

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GÉRARD PETIAU

**Les équations d'ondes non linéaires d'un système spin 0  
-  $\text{spin}^2\hbar$  et la théorie quantique des champs associée**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 3, n° 2 (1965), p. 127-159

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1965\\_\\_3\\_2\\_127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_2_127_0)

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

ANNALES  
de  
l'Institut Henri-Poincaré

**Les équations d'ondes non linéaires  
d'un système spin 0 - spin  $2\hbar$   
et la théorie quantique des champs associée**

par

Gérard PETIAU  
(Institut Henri Poincaré).

---

**SOMMAIRE.** — Introduction et étude d'un système d'équations d'ondes non linéaires, décrivant un modèle corpuscule de spin 0-champ de spin  $2\hbar$  (et réciproquement). Discussion des différentes formes des solutions du type ondes planes de ces équations. On montre notamment que la masse propre dynamique de l'élément corpusculaire est construite quadratiquement à partir des éléments tensoriels d'un champ de spin  $2\hbar$  interprétable comme un champ de gravitation propre et constitue une intégrale première de l'évolution du système. Une extension de la théorie quantique des champs conduit à la quantification simultanée des amplitudes et de la masse propre dynamique.

---

## I. — INTRODUCTION

On a proposé, il y a déjà de nombreuses années [1], de décrire le champ de gravitation par un champ de particules élémentaires caractérisé essentiellement par un spin total  $2\hbar$ . De nombreux résultats obtenus dans cette voie il y a maintenant plus de vingt ans et leurs prolongements par les techniques modernes de la théorie quantique des champs ont montré la possibilité de décrire par cette conception une large classe de phénomènes parmi lesquels le mieux connu est l'attraction newtonienne entre particules massives [2].

Je me propose ici de montrer comment une extension *non linéaire* du formalisme de la théorie de la particule de spin total maximum  $2\hbar$  permet de décrire, suivant les idées des théories quantiques, un corpuscule de spin 0 (scalaire ou pseudo-scalaire) auquel est associé intrinsèquement un champ de spin  $2\hbar$  possédant les caractères tensoriels d'un champ de gravitation propre du corpuscule. Je montrerai notamment comment la masse propre de ce corpuscule est construite à partir d'invariants associés au champ de spin  $2\hbar$  et prend des valeurs définies par la quantification de ce champ.

## II. — LES ÉQUATIONS D'ONDES DE LA THÉORIE LINÉAIRE DE LA PARTICULE DE SPIN $2\hbar$ ET LEURS SOLUTIONS ONDES PLANES

La théorie linéaire générale des particules à spin décrit les particules de spin total maximum  $2\hbar$  au moyen de cinq spineurs de Van der Waerden, soient :

$$\xi \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{(1)}, \quad \xi \frac{\dot{i}_1, m_2 m_3 m_4}{(2)}, \quad \xi \frac{\dot{i}_1 \dot{i}_2, m_3 m_4}{(3)}, \quad \xi \frac{\dot{i}_1 \dot{i}_2 \dot{i}_3, m_4}{(4)}, \quad \xi \frac{\dot{i}_1 \dot{i}_2 \dot{i}_3 \dot{i}_4}{(5)},$$

$$(\dot{i}_1, \dot{i}_2, \dot{i}_3, \dot{i}_4, m_1, m_2, m_3, m_4 = 1, 2).$$

Ces spineurs sont symétriques, d'une part par rapport aux indices non pointés, d'autre part et indépendamment par rapport aux indices pointés : ceci leur laisse 5, 8, 9, 8 et 5 composantes linéairement indépendantes (soit 35 au total).

Si l'on remplace ces spineurs par des tenseurs (complexes) définis par rapport au groupe de Lorentz orthochrone propre, on est conduit à introduire :

1° Un tenseur :

$$\Phi^{\mu\nu,\rho} = \Phi_{\rho,\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu,\rho}$$

associé aux spineurs :

$$\xi \frac{\dot{i}_1 m_2 m_3 m_4}{(2)} \quad \text{et} \quad \xi \frac{\dot{i}_1 \dot{i}_2 \dot{i}_3 m_4}{(4)}$$

Celui-ci possède  $8 + 8 = 16$  composantes linéairement indépendantes. Les 24 composantes de  $\Phi^{\mu\nu,\rho}$  sont liées par les 8 relations :

$$\Phi^{\mu\lambda}_{\lambda} = 0, \quad \Phi_{[\mu\nu,\rho]} = \Phi_{\mu\nu,\rho} + \Phi_{\nu\rho,\mu} + \Phi_{\rho\mu,\nu} = 0.$$

2° Un tenseur  $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$  tel que :

$$\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} = \Phi^{\rho\sigma,\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu,\rho\sigma} = -\Phi^{\mu\nu,\sigma\rho}.$$

Ce tenseur correspond aux spineurs :

$$\xi \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{(1)}, \quad \xi \frac{\dot{i}_1 \dot{i}_2 m_3 m_4}{(3)}, \quad \xi \frac{\dot{i}_1 \dot{i}_2 \dot{i}_3 \dot{i}_4}{(5)}$$

Par suite ses 21 composantes sont ramenées à 19 indépendantes par les relations :

$$\Phi^{\mu\nu,}_{\mu\nu} = 0, \\ \Phi^{\mu[\nu,\rho]\sigma} = \Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} + \Phi^{\nu\rho,\mu\sigma} + \Phi^{\rho\mu,\nu\sigma} = 0.$$

Par contraction, on déduit de  $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$  un tenseur symétrique du second ordre de trace nulle :

$$\Phi^{\mu,\rho} = \Phi^{\rho,\mu}, \quad \Phi^{\lambda,}_{\lambda} = 0.$$

On a :

$$\Phi^{\mu,\rho} = -\Phi^{\mu\lambda,}_{\rho\lambda}.$$

$\Phi^{\mu,\rho}$  a 9 composantes complexes linéairement indépendantes et correspond au spineur :

$$\xi \frac{\dot{i}_1 \dot{i}_2}{(3)} \frac{m_3 m_4}{(3)}.$$

Dans la théorie linéaire des particules à spin ces tenseurs sont déterminés à partir d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui s'écrit dans le cas où il n'y a pas d'interaction extérieure :

$$(1) \quad \partial_{\mu} \Phi_{\nu,\rho\sigma} - \partial_{\nu} \Phi_{\mu,\rho\sigma} + \partial_{\rho} \Phi_{\mu\nu,\sigma} - \partial_{\sigma} \Phi_{\mu\nu,\rho} = 2x_1 \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}$$

$$(2) \quad \partial_{\lambda} \Phi^{\mu\lambda,}_{\rho\sigma} - (\partial_{\rho} \Phi^{\mu\lambda,}_{\sigma\lambda} - \partial_{\sigma} \Phi^{\mu\lambda,}_{\rho\lambda}) = 2x_2 \Phi^{\mu,}_{\rho\sigma}$$

Par contraction (1) donne :

$$(3) \quad \partial_{\lambda} [\Phi^{\mu,\rho\lambda} + \Phi^{\mu\lambda,\rho}] = -2x_1 \Phi^{\mu\lambda,\rho} = 2x_1 \Phi^{\mu,\rho}.$$

$x_1$  et  $x_2$  sont deux constantes arbitraires que la théorie usuelle pose *égales* en écrivant :

$$(4) \quad x_1 = x_2 = \mu_0.$$

Le cas général est  $x_1 x_2 = \mu_0^2$ . Le système (1) et (2) est la traduction tensorielle du système spinoriel (spineurs de Van der Waerden).

$$\begin{aligned} \partial_r^{m_1} \xi \frac{\dot{r}m_2 m_3 m_4}{(2)} + \partial_r^{m_2} \xi \frac{\dot{r}m_1 m_3 m_4}{(2)} + \partial_r^{m_3} \xi \frac{\dot{r}m_1 m_2 m_4}{(2)} + \partial_r^{m_4} \xi \frac{\dot{r}m_1 m_2 m_3}{(2)} \\ = 4x_1 \xi \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_r^{i_1} \xi \frac{rm_2 m_3 m_4}{(1)} + \left[ \partial_r^{m_2} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{r}m_3 m_4}{(3)} + \partial_r^{m_3} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{r}m_1 m_4}{(3)} + \partial_r^{m_4} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{r}m_2 m_3}{(3)} \right] \\ = 4x_2 \xi \frac{i_1 m_2 m_3 m_4}{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \partial_r^{i_1} \xi \frac{\dot{l}_2 \dot{r}m_3 m_4}{(2)} + \partial_r^{i_2} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{r}m_3 m_4}{(2)} \right] + \left[ \partial_r^{m_3} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{r}m_4}{(4)} + \partial_r^{m_4} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{r}m_3}{(4)} \right] \\ = 4x_1 \xi \frac{i_1 i_2 m_3 m_4}{(3)}, \end{aligned}$$

$$\left[ \partial_r^{i_1} \xi \frac{\dot{l}_2 \dot{l}_3 \dot{r}m_4}{(3)} + \partial_r^{i_2} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_3 \dot{r}m_4}{(3)} + \partial_r^{i_3} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{r}m_4}{(3)} \right] + \partial_r^{m_4} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{l}_3 \dot{r}}{(5)} = 4x_2 \xi \frac{i_1 i_2 i_3 m_4}{(4)}$$

$$\partial_r^{i_1} \xi \frac{\dot{l}_2 \dot{l}_3 \dot{l}_4 \dot{r}}{(4)} + \partial_r^{i_2} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_3 \dot{l}_4 \dot{r}}{(4)} + \partial_r^{i_3} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{l}_4 \dot{r}}{(4)} + \partial_r^{i_4} \xi \frac{\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{l}_3 \dot{r}}{(4)} = 4x_1 \xi \frac{i_1 i_2 i_3 i_4}{(5)}.$$

$$(\square \varepsilon_{im} = \partial_i^r \partial_{rm} = -\partial_{ir}^i \partial_m^r).$$

On sait depuis longtemps que le système (1-2) ou (4) en l'absence d'interaction possède deux types de solutions que l'on rattache respectivement à des états de masse propre  $m_0$  et  $2m_0$  ( $\mu_0 = m_0 c/\hbar$ ).

Les solutions du premier type vérifient le système (1-2) et en plus la relation :

$$(5) \quad \partial_\lambda \Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\sigma} = -[\partial_\rho \Phi^{\mu\lambda}_{,\sigma\lambda} - \partial_\sigma \Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda}] = \partial_\rho \Phi^{\mu}_{,\sigma} - \partial_\sigma \Phi^{\mu}_{,\rho}.$$

Les solutions du second type vérifient le système (1-2) et en plus la relation :

$$(6) \quad \Phi^{\mu}_{,\rho} = -\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda} = 0.$$

Avant de généraliser le système (1-2) nous allons en préciser les solutions du type ondes planes.

Nous appellerons « ondes planes » un système de solutions des équations

précédentes pour lequel les tenseurs  $\Phi^{\mu\nu,\rho}$  et  $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}$  sont fonctions d'une seule variable :

$$u = n_\mu x^\mu$$

définie au moyen d'un vecteur du genre temps  $n^\mu$  donné :  $n^\mu$  est le vecteur de propagation.

On a :

$$(7) \quad n_\mu n^\mu = 1, \quad |n^4| \geq +1.$$

Les ondes planes du premier type sont construites au moyen de  $n^\mu$  et de deux vecteurs du genre espace, soient  $n'^\mu$  et  $n''^\mu$  orthogonaux entre eux et avec  $n^\mu$  :

$$(8) \quad n'_\mu n^\mu = 0, \quad n''_\mu n^\mu = 0, \quad n'_\mu n''^\mu = 0, \quad n'^\mu n'_\mu = n''^\mu n''_\mu = -1.$$

Nous écrivons :

$$(9) \quad \begin{aligned} \Phi_{\mu\nu,\rho}(u) &= \varphi_{\mu\nu,\rho} Y_1(u), \\ \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}(u) &= \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} Y_2(u) \end{aligned}$$

et par suite :

$$(10) \quad \begin{aligned} \Phi^\mu_{,\rho}(u) &= -\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda}(u) = -\varphi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda} Y_2(u) \\ &= \varphi^\mu_{,\rho} Y_2(u), \\ (\varphi^\mu_{,\rho} &= -\varphi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda}). \end{aligned}$$

La substitution de ces expressions dans (1-2) conduit aux équations :

$$(11) \quad \begin{aligned} [n_\mu \varphi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \varphi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \varphi_{\mu\nu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu\nu,\rho}] Y'_1(u) &= 2x_1 \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} Y_2(u), \\ [n_\lambda \varphi^{\mu\lambda}_{,\rho\sigma} - (n_\rho \varphi^{\mu\lambda}_{,\sigma\lambda} - \varphi_\sigma n^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda})] Y'_2(u) &= 2x_2 \varphi^\mu_{,\rho\sigma} Y_1(u). \end{aligned}$$

La condition supplémentaire (5) donne ici :

$$(12) \quad n_\lambda \varphi^{\mu\lambda}_{,\rho\sigma} = - (n_\rho \varphi^{\mu\lambda}_{,\sigma\lambda} - n_\sigma \varphi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda}).$$

Le système (11) se réduit alors au système différentiel :

$$(13) \quad \begin{aligned} Y'_1(u) &= x_1 Y_2(u), \\ Y'_2(u) &= -x_2 Y_1(u) \end{aligned}$$

si nous assujettissons les amplitudes  $\varphi_{\mu\nu,\rho}$  et  $\varphi_{\mu\nu,\rho\sigma}$  aux conditions (12) et aux relations :

$$(14) \quad \begin{aligned} n_\mu \varphi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \varphi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \varphi_{\mu\nu,\sigma} - n_\sigma \varphi_{\mu\nu,\rho} &= 2\varphi_{\mu\rho,\nu\sigma}, \\ n_\lambda \varphi^{\mu\lambda}_{,\rho\sigma} &= -\varphi^\mu_{,\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Ces relations sont vérifiées si nous posons :

$$(15) \quad \begin{aligned} \varphi_{\mu\nu,\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(n_\mu n'_\nu - n_\nu n'_\mu) n'_\rho + (n_\mu n'_\nu - n_\nu n'_\mu) n'_\rho], \\ \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(n'_\nu n_\mu - n'_\mu n_\nu)(n_\rho n'_\sigma - n_\sigma n'_\rho) + (n_\mu n'_\nu - n_\nu n'_\mu)(n_\rho n'_\sigma - n_\sigma n'_\rho)]. \end{aligned}$$

Alors :

$$(16) \quad \varphi_{\mu\lambda, \rho\lambda} = -\varphi_{\mu, \rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} (n'_\mu n^{\rho\mu} + n'_\mu n^{\rho\mu}).$$

et :

$$\varphi_{\mu, \mu} = 0.$$

On vérifie facilement que :

$$n_\lambda \varphi^{\mu\lambda, \rho\sigma} = -\varphi^{\mu, \rho\sigma} = -[n_\rho \varphi^{\mu\lambda, \sigma\lambda} - n_\sigma \varphi^{\mu\lambda, \rho\lambda}].$$

De plus, on a :

$$(17) \quad \begin{aligned} \varphi_{\lambda\nu,\rho} \varphi^{\mu\nu,\rho} &= 2\varphi_{(\mu\nu),\rho} \varphi^{(\mu\nu),\rho} = 2, \\ \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} \varphi^{\mu\nu,\rho\sigma} &= 4\varphi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \varphi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 4, \\ \varphi_{\mu,\rho} \varphi^{\mu,\rho} &= 1, \\ \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} \varphi^{\nu,\rho\sigma} &= 2\varphi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \varphi^{\nu,(\rho\sigma)} = 2n_\mu. \end{aligned}$$

Le système (13) admet l'intégrale première :

$$(18) \quad x_2 Y_1^2 + x_1 Y_2^2 = \mu_1^2,$$

$\mu_1$  désignant une constante arbitraire. On en déduit (avec  $x_1 x_2 = \mu_0^2$ ), la solution de (13) :

$$(19) \quad \begin{aligned} Y_1(u) &= \frac{\mu_1}{\sqrt{x_2}} \sin(\mu_0 u + \varphi), \\ Y_2(u) &= \frac{\mu_1}{\sqrt{x_1}} \cos(\mu_0 u + \varphi). \end{aligned}$$

Les relations (17) nous donnent alors :

$$(20) \quad \begin{aligned} F^2 &= \Phi_{(\mu\nu),\rho} \Phi^{(\mu\nu),\rho} = (Y_1(u))^2, \\ G^2 &= \Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = \Phi_{\mu,\rho} \Phi^{\mu,\rho} = (Y_2(u))^2. \end{aligned}$$

On peut alors exprimer (18) comme relation de « conservation » ou de normalisation sous la forme :

$$(21) \quad \mu_1^2 = x_2 F^2 + x_1 G^2.$$

On peut aussi remarquer que les fonctions  $\Phi_{\mu\nu,\rho}(u)$ ,  $\Phi_{\mu,\rho}(u)$ , ondes planes du premier type, vérifient le système d'équations :

$$(22) \quad \begin{aligned} \partial_\mu \Phi_{\nu,\rho} - \partial_\nu \Phi_{\mu,\rho} &= x_2 \Phi_{\mu\nu,\rho}, \\ \partial_\lambda \frac{1}{2} (\Phi^{\mu\lambda,\rho} + \Phi^{\mu,\rho\lambda}) &= x_1 \Phi^{\mu,\rho}. \end{aligned}$$

Les ondes planes du second type sont construites avec le vecteur de propagation  $n^\mu$  et trois vecteurs du genre espace, orthogonaux entre eux et avec  $n^\mu$ .

Soient  $n'^\mu$ ,  $n''^\mu$ ,  $n'''^\mu$  ces vecteurs  $x$ . On a :

$$(23) \quad \begin{aligned} n_\mu^{(p)} n^{(p)\mu} &= -1, & n_\mu n^{(p)\mu} &= 0, \\ n_\mu^{(p)} n^{(q)\mu} &= 0, & ((p), (q)) &= ', ', '''. \end{aligned}$$

Nous écrivons ces ondes planes sous la forme :

$$(24) \quad \begin{aligned} \Phi_{\mu\nu,\rho}(u) &= \Psi_{\mu\nu,\rho}^r Z_1(u), \\ \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}(u) &= \Psi_{\mu\nu,\rho\sigma}^r Z_2(u). \end{aligned}$$

Nous poserons ici :

$$(25) \quad \begin{aligned} \Psi_{\mu\nu,\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(n'_\mu n''_\nu - n'_\nu n''_\mu) n'''_\rho + (n'_\mu n'''_\nu - n'_\nu n'''_\mu) n''_\rho], \\ \Psi_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [n_\mu \Psi_{\nu,\rho\sigma} - n_\nu \Psi_{\mu,\rho\sigma} + n_\rho \Psi_{\mu\nu,\sigma} - n_\sigma \Psi_{\mu\nu,\rho}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(n_\mu n''_\nu - n_\nu n''_\mu) (n'_\rho n'''_\sigma - n'_\sigma n'''_\rho) + (n_\mu n'''_\nu - n_\nu n'''_\mu) (n'_\rho n''_\sigma - n'_\sigma n''_\rho) \\ &\quad + (n_\rho n'''_\sigma - n_\sigma n'''_\rho) (n'_\mu n''_\nu - n'_\nu n''_\mu) + (n_\rho n''_\sigma - n_\sigma n''_\rho) (n'_\mu n'''_\nu - n'_\nu n'''_\mu)]. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que :

$$\Psi_{\mu\lambda}^{\rho\lambda} = 0, \quad \Psi_{\mu\nu}^{\mu\nu} = 0,$$

entraînent :

$$\Phi_{\mu\lambda}^{\rho\lambda} = 0.$$

De plus, on a ici :

$$(26) \quad \begin{aligned} n_\lambda \Psi^{\mu\lambda,\rho\sigma} &= -\Psi^{\mu,\rho\sigma} \\ \Psi_{\mu\nu,\rho}^r \Psi^{\mu\nu,\rho} &= 2 \Psi_{(\mu\nu),\rho}^r \Psi^{(\mu\nu),\rho} = -2, \\ \Psi_{\mu\nu,\rho\sigma}^r \Psi^{\mu\nu,\rho\sigma} &= 4 \Psi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}^r \Psi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = -8, \end{aligned}$$

et par suite :

$$(27) \quad \begin{aligned} F^2 &= \Phi_{(\mu\nu),\rho} \Phi^{(\mu\nu),\rho} = -[Z_1(u)]^2, \\ G^2 &= \Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = -2[Z_2(u)]^2. \end{aligned}$$



On a aussi :

$$\Psi_{\mu\nu,\rho\sigma} \Psi^{\nu,\rho\sigma} = 2 \Psi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Psi^{\nu,(\rho\sigma)} = -2n_\mu$$

d'où :

$$(28) \quad \Phi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Phi^{\nu,(\rho\sigma)} = -n_\mu Z_1(u) Z_2(u).$$

En reportant (24) et (25) dans le système (1-2) nous déterminons  $Z_1(u)$ ,  $Z_2(u)$  par le système différentiel :

$$(29) \quad \begin{aligned} Z_1' &= 2x_1 Z_2 \\ Z_2' &= -2x_2 Z_1. \end{aligned}$$

On a ici l'intégrale première :

$$(30) \quad x_2 Z_1^2 + x_1 Z_2^2 = \mu_1^2.$$

Avec  $x_1 x_2 = \mu_0^2$  on en déduit la solution de (29) :

$$(31) \quad \begin{aligned} Z_1(u) &= \frac{\mu_1}{\sqrt{x_2}} \sin(2\mu_0 u + \varphi), \\ Z_2(u) &= \frac{\mu_1}{\sqrt{x_1}} \cos(2\mu_0 u + \varphi). \end{aligned}$$

La relation de conservation (30) s'écrit encore :

$$(32) \quad x_2 |F^2| + \frac{x_1}{2} |G^2| = \mu_1^2.$$

### III. — LES ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES D'UN MODÈLE SPIN 0 - SPIN $2\hbar$ ET LEURS SOLUTIONS ONDES PLANES

Nous allons maintenant introduire et étudier un modèle plus général associant étroitement des éléments tensoriels susceptibles de décrire, d'une part un corpuscule ou un champ de spin 0 (« méson » de type scalaire ou pseudo-scalaire) et d'autre part, un corpuscule ou un champ de spin  $2\hbar$ . Cette association est réalisée suivant un procédé que nous avons déjà introduit et étudié dans de nombreuses publications antérieures [3]. Les éléments tensoriels constituant la fonction d'onde globale sont associés par un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire et d'un type bien déterminé. La structure du système entraîne l'existence de

solutions du type ondes planes d'amplitudes bornées qui permettent d'attribuer à certaines des composantes de la fonction d'onde globale le rôle de fonctions d'ondes corpusculaires tandis que les autres composantes décrivent un « champ propre » du corpuscule considéré. L'existence de transformations échangeant le rôle des composantes permet de considérer réciproquement des états où ce champ est analysé en « corpuscules » avec un champ propre construit à partir des premières composantes.

Le modèle que nous introduisons ici est décrit au moyen d'une fonction d'onde globale associant :

un champ tensoriel scalaire :

$$K(x^\mu)$$

un champ tensoriel  $\Phi^{\mu\nu,\rho}(x^\mu)$  :

$$\begin{aligned}\Phi^{\mu\nu,\rho} &= \Phi^{\rho,\mu\nu} = -\Phi^{\nu,\mu\rho}, \\ \Phi^{\mu\lambda}{}_{,\lambda} &= 0, \quad \Phi_{[\mu\nu,\rho]} = 0,\end{aligned}$$

un champ tensoriel  $\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma}(x^\mu)$  :

$$\begin{aligned}\Phi^{\mu\nu,\rho\sigma} &= \Phi^{\rho\sigma,\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu,\rho\sigma} \\ \Phi^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} &= 0, \quad \Phi_{[\mu\nu,\rho]\sigma} = 0.\end{aligned}$$

Ces tenseurs seront déterminés à partir d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre que nous écrirons :

$$(33) \quad \begin{aligned}(a) \quad & \partial_\mu \Phi_{\nu,\rho\sigma} - \partial_\nu \Phi_{\mu,\rho\sigma} + \partial_\rho \Phi_{\mu\nu,\sigma} - \partial_\sigma \Phi_{\mu\nu,\rho} = 2x_1 K \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ (b) \quad & \partial_\lambda \Phi^{\mu\lambda}{}_{,\rho\sigma} - (\partial_\rho \Phi^{\mu\lambda}{}_{,\sigma\lambda} - \partial_\sigma \Phi^{\mu\lambda}{}_{,\rho\lambda}) = 2x_2 K \Phi^{\mu}{}_{,\rho\sigma}, \\ (c) \quad & \partial_\mu K = -x_3 \Phi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Phi^{\nu,(\rho\sigma)} = -x_3 C_\mu.\end{aligned}$$

(Nous notons :

$$\Phi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Phi^{\nu,(\rho\sigma)} = \frac{1}{2} (\Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} \Phi^{\nu,\rho\sigma}).$$

Le vecteur  $C_\mu$  est défini ici au moyen du produit :

$$C_\mu = \Phi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Phi^{\nu,(\rho\sigma)}.$$

$x_1, x_2, x_3$  sont trois constantes *positives* introduites essentiellement pour la commodité du calcul. En multipliant les fonctions  $\Phi_{\mu\nu,\rho}$ ,  $\Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}$  et  $K$  par des constantes convenables, on peut toujours se ramener à  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ . Les signes devant ces constantes ont été choisis pour faciliter le calcul notamment le signe placé devant  $x_3$ .

La contraction de la première équation (33) conduit à :

$$(34) \quad \partial_\lambda (\Phi^{\mu\lambda,\rho} + \Phi^{\mu,\rho\lambda}) = -2x_1 \Phi^{\mu\lambda,\rho}{}_{,\lambda}.$$

En posant encore :

$$\Phi^{\mu}_{,\rho} = -\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda},$$

nous écrivons (34) :

$$\partial_{\lambda}[\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho} + \Phi^{\mu,\rho\lambda}] = 2x_1\Phi^{\mu,\rho}.$$

Le système (33) (sans interaction extérieure) *admet encore deux types de solutions correspondant à des conditions supplémentaires.*

a) Les solutions du premier type pour lesquelles on a :

$$(35) \quad \partial_{\rho}\Phi^{\mu\lambda}_{,\sigma\lambda} - \partial_{\sigma}\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda} = -\partial_{\lambda}\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\sigma}$$

et par suite :

$$(36) \quad \begin{aligned} \partial_{\lambda}\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\sigma} &= x_2K\Phi^{\mu}_{,\rho\sigma}, \\ \partial_{\rho}\Phi^{\mu}_{,\sigma} - \partial_{\sigma}\Phi^{\mu}_{,\rho} &= x_2K\Phi^{\mu}_{,\rho\sigma}. \end{aligned}$$

b) Les solutions du second type pour lesquelles on a :

$$(37) \quad \Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\lambda} = -\Phi^{\mu}_{,\rho} = 0$$

et par suite :

$$(38) \quad \partial_{\lambda}\Phi^{\mu\lambda}_{,\rho\sigma} = 2x_2K\Phi^{\mu}_{,\rho\sigma}.$$

L'équation (33 c), soit :

$$\partial_{\mu}K = -x_3C_{\mu}$$

conduit pour  $K(x^{\mu})$  à l'équation du second ordre :

$$\square K + x_3\partial_{\mu}C^{\mu} = 0,$$

Tenant compte de (33 a) et (33 b), on a :

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}C^{\mu} &= [x_1\Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} - 2x_2\Phi_{\nu,(\rho\sigma)}\Phi^{\nu,(\rho\sigma)} \\ &\quad - \frac{1}{2}\Phi_{\nu}{}^{\rho\sigma}(\partial_{\rho}\Phi^{\nu\lambda}_{,\sigma\lambda} - \partial_{\sigma}\Phi^{\nu\lambda}_{,\rho\lambda})]K(x^{\mu}). \end{aligned}$$

Par suite *dans le premier cas*, tenant compte de (36), on a :

$$(39) \quad \square K + [x_1x_3\Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} - x_2x_3\Phi_{\mu,(\rho\sigma)}\Phi^{\mu,(\rho\sigma)}]K(x^{\mu}) = 0.$$

Dans le second cas tenant compte de (37), il reste :

$$(40) \quad \square K + [x_1x_3\Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} - 2x_2x_3\Phi_{\mu,(\rho\sigma)}\Phi^{\mu,(\rho\sigma)}]K = 0.$$

Toutefois, nous devons remarquer dès maintenant que dans (39) et (40) le coefficient de  $K$  dans le second terme de ces équations du second ordre *n'est pas une intégrale première* de l'évolution du système (33). Par suite,

ce coefficient même lorsqu'il est positif ne doit pas être considéré comme le carré d'une masse propre réduite.

Nous allons maintenant préciser les *solutions ondes planes* du système (33).

Ces ondes planes sont définies par la donnée d'un vecteur de propagation  $n^\mu$  du genre temps auquel nous associons la variable unique :

$$u = n_\mu x^\mu.$$

Nous allons considérer successivement les deux types de solutions indiquées ci-dessus.

Nous écrirons les *ondes planes du premier type* au moyen de trois fonctions  $Y_1(u)$ ,  $Y_2(u)$ ,  $Y_3(u)$  en posant :

$$\Phi_{\mu\nu,\rho} = \varphi_{\mu\nu,\rho} Y_1(u), \quad \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} = \varphi_{\mu\nu,\rho\sigma} Y_2(u), \quad K = Y_3(u).$$

Avec les définitions (15) de  $\varphi_{\mu\nu,\rho}$  et  $\varphi_{\mu\nu,\rho\sigma}$  ainsi qu'avec les relations (17), on obtient en substituant dans (33) le système différentiel :

$$(41) \quad \begin{aligned} Y_1' &= x_1 Y_2 Y_3, \\ Y_2' &= -x_2 Y_1 Y_3, \\ Y_3' &= -x_3 Y_1 Y_2. \end{aligned}$$

Posant (pour  $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ ) :

$$(42) \quad Y_1(u) = \frac{1}{\sqrt{x_2 x_3}} y_1(u), \quad Y_2(u) = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_3}} y_2(u), \quad Y_3(u) = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} y_3(u)$$

le système (41) s'écrit encore :

$$(43) \quad y_1' = y_2 y_3, \quad y_2' = -y_1 y_3, \quad y_3' = -y_1 y_2.$$

(43) admet les intégrales premières :

$$(44) \quad \begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= \lambda_1^2 \\ y_1^2 + y_3^2 &= \lambda_2^2 \end{aligned}$$

et par suite :

$$y_2^2 - y_3^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2.$$

Par rapport au système (41) celles-ci s'écrivent encore :

$$(45) \quad \begin{aligned} x_2 x_3 Y_1^2 + x_1 x_3 Y_2^2 &= \lambda_1^2 = \mu_1^2 x_3, \\ x_2 x_3 Y_1^2 + x_1 x_2 Y_3^2 &= \lambda_2^2 = \mu_2^2 x_2, \end{aligned}$$

d'où :

$$x_1 x_3 Y_2^2 - x_1 x_2 Y_3^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2.$$

Les constantes  $\mu_1^2, \mu_2^2$  sont ici *définies* à partir de  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  par :

$$\lambda_1^2 = \mu_1^2 x_3, \quad \lambda_2^2 = \mu_2^2 x_2$$

de telle sorte que l'on a :

$$(46) \quad \begin{aligned} x_2 Y_1^2 + x_1 Y_2^2 &= \mu_1^2, \\ x_3 Y_1^2 + x_1 Y_3^2 &= \mu_2^2. \end{aligned}$$

le système (43), (44) admet deux formes de solutions suivant que l'on aura soit :

$$\lambda_1^2 < \lambda_2^2 : \text{Cas A,}$$

soit :

$$\lambda_2^2 < \lambda_1^2 : \text{Cas B.}$$

*Considérons le cas A.* — Pour  $\lambda_1^2 < \lambda_2^2$  la solution générale du système (43) avec les intégrales premières (44) s'écrit :

$$(47) \quad \begin{aligned} y_1(u) &= \lambda_1 \operatorname{sn}(\lambda_2 u + \varphi, \lambda_1/\lambda_2) \\ y_2(u) &= \lambda_1 \operatorname{cn}(\lambda_2 u + \varphi, \lambda_1/\lambda_2) \\ y_3(u) &= \lambda_2 \operatorname{dn}(\lambda_2 u + \varphi, \lambda_1/\lambda_2). \end{aligned}$$

Les fonctions  $\operatorname{sn}(u, k)$ ,  $\operatorname{cn}(u, k)$ ,  $\operatorname{dn}(u, k)$  sont les trois fonctions elliptiques de Jacobi.

Le cas limite  $\lambda_1 = 0$  résulte ici de  $x_3 = 0$ . Alors le module  $k = 0$  et l'on a  $\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u$ ,  $\operatorname{cn}(u, 0) = \cos u$ ,  $\operatorname{dn}(u, 0) = 1$ .

On voit facilement que la dégénérescence  $x_3 = 0$  entraîne  $K = C^{\text{te}}$  et par suite que dans ce cas le système (33) se réduit aux équations de la particule de spin  $2\hbar$  de la théorie linéaire.

A partir de (47) nous obtenons :

$$(48) \quad \begin{aligned} Y_1(u) &= \frac{\mu_1}{\sqrt{x_2}} \operatorname{sn}(\lambda_2 u + \varphi, \lambda_1/\lambda_2), \\ Y_2(u) &= \frac{\mu_1}{\sqrt{x_2}} \operatorname{cn}(\lambda_2 u + \varphi, \lambda_1/\lambda_2), \\ Y_3(u) &= \frac{\mu_2}{\sqrt{x_1}} \operatorname{dn}(\lambda_2 u + \varphi, \lambda_1/\lambda_2), \end{aligned}$$

La constante  $\lambda_2 = \mu_2 \sqrt{x_2}$  joue ici le rôle de *masse propre dynamique*.

D'autre part avec :

$$\varphi_{\mu,\rho} \varphi^{\mu,\rho} = 1, \quad \varphi_{(\mu\nu),\rho} \varphi^{(\mu\nu),\rho} = 1, \quad \varphi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \varphi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = 1,$$

les relations (45) s'écrivent encore :

$$(49) \quad \begin{aligned} x_2 x_3 \Phi_{(\mu\nu),\rho} \Phi^{(\mu\nu),\rho} + x_1 x_3 \Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} &= \lambda_1^2, \\ x_2 x_3 \Phi_{(\mu\nu),\rho} \Phi^{(\mu\nu),\rho} + x_1 x_2 K^2 &= \lambda_2^2. \end{aligned}$$

Dans le cas limite  $x_3 = 0$ , il reste :

$$\lambda_2^2 = \mu_0^2 = x_1 x_2 K_0^2.$$

Considérons maintenant le cas B : pour  $\lambda_2^2 < \lambda_1^2$  la solution générale de (43) avec (44) s'écrit :

$$(50) \quad \begin{aligned} y_1(u) &= \lambda_2 \operatorname{sn}(\lambda_1 u + \varphi, \lambda_2/\lambda_1) \\ y_2(u) &= \lambda_1 \operatorname{dn}(\lambda_1 u + \varphi, \lambda_2/\lambda_1) \\ y_3(u) &= \lambda_2 \operatorname{cn}(\lambda_1 u + \varphi, \lambda_2/\lambda_1). \end{aligned}$$

Ceci nous donne :

$$(51) \quad \begin{aligned} Y_1(u) &= \frac{\mu_2}{\sqrt{x_3}} \operatorname{sn}(\lambda_1 u + \varphi, \lambda_2/\lambda_1), \\ Y_2(u) &= \frac{\mu_1}{\sqrt{x_1}} \operatorname{dn}(\lambda_1 u + \varphi, \lambda_2/\lambda_1), \\ Y_3(u) &= \frac{\mu_2}{\sqrt{x_1}} \operatorname{cn}(\lambda_1 u + \varphi, \lambda_2/\lambda_1). \end{aligned}$$

Ici c'est la constante  $\lambda_1 = \mu_1 \sqrt{x_3}$  qui joue le rôle de *masse propre*.  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (ou  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ) sont intégrales premières et sont associées aux éléments de la fonction d'ondes par les relations (49) : la masse propre  $\lambda_1$  est donc construite ici au moyen des éléments tensoriels qui correspondent à l'approximation linéaire au champ de spin  $2\hbar$ .

La solution (50) du cas (B) se déduit de la solution (47) du cas (A) par l'échange des constantes  $\lambda_1, \lambda_2$  et la permutation des fonctions  $Y_2(u), Y_3(u)$ . C'est la transformation du « module réciproque » de la théorie des fonctions elliptiques :

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(ku, 1/k) &= k \operatorname{sn}(u, k) \\ \operatorname{cn}(ku, 1/k) &= \operatorname{dn}(u, k) \\ \operatorname{dn}(ku, 1/k) &= \operatorname{cn}(u, k). \end{aligned}$$

Dans le cas B, les fonctions  $K(x^\mu)$  et  $C_\mu(x^\mu)$  peuvent être considérées comme

éléments d'une fonction d'onde décrivant un corpuscule de type scalaire (ou pseudo-scalaire).

En effet, si nous revenons aux équations :

$$\partial_{\mu}K = -x_3 C_{\mu},$$

$$C_{\mu} = \Phi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Phi^{\nu,(\rho\sigma)}$$

pour :

$$K = K(u), \quad C_{\mu} = C_{\mu}(u),$$

on a :

$$C_{\mu}(u) = n_{\mu} Y_1(u) Y_2(u).$$

On en déduit avec (41) et (46) :

$$\partial_{\mu}C^{\mu} = [x_1 Y_2^2 - x_2 Y_1^2] Y_3 = \frac{1}{x_3} [(\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2) + 2x_1 x_2 Y_3^2] Y_3.$$

Par suite  $K(u)$  est solution de l'équation du second ordre :

$$\square K + (\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2)K + 2x_1 x_2 K^3 = 0.$$

Celle-ci s'écrit encore :

$$(52) \quad \square K + (\mu_1^2 x_3 - 2\mu_2^2 x_2)K + 2x_1 x_2 K^3 = 0.$$

Ici le coefficient de  $K$  du 2<sup>e</sup> terme est intégrale première.

On voit sur cette équation *que dans le cas B*, l'approximation linéaire de notre théorie pour  $x_2 = 0$  conduit pour  $K(u)$  à l'équation de Klein-Gordon :

$$\square K + \lambda_1^2 K = 0,$$

mettant en évidence le rôle de masse propre réduite joué par la constante  $\lambda_1$ .

Le corpuscule scalaire est décrit ici par les éléments  $K(x^{\mu})$ ,  $C_{\mu}(x^{\mu})$  réduits aux ondes planes :

$$(53) \quad \begin{aligned} K(u) &= \frac{\mu_2}{\sqrt{x_1}} \operatorname{cn}(\lambda_1 u, \lambda_2/\lambda_1), \\ C_{\mu}(u) &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{x_1 x_3}} n_{\mu} \operatorname{sn}\left(\lambda_1 u, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \operatorname{dn}\left(\lambda_1 u, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right). \end{aligned}$$

A la limite linéaire  $x_2 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , il reste :

$$(54) \quad \begin{aligned} K(u) &= \frac{\mu_2}{\sqrt{x_1}} \cos(\lambda_1^0 u), \\ C_{\mu}(u) &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{x_1 x_3}} n_{\mu} \sin(\lambda_1^0 u) \end{aligned}$$

avec la masse propre réduite  $\lambda_1^0$  telle que :

$$(\lambda_1^0)^2 = x_1 x_3 (Y_2^0)^2.$$

Dans le cas général :

$$(55) \quad \begin{aligned} \lambda_1^2 &= x_2 x_3 \Phi_{(\mu\nu),\rho} \Phi^{(\mu\nu),\rho} + x_1 x_3 \Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \\ &= x_2 x_3 \Phi_{(\mu\nu),\rho} \Phi^{(\mu\nu),\rho} + x_1 x_3 \Phi_{\mu,\rho} \Phi^{\mu,\rho}. \end{aligned}$$

La masse propre est une intégrale première construite avec les fonctions du champ : *En quantifiant l'ensemble des fonctions du champ nous obtiendrons à la fois la quantification des amplitudes des fonctions corpusculaires et des fonctions du champ de spin  $2\hbar$  et corrélativement la quantification de la masse propre.*

Nous avons jusqu'ici considéré les solutions du premier type du système (33). Nous allons maintenant considérer les solutions du second type obtenues en adjoignant à (33) la condition supplémentaire :

$$\Phi_{\mu\lambda, \rho\lambda} = 0.$$

Dans ce cas nous écrivons pour les solutions du type ondes planes :

$$(56) \quad \begin{aligned} \Phi_{\mu\nu,\rho} &= \Psi_{\mu\nu,\rho} Z_1(u), \\ \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \Psi_{\mu\nu,\rho\sigma} Z_2(u), \\ K(u) &= Z_3(u). \end{aligned}$$

Nous conservons les définitions (25) de  $\Psi_{\mu\nu,\rho}$  et  $\Psi_{\mu\nu,\rho\sigma}$ .

Nous avons ici :

$$(57) \quad \begin{aligned} \Psi_{(\mu\nu),\rho} \Psi^{(\mu\nu),\rho} &= -Z_1^2, \\ \Psi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} \Psi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)} &= -2Z_2^2, \\ \Psi_{\mu\nu,(\rho\sigma)} \Psi^{\nu,(\rho\sigma)} &= -n_\mu Z_1 Z_2. \end{aligned}$$

En reportant dans (33), on obtient alors le système différentiel :

$$(58) \quad \begin{aligned} Z_1' &= 2x_1 Z_2 Z_3, \\ Z_2' &= -2x_2 Z_1 Z_3, \\ Z_3' &= +x_3 Z_1 Z_2. \end{aligned}$$

Posant encore :

$$(59) \quad Z_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2x_2 x_3}} y_1(u), \quad Z_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2x_1 x_3}} y_2(u), \quad Z_3(u) = \frac{1}{\sqrt{4x_1 x_2}} y_3(u),$$

on obtient le système :

$$(60) \quad y_1' = y_2 y_3, \quad y_2' = -y_1 y_3, \quad y_3' = y_1 y_2.$$



Celui-ci admet deux intégrales premières que nous écrivons :

$$(61) \quad \begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= \lambda_3^2 = \mu_3^2 x_3, \\ y_2^2 + y_3^2 &= \lambda_4^2 = \mu_4^2 x_1. \end{aligned}$$

Ces relations nous donnent encore :

$$(62) \quad \begin{aligned} 2x_2x_3Z_1^2 + 2x_1x_3Z_2^2 &= \lambda_3^2 = \mu_3^2 x_3, \\ 2x_1x_3Z_2^2 + 4x_1x_2Z_3^2 &= \lambda_4^2 = \mu_4^2 x_1 \end{aligned}$$

et :

$$2x_2x_3Z_1^2 - 4x_1x_2Z_3^2 = \lambda_3^2 - \lambda_4^2.$$

La solution générale du système (60), (61) prend encore deux formes suivant que  $\lambda_3^2 < \lambda_4^2$  ou  $\lambda_3^2 > \lambda_4^2$ .

Dans le cas A' :  $\lambda_3^2 < \lambda_4^2$ , nous avons :

$$(63) \quad \begin{aligned} y_1(u) &= -\lambda_3 \operatorname{cn}(\lambda_4 u + \varphi, \lambda_3/\lambda_4) \\ y_2(u) &= \lambda_3 \operatorname{sn}(\lambda_4 u + \varphi, \lambda_3/\lambda_4) \\ y_3(u) &= \lambda_4 \operatorname{dn}(\lambda_4 u + \varphi, \lambda_3/\lambda_4). \end{aligned}$$

Dans le cas B' :  $\lambda_4^2 < \lambda_3^2$ , nous avons :

$$(64) \quad \begin{aligned} y_1(u) &= \lambda_3 \operatorname{dn}(\lambda_3 u + \varphi, \lambda_4/\lambda_3) \\ y_2(u) &= \lambda_4 \operatorname{sn}(\lambda_3 u + \varphi, \lambda_4/\lambda_3) \\ y_3(u) &= -\lambda_4 \operatorname{cn}(\lambda_3 u + \varphi, \lambda_4/\lambda_3). \end{aligned}$$

Il est peut-être plus intéressant d'écrire les fonctions des cas A' et B' au moyen de fonctions elliptiques de Jacobi déphasées de  $K(k)$ ,  $\left(K(0) = \frac{\pi}{2}\right)$ .

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + K) &= \operatorname{cd}(u) = \operatorname{cnu}/\operatorname{dnu} \\ \operatorname{cn}(u + K) &= -k' \operatorname{sdu} = -k' \operatorname{snu}/\operatorname{dnu} \\ \operatorname{dn}(u + K) &= k' \operatorname{ndu} = k' / \operatorname{dnu}. \end{aligned}$$

Dans le cas A' :

$$k = \lambda_3/\lambda_4, \quad \text{et} \quad k' = \frac{1}{\lambda_4} \sqrt{\lambda_4^2 - \lambda_3^2}.$$

Dans le cas B' :

$$k = \lambda_4/\lambda_3, \quad \text{et} \quad k' = \frac{1}{\lambda_3} \sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_4^2}.$$

Posant  $\varphi = K(k) + \varphi_1$ , on obtient alors :

Dans le cas A' :

$$(65) \quad \begin{aligned} y_1(u) &= (\lambda_3/\lambda_4)\sqrt{\lambda_4^2 - \lambda_3^2}sd(\lambda_4u + \varphi_1, \lambda_3/\lambda_4), \\ y_2(u) &= \lambda_3cd(\lambda_4u + \varphi_1, \lambda_3/\lambda_4), \\ y_3(u) &= \sqrt{\lambda_4^2 - \lambda_3^2}nd(\lambda_4u + \varphi_1, \lambda_3/\lambda_4). \end{aligned}$$

Dans le cas B' :

$$(66) \quad \begin{aligned} y_1(u) &= \sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_4^2}nd(\lambda_3u + \varphi_1, \lambda_4/\lambda_3), \\ y_2(u) &= \lambda_4cd(\lambda_3u + \varphi_1, \lambda_4/\lambda_3), \\ y_3(u) &= (\lambda_4/\lambda_3)\sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_4^2}sd(\lambda_3u + \varphi_1, \lambda_4/\lambda_3). \end{aligned}$$

Si nous revenons aux expressions (63) du cas A' elles nous donnent pour les fonctions  $Z_p(u)$  :

$$(67) \quad \begin{aligned} Z_1(u) &= -\frac{\mu_3}{\sqrt{2x_2}}cn(\lambda_4u + \varphi, \lambda_3/\lambda_4), \\ Z_2(u) &= \frac{\mu_3}{\sqrt{2x_1}}sn(\lambda_4u + \varphi, \lambda_3/\lambda_4), \\ Z_3(u) &= \frac{\mu_4}{2\sqrt{x_2}}dn(\lambda_4u + \varphi, \lambda_3/\lambda_4). \end{aligned}$$

Dans le cas B' les équations (64) nous donnent de même :

$$(68) \quad \begin{aligned} Z_1(u) &= \frac{\mu_3}{\sqrt{2x_2}}dn(\lambda_3u + \varphi, \lambda_4/\lambda_3), \\ Z_2(u) &= \frac{\mu_4}{\sqrt{2x_3}}sn(\lambda_3u + \varphi, \lambda_4/\lambda_3), \\ Z_3(u) &= -\frac{\mu_4}{2\sqrt{x_2}}cn(\lambda_3u + \varphi, \lambda_4/\lambda_3). \end{aligned}$$

La partie corpusculaire de la fonction d'onde est constituée ici (cas B') par les fonctions :

$$K(u) \quad \text{et} \quad C_\mu(u) = -n_\mu Z_1 Z_2.$$

Nous avons alors :

$$\partial_\mu K = -x_3 C_\mu$$

et nous en déduisons l'équation du second ordre vérifiée par  $K(u)$  :

$$(69) \quad \square K + (\lambda_3^2 - 2\lambda_4^2)K + 8x_1x_2K^3 = 0.$$

La masse propre réduite est ici  $\lambda_3$  et se trouve liée aux fonctions de champ par la relation :

$$(70) \quad \lambda_3^2 = 2x_2x_3Z_1^2 + 2x_1x_3Z_2^2 = -2x_2x_3\Phi_{(\mu\nu),\rho}\Phi^{(\mu\nu),\rho} - x_1x_3\Phi_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\Phi^{(\mu\nu),(\rho\sigma)}.$$

#### IV. — LA THÉORIE DE CHAMP CLASSIQUE DU MODÈLE NON LINÉAIRE SPIN 0 - SPIN $2\hbar$

Nous allons maintenant associer au modèle décrit par les équations (33) une théorie de champ classique en construisant un formalisme hamiltonien associé à l'évolution des états du champ :

$$(\Phi_{\mu\nu,\rho}, \Phi_{\mu\nu,\rho\sigma}, K).$$

Pour cela nous considérerons les états d'onde plane du champ dont l'évolution est déterminée par les équations différentielles par rapport à la variable  $u = n_\mu x^\mu$ .

Les états du champ sont donc des deux types que nous avons déterminés au moyen des fonctions  $Y_1(u)$ ,  $Y_2(u)$ ,  $Y_3(u)$  ou  $Z_1(u)$ ,  $Z_2(u)$ ,  $Z_3(u)$ .

Considérons les états du premier type pour lesquels les fonctions  $Y(u)$  sont déterminées par les équations différentielles (41) et leurs intégrales premières (45).

Nous avons ici trois choix possibles pour les variables canoniques qui vont caractériser les états du champ :

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & X = Y_1, & P = lx_1Y_2Y_3, \\ 2^\circ & X = Y_2, & P = -lx_2Y_1Y_3, \\ 3^\circ & X = Y_3, & P = -lx_3Y_1Y_2 \end{array}$$

( $l$  est une constante dimensionnelle arbitraire).

Considérons d'abord le premier cas :

Le système (41)-(45) nous donne :

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dX}{du} = \frac{1}{l} P = \frac{\partial H_1}{\partial P}, \\ P' &= \frac{dP}{du} = -l[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 2x_2x_3X^2]X = -\frac{\partial H_1}{\partial X}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$(71) \quad H_1 = \frac{1}{2l} P^2 + \frac{l}{2} [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)X^2 - x_2x_3X^4].$$

De plus (45) donne :

$$(72) \quad H_1 = \frac{l}{2} \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{x_2 x_3} = \frac{l}{2} \mu_1^2 \mu_2^2.$$

La fonction d'Hamilton  $H_1$  correspond aux cas où les constantes (intégrales premières)  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  sont fixées.

Un hamiltonien plus général sans ce choix est obtenu en introduisant une variable cyclique  $X_2$  et en adoptant la nouvelle fonction d'Hamilton :

$$(73) \quad H_{(1)} = \frac{1}{2l} P_1^2 + \frac{l}{2} [X_1^2 P_2 - x_2 x_3 X_1^4].$$

Les équations du mouvement déduites de cette fonction d'Hamilton nous donnent :

$$(74) \quad \begin{aligned} \frac{dX_1}{du} &= \frac{1}{l} P_1, & \frac{dX_2}{du} &= \frac{l}{2} X_1^2, \\ \frac{dP_2}{du} &= 0 & \text{d'où} & \quad P_2 = \text{Cte} = C_2, \\ \frac{dP_1}{du} &= -l[X_1 P_2 - 2x_2 x_3 X_1^3]. \end{aligned}$$

$H_{(1)}$  est ici une intégrale première et nous caractérisons un état par :

$$(75) \quad H_{(1)} = \frac{l}{2} C_1, \quad P_2 = C_2$$

$C_1, C_2$  sont deux constantes arbitraires positives.

Les équations d'évolution en  $u$  sont alors déterminées par :

$$\frac{dX_1}{du} = \frac{1}{l} P_1$$

avec :

$$P_1^2 = l^2 [C_1 - C_2 X_1^2 + x_2 x_3 X_1^4] \quad \text{et} \quad \frac{dX_2}{du} = \frac{l}{2} X_1^2.$$

Nous pouvons associer aux constantes  $C_1, C_2$  deux nouvelles constantes  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  définies par :

$$(76) \quad C_1 = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{x_2 x_3}, \quad C_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

Les équations du mouvement sont alors :

$$\frac{dX_1}{du} = \frac{1}{l} P_1,$$

$$P_1^2 = l^2 \left( \frac{\lambda_1^2}{x_3} - x_2 X_1^2 \right) \left( \frac{\lambda_2^2}{x_2} - x_3 X_1^2 \right).$$

Si nous introduisons les fonctions auxiliaires  $Y_1(u)$ ,  $Y_2(u)$ ,  $Y_3(u)$  définies à partir de  $X_1$  par :

$$Y_1(u) = X_1(u),$$

$$Y_2(u) = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_3}} \sqrt{\lambda_1^2 - x_2 x_3 X_1^2},$$

$$Y_3(u) = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \sqrt{\lambda_2^2 - x_2 x_3 X_1^2},$$

nous retrouvons avec  $P_1 = lx_1 Y_2 Y_3$  l'équation :

$$Y_1' = x_1 Y_2 Y_3$$

et les deux relations :

$$Y_2' = -x_2 Y_1 Y_3, \quad Y_3' = -x_3 Y_1 Y_2,$$

ainsi que (46).

La fonction d'Hamilton (73) nous redonne bien les équations (41) et (45).

La définition de la fonction  $X_2(u)$  nous donne :

$$X_2(u) = \frac{l}{2} \int_0^u X_1^2(u) du.$$

Dans le cas (A) nous avons vu que :

$$X_1(u) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{x_2 x_3}} \operatorname{sn}(\lambda_2 u, \lambda_1/\lambda_2)$$

d'où :

$$X_2(u) = \frac{l}{2} \frac{\lambda_1^2}{x_2 x_3} \int_0^u \operatorname{sn}^2 \lambda_2 u du.$$

Mais l'on a par ailleurs :

$$\int \operatorname{sn}^2 u du = \frac{1}{k^2} [u - E(u, k)]$$

ou en introduisant la fonction zêta  $Z(u, k)$  de Jacobi par :

$$Z(u, k) = E(u, k) - \frac{E}{K} u,$$

$$\int sn^2 u du = \frac{1}{k^2} \left[ \frac{K - E}{K} u - Z(u, k) \right],$$

( $E(u, k)$  intégrale de Legendre;  $K(k)$ ,  $E(k)$ , intégrales complètes de Legendre).

Nous en déduisons :

$$X_2(u) = \frac{l}{2} \frac{\lambda_2}{x_2 x_3} \left[ \lambda_2 u - E\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \right] = \frac{l}{2} \frac{\lambda_2}{x_2 x_3} \left[ \left(1 - \frac{E}{K}\right) \lambda_2 u - Z(\lambda_2 u, \lambda_1/\lambda_2) \right].$$

Rappelons que  $Z(u, k)$  est périodique de période  $2K(k)$ .

Dans le cas (B),  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  se permutent dans l'expression de  $X_2(u)$ .

Le second choix de variables canoniques, soit :

$$X_1 = Y_2, \quad P_1 = -l x_2 Y_1 Y_3,$$

nous donne les équations canoniques :

$$X_1' = \frac{1}{l} P_1,$$

$$P_1' = -l [(\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2) + 2x_1 x_3 X_1^2] X_1.$$

Celles-ci dérivent de la fonction d'Hamilton  $H_{(2)}$  :

$$(77) \quad H_{(2)} = \frac{1}{2l} P_1^2 + \frac{l}{2} [(\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2) X_1^2 + x_1 x_3 X_1^4]$$

et l'on a ici :

$$H_{(2)} = \frac{l}{2x_1 x_3} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^2.$$

Nous pouvons encore remplacer cette fonction d'Hamilton par la fonction plus générale :

$$(78) \quad H_{(2)} = \frac{1}{2l} P_1^2 + \frac{l}{2} [X_1^2 P_2 + x_1 x_3 X_1^4].$$

Les équations du mouvement se déduiront ici des intégrales premières :

$$H_{(2)} = \frac{l}{2} C_1', \quad P_2 = C_2'$$

au moyen des relations :

$$X_1' = \frac{1}{l} P_1,$$

$$P_1^2 = l^2 [C_1' - C_2' X_1^2 - x_1 x_3 X_1^4].$$

En associant à  $C_1'$  et  $C_2'$  les constantes  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  telles que :

$$C_1' = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{\lambda_1^2}{x_1 x_3}, \quad C_2' = (\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2)$$

nous écrivons :

$$P_1^2 = l^2 \left[ \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{x_1} + x_3 X_1^2 \right] \left[ \frac{\lambda_1^2}{x_3} - x_1 X_1^2 \right].$$

Nous retrouverons les équations (41) et (45) en définissant les fonctions  $Y(u)$  par :

$$Y_2 = X_1,$$

$$x_2 x_3 Y_1^2 = \lambda_1^2 - x_1 x_3 X_1^2,$$

$$x_1 x_2 Y_3^2 = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + x_1 x_3 X_1^2.$$

Le troisième choix de variables canoniques, soit :

$$X_1 = Y_3, \quad P_1 = -l x_3 Y_1 Y_2$$

nous donne :

$$X_1' = \frac{1}{l} P_1,$$

$$P_1' = -l [(\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2) X_1 + 2x_1 x_2 X_1^3].$$

Ces équations sont déduites encore de la fonction d'Hamilton :

$$(79) \quad H_{(3)} = \frac{1}{2l} P_1^2 + \frac{l}{2} [(\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2) X_1^2 + x_1 x_2 X_1^4]$$

avec la valeur particulière :

$$H_{(3)} = \frac{l}{2} \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{x_1 x_2} \lambda_2^2.$$

Nous pouvons ici encore remplacer cette fonction d'Hamilton par la fonction plus générale :

$$(80) \quad H_{(3)} = \frac{1}{2l} P_1^2 + \frac{l}{2} [X_1^2 P_2 + x_1 x_3 X_1^4].$$

Les intégrales premières :

$$H_{(8)} = \frac{l}{2} C_1', \quad P_2 = C_2'$$

nous redonnent les équations (41) (45) si nous définissons  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  par :

$$C_1' = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^2}{x_1 x_3}, \quad C_2' = \lambda_1^2 - 2\lambda_2^2.$$

L'équivalence des équations du mouvement associées à ces trois fonctions d'Hamilton résulte de leur équivalence canonique.

Dans le cas du second type de solutions des équations (33) nous avons été conduit au système différentiel :

$$(81) \quad \begin{aligned} Z_1' &= 2x_1 Z_2 Z_3, \\ Z_2' &= -2x_2 Z_1 Z_3, \\ Z_3' &= x_3 Z_1 Z_2 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} 2x_2 x_3 Z_1^2 + 2x_1 x_3 Z_2^2 &= \lambda_3^2, \\ 2x_1 x_3 Z_2^2 + 4x_1 x_2 Z_3^2 &= \lambda_4^2. \end{aligned}$$

Si nous considérons le changement de variables :

$$(82) \quad \begin{aligned} Z_1 &= -\sqrt{\frac{x_1}{2x_2}} Y_2, & Z_2 &= \sqrt{\frac{x_2}{2x_1}} Y_1, \\ Z_3 &= \frac{1}{2} Y_3, \end{aligned}$$

le système précédent devient :

$$Y_1' = x_1 Y_2 Y_3, \quad Y_2' = -x_2 Y_1 Y_3, \quad Y_3' = -x_3 Y_1 Y_2$$

avec :

$$\begin{aligned} x_1 x_3 Y_2^2 + x_2 x_3 Y_1^2 &= \lambda_3^2, \\ x_1 x_3 Y_2^2 + x_1 x_2 Y_3^2 &= \lambda_4^2. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc le système (41)-(45) avec substitution de  $\lambda_3^2$  et  $\lambda_4^2$  à  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$ .

Toutefois, nous devons remarquer que ces constantes représentent des combinaisons de fonctions distinctes dans les deux cas. Mais du point de vue fonctions d'Hamilton nous retrouverons les fonctions du premier cas.



Les trois fonctions d'Hamilton seront donc du type :

$$(83) \quad H_{(p)} = \frac{1}{2l} P_1^2 + \frac{l}{2} [X_1^2 P_2 + v_p X_1^4]$$

avec dans le premier cas :

$$v_1 = -x_2 x_3, \quad v_2 = x_1 x_3, \quad v_3 = x_1 x_2,$$

et dans le second cas :

$$v'_1 = 2x_2 x_3, \quad v'_2 = -2x_1 x_3, \quad v'_3 = 4x_1 x_2.$$

## V. — LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS ASSOCIÉE AU MODÈLE NON LINÉAIRE SPIN 0 - SPIN $2\hbar$

Nous allons maintenant associer une théorie quantique des champs au modèle que nous venons d'étudier. Cette théorie quantique des champs va nous conduire à restreindre les valeurs des intégrales premières  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  ou  $\lambda_3^2$ ,  $\lambda_4^2$  à certaines valeurs seulement et par suite nous obtiendrons une *quantification simultanée* des *amplitudes* et des *masses propres* alors que la théorie quantique des champs usuelle construite sur les équations d'ondes linéaires ne quantifie que les amplitudes.

Nous construirons [4] [5] cette théorie quantique des champs par analogie avec la première quantification. Celle-ci se ramène d'une part à l'association aux équations dynamiques (écrites sous forme newtonienne ou hamiltonienne) d'une équation de Schrödinger qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre obtenue par une correspondance formelle entre grandeurs classiques et opérateurs et d'autre part en restreignant la variété des solutions de cette équation de Schrödinger par des conditions fonctionnelles permettant une interprétation probabiliste de ces solutions. Cette interprétation probabiliste est construite de façon à retrouver les équations du mouvement classique pour les valeurs moyennes des opérateurs associés aux grandeurs dynamiques.

J'admets ici que ce processus est encore valable pour construire une théorie quantique des champs associée à l'équation d'évolution d'un champ  $\Psi(\vec{x}, t)$  du type :

$$(84) \quad \square\Psi - F(\Psi) = 0.$$

Nous nous limiterons ici aux états de champ bien définis constitués par des états d'ondes planes d'amplitudes bornées.

Pour ces états nous pouvons encore écrire :

$$\Psi(x^\mu) = \Psi(u)$$

avec :

$$u = n_\mu x^\mu.$$

L'équation d'évolution du champ (84) se ramène alors à l'équation différentielle :

$$(85) \quad \frac{d^2}{du^2} \Psi(u) - F(\Psi) = 0.$$

Nous considérons cette équation comme l'analogie en théorie de champ classique de l'équation de Newton d'un mouvement.

Nous nous placerons alors dans le cas particulier où  $F(\Psi)$  « dérive d'un potentiel » soit :

$$F(\Psi) = -\frac{d}{d\Psi} V(\Psi).$$

Ceci nous permet d'introduire la fonction d'Hamilton du champ :

$$H(p, \Psi) = \frac{1}{2} p^2 + V(\Psi).$$

Nous associerons à celle-ci un « opérateur hamiltonien », soit :

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{d\Psi^2} + V(\Psi)$$

et formellement l'« équation de Schrödinger » du champ :

$$(86) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial u} \Phi(\Psi, u) = (H)_{op} \Phi(\Psi, u) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} + V(\Psi) \right] \Phi(\Psi, u).$$

Dans la variété générale des solutions  $\Phi(\Psi, u)$  de cette équation aux dérivées partielles *linéaire* du second ordre, nous nous restreindrons à certaines solutions  $\Phi(\Psi, u)$  « quantifiées » par la condition de pouvoir les utiliser pour construire un formalisme d'interprétation probabiliste. Celui-ci ne sera pas en général le même que celui adopté en première quantification.

Si nous considérons par exemple une équation de champ du type :

$$(87) \quad \square \Psi + \mu_0^2 \Psi \pm \mu_1^2 \Psi^3 = 0,$$

nous avons ici :

$$V(\Psi) = \frac{\mu_0^2}{2} \Psi^2 \pm \frac{\mu_1^2}{4} \Psi^4.$$

Pour un état d'onde plane où  $\Psi(x^\mu) = \Psi(u)$  l'équation de Schrödinger associée à (87) s'écrira :

$$(88) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial u} \Phi(\Psi, u) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} + \frac{\mu_0^2}{2} \Psi^2 \pm \frac{\mu_1^2}{4} \Psi^4 \right] \Phi(\Psi, u).$$

Séparant les variables en écrivant :

$$\Phi(\Psi, u) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon u}\Phi(\Psi),$$

il reste :

$$\varepsilon\Phi(\Psi) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{d\Psi^2} + V(\Psi) \right] \Phi(\Psi)$$

ou encore :

$$(89) \quad \left[ \frac{d^2}{d\Psi^2} + \frac{2}{\hbar^2} \varepsilon - V(\Psi) \right] \Phi(\Psi) = 0$$

c'est-à-dire ici :

$$(90) \quad \left[ \frac{d^2}{d\Psi^2} + \frac{2}{\hbar^2} \left[ \varepsilon - \frac{\mu_0^2}{2} \Psi^2 \mp \frac{\mu_1^2}{4} \Psi^4 \right] \right] \Phi(\Psi) = 0.$$

L'équation de champ (87) nous conduit pour déterminer  $\Phi(\Psi)$  à l'équation d'un oscillateur anharmonique.

La forme usuelle de la théorie quantique des champs est retrouvée avec l'équation de l'oscillateur harmonique correspondant au cas  $\mu_1 = 0$ .

A cette équation (90) avec  $\mu_0^2$  et  $\mu_1^2$  fixés sous la condition que les fonctions  $\Psi(u)$  solutions de :

$$(91) \quad \frac{d^2\Psi}{du^2} + \mu_0^2\Psi \pm \mu_1^2\Psi^3 = 0,$$

soient d'amplitudes bornées, nous pourrions associer un problème de Sturm-Liouville classique sur un intervalle borné ou un problème de Sturm-Liouville singulier sur  $-\infty < \Psi < +\infty$ . Les solutions correspondantes déterminent un spectre de valeurs de  $\varepsilon$ , soient  $\varepsilon_n$  auxquelles correspondent des fonctions propres  $\Phi(\Psi, \varepsilon_n)$  orthogonales sur  $-\infty, +\infty$  avec la fonction de poids 1.

Nous allons appliquer plus explicitement cette méthode au cas du modèle étudié ci-dessus.

Les équations (33) étant considérées comme équations de champ classique et en prenant les fonctions  $Y(u)$  comme variables du champ, nous avons associé à  $Y_1, Y_2, Y_3$  ou à  $Z_1, Z_2, Z_3$  les fonctions d'Hamilton (83).

Appliquant la méthode indiquée ci-dessus nous faisons correspondre aux moments  $P_1, P_2$  des opérateurs différentiels par la correspondance formelle :

$$P \rightarrow (P_1)_{op} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X_1}, \quad P_2 \rightarrow (P_2)_{op} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X_2}.$$

Nous obtenons alors à partir des fonctions  $H_{(p)}$  des opérateurs hamil-

toniens. Ceci nous permet d'écrire les équations de Schrödinger correspondantes :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial u} \Phi(X_1, X_2, u) = (H_{(p)})_{op} \Phi(X_1, X_2, u)$$

ou encore :

$$(92) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial u} \Phi(X_1, X_2, u) = \left\{ \frac{1}{2l} \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) + \frac{l}{2} \left[ X_1^2 \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial X_2} \right) + \nu_p X_1^4 \right] \right\} \Phi(X_1, X_2, u).$$

Nous séparons les variables dans cette équation en écrivant :

$$(93) \quad \Phi(X_1, X_2, u) = \Phi(X_1) e^{-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{l}{2} C_1 u - C_2 X_1 \right]}$$

$C_1$  et  $C_2$  sont ici deux constantes pour l'instant arbitraires. La fonctionnelle  $\Phi(X_1)$  est maintenant déterminée par l'équation différentielle :

$$(94) \quad \left[ \frac{\hbar^2}{l^2} \frac{d^2}{dX_1^2} + C_1 - C_2 X_1^2 - \nu_p X_1^4 \right] \Phi(X_1) = 0.$$

Cette équation est du type de Schrödinger pour un oscillateur anharmonique et nous redonne l'oscillateur harmonique et par suite la théorie quantique des champs libres usuelle aux différentes approximations linéaires pour lesquelles  $\nu_p = 0$ .

Dans les trois formes hamiltoniennes relatives aux fonctions  $Y_1(u)$ ,  $Y_2(u)$  et  $Y_3(u)$  l'étude précédente nous a exprimé  $C_1$ ,  $C_2$  en fonction de  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$ .

Nous avons vu que l'on avait suivant les cas :

$H_{(p)}$	$C_1$	$C_2$	$\nu_p$
$H_{(1)}$	$\lambda_1^2 \lambda_2^2 / x_3 x_2$	$\lambda_1^2 + \lambda_2^2$	$-x_2 x_3$
$H_{(2)}$	$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^2 / x_1 x_3$	$\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2$	$x_1 x_3$
$H_{(3)}$	$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \lambda_2^2 / x_1 x_2$	$\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2$	$x_1 x_2$

L'équation différentielle (94) s'écrit encore suivant ces trois cas :

$$(95) \quad \begin{aligned} & \left[ \frac{\hbar^2}{l^2} \frac{d^2}{dX^2} + \left( \frac{\lambda_1^2}{x_3} - x_2 X^2 \right) \left( \frac{\lambda_2^2}{x_2} - x_3 X^2 \right) \right] \Phi_{(1)}(X) = 0, \\ & \left[ \frac{\hbar^2}{l^2} \frac{d^2}{dX^2} + \left( \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{x_1} + x_3 X^2 \right) \left( \frac{\lambda_1^2}{x_3} - x_1 X^2 \right) \right] \Phi_{(2)}(X) = 0, \\ & \left[ \frac{\hbar^2}{l^2} \frac{d^2}{dX^2} + \left( \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{x_1} + x_2 X^2 \right) \left( \frac{\lambda_2^2}{x_3} - x_1 X^2 \right) \right] \Phi_{(3)}(X) = 0. \end{aligned}$$

Dans les trois cas un choix fixé par la quantification va déterminer des valeurs acceptées pour  $C_1$  et  $C_2$  et par suite pour  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  et les fonctions  $\Phi_p(X)$  correspondantes.

Les équations (94) ou (95) rentrent dans le type général :

$$y'' + \varphi(x)y = 0.$$

Le théorème de Polya-Szegö indique que la solution générale soit  $y(x)$  est de type « exponentiel » (convexe par rapport à  $OX$ ) si  $\varphi(x) < 0$  ou de type « sinusoidal » (concave par rapport à  $OX$ ) si  $\varphi(x) > 0$ .

De plus, dans ce dernier cas, suivant que  $\varphi(x)$  est croissante ou décroissante, la suite des maximums relatifs de  $y(x)$  est décroissante ou croissante.

La fonction  $\Phi_{(1)}(X, \lambda_1^2, \lambda_2^2)$  est donc de type sinusoidal si  $\lambda_1^2 < \lambda_2^2$  pour

$$|X| < \frac{\lambda_1}{\sqrt{x_2 x_3}} \quad \text{et pour} \quad |X| > \frac{\lambda_2}{\sqrt{x_2 x_3}}$$

et si  $\lambda_2^2 < \lambda_1^2$  pour  $|X| < \lambda_2/\sqrt{x_2 x_3}$  et pour  $|X| > \lambda_1/\sqrt{x_2 x_3}$ . Dans ces deux cas  $X$  correspond à  $Y_1$  qui est toujours fonction de « type corpusculaire ».

Le rôle des fonctions  $Y_2(u)$  et  $Y_3(u)$  comme fonctions corpusculaires et fonctions de champ propre se permute suivant que  $\lambda_1^2 < \lambda_2^2$  ou  $\lambda_2^2 < \lambda_1^2$ .

Si  $\lambda_1^2 < \lambda_2^2$  la fonction  $\Phi_2(X)$  est de type sinusoidal seulement pour :

$$|X| < \lambda_1/\sqrt{x_1 x_3}.$$

Si  $\lambda_2^2 < \lambda_1^2$ ,  $\Phi_{(3)}(X)$  n'est de type sinusoidal que pour  $|X| < \lambda_2/\sqrt{x_1 x_2}$ .

La quantification est obtenue d'une façon générale lorsque l'on associe un problème de Sturm-Liouville, régulier ou singulier, à une équation différentielle du type :

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0,$$

$p(x)$  et  $\rho(x)$  étant définies, continues et de signes constants dans l'intervalle où les fonctions  $y(x)$  sont considérées.

Par suite pour les équations :

$$\left[ \frac{\hbar^2}{t^2} \frac{d^2}{dX^2} + C_1 - C_2 X^2 - v_p X^4 \right] \Phi_{(p)}(X) = 0,$$

la quantification demande d'abord le choix d'un intervalle dans lequel les fonctions  $\Phi_{(p)}(X)$  sont définies.

Si nous prenons  $-\infty < X < +\infty$  nous pourrions considérer la variété

des solutions générales uniformes et continues des équations ci-dessus soient  $\Phi(X, C_1, C_2)$  en les astreignant à deux conditions :

1° Les fonctions  $\Phi(X, C_1, C_2)$  seront de carré sommable par rapport à la fonction de poids :

$$\rho_1(X) = 1.$$

2° Les fonctions  $\Phi(X, C_1, C_2)$  seront de carré sommable par rapport à la fonction de poids :

$$\rho_2(X) = X^2.$$

Nous aurons donc simultanément :

$$(96) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(X, C_1, C_2)|^2 dX &< \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(X, C_1, C_2)|^2 X^2 dX &< \infty. \end{aligned}$$

Ces deux *astreintes* associées à la condition :

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \Phi(X, C_1, C_2) = 0$$

nous permettent de considérer pour les équations (94) différents problèmes de Sturm-Liouville :

a) *Pour  $C_2$  fixé*, on détermine une suite de valeurs  $C_1(n_1, C_2)$  pour lesquelles les solutions correspondant à deux valeurs distinctes  $n'_1, n''_1$  seront orthogonales par rapport à la fonction de poids  $\rho_1(X) = 1$ . Nous aurons donc :

$$(97) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(X, C_1(n'_1), C_2) \Phi(X, C_1(n''_1), C_2) dX = 0$$

pour  $n'_1 \neq n''_1$ ,

b) *Pour  $C_1$  fixé*, on détermine une suite de valeurs  $C_2(n_2, C_1)$  pour lesquelles les solutions correspondant à deux valeurs distinctes  $n'_2, n''_2$  sont orthogonales par rapport à la fonction de poids  $\rho_2(X) = X^2$  :

$$(98) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(X, C_1, C_2(n'_2)) \Phi(X, C_1, C_2(n''_2)) X^2 dX = 0$$

pour  $n'_2 \neq n''_2$ .

c) *Dans le plan  $(C_1, C_2)$  ces deux conditions simultanées* déterminent deux spectres :

$$C_1(n_1, n_2), \quad C_2(n_1, n_2)$$

pour lesquels on a, à partir de *deux éléments distincts* :

$$C_1(n'_1, n'_2), \quad C_2(n''_1, n''_2)$$

simultanément :

$$(99) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(X, C_1(n'_1, n'_2), C_2(n'_1, n'_2)) \Phi(X, C_1(n''_1, n''_2), C_2(n''_1, n''_2)) dX = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(X, C_1(n'_1, n'_2), C_2(n'_1, n'_2)) \Phi(X, C_1(n''_1, n''_2), C_2(n''_1, n''_2)) X^2 dX = 0.$$

Les théorèmes spectraux généraux établis par Titchmarsh montrent que le problème spectral (a) ou (b) conduit avec l'équation (94) à un spectre discret. Il nous paraît vraisemblable (bien que nous ne l'ayons pas démontré) qu'il en est de même dans le double problème spectral (c).

Nous allons montrer maintenant que le formalisme probabiliste de la mécanique quantique transposé en théorie de champ permet de retrouver le système des équations d'évolution des fonctions de champ (41) à partir des solutions de l'équation de Schrödinger (92) du point de vue des valeurs moyennes. Nous transposons ici en théorie quantique des champs le théorème d'Ehrenfest de la première quantification.

Considérons l'équation (92) écrite :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial u} \Phi(X_1, X_2, u) = (H)_{\text{op}} \Phi(X_1, X_2, u)$$

$$= \left[ \frac{1}{2l} (P_1)_{\text{op}}^2 + \frac{l}{2} [X_1^2 (P_2)_{\text{op}} + v_p X_1^4] \right] \Phi(X_1, X_2, u).$$

Suivant les principes généraux de la mécanique quantique, nous définissons la valeur moyenne d'un opérateur  $A(X_1, X_2, P_1, P_2, u)$  pour une fonction d'onde admissible  $\Phi(X_1, X_2, u)$  par :

$$\langle A(u) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dX_1 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} [dX_2 \Phi^* A \Phi] \right]$$

et nous avons alors :

$$\frac{dA}{du} = \frac{i}{\hbar} [HA - AH] + \frac{\partial A}{\partial u}.$$

Avec :

$$(H)_{\text{op}} = \frac{1}{2l} \left[ (P_1)_{\text{op}}^2 + \frac{l}{2} [X_1^2 (P_2)_{\text{op}} + v_p X_1^4] \right]$$

nous aurons ici :

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_1}{du} &= \frac{1}{l} P_1, & \frac{dX_2}{du} &= \frac{l}{2} X_1^2, \\
 \frac{dP_1}{du} &= -l[X_1 P_2 + 2\nu_p X_1^3], \\
 \frac{dP_2}{du} &= 0, & \frac{dH}{du} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{100}$$

H et  $P_2$  étant intégrales premières nous pouvons considérer l'état bien défini tel que :

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi^* H \Phi \rangle &= \frac{l}{2} C_1, \\
 \langle \Phi^* P_2 \Phi \rangle &= C_2.
 \end{aligned}
 \tag{101}$$

La fonction  $X_1(u)$  est alors déterminée par les équations différentielles :

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{dX_1}{du} \right\rangle &= \frac{1}{l} \langle P_1 \rangle, \\
 \left\langle \frac{dP_1}{du} \right\rangle &= -l \langle C_2 X_1 + 2\nu_p X_1^3 \rangle, \\
 \langle P_1^2 \rangle &= \langle C_1 - l^2(C_2 X_1^2 + \nu_p X_1^4) \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{102}$$

Nous pouvons maintenant retrouver le système (41) *du point de vue des valeurs moyennes* par une voie parallèle à celle suivie en première quantification.

En effet, pour un état défini par des valeurs propres associées  $C_1(n_1, n_2)$ ,  $C_2(n_1, n_2)$  et par suite étant *sans dispersion*, nous avons :

$$\langle P_1^2 \rangle = \langle P_1 \rangle.
 \tag{103}$$

D'autre part, remplaçant  $C_1, C_2$  par les constantes  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  associées, nous avons :

$$\langle P_1^2 \rangle = l^2 \left\langle \left( \frac{\lambda_1^2}{x_3} - x_2 X_1^2 \right) \left( \frac{\lambda_2^2}{x_2} - x_3 X_1^2 \right) \right\rangle.$$

Nous introduisons alors les fonctions :

$$\begin{aligned}
 Y_1(u) &= \langle X_1 \rangle \\
 Y_2(u) &= \frac{1}{\sqrt{x_1 x_3}} \left\langle \sqrt{\lambda_1^2 - x_2 x_3 X_1^2} \right\rangle, \\
 Y_3(u) &= \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \left\langle \sqrt{\lambda_2^2 - x_2 x_3 X_1^2} \right\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{104}$$



Nous avons alors :

$$\langle P_1^2 \rangle = \langle P_1 \rangle^2 = l^2 x_1^2 Y_1^2 Y_2^2$$

et par suite :

$$(105) \quad \frac{dY_1(u)}{du} = x_1 Y_2(u) Y_3(u).$$

La définition de  $Y_2(u)$  entraîne que :

$$\frac{dY_2(u)}{du} = \frac{i}{\hbar} \langle H Y_2 - Y_2 H \rangle = -\frac{x_2}{x_1} \left\langle \frac{Y_1}{Y_2} P_1 + P_1 \frac{Y_1}{Y_2} \right\rangle$$

et par suite :

$$(106) \quad \frac{d}{du} Y_2(u) = -x_2 Y_1 Y_3.$$

De même on a :

$$(107) \quad \frac{d}{du} Y_3(u) = -x_3 Y_1 Y_2.$$

Nous retrouvons donc le système différentiel (41) pour les valeurs moyennes de  $X_1$  et des fonctions  $Y_2(X_1)$ ,  $Y_3(X_1)$  associées, la fonction d'ondes  $\Phi(X_1, X_2, u)$  étant fonction propre de l'équation de Schrödinger (92).

## VI. — CONCLUSION

En conclusion, le modèle étudié montre la possibilité de décrire par une extension non linéaire de la théorie des particules à spin un corpuscule de type scalaire (spin 0) possédant un champ propre de spin  $2\hbar$  (assimilable à un champ de gravitation). Un invariant quadratique construit avec les tenseurs caractéristiques de ce champ propre et intégrale première de l'évolution du système joue le rôle de masse dynamique de l'élément corpusculaire. La théorie quantique des champs que nous proposons d'associer à ce modèle conduit à une quantification simultanée des amplitudes et de la masse propre dynamique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Voir par exemple : M. FIERZ et W. PAULI, *Proc. roy. Soc. London*, A t. 173, 1939, pp. 211-232.  
 [2] Voir par exemple : G. PETIAU, *J. de Physique*, t. 6, 1945, pp. 115-120.

Dans cet article je montrais notamment comment en considérant un champ de particules de spin  $2\hbar$  comme agent d'échange d'énergie et de quantité de mouvement entre corpuscules de spin  $\hbar/2$ , l'élément de matrice d'interaction correspond à l'approximation statique à un potentiel newtonien.

- [3] G. PETIAU, *Nuovo Cimento*, suppl. t. 9, 1958, pp. 542-568; *J. de Physique*, t. 20, 1959, p. 784; *Cahiers de Physique*, t. 13, 1959, p. 429; t. 14, 1960, p. 5; t. 15, 1961, p. 157; t. 16, 1962, p. 491.
- [4] G. PETIAU, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 259, 1964, p. 4525; t. 260, 1965, p. 1107.
- [5] G. PETIAU, *Sur les théories quantiques des champs associées à des modèles simples d'équations d'ondes non linéaires* (à paraître au *Nuovo Cimento*).

(Manuscrit reçu le 23 juin 1965).