peut avoir une interprétation physique que dans ce cas. D'autre part, en considérant le spineur conjugué de charge de ψ , nous voyons qu'il vérifie les équations de champ de ψ , donc les quatre champs ψ_+ , ψ_- , $\mathcal{C}\psi_+$, $\mathcal{C}\psi_-$ décrivent 4 neutrinos. Enfin nous construisons les anticommutateurs rigoureux des neutrinos, par simple décomposition selon les types purs de l'anticommutateur d'un champ de 1-spineurs.

1. Décomposition selon les types positif et négatif des tenseurs associés canoniquement à un champ de 1-spineurs.

a) ψ_1 et ψ_2 étant deux 1-spineurs contravariants, posons

$$J^\alpha(\psi_1, \psi_2) = i\bar{\psi}_1\gamma^\alpha\psi_2.$$

On a

$$J^\alpha(\mathcal{B}\psi_1, \mathcal{B}\psi_2) = -i\bar{\mathcal{B}}\psi_1\gamma^\alpha\mathcal{B}\psi_2 = -i\bar{\psi}_1\xi\gamma^\alpha\xi\psi_2 = i\bar{\psi}_1\gamma^\alpha\xi^2\psi_2$$

Comme $\xi^2 = e$, il vient

$$J^\alpha(\mathcal{B}\psi_1, \mathcal{B}\psi_2) = J^\alpha(\psi_1, \psi_2).$$

Appliquons cette relation à un spineur $\psi_1 = \psi_+$ de type positif et à un spineur $\psi_2 = \psi_-$ de type négatif.

On a

$$J^\alpha(\mathcal{B}\psi_+, \mathcal{B}\psi_-) = J^\alpha(\psi_+, \psi_-).$$

Or

$$J^\alpha(\mathcal{B}\psi_+, \mathcal{B}\psi_-) = J^\alpha(\psi_+, -\psi_-) \quad (\mathcal{B}\psi_+ = \psi_+, \mathcal{B}\psi_- = -\psi_-)$$

soit

$$J^\alpha(\mathcal{B}\psi_+, \mathcal{B}\psi_-) = -J^\alpha(\psi_+, \psi_-);$$

on en déduit

$$(1-1) \quad J^\alpha(\psi_+, \psi_-) = 0$$

ψ étant un 1-spineur contravariant arbitraire, décomposons-le en $\psi_+ + \psi_-$ selon les types positif et négatif de (1-1) il résulte

$$J^\alpha(\psi, \psi) = J^\alpha(\psi_+, \psi_+) + J^\alpha(\psi_-, \psi_-),$$

soit en abrégant

$$(1-2) \quad J^\alpha(\psi) = J^\alpha(\psi_+) + J^\alpha(\psi_-),$$

où l'on a posé

$$J^\alpha(\psi_+) = i\bar{\psi}_+\gamma^\alpha\psi_+, \quad J^\alpha(\psi_-) = i\bar{\psi}_-\gamma^\alpha\psi_-.$$

Une étude semblable peut être faite pour le vecteur de spin A . On établit la relation

$$A^\alpha(\mathfrak{B}\psi_1, \mathfrak{B}\psi_2) = A^\alpha(\psi_1, \psi_2),$$

qui appliquée à un spineur $\psi_1 = \psi_+$ de type positif et à un spineur $\psi_2 = \psi_-$ de type négatif, permet d'en déduire

$$(1-3) \quad A^\alpha(\psi_+, \psi_-) = 0$$

ψ étant un 1-spineur contravariant arbitraire, décomposons-le en $\psi_+ + \psi_-$ selon les types positif et négatif on a :

$$(1-4) \quad A^\alpha(\psi) = A^\alpha(\psi_+) + A^\alpha(\psi_-),$$

où l'on a posé

$$A^\alpha(\psi_+) = i\bar{\psi}_+\xi\gamma^\alpha\psi_+, \quad A^\alpha(\psi_-) = i\bar{\psi}_-\xi\gamma^\alpha\psi_-.$$

b) D'autre part comme $\xi\psi_+ = \psi_+$ et $\xi\psi_- = -\psi_-$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} A^\alpha(\psi_+) &= i\bar{\psi}_+\xi\gamma^\alpha\psi_+ = -i\bar{\psi}_+\gamma^\alpha\xi\psi_+ = -i\bar{\psi}_+\gamma^\alpha\psi_+, \\ A^\alpha(\psi_-) &= i\bar{\psi}_-\xi\gamma^\alpha\psi_- = -i\bar{\psi}_-\gamma^\alpha\xi\psi_- = i\bar{\psi}_-\gamma^\alpha\psi_-, \end{aligned}$$

il en résulte

$$(1-5) \quad A^\alpha(\psi_+) = -J^\alpha(\psi_+),$$

$$(1-6) \quad A^\alpha(\psi_-) = J^\alpha(\psi_-).$$

Ainsi, les vecteurs A et J associés à un spineur de type pur *sont colinéaires*; plus précisément, *ils sont égaux si le spineur est de type négatif et opposés si le spineur est de type positif* ⁽¹⁾.

Appliquons la relation (II, 1-5) à des spineurs de type pur, on a

$$\begin{aligned} J^\alpha(\psi_+)J_\alpha(\psi_+) &= [U(\psi_+)]^2 + [V(\psi_+)]^2, \\ J^\alpha(\psi_-)J_\alpha(\psi_-) &= [U(\psi_-)]^2 + [V(\psi_-)]^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} U(\psi_+) &= \bar{\psi}_+\psi_+, & U(\psi_-) &= \bar{\psi}_-\psi_-, \\ V(\psi_+) &= i\bar{\psi}_+\xi\psi_+ = i\bar{\psi}_+\psi_+, & V(\psi_-) &= i\bar{\psi}_-\xi\psi_- = -i\bar{\psi}_-\psi_-. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Nous verrons que les neutrinos peuvent être représentés par des spineurs positifs et les antineutrinos par des spineurs négatifs. Donc A et J sont de même sens pour des antineutrinos et de sens contraires pour des neutrinos.

Puisque $\bar{\psi}_+$ (resp. $\bar{\psi}_-$) sont de type négatif (resp. positif) on déduit de (I, 3-10) que

$$U(\psi_+) = U(\psi_-) = V(\psi_+) = V(\psi_-) = 0.$$

Il en résulte

$$J^\alpha(\psi_+)J_\alpha(\psi_+) = 0,$$

$$J^\alpha(\psi_-)J_\alpha(\psi_-) = 0.$$

Le vecteur courant J associé à un spineur de type pur est isotrope. Cette propriété est vraie aussi pour le vecteur de spin A, elle se déduit facilement de la relation (II, 1-7).

c) *Le vecteur moment électrique \vec{E} et le vecteur moment magnétique \vec{M} associés à un spineur de type pur sont nuls.*

En effet dans le système de matrices de Dirac standard, un spineur de type pur a ses composantes d'indices 1 et 2, ou 3 et 4 nulles. On voit alors que les composantes de \vec{E} et \vec{M} explicitées dans (II, 1-10) et (II, 1-11) sont nulles.

2. Influence des opérateurs de Dirac sur la décomposition des spineurs selon les types positif et négatif.

a) Si ψ est un 1-spineur contravariant, on a, puisque ξ est à dérivée covariante nulle,

$$\mathcal{B}P\psi = \xi\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi = -\gamma^\alpha\xi\nabla_\alpha\psi = -\gamma^\alpha\nabla_\alpha(\xi\psi) = -P\mathcal{B}\psi;$$

on obtient ainsi

$$(2-1) \quad \mathcal{B}P = -P\mathcal{B} \quad , \quad \bar{\mathcal{B}}\bar{P} = -\bar{P}\bar{\mathcal{B}}.$$

De (2-1) il résulte que les *opérateurs de Dirac changent le type des spineurs positifs et négatifs*. Quant au laplacien Δ , il conserve le type de ces spineurs.

b) Considérons les équations de Dirac (II, 2-7) et (II, 2-8) pour un 1-spineur ψ et pour son adjoint $\bar{\psi}$. Décomposons ψ en $\psi_+ + \psi_-$, selon les types positif et négatif. L'opérateur P changeant les types, on voit que :

$$(2-2) \quad P\psi_+ = m\psi_- \quad , \quad P\psi_- = m\psi_+$$

et

$$(2-3) \quad \bar{P}\bar{\psi}_+ = m\bar{\psi}_- \quad , \quad \bar{P}\psi_- = m\bar{\psi}_+ \quad (2)$$

ψ_+ et ψ_- étant eux-mêmes solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$(\Delta - m^2)\psi_+ = 0, \quad (\Delta - m^2)\psi_- = 0.$$

c) Dans la décomposition (1-2) de $J^\alpha(\psi)$, les parties $J^\alpha(\psi_+)$ et $J^\alpha(\psi_-)$ ne sont pas en général conservatives. En effet de

$$J^\alpha(\psi_+) = i\bar{\psi}_+\gamma^\alpha\psi_+$$

on déduit

$$\nabla_\alpha J^\alpha(\psi_+) = i \{ (\bar{\psi}_+, P\psi_+) - (\bar{P}\bar{\psi}_+, \psi_+) \}.$$

Si ψ_+ et $\bar{\psi}_+$ satisfont aux équations (2-2) et (2-3) il vient :

$$\nabla_\alpha J^\alpha(\psi_+) = im \{ (\bar{\psi}_+, \psi_-) - (\bar{\psi}_-, \psi_+) \},$$

et cette expression n'est pas, en général, nulle, mais s'annule en particulier si $m = 0$.

De (1-5) et (1-6) il résulte que les parties $A^\alpha(\psi_+)$ et $A^\alpha(\psi_-)$ du vecteur de spin ne sont pas non plus en général conservatives, et que :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha J^\alpha(\psi_+) &= - \nabla_\alpha A^\alpha(\psi_+), \\ \nabla_\alpha J^\alpha(\psi_-) &= \nabla_\alpha A^\alpha(\psi_-). \end{aligned}$$

d) Le tenseur canonique d'impulsion énergie correspondant à ψ_+ s'écrit

$$T_{\alpha\beta}(\psi_+) = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \bar{\psi}_+ \gamma_\beta \psi_+ - \bar{\psi}_+ \gamma_\beta \nabla_\alpha \psi_+).$$

Nous remarquerons que sa trace a pour expression

$$T_\alpha^\alpha(\psi_+) = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \bar{\psi}_+ \gamma^\alpha \psi_+ - \bar{\psi}_+ \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi_+),$$

soit

$$T_\alpha^\alpha(\psi_+) = -\frac{1}{2} \{ (\bar{P}\bar{\psi}_+, \psi_+) + (\bar{\psi}_+, P\psi_+) \}.$$

Si ψ_+ et $\bar{\psi}_+$ satisfait aux équations (2-2) et (2-3) on a :

$$T_\alpha^\alpha(\psi_+) = -\frac{m}{2} \{ (\bar{\psi}_-, \psi_+) + (\bar{\psi}_+, \psi_-) \}.$$

La trace du tenseur impulsion énergie n'est pas, en général, nulle. Elle s'annule si la masse m est nulle.

(2) Dans ces équations de champ avec masse non nulle, ψ_+ ou ψ_- n'apparaissent pas isolément dans une même équation. La décomposition de ψ en spineurs de types purs n'a donc pas de signification physique si la masse m n'est pas nulle.

3. Champ neutrinique.

On appelle *champ neutrinique*, un champ de Dirac pour lequel $m = 0$. Un tel champ est donc représenté par un 1-spineur contravariant ψ vérifiant l'équation de champ

$$(3-1) \quad P\psi = 0.$$

Par adjonction de Dirac, il vient

$$(3-2) \quad \bar{P}\bar{\psi} = 0.$$

Décomposons ψ selon les types positif et négatif

$$\psi = \psi_+ + \psi_-.$$

L'adjonction permutant les types des spineurs on a

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_+ + \bar{\psi}_-.$$

où $\bar{\psi}_+$ est négatif et $\bar{\psi}_-$ positif. De même par conjugaison de charge

$$C\psi = C\psi_+ + C\psi_-,$$

où $C\psi_+$ est négatif et $C\psi_-$ est positif.

L'opérateur P permutant les types positif et négatif, l'équation (3-1) se décompose selon les deux équations de Dirac

$$(3-3) \quad P\psi_+ = 0, \quad P\psi_- = 0.$$

De même (3-2) se décompose selon

$$(3-4) \quad P\bar{\psi}_+ = 0, \quad P\bar{\psi}_- = 0.$$

C commutant avec P et \bar{P} , les spineurs de types purs $C\psi_+$ et $C\psi_-$ vérifient les mêmes équations que ψ_+ et ψ_- .

Des résultats obtenus dans les paragraphes précédents on déduit qu'un *champ de spineurs de types purs ψ_+ ou ψ_- , qui satisfait aux équations de Dirac sans masse (3-3) admet les propriétés suivantes : les vecteurs courant et de spin associés sont isotropes et conservatifs, la trace du tenseur impulsion énergie est nulle. Ceci n'est plus vrai pour un champ de spineurs quelconques astreint aux équations de Dirac avec masse, sauf si ce champ de Dirac est singulier.*

Le champ neutrinique ψ étant ainsi décomposé en deux champs ψ_+ et ψ_- qui vérifient les équations de Dirac, nous sommes amenés à rechercher les *anticommutateurs* correspondants. Auparavant rappelons très brièvement

les résultats de l'étude quantique d'un champ de Dirac. Cette étude fait appel aux travaux de Leray sur les systèmes différentiels hyperboliques et à ceux de Mme Choquet-Bruhat.

Nous utilisons le formalisme des propagateurs introduit par A. Lichnerowicz.

Le bi-1-spineur de Dirac ⁽³⁾ contravariant en x , covariant en x' est défini par

$$\langle \Sigma^{1/2}(x, x'), \psi(x') \rangle_{v_4} = \psi(x),$$

Désignons par $G^{(1/2)\pm}(x, x')$ les deux noyaux élémentaires ⁽⁴⁾ de l'opérateur de Klein-Gordon $(P^2 - m^2) = (\Delta - m^2)$ c'est-à-dire les deux bi-1-spineurs distributions satisfaisant

$$(P_x^2 - m^2)G^{1/2\pm}(x, x') = \Sigma^{1/2}(x, x')$$

dont les supports sont pour chaque x' , respectivement dans le futur de x' et dans le passé de x' . Le propagateur associé à $(P^2 - m^2)$ est

$$G^{1/2} = G^{1/2-} - G^{1/2+}$$

Rappelons le théorème d'unicité suivant

Tout 1-spineur-distribution ψ solution de $(P^2 - m^2)\psi = 0$ et à support compact vers le passé ou vers le futur est nécessairement nul.

Celui associé aux opérateurs $(P - m)$ et $(\bar{P} - m)$ est le noyau

$$S^{1/2}(x, x') = (P_x + m)G^{1/2}(x, x') = (\bar{P}_{x'} + m)G^{1/2}(x, x')$$

Si ψ est à valeurs opératorielles, l'anticommutateur correspondant est donné par

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{1/2}(x, x')$$

Il suffit alors de décomposer cet anticommutateur selon les types purs pour obtenir les anticommutateurs du champ neutrinique. La masse m sera supposée nulle évidemment.

4. Décomposition de $S^{(1/2)}$ selon les types.

Pour cette étude, nous allons nous intéresser à la décomposition selon les types du bi-1-spineur de Dirac $\Sigma^{(1/2)}$ et à celle du propagateur $G^{(1/2)}$ de l'opérateur $P^2 = \Delta$.

⁽³⁾ Pour la notion de spineurs distributions et de propagateurs spinoriels, voir A. Lichnerowicz [4].

⁽⁴⁾ Voir L. Schwartz, Théorie des noyaux [1].

a) Partons de la décomposition du bi-1-spineur de Dirac :

$$\Sigma^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x^+, x') + \Sigma^{(1/2)}(x^-, x')$$

selon les types positif et négatif en x . En procédant de même en x' , on obtient :

(4-1)

$$\Sigma^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x^+, x'^+) + \Sigma^{(1/2)}(x^+, x'^-) + \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^+) + \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^-).$$

Si ψ_+ est un 1-spineur positif arbitraire

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x, x'), \psi_+(x') \rangle = \psi_+(x),$$

soit

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x, x'^+) + \Sigma^{(1/2)}(x, x'^-), \psi_+(x') \rangle = \psi_+(x);$$

de (I, 5-10) on déduit

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x, x'^-), \psi_+(x') \rangle = 0;$$

il en résulte :

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x^+, x'^+) + \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^+), \psi_+(x') \rangle = \psi_+(x).$$

Faisons agir l'opérateur \mathcal{B}_x sur les 2 membres ; il vient :

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x^+, x'^+) - \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^+), \psi_+(x') \rangle = \psi_+(x).$$

Donc

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^+), \psi_+(x') \rangle = 0.$$

D'autre part, grâce à (I, 3-10) on a

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^+), \psi_-(x') \rangle = 0.$$

Par suite, si ψ est un 1-spineur arbitraire

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^+), \psi(x') \rangle = 0$$

et il vient

$$(4-2) \quad \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^+) = 0.$$

On a de même

$$\Sigma^{(1/2)}(x^+, x'^-) = 0.$$

Ainsi (4-1) devient :

$$(4-3) \quad \Sigma^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x^+, x'^+) + \Sigma^{(1/2)}(x^-, x'^-).$$

b) Reprenons les noyaux élémentaires $G^{(1/2)\pm}(x, x')$ de l'opérateur Δ :

$$\Delta_x G^{(1/2)\pm}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x, x')$$

L'opérateur Δ conservant les types positif et négatif on en déduit en x :

$$\Delta_x G^{(1/2)\pm}(x^+, x') = \Sigma^{(1/2)}(x^+, x')$$

et en décomposant selon les types en x'

$$\Delta_x G^{(1/2)\pm}(x^+, x'^-) = \Sigma^{(1/2)}(x^+, x'^-) = 0$$

Du théorème d'unicité il résulte :

$$G^{(1/2)\pm}(x^+, x'^-) = 0$$

et de même

$$G^{(1/2)\pm}(x^-, x'^+) = 0.$$

Par différence on a donc aussi pour le propagateur $G^{(1/2)}$ de Δ :

$$(4-4) \quad G^{(1/2)}(x^+, x'^-) = 0, \quad G^{(1/2)}(x^-, x'^+) = 0.$$

c) Le propagateur $S^{(1/2)}$ de l'opérateur P s'écrit

$$S^{(1/2)}(x, x') = P_x G^{(1/2)}(x, x')$$

L'opérateur P échangeant les types, on déduit de (4-4)

$$(4-5) \quad S^{(1/2)}(x^+, x'^+) = 0, \quad S^{(1/2)}(x^-, x'^-) = 0.$$

5. Anticommutateurs des champs des neutrinos.

Le champ neutrinique ψ vérifiant (3-1), admet l'anticommutateur :

$$(5-1) \quad [\psi(x), \overline{\psi(x')}]_+ = \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x, x')$$

d'où l'on déduit pour son conjugué de charge

$$(5-2) \quad [C_x \psi(x), \overline{C_{x'} \psi(x')}]_+ = \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x, x').$$

Le premier membre de (5-1) peut s'écrire :

$$[\psi_+(x), \overline{\psi_+(x')}]_+ + [\psi_-(x), \overline{\psi_-(x')}]_+ + [\psi_+(x), \overline{\psi_-(x')}]_+ + [\psi_-(x), \overline{\psi_+(x')}]_+$$

où les quatre termes sont de types purs en x et x' respectivement $+-, -+, ++, --$. Or

$$S^{(1/2)}(x, x') = S^{(1/2)}(x^+, x'^-) + S^{(1/2)}(x^-, x'^+).$$

Il en résulte par décomposition de (5-1) selon les types purs :

$$(5-3) \quad \begin{cases} [\psi_+(x), \bar{\psi}_+(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x^+, x'^-) \\ [\psi_-(x), \bar{\psi}_-(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x^-, x'^+) \end{cases}$$

et

$$(5-4) \quad [\psi_+(x), \bar{\psi}_-(x')]_+ = 0 \quad [\psi_-(x), \bar{\psi}_+(x')]_+ = 0.$$

Les deux champs ψ_+ et ψ_- indépendants que nous avons obtenus, vérifiant l'équation de Dirac, admettent donc les anticommutateurs (5-3).

Les conjugués de charge $C(\psi_+)$ et $C(\psi_-)$ de ψ_+ et ψ_- sont reliés aux parties positive et négative du conjugué de charge $C\psi$ de ψ par les relations :

$$C(\psi_+) = C(\psi)_-, \quad C(\psi_-) = (C\psi)_+.$$

De (5-2) on déduit par décomposition :

$$\begin{aligned} [(C_x\psi)_+(x), (\overline{C_x\psi})_+(x')]_+ &= \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x^+, x'^-), \\ [(C_x\psi)_-(x), (\overline{C_x\psi})_-(x')]_+ &= \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x^-, x'^+). \end{aligned}$$

On en déduit

$$(5-5) \quad \begin{cases} [C_x \{ \psi_+(x) \}, \overline{C_{x'} \{ \psi_+(x') \}}]_+ = \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x^-, x'^+) \\ [C_x \{ \psi_-(x) \}, \overline{C_{x'} \{ \psi_-(x') \}}]_+ = \frac{1}{i} S^{(1/2)}(x^+, x'^-). \end{cases}$$

Nous nous trouvons en présence de quatre champs, se correspondant deux à deux par conjugaison de charge, et qui décrivent des particules que nous notons :

$$\begin{aligned} \psi_+ : \nu_e & \quad C(\psi_+) = (C\psi)_- : \bar{\nu}_e \\ \psi_- : \nu_\mu & \quad C(\psi_-) = (C\psi)_+ : \nu_\mu. \end{aligned}$$

Les particules ν_e et ν_μ sont des neutrinos, les particules $\bar{\nu}_e$ et $\bar{\nu}_\mu$ des *anti-neutrinos*. ν_e désigne le neutrino couplé à l'électron, ν_μ le neutrino couplé au muon.

CHAPITRE IV

LA FUSION

PREMIÈRE PARTIE

NEUTRINOS

ET CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE SINGULIER ⁽¹⁾1. Le champ électromagnétique singulier ⁽²⁾.

a) *Le champ électromagnétique singulier réel.*

Soit un 2-tenseur antisymétrique réel de composantes $F_{\alpha\beta}$. A toute 2-forme F on associe deux invariants : le produit scalaire de F par elle-même, et par la forme $*F$ adjointe de F . Une 2-forme F est dite singulière si ces deux invariants sont nuls, c'est-à-dire si :

$$(1-1) \quad F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0, \quad F_{\alpha\beta}*F^{\alpha\beta} = 0$$

A une 2-forme singulière on associe un vecteur isotrope l défini par :

$$(1-2) \quad F_{\alpha\beta}l^\alpha = 0, \quad *F_{\alpha\beta}l^\beta = 0.$$

Si une 2-forme singulière est soumise aux équations de Maxwell dans le vide

$$(1-3) \quad \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\alpha *F^{\alpha\beta} = 0,$$

elle définit le *champ électromagnétique singulier dans le vide*.

Nous notons respectivement d et δ les opérateurs différentiation extérieure et codifférentiation sur les formes. Les équations (1-3) peuvent s'écrire

$$(1-4) \quad dF = 0, \quad \delta F = 0.$$

Rappelons que les *trajectoires du vecteur l associé à un champ électromagnétique singulier sont géodésiques de longueur nulle dans la variété V_4* , et que le champ électromagnétique singulier peut être interprété comme décrivant

⁽¹⁾ Les résultats essentiels de cette partie sont l'objet d'une note aux comptes rendus, F. Moret-Bailly [J].

⁽²⁾ Voir L. Mariot [J].

un « fluide de photons », le vecteur l étant le vecteur flux d'énergie de Poynting. Un tel champ engendre une radiation électromagnétique au sens de A. Lichnerowicz ⁽³⁾.

b) *Le champ électromagnétique singulier complexe.*

En chaque point de V_4 on peut associer à l'espace vectoriel tangent T_x , l'espace vectoriel complexifié T_x^c . Soit $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ un tenseur antisymétrique complexe. $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + if_{\alpha\beta}$$

$F_{\alpha\beta}$ et $f_{\alpha\beta}$ étant les composantes de deux tenseurs réels. La définition du tenseur adjoint d'un tenseur antisymétrique réel s'étend naturellement à $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ et on voit que :

$$(1-5) \quad *\mathcal{F}_{\alpha\beta} = *F_{\alpha\beta} + i*f_{\alpha\beta}.$$

Nous appellerons tenseur *self-adjoint* un tenseur antisymétrique $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ tel que

$$(1-6) \quad *\mathcal{D}_{\alpha\beta} = i\mathcal{D}_{\alpha\beta}$$

et tenseur *anti-self-adjoint*, un tenseur antisymétrique complexe $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ tel que

$$(1-7) \quad *\mathcal{G}^{\alpha\beta} = -i\mathcal{G}^{\alpha\beta}.$$

DÉFINITION. — Le tenseur antisymétrique complexe $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ sera dit *tenseur électromagnétique singulier complexe* si :

$$1^\circ \mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad \mathcal{F}_{\alpha\beta}*F^{\alpha\beta} = 0$$

2° La partie réelle $F_{\alpha\beta}$ de $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ est singulière.

3° Les composantes $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ satisfont les équations de Maxwell

$$\nabla_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\alpha *\mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0.$$

c'est-à-dire

$$\delta\mathcal{F} = 0, \quad d\mathcal{F} = 0.$$

En outre si $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ est un tenseur self-adjoint ou anti-self-adjoint, le champ électromagnétique singulier est *pur*. Il est dit *polarisé circulairement à droite* (resp. *à gauche*) si $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ est self-adjoint (resp. anti-self-adjoint).

La notion de cas pur est en accord avec les deux états de spin $s = \pm 1$ du photon.

Nous remarquerons que, comme en physique classique, la partie imaginaire $f_{\alpha\beta}$ de $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ n'a aucune signification physique, mais que pour mettre en évidence les propriétés de la partie réelle $F_{\alpha\beta}$ de $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ il est plus simple d'étudier d'abord le tenseur complexe.

(3) Voir A. Lichnerowicz [3].

2. Fusion algébrique de deux champs de 1-spineurs décrivant un neutrino et son antiparticule.

Considérons par exemple le 1-spineur ψ_+ associé à ν_e et le 1-spineur $\mathcal{C}\psi_+$ associé à $\bar{\nu}_e$.

a) *Construction d'un 2-spineur Φ de type (1-1).*

Par produit tensoriel d'un 1-spineur contravariant par un 1-spineur covariant, on obtient un 2-spineur de type (1-1). Soit Φ le 2-spineur ainsi construit à partir de ψ_+ et de $\overline{\mathcal{C}\psi_+}$

$$(2-1) \quad \Phi = \psi_+ \otimes \overline{\mathcal{C}\psi_+}.$$

DÉFINITION. — *La fusion des particules représentées par les spineurs ψ_+ et $\mathcal{C}\psi_+$ s'exprime mathématiquement par le produit tensoriel $\Phi = \psi_+ \otimes \overline{\mathcal{C}\psi_+}$. Si dans le système de matrices de Dirac standard le champ neutrinique ψ a pour composantes (ψ^a) , ψ_+ , $\mathcal{C}\psi_+$, $\overline{\mathcal{C}\psi_+}$ ont respectivement pour composantes ⁽⁴⁾ :*

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}\psi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\psi^{2*} \\ \psi^{1*} \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathcal{C}\psi_+} = (-\psi^2, \psi^1 \mid 0, 0).$$

L'orientation totale ϵ a été choisie arbitrairement égale à 1. Il en résulte que Φ s'écrit explicitement

$$(2-2) \quad \Phi = \left(\begin{array}{cc|cc} -\psi^1\psi^2 & (\psi^1)^2 & 0 & 0 \\ -(\psi^2)^2 & \psi^1\psi^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

b) *Le 2-spineur Φ et la 2-forme \mathcal{F} associée.*

Le module des 2-spineurs sur l'anneau des fonctions à valeurs complexes de V_4 et l'algèbre extérieure des formes à valeurs complexes de V_4 sont isomorphes en tant que modules. Donc Φ admet une expression unique de la forme

$$(2-3) \quad \Phi = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \gamma^{p_1} \dots \gamma^{p_p} \alpha_{p_1 \dots p_p}^{(p)}$$

où les $\alpha^{(p)}$ sont des p -formes complexes.

⁽⁴⁾ Voir formule (I, 3-7) et chapitre premier : § 2.

La relation (2-3) s'écrit aussi :

$$\Phi = I\alpha + \gamma^\rho \alpha_\rho + \frac{1}{2} \gamma^\rho \gamma^\sigma \alpha_{\rho\sigma} + \frac{1}{6} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \alpha_{\rho\sigma\tau} + \frac{1}{24} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\eta \alpha_{\rho\sigma\tau\eta}.$$

Des relations de commutation des γ on déduit

$$(2-4) \quad \Phi = I\alpha + \gamma^\rho \alpha_\rho + \gamma^\rho \gamma^\sigma \alpha_{\rho\sigma} + \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \alpha_{\rho\sigma\tau} + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \alpha_{0123}$$

avec $\rho < \sigma < \tau$.

Nous nous proposons de déterminer les coefficients α associés au 2-spineur Φ en fonction des composantes du 2-spineur Φ explicitées dans (2-2).

Les matrices γ^ρ standard et les produits de ces matrices sont à blocs diagonaux, ou anti-diagonaux nuls, c'est-à-dire respectivement de la forme :

$$\begin{aligned} \gamma^\rho &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right), & \gamma^\rho \gamma^\sigma &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \\ \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right), & \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Plus précisément ces matrices n'ont chacune que quatre éléments non nuls et sont de quatre types différents, ce qui permet de décomposer le système (2-4) de seize équations à seize inconnues en quatre systèmes de quatre équations ne comportant chacun que quatre inconnues. Nous allons successivement les résoudre. Ainsi les matrices

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right), & \gamma^3 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right), \\ \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), & \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

conduisent au système de quatre équations.

$$(2-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -i(\alpha_0 + \alpha_3) - (\alpha_{012} + \alpha_{123}) = 0 \\ i(-\alpha_0 + \alpha_3) + (\alpha_{012} - \alpha_{123}) = 0 \\ i(-\alpha_0 + \alpha_3) + (-\alpha_{012} + \alpha_{123}) = 0 \\ -i(\alpha_0 + \alpha_3) + (\alpha_{012} + \alpha_{123}) = 0. \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_0 - \alpha_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{012} + \alpha_{123} = 0 \\ \alpha_{012} - \alpha_{123} = 0. \end{cases}$$

Il a pour solution

$$\alpha_0 = \alpha_3 = \alpha_{012} = \alpha_{123} = 0.$$

On obtient un second système d'équations à partir des quatre matrices

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), & \gamma^2 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \\ \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), & \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \end{aligned}$$

soit le système :

$$(2-6) \quad \begin{cases} -i\alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_{013} - \alpha_{023} = 0 \\ -i\alpha_1 - \alpha_2 - i\alpha_{013} - \alpha_{023} = 0 \\ i\alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_{013} - \alpha_{023} = 0 \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - i\alpha_{013} - \alpha_{023} = 0, \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{013} = \alpha_{023} = 0.$$

On voit que la 1-forme et la 3-forme associées à Φ sont nulles.

De même, des éléments diagonaux des matrices suivantes

$$\begin{aligned} I &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), & \gamma^5 &= \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \gamma^0 \gamma^3 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), & \gamma^1 \gamma^2 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \end{aligned}$$

on déduit le système d'équations

$$(2-7) \quad \begin{cases} \alpha - i\alpha_{0123} + \alpha_{03} - i\alpha_{12} = -\psi^1\psi^2 \\ \alpha - i\alpha_{0123} - \alpha_{03} + i\alpha_{12} = \psi^1\psi^2 \\ \alpha + i\alpha_{0123} - \alpha_{03} - i\alpha_{12} = 0 \\ \alpha + i\alpha_{0123} + \alpha_{03} + i\alpha_{12} = 0. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha - i\alpha_{0123} = 0 \\ \alpha + i\alpha_{0123} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{03} + i\alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{03} - i\alpha_{12} = -\psi^1\psi^2 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\alpha = \alpha_{0123} = 0, \quad \begin{cases} \alpha_{03} = -\frac{1}{2}\psi^1\psi^2 \\ \alpha_{12} = -\frac{i}{2}\psi^1\psi^2. \end{cases}$$

La 4-forme et la 0-forme sont nulles. *Les formes sont donc nulles à l'exception de la 2-forme $\alpha_{\rho\sigma}$.*

Enfin des quatre matrices

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^1 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right), & \gamma^0\gamma^2 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \\ \gamma^1\gamma^3 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), & \gamma^2\gamma^3 &= i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

on déduit le quatrième système d'équations :

$$(2-8) \quad \begin{cases} \alpha_{01} + i\alpha_{02} - \alpha_{13} - i\alpha_{23} = (\psi^1)^2 \\ \alpha_{01} - i\alpha_{02} + \alpha_{13} - i\alpha_{23} = -(\psi^2)^2 \\ -\alpha_{01} - i\alpha_{02} - \alpha_{13} - i\alpha_{23} = 0 \\ -\alpha_{01} + i\alpha_{02} + \alpha_{13} - i\alpha_{23} = 0; \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \alpha_{01} + i\alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{01} - i\alpha_{23} = \frac{1}{2} [(\psi^1)^2 - (\psi^2)^2], \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{13} + i\alpha_{02} = 0 \\ \alpha_{13} - i\alpha_{02} = -\frac{1}{2} [(\psi^1)^2 + (\psi^2)^2] \end{cases}$$

qui permet de calculer les 4 derniers coefficients de la 2-forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{01} = \frac{1}{4} [(\psi^1)^2 - (\psi^2)^2] \\ \alpha_{23} = \frac{i}{4} [(\psi^1)^2 - (\psi^2)^2] \\ \alpha_{02} = -\frac{i}{4} [(\psi^1)^2 + (\psi^2)^2] \\ \alpha_{13} = -\frac{1}{4} [(\psi^1)^2 + (\psi^2)^2]. \end{array} \right.$$

Si on pose $\alpha_{\rho\sigma} = \mathcal{F}_{\rho\sigma}$, le 2-spineur Φ peut en résumé s'écrire

$$(2-9) \quad \Phi = \frac{1}{2} \gamma^\rho \gamma^\sigma \mathcal{F}_{\rho\sigma}$$

où la 2-forme $\mathcal{F}_{\rho\sigma}$ complexe, associée à Φ , a pour composantes :

$$(2-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_{10} = -\frac{1}{4} [(\psi^1)^2 - (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{20} = \frac{i}{4} [(\psi^1)^2 + (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{30} = \frac{1}{2} \psi^1 \psi^2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_{23} = \frac{i}{4} [(\psi^1)^2 - (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{31} = \frac{1}{4} [(\psi^1)^2 + (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{12} = -\frac{i}{2} \psi^1 \psi^2. \end{array} \right.$$

c) *Les propriétés algébriques de la 2-forme \mathcal{F} .*

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La 2-forme complexe $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ est singulière et pure. Plus précisément \mathcal{F} est polarisée circulairement à droite.*

Les composantes ${}^* \mathcal{F}^{\alpha\beta}$ du tenseur adjoint de \mathcal{F} sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^* \mathcal{F}^{23} = \mathcal{F}_{10} \\ {}^* \mathcal{F}^{31} = \mathcal{F}_{20} \\ {}^* \mathcal{F}^{12} = \mathcal{F}_{30}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^* \mathcal{F}^{10} = \mathcal{F}_{23} \\ {}^* \mathcal{F}^{20} = \mathcal{F}_{31} \\ {}^* \mathcal{F}^{30} = \mathcal{F}_{12}. \end{array} \right.$$

De (2-10) on déduit immédiatement les relations

$$(2-11) \quad \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0, \quad \mathcal{F}_{\alpha\beta} {}^* \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0,$$

et

$$(2-12) \quad {}^* \mathcal{F} = i \mathcal{F}.$$

D'autre part on remarque que

$$(2-13) \quad \mathcal{F}_{10}\mathcal{F}^{10} + \mathcal{F}_{20}\mathcal{F}^{20} + \mathcal{F}_{30}\mathcal{F}^{30} = 0.$$

Nous explicitons cette relation de la façon suivante :
si on pose

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + if_{\alpha\beta},$$

où $F_{\alpha\beta}$ et $f_{\alpha\beta}$ sont les composantes de tenseurs réels, on a :

$$*\mathcal{F}_{\alpha\beta} = -f_{\alpha\beta} + iF_{\alpha\beta},$$

et la relation (2-13) donne par identification

$$(2-14) \quad \begin{cases} F_{10}F^{10} + F_{20}F^{20} + F_{30}F^{30} - f_{10}f^{10} - f_{20}f^{20} - f_{30}f^{30} = 0 \\ F_{10}f^{10} + F_{20}f^{20} + F_{30}f^{30} = 0. \end{cases}$$

Nous savons que

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{23} = -i\mathcal{F}_{10} = f_{10} - iF_{10} \\ \mathcal{F}_{31} = -i\mathcal{F}_{20} = f_{20} - iF_{20} \\ \mathcal{F}_{12} = -i\mathcal{F}_{30} = f_{30} - iF_{30}. \end{cases}$$

On en déduit

$$F_{23} = f_{10}, \quad F_{31} = f_{20}, \quad F_{12} = f_{30}.$$

Il en résulte que (2-14) se traduit par

$$(2-15) \quad F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0, \quad F_{\alpha\beta}*\mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0.$$

Les équations (2-11), (2-15) et (2-12) démontrent le théorème énoncé.

3. Les équations de champ du 2-spineur Φ et de la 2-forme \mathcal{F} associée.

a) Opérateurs différentiels sur les 2-spineurs.

Nous rappelons que les opérateurs P et \bar{P} sur les 2-spineurs sont définis par :

$$P\Phi = \gamma^x \nabla_x \Phi, \quad \bar{P}\Phi = -\nabla_x \Phi \gamma^x.$$

Les opérateurs du second ordre P^2 et \bar{P}^2 sont identiques. On démontre que

$$P^2\Phi = \bar{P}^2\Phi = -\nabla^\rho \nabla_\rho \Phi + \frac{1}{4}R\Phi + \frac{1}{8}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu,$$

ce qui conduit à introduire pour laplacien Δ sur les 2-spineurs l'opérateur

$$\Delta = P^2 = \bar{P}^2.$$

En accord avec les considérations du chapitre II, § 3, on établit facilement les relations de commutation.

$$(3-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}P = \overline{P}\mathcal{A} \\ \mathcal{A}\Delta = \Delta\mathcal{A}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} CP = PC \\ C\Delta = \Delta C. \end{array} \right.$$

Supposons que Φ soit le 2-spineur (2-1)

$$\Phi = \psi_+ \otimes \overline{C}\overline{\psi}_+,$$

c'est-à-dire que Φ soit de la forme (2-9)

$$\Phi = \frac{1}{2} \gamma^\rho \gamma^\sigma \mathcal{F}_{\rho\sigma},$$

où $\mathcal{F}_{\rho\sigma}$ est la 2-forme associée à Φ , et cherchons à évaluer $P\Phi$ et $\overline{P}\Phi$ en termes tensoriels. Par définition de P on a

$$P\Phi = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma \nabla_\alpha \mathcal{F}_{\rho\sigma}.$$

Distinguons les termes où l'indice α ne prend aucune des valeurs ρ, σ et ceux où il prend l'une de ces valeurs

$$P\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \rho, \sigma} \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma \nabla_\alpha \mathcal{F}_{\rho\sigma} - \gamma^\rho \nabla_\rho \mathcal{F}_\sigma^\rho$$

En introduisant les opérateurs d et δ il vient

$$(3-2) \quad P\Phi = \frac{1}{6} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu (d\mathcal{F})_{\lambda\mu\nu} + \gamma^\sigma (\delta\mathcal{F})_\sigma.$$

Un calcul semblable sur $\overline{P}\Phi$ conduit à

$$(3-3) \quad \overline{P}\Phi = -\frac{1}{6} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu (d\mathcal{F})_{\lambda\mu\nu} + \gamma^\sigma (\delta\mathcal{F})_\sigma.$$

b) *Les équations de champ de Φ , et leurs expressions en termes tensoriels.*

Considérons le champ décrit par le 2-spineur Φ de type (1-1) résultant de la fusion de ν_e avec $\overline{\nu}_e$, ou d'une façon plus générale d'un neutrino avec son antiparticule. *Nous l'astreindrons à l'équation de champ*

$$(3-4) \quad P\Phi = 0.$$

Cette équation est celle de la théorie de Pétiau-Duffin-Kemmer pour un 2-spineur

de type (1-1) quelconque, dans laquelle nous avons annulé la masse m ⁽⁵⁾.

En multipliant les deux membres de (3-4) par P , on voit que de l'équation de champ (3-4), il résulte que Φ satisfait l'équation de Klein-Gordon sans masse

$$(3-5) \quad \Delta \Phi = 0.$$

En prenant l'adjoint de Dirac de (3-4) il vient, compte tenu de (3-1) :

$$P\mathcal{A}\Phi = 0$$

et de même en transformant (3-4) par conjugaison de charge il résulte

$$PC\psi = 0.$$

Ainsi l'adjoint de Dirac et le conjugué de charge de Φ vérifient l'équation de champ (3-4).

Considérons alors l'expression tensorielle du 2-spineur Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \gamma^\rho \gamma^\sigma \mathcal{F}_{\rho\sigma}.$$

En vertu de (3-2) l'équation de champ (3-4) peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{6} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu (d\mathcal{F})_{\lambda\mu\nu} + \gamma^\sigma (\delta\mathcal{F})_\sigma = 0.$$

Soit, en décomposant cette équation sur la base des 2-spineurs, constituée des seize produits de matrices γ^α

$$(3-6) \quad d\mathcal{F} = 0, \quad \delta\mathcal{F} = 0.$$

Les équations (3-6) sont les équations de Maxwell. La 2-forme complexe $\mathcal{F}_{\rho\sigma}$ singulière et pure décrit donc un champ électromagnétique singulier et polarisé circulairement à droite. La partie réelle F de cette 2-forme est singulière et vérifie $dF = 0$, $\delta F = 0$. Le procédé que nous venons d'exposer permet de réaliser la fusion suivante :

$$\nu_e \otimes \bar{\nu}_e \rightarrow \text{photon droit.}$$

On observera enfin que des équations (3-6) et de l'expression (3-3) on déduit que le 2-spineur Φ satisfait également l'équation

$$(3-7) \quad \bar{P}\Phi = 0.$$

⁽⁵⁾ En théorie de Pétiau-Duffin-Kemmer on utilise généralement l'équation $(P + \bar{P})\Phi = 2m\Phi$ avec masse qui, sans masse, est équivalente à (3-4).

c) *Vecteur courant et vecteur de Poynting.*

Considérons les vecteurs courants $J(\psi_+)$ et $J(C\psi_+)$ respectivement associés à ψ_+ et $C\psi_+$. Les composantes du vecteur courant $J(\psi)$ sont explicitées dans (II, 1-3). Nous supposons l'orientation temporelle ρ choisie arbitrairement égale à + 1. Nous constatons que ψ_+ et $C\psi_+$ ont le même vecteur courant isotrope que nous notons J_e et qui a pour composantes

$$(3-8) \quad \left\{ \begin{aligned} J_e^0 &= \psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*} \\ J_e^1 &= -(\psi^2\psi^{1*} + \psi^1\psi^{2*}) \\ J_e^2 &= i(\psi^1\psi^{2*} - \psi^2\psi^{1*}) \\ J_e^3 &= \psi^2\psi^{2*} - \psi^1\psi^{1*}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, cherchons explicitement le vecteur de Poynting isotrope associé à la forme \mathcal{F} singulière. Les composantes l^α sont définies à un facteur près par les relations :

$$(3-9) \quad F_{\alpha\beta}l^\beta = 0, \quad *F_{\alpha\beta}l^\beta = 0.$$

Rappelons que

$$\left\{ \begin{aligned} *F_{10} &= -F_{23} \\ *F_{20} &= -F_{31} \\ *F_{30} &= -F_{12}, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} *F_{23} &= F_{10} \\ *F_{31} &= F_{20} \\ *F_{12} &= F_{30}; \end{aligned} \right.$$

(3-9) peut donc s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} F_{01}l^1 + F_{02}l^2 + F_{03}l^3 &= 0 \\ F_{10}l^0 + F_{12}l^2 + F_{13}l^3 &= 0 \\ F_{20}l^0 + F_{21}l^1 + F_{23}l^3 &= 0 \\ F_{30}l^0 + F_{31}l^1 + F_{32}l^2 &= 0, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} F_{23}l^1 + F_{31}l^2 + F_{12}l^3 &= 0 \\ -F_{23}l^0 + F_{30}l^2 - F_{20}l^3 &= 0 \\ -F_{31}l^0 - F_{30}l^1 + F_{10}l^3 &= 0 \\ -F_{12}l^0 - F_{20}l^1 - F_{10}l^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

On en déduit

$$(3-10) \quad \left\{ \begin{aligned} l^1 &= F_{02}F_{12} - F_{03}F_{31} \\ l^2 &= F_{23}F_{03} - F_{12}F_{01} \\ l^3 &= F_{01}F_{31} - F_{02}F_{23} \\ l^0 &= \frac{F_{21}l^1 + F_{23}l^3}{F_{02}}. \end{aligned} \right.$$

Pour faire apparaître la partie réelle de $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ on est amené à poser :

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^1 &= a^1 + ib^1 \\ \psi^2 &= a^2 + ib^2 \end{aligned} \right.$$

où a^1, a^2, b^1, b^2 sont des quantités réelles.

Il en résulte :

$$(\psi^1)^2 = (a^1)^2 - (b^1)^2 + 2ia^1b^1,$$

$$(\psi^2)^2 = (a^2)^2 - (b^2)^2 + 2ia^2b^2,$$

$$\psi^1\psi^2 = a^1a^2 - b^1b^2 + i(a^1b^2 + b^1a^2).$$

Des expressions (2-10) de $\bar{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}$ il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{10} = -\frac{1}{4} [(a^1)^2 - (b^1)^2 - (a^2)^2 + (b^2)^2] \\ F_{20} = -\frac{1}{2} (a^1b^1 + a^2b^2) \\ F_{30} = \frac{1}{2} (a^1a^2 - b^1b^2) \\ F_{23} = -\frac{1}{2} (a^1b^1 - a^2b^2) \\ F_{31} = \frac{1}{4} [(a^1)^2 - (b^1)^2 + (a^2)^2 - (b^2)^2] \\ F_{12} = \frac{1}{2} (a^1b^2 + b^1a^2). \end{array} \right.$$

D'un calcul simple mais fastidieux qui consiste à reporter ces valeurs de $F_{\alpha\beta}$ dans (3-10) il résulte que

$$l^1 = \frac{1}{16} [|\psi^1|^2 + |\psi^2|^2](\psi^1\psi^{2*} + \psi^2\psi^{1*}),$$

$$l^2 = \frac{i}{16} [\quad \gg \quad](\psi^2\psi^{1*} - \psi^1\psi^{2*}),$$

$$l^3 = \frac{1}{16} [\quad \gg \quad](\psi^1\psi^{1*} - \psi^2\psi^{2*}),$$

$$l^0 = -\frac{1}{16} [\quad \gg \quad](\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}).$$

Le vecteur l est colinéaire au vecteur J_e .

Le vecteur l étant défini à un facteur arbitraire près, nous voyons que l peut être choisi égal à J_e .

Nous savons que les trajectoires de l dans le variété V_4 sont des géodésiques de longueur nulle. Or pour un champ neutrinique astreint aux équations de Dirac sans masse, les trajectoires du vecteur courant ne sont pas des

géodésiques isotropes ⁽⁶⁾. Nous observons qu'elles deviennent des géodésiques de longueur nulle, quand on a choisi pour équations de champ les équations de fusion (3-4).

4. Les différentes fusions possibles entre un neutrino et son antiparticule.

Nous venons d'étudier en détail la fusion de ν_e avec $\bar{\nu}_e$, c'est-à-dire le champ décrit par le 2-spineur $\Phi = \psi_+ \otimes \overline{C\psi_+}$. Considérons par exemple maintenant le 2-spineur $\Phi = \psi_- \otimes \overline{C\psi_-}$ que nous interprétons comme le résultat de la fusion de $\bar{\nu}_\mu$ avec ν_μ . Une étude algébrique analogue à celle du paragraphe 2 conduit aux résultats suivants. Si le champ ψ a pour composantes (ψ^a) , ψ_- , $C\psi_-$ et $\mathcal{A}C\psi_-$ ont respectivement pour composantes

$$\psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix}, \quad C\psi_- = \begin{pmatrix} \psi^{4*} \\ \psi^{3*} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{C\psi_-} = (0, 0, \psi^4, -\psi^3)$$

et

$$\Phi = \psi_- \otimes \overline{C\psi_-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \psi^3\psi^4 & -(\psi^3)^2 \\ 0 & 0 & (\psi^4)^2 & -\psi^3\psi^4 \end{pmatrix}$$

La 2-forme \mathcal{F} associée à Φ s'écrit

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{10} = -\frac{1}{4} [(\psi^3)^2 - (\psi^4)^2] \\ \mathcal{F}_{20} = \frac{i}{4} [(\psi^3)^2 + (\psi^4)^2] \\ \mathcal{F}_{30} = \frac{1}{2} \psi^3\psi^4, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{23} = -\frac{i}{4} [(\psi^3)^2 - (\psi^4)^2] \\ \mathcal{F}_{31} = -\frac{1}{4} [(\psi^4)^2 + (\psi^3)^2] \\ \mathcal{F}_{12} = \frac{i}{2} \psi^3\psi^4. \end{cases}$$

Cette 2-forme complexe est encore singulière et pure mais à la place de (2-12) nous avons la relation $*\mathcal{F} = -i\mathcal{F}$ si bien que le champ est ici polarisé circulairement à gauche.

L'étude des équations de champ est en tout point semblable à celle détaillée précédemment. La 2-forme obtenue a les propriétés d'un champ

⁽⁶⁾ En effet les équations de Dirac $P\psi_+ = 0$ n'entraînent pas $J^\alpha \nabla_\alpha J^\beta = kJ^\beta$ où k est une constante.

électromagnétique singulier polarisé circulairement à gauche. Nous avons réalisé la fusion

$$\bar{\nu}_\mu \otimes \nu_\mu \rightarrow \text{photon « gauche »}.$$

Il est clair que deux autres cas sont encore possibles, ils consistent à intervertir l'ordre des particules dans la fusion. On voit facilement que le 2-spineur $\Phi = C\psi_+ \otimes \bar{\psi}_+$, résultat de la fusion de $\bar{\nu}_e$ avec ν_e conduit à un photon « gauche » et que le 2-spineur $\Phi = C\psi_- \otimes \bar{\psi}_-$ résultat de la fusion de ν_μ avec $\bar{\nu}_\mu$ conduit à un photon « droit ».

En résumé le champ \mathcal{F} résultant de la fusion dans l'ordre, *d'un neutrino avec l'antineutrino correspondant* est un champ électromagnétique singulier polarisé circulairement à droite tandis que le champ \mathcal{F} résultant de la fusion *d'un antineutrino avec le neutrino correspondant* est un champ électromagnétique singulier polarisé circulairement à gauche.

5. Retour sur le problème algébrique de la fusion.

Rappelons que tout 2-spineur Φ admet une expression et une seule de la forme

$$\Phi = \alpha I + \gamma^\rho \alpha_\rho + \gamma^\rho \gamma^\sigma \alpha_{\rho\sigma} + \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \alpha_{\rho\sigma\tau} + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \alpha_{0123}$$

où $\rho < \sigma < \tau$. Nous venons d'étudier les formes associées à des 2-spineurs Φ particuliers. Nous nous posons ici le problème inverse suivant : *quelle doit être la forme du 2-spineur Φ pour que les formes associées soient telles que seule la 2-forme soit non nulle ?*

Nous notons Φ_b^a les composantes de Φ . Analysons les quatre systèmes d'équations (2-5) (2-6) (2-7) (2-8) dans lesquels les seconds membres sont remplacés par les composantes d'un 2-spineur Φ arbitraire. Dans les équations (2-5) l'annulation de la 1-forme et de la 3-forme entraînent

$$\Phi_3^1 = \Phi_4^2 = \Phi_1^3 = \Phi_2^4 = 0.$$

Des équations (2-6) il résulte que

$$\Phi_4^1 = \Phi_3^2 = \Phi_2^3 = \Phi_1^4 = 0 ;$$

Φ doit donc avoir les blocs antidiagonaux nuls.

Écrivons les équations (2-7) avec second membre et en annulant la 0-forme et la 4-forme. On a :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{03} - i\alpha_{12} &= \Phi_1^1 \\ -\alpha_{03} + i\alpha_{12} &= \Phi_2^2 \\ -\alpha_{03} - i\alpha_{12} &= \Phi_3^3 \\ \alpha_{03} + i\alpha_{12} &= \Phi_4^4, \end{aligned} \right\}$$

soit

$$(5-1) \quad \begin{cases} \Phi_2^2 = -\Phi_1^1 \\ \Phi_3^3 = -\Phi_4^4 \end{cases}$$

et

$$(5-2) \quad \begin{cases} \alpha_{03} = \frac{1}{2}(\Phi_1^1 + \Phi_4^4) \\ \alpha_{12} = \frac{i}{2}(\Phi_1^1 - \Phi_4^4). \end{cases}$$

Enfin les équations (2-8) avec second membre permettent de déterminer les autres composantes de la 2-forme $\alpha_{\rho\sigma}$. Il vient :

$$\begin{cases} \alpha_{01} + i\alpha_{02} - \alpha_{13} - i\alpha_{23} = \Phi_2^1 \\ \alpha_{01} - i\alpha_{02} + \alpha_{13} - i\alpha_{23} = \Phi_1^2 \\ -\alpha_{01} - i\alpha_{02} - \alpha_{13} - i\alpha_{23} = \Phi_4^3 \\ -\alpha_{01} + i\alpha_{02} + \alpha_{13} - i\alpha_{23} = \Phi_3^4 \end{cases}$$

soit

$$(5-3) \quad \begin{cases} \alpha_{01} = \frac{1}{4}(\Phi_2^1 + \Phi_1^2 - \Phi_4^3 - \Phi_3^4) \\ \alpha_{23} = \frac{i}{4}(\Phi_4^3 + \Phi_3^4 + \Phi_2^1 + \Phi_1^2) \\ \alpha_{02} = \frac{i}{4}(\Phi_4^3 - \Phi_3^4 + \Phi_1^2 - \Phi_2^1) \\ \alpha_{13} = \frac{1}{4}(\Phi_3^4 - \Phi_4^3 + \Phi_1^2 - \Phi_2^1). \end{cases}$$

Le spineur Φ doit donc être de la forme

$$\Phi = \left(\begin{array}{cc|cc} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & 0 & 0 \\ \Phi_1^2 & -\Phi_1^1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\Phi_4^4 & \Phi_4^3 \\ 0 & 0 & \Phi_3^4 & \Phi_4^4 \end{array} \right)$$

où apparaissent 6 fonctions complexes indépendantes.

Peut-on alors déterminer un spineur contravariant $\psi = (\psi^a)$ et un spineur covariant $\varphi = (\varphi_b)$ tels que le 2-spineur précédent soit le produit tensoriel

$\psi \otimes \varphi = (\psi^a \varphi_b)$? Pour cela il faut et il suffit que ψ^a et φ_b vérifient le système d'équations

$$(5-4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \psi^1 \varphi_3 = 0 & \psi^3 \varphi_1 = 0 \\ \psi^1 \varphi_4 = 0 & \psi^3 \varphi_2 = 0 \\ \psi^2 \varphi_3 = 0 & \psi^4 \varphi_1 = 0 \\ \psi^2 \varphi_4 = 0 & \psi^4 \varphi_2 = 0 \\ \psi^1 \varphi_1 = -\psi^2 \varphi_2 & \\ \psi^3 \varphi_4 = -\psi^3 \varphi_3. & \end{array} \right.$$

Posons :

$$(5-5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_2 = p\psi^1 & \varphi_4 = q\psi^3 \\ \varphi_1 = -p\psi^2 & \varphi_3 = -q\psi^4. \end{array} \right.$$

Les composantes ψ^a doivent satisfaire le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^1 \psi^4 = 0 \\ \psi^1 \psi^3 = 0 \\ \psi^2 \psi^4 = 0 \\ \psi^2 \psi^3 = 0 \end{array} \right.$$

qui admet pour solution

$$\psi^1 = \psi^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \psi^3 = \psi^4 = 0;$$

p et q sont arbitraires et peuvent être choisis égaux à 1.

Si $\psi^1 = \psi^2 = 0$ on a simultanément

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = -q\psi^4, \quad \varphi_4 = \psi^3;$$

ψ est un spineur de type positif et $\varphi = \overline{C\psi}$. Cette solution correspond à la fusion d'un neutrino avec l'antineutrino correspondant. Si $\psi^3 = \psi^4 = 0$ on a simultanément

$$\varphi_3 = \varphi_4 = 0, \quad \varphi_1 = -\psi^2, \quad \varphi_2 = \psi^1;$$

ψ est un spineur de type négatif et $\varphi = \overline{C\psi}$. La solution correspond à la fusion d'un antineutrino avec le neutrino correspondant.

Donc en dehors des cas de fusion étudiés, il est impossible de construire, par produit tensoriel d'un spineur contravariant avec un spineur covariant, un 2-spineur tel que les formes associées soient toutes nulles à l'exception de la 2-forme qui est alors singulière et pure.

DEUXIÈME PARTIE

CHAMPS SINGULIERS PURS DE SPIN 1 ET DE SPIN 2 ⁽¹⁾

1. Définition d'un champ de spin 2.

Rappelons la définition d'un *champ gravitationnel pur ou champ de spin 2* ⁽²⁾. C'est un champ de tenseur $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ jouissant des propriétés suivantes :

(P₁) : Il a les propriétés de symétrie du tenseur de courbure

$$(1-1) \quad H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = -H_{\beta\alpha,\lambda\mu} = -H_{\alpha\beta,\mu\lambda} = H_{\lambda\mu,\alpha\beta}.$$

(P₂) : Il satisfait l'identité :

$$(1-2) \quad \sum_{\alpha\beta\lambda} H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0,$$

où S désigne la sommation après permutation circulaire sur les indices

(P₃) : En outre, il existe un vecteur l tel que

$$(1-3) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha\beta\gamma} l_\alpha H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0 \\ l^\alpha H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \end{cases}$$

(P₄) : Le tenseur contracté $H_{\alpha\beta} = g^{\rho\sigma} H_{\alpha\rho,\beta\sigma}$ est nul

$$(1-4) \quad H_{\alpha\beta} = 0.$$

(P₅) : Le champ H est astreint à satisfaire les « équations gravitationnelles d'ordre supérieur » ⁽³⁾

$$(1-5) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0 \\ \nabla_\alpha H^\alpha_{\beta,\lambda\mu} = 0. \end{cases}$$

2. Fusion algébrique

de deux champs électromagnétiques purs singuliers identiques.

a) Construction d'un 4-spineur Θ à partir du 2-spineur Φ .

Par produit tensoriel d'un champ de spineurs de types purs, attaché à un neutrino, et du champ de spineurs associé à l'antiparticule correspondante nous avons construit un 2-spineur Φ et une 2-forme complexe \mathcal{F} décrivant

⁽¹⁾ Les résultats de cette partie sont l'objet d'une note aux comptes rendus, F. Moret-Bailly [2].

⁽²⁾ Voir A. Lichnerowicz [6] et [3].

⁽³⁾ Voir Lichnerowicz [2], p. 47 et [3].

un champ électromagnétique singulier pur, c'est-à-dire un champ singulier pur de spin 1. Nous nous proposons alors de réitérer ce procédé de fusion. Si on admet que le photon est sa propre antiparticule, nous sommes amenée à examiner le produit tensoriel d'un 2-spineur Φ associé à un photon, par lui-même.

Soit Θ le 4-spineur ainsi défini :

$$\Theta = \Phi \otimes \Phi.$$

Il a pour composantes

$$\Theta^a{}_b{}^c{}_d = \Phi^a{}_b \Phi^c{}_d.$$

b) *Le 4-spineur Θ et le tenseur \mathcal{H} associé.*

Sachant que $\Phi = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta \mathcal{F}_{\alpha\beta}$, Θ s'exprime en fonction de la 2-forme \mathcal{F} .

Il vient :

$$\Theta = \frac{1}{4} \gamma^\alpha \gamma^\beta \mathcal{F}_{\alpha\beta} \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \mathcal{F}_{\lambda\mu}$$

soit

$$(2-1) \quad \Theta = \frac{1}{4} \gamma^\alpha \gamma^\beta \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\lambda\mu}.$$

Posons :

$$(2-2) \quad \mathcal{H}_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\lambda\mu} ;$$

\mathcal{H} est un tenseur complexe, associé canoniquement à Θ . Nous nous proposons de faire l'étude algébrique et différentielle du tenseur $\mathcal{H}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$.

c) *Les propriétés algébriques du tenseur \mathcal{H} .*

— \mathcal{F} est une 2-forme, \mathcal{H} est donc une double 2-forme et les propriétés de symétrie (P_1) sont évidentes pour le tenseur \mathcal{H} complexe. Soit H la partie réelle de \mathcal{H} ; les propriétés (P_1) sont également vérifiées par H .

— Calculons $S_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_{\alpha\beta,\gamma\delta}$.

Supposons les 4 indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distincts, on a :

$$(2-3) \quad \begin{aligned} S_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= \mathcal{H}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \mathcal{H}_{\beta\gamma,\alpha\delta} + \mathcal{H}_{\gamma\alpha,\beta\delta} \\ &= \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\gamma\delta} + \mathcal{F}_{\beta\gamma} \mathcal{F}_{\alpha\delta} + \mathcal{F}_{\gamma\alpha} \mathcal{F}_{\beta\delta} ; \end{aligned}$$

δ peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 et on voit facilement que les 4 expressions correspondantes (2-3) peuvent s'écrire

$$S_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \mathcal{F}_{\alpha\beta} {}^* \mathcal{F}^{\alpha\beta} ;$$

la 2-forme \mathcal{F} étant singulière il vient

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0 ;$$

parmi les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 2 indices peuvent être répétés; nous analysons par exemple l'expression

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \mathcal{H}_{\alpha\beta,\gamma\alpha} + \mathcal{H}_{\beta\gamma,\alpha\alpha} + \mathcal{H}_{\gamma\alpha,\beta\alpha}.$$

Elle est nulle compte tenu des propriétés de symétrie (P₁).

Ainsi le tenseur \mathcal{H} , et a fortiori sa partie réelle, vérifient la propriété (P₂) qui est une conséquence de la *singularité* de la 2-forme \mathcal{F} .

— On démontre, en tenant compte de la relation fondamentale $*\mathcal{F} = i\mathcal{F}$ que le tenseur contracté $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ est nul. La propriété (P₄) est assurée du fait que \mathcal{F} est une forme *pure*. Pour le démontrer il suffit d'explicitier les différentes composantes $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ en fonction des composantes $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ de la 2-forme \mathcal{F} .

— Dans le but d'établir l'existence d'un vecteur l vérifiant les propriétés (P₃) posons :

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + if_{\alpha\beta}.$$

La partie réelle de $\mathcal{H}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ s'écrit explicitement

$$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = F_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu} - f_{\alpha\beta}f_{\lambda\mu}.$$

Il suffit donc de trouver un vecteur l tel que

$$(2-4) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha} F_{\beta\gamma} = 0 \\ l^{\alpha} F_{\alpha\beta} = 0, \end{cases}$$

et

$$(2-5) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha} f_{\beta\gamma} = 0 \\ l^{\alpha} f_{\alpha\beta} = 0 ; \end{cases}$$

$F_{\alpha\beta}$ étant une forme singulière, il existe un vecteur l défini par le premier groupe de relations (2-4).

Le second système (2-5) est alors une conséquence de la relation $*\mathcal{F} = i\mathcal{F}$. Le vecteur l est le vecteur de Poynting associé au champ électromagnétique singulier.

En résumé le tenseur $\mathcal{H}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ a les propriétés algébriques (P₁) (P₂) (P₃) (P₄) exigées pour un champ gravitationnel pur.

3. Les équations de champ du 4-spineur Θ et du tenseur \mathcal{K} associé.

a) *Opérateurs différentiels sur les 4-spineurs.*

L'opérateur différentiel P sur les 4-spineurs est défini par

$$(3-1) \quad P\Theta = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \Theta$$

ou, en explicitant les indices

$$(P\Theta)^{a \ c}_{b \ d} = \gamma^{za} \nabla_z \Theta^{m \ c}_{b \ d}.$$

Supposons Θ de la forme

$$\Phi \otimes \Phi = \frac{1}{4} \gamma^\rho \gamma^\sigma \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \mathcal{K}_{\rho\sigma\lambda\mu}$$

et évaluons $P\Theta$ dans ce cas. Il vient

$$P\Theta = \frac{1}{4} \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\rho\sigma\lambda\mu}.$$

Distinguons les termes où l'indice α ne prend aucune des valeurs ρ, σ de ceux où il prend l'une de ces valeurs

$$P\Theta = \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \rho, \sigma} \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\rho\sigma\lambda\mu} - \frac{1}{2} \gamma^\sigma \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \nabla_\rho \mathcal{K}_{\sigma\lambda\mu}^{\rho}$$

soit en introduisant le tenseur d'antisymétrisation de Kronecker :

$$(3-2) \quad P\Theta = \frac{1}{24} \gamma^{\tau_0} \gamma^{\tau_1} \gamma^{\tau_2} \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \left(\varepsilon_{\tau_0 \tau_1 \tau_2}^{\alpha \ \rho \ \sigma} \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\rho\sigma\lambda\mu} \right) - \frac{1}{2} \gamma^\sigma \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \nabla_\rho \mathcal{K}_{\sigma\lambda\mu}^{\rho}.$$

b) *Les équations de champ de Θ et leurs expressions en termes tensoriels.*

Nous astreindrons le 4-spineur Θ , résultat de la fusion algébrique de deux photons identiques, à satisfaire l'équation de fusion

$$(3-3) \quad P\Theta = 0.$$

Considérons l'espace des 2-spineurs Φ . L'ensemble des seize matrices :

$$\{ \mathbf{I}, \gamma^\rho, \gamma^\rho \gamma^\sigma, \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau, \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \}$$

où $\rho < \sigma < \tau$ constitue une base de cet espace que nous noterons $\{ \gamma^I \}$ ($\mathbf{I} = 1, \dots, 16$). A partir de cette base on peut construire une base de l'espace des 4-spineurs Θ soit $\{ \gamma^I \otimes \gamma^J \}$. Alors l'équation de fusion (3-3) qui grâce à (3-2) s'écrit

$$\frac{1}{24} \gamma^{\tau_0} \gamma^{\tau_1} \gamma^{\tau_2} \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \left(\varepsilon_{\tau_0 \tau_1 \tau_2}^{\alpha \ \rho \ \sigma} \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\rho\sigma\lambda\mu} \right) - \frac{1}{2} \gamma^\sigma \otimes \gamma^\lambda \gamma^\mu \nabla_\rho \mathcal{K}_{\sigma\lambda\mu}^{\rho} = 0$$

peut être décomposée sur la base $\{\gamma^i \otimes \gamma^j\}$. On voit alors que l'équation de fusion est équivalente à

$$(3-4) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\tau_0 \tau_1 \tau_2}^{\alpha \rho \sigma} \nabla_{\alpha} \mathcal{H}_{\rho\sigma, \lambda\mu} = 0 \\ \nabla_{\rho} \mathcal{H}_{\sigma, \lambda\mu}^{\rho} = 0. \end{cases}$$

Les équations (3-4) sont les équations gravitationnelles d'ordre supérieur. Elles sont évidemment vérifiées aussi par la partie réelle H de \mathcal{H} . En définitive, par fusion de deux photons identiques nous avons construit un champ de 4-spineurs Θ , et la double 2-forme \mathcal{H} complexe associée. L'étude algébrique et différentielle de \mathcal{H} et de sa partie réelle en particulier, a permis de l'identifier à un *champ gravitationnel pur* ou *champ de spin 2*.

4. Fusion d'un photon droit et d'un photon gauche.

Soient Φ^d et Φ^g les 2-spineurs définis de la façon suivante :

$$\Phi^d = \psi_+ \otimes \overline{C\psi_+}$$

$$\Phi^g = C\psi_+ \otimes \overline{\psi_+}$$

Nous avons explicitement pour Φ^d , Φ^g et leurs 2-formes associées \mathcal{F}^d et \mathcal{F}^g

$$\Phi^d = \begin{pmatrix} -\psi^1\psi^2 & (\psi^1)^2 & 0 & 0 \\ -(\psi^2)^2 & \psi^1\psi^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\psi^{2*}\psi^{1*} & -(\psi^{2*})^2 \\ 0 & 0 & (\psi^{1*})^2 & \psi^{1*}\psi^{2*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{10}^d = -\frac{1}{4} [(\psi^1)^2 - (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{20}^d = +\frac{i}{4} [(\psi^1)^2 + (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{30}^d = \frac{1}{2} \psi^1\psi^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{23}^d = \frac{i}{4} [(\psi^1)^2 - (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{31}^d = \frac{1}{4} [(\psi^1)^2 + (\psi^2)^2] \\ \mathcal{F}_{12}^d = -\frac{i}{2} \psi^1\psi^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{10}^g = \frac{1}{4} [(\psi^{1*})^2 - (\psi^{2*})^2] \\ \mathcal{F}_{20}^g = \frac{i}{4} [(\psi^{1*})^2 + (\psi^{2*})^2] \\ \mathcal{F}_{30}^g = -\frac{1}{2} \psi^{1*}\psi^{2*}. \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{23}^g = \frac{i}{4} [(\psi^{1*})^2 - (\psi^{2*})^2] \\ \mathcal{F}_{31}^g = -\frac{1}{4} [(\psi^{1*})^2 + (\psi^{2*})^2] \\ \mathcal{F}_{12}^g = -\frac{i}{2} \psi^{1*}\psi^{2*}. \end{cases}$$

$\overset{d}{\mathcal{F}}$ étant polarisée à droite et $\overset{g}{\mathcal{F}}$ à gauche on a

$$(4-1) \quad * \overset{d}{\mathcal{F}} = i \overset{d}{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad * \overset{g}{\mathcal{F}} = -i \overset{g}{\mathcal{F}},$$

mais en outre $\overset{d}{\mathcal{F}}$ et $\overset{g}{\mathcal{F}}$ sont liées par la relation

$$(4-2) \quad \overset{d}{\mathcal{F}} * = - \overset{g}{\mathcal{F}}$$

Considérons maintenant le 4-spineur Θ défini par

$$(4-3) \quad \Theta = \overset{d}{\Phi} \otimes \overset{g}{\Phi}.$$

Le tenseur \mathcal{K} associé s'écrit :

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \overset{d}{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} \overset{g}{\mathcal{F}}_{\lambda\mu}$$

Pour simplifier les notations posons $\mathcal{F} = \overset{d}{\mathcal{F}}$; on remarque que \mathcal{K} a pour expression

$$(4-4) \quad \mathcal{K}_{\alpha\beta, \lambda\mu} = - \overset{d}{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} \overset{g}{\mathcal{F}}_{\lambda\mu}^*$$

L'étude différentielle de ce tenseur est en tout point semblable à celle que nous avons faite précédemment ; elle conduit aux équations gravitationnelles d'ordre supérieur. L'étude algébrique par contre est sensiblement modifiée, en particulier en ce qui concerne les propriétés (P₁) (P₂) et (P₄).

— \mathcal{K} n'a plus les propriétés de symétrie (P₁).

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta, \lambda\mu} = - \mathcal{K}_{\beta\alpha, \lambda\mu} = - \mathcal{K}_{\alpha\beta, \mu\lambda}$$

mais

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \mathcal{K}_{\lambda\mu, \alpha\beta}^*$$

Si on s'intéresse à la *partie réelle* H de \mathcal{K} on voit alors facilement que

$$H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = H_{\lambda\mu, \alpha\beta}$$

et que les propriétés (P₁) sont vérifiées par le tenseur réel H.

— Si on calcule $\sum_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{K}_{\alpha\beta, \gamma\delta}$, on ne trouve plus une somme nulle. Considérant alors la partie réelle de \mathcal{K}

$$H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = - (F_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} + f_{\alpha\beta} f_{\lambda\mu})$$

et en tenant compte d'une part des propriétés (P₁) pour H et de la singularité de la forme F on démontre que

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta, \gamma\delta} = 0$$

— Enfin le tenseur contracté $\mathcal{H}_{x\beta}$ n'est pas nul, et sa partie réelle non plus. En résumé, le champ $H_{x\beta,\lambda\mu}$ envisagé ici, et résultant de la fusion d'un photon « droit » et d'un photon « gauche » a les propriétés (P₁) (P₂) (P₃) (P₆). Il décrit un état de radiation totale pure au sens de A. Lichnerowicz (*).

BIBLIOGRAPHIE

Yvonne CHOQUET-BRUHAT

- [1] *The Cauchy Problem. Gravitation an introduction to current research*, edited by Louis Witten, J. Wiley and Sons, 1962.

Daniel KASTLER

- [1] *Introduction à l'électrodynamique quantique*, Dunod, Paris, 1961.

J. LERAY

- [1] *Hyperbolic differential equations*, Princeton, 1951-1952.

André LICHNEROWICZ

- [1] *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955.
 [2] Propagateurs et commutateurs en relativité générale, *Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sc.*, n° 10, P. U. F., Paris, 1961.
 [3] Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale, *Annali di Matematica pura ed appl.*, série IV, t. 50, 1960.
 [4] Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale, *Bull. Soc. Math. France*, t. 92, 1964, p. 11.
 [5] Champ de Dirac, champ du neutrino et transformation C. P. T. sur un espace temps courbe, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. I, n° 3, 1964, p. 233.
 [6] *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 246, 1958, p. 893.

André LICHNEROWICZ et Françoise MORET-BAILLY

- [1] *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 257, 1963, p. 3542.

Louis MARIOT

- [1] Le champ électromagnétique pur en relativité générale, *Rendiconti di Matematica*, vol. 18, 1959, p. 178.

Françoise MORET-BAILLY

- [1] *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 260, 1965, p. 6542.
 [2] *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 261, 1965, p. 1607.

P. ROMAN

- [1] *Theory of elementary Particles*, North. Holl. Comp., Amsterdam, 1961.

Laurent SCHWARTZ

- [1] *Théorie des noyaux. Proceedings of the international congress of mathematicians*, 1950, p. 220.

(*) A. Lichnerowicz [3].