

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-FRANÇOIS BENNOUN

Étude des milieux continus élastiques et thermodynamiques en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 3, n° 1 (1965), p. 41-110

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_1_41_0

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Étude des milieux continus élastiques et thermodynamiques en relativité générale

par

Jean-François BENNOUN
(Institut Henri Poincaré).

RÉSUMÉ. — Ce travail a pour but la construction d'une théorie relativiste des milieux continus, tenant compte du fait que, dans le cadre de la relativité générale, seules les variations des grandeurs physiques sont accessibles à l'expérience. La première partie est consacrée à la mise en évidence des propriétés de structure des milieux élastiques : après avoir établi la forme des équations de liaison décrivant les états variés de tels milieux, je mets en évidence un groupe d'équations permettant de poser complètement le problème de l'élasticité en relativité générale. J'étends ensuite cette étude à une thermodynamique relativiste fondée sur une interprétation tensorielle du second principe; j'étudie, à l'aide d'une hypothèse de continuité relative au taux de variation de la densité d'entropie totale, les variétés caractéristiques du problème posé et je dégage la forme générale de l'équation des fronts d'onde thermodynamiques. J'effectue enfin une application de cette étude générale au cas de l'isotropie.

ABSTRACT. — This work is devoted to the formulation of a relativistic theory of continuous media, taking in due consideration the fact that, within the general theory of relativity, only the variation of physical quantities is operationally accessible. In the first part, we deal with the structure of elastic media: linking equations are established, which describe the variation of states; the problem of elasticity in general relativity is then fully described. Such a study is afterwards extended through a relativistic thermodynamics, founded on a tensorial interpretation of the second principle;

a continuity hypothesis related to the rate of change of the entropy density enables to study characteristic initial manifolds, and to set the relativistic equation of thermodynamics wave front. The work concludes with an application of the theory to the isotropic case.

INTRODUCTION

Le problème de la représentation des sources du champ de gravitation en relativité générale est lié de manière fondamentale à la résolution d'une difficulté d'ordre conceptuel : la relativité générale, basée strictement sur le principe d'équivalence faible, admet la validité des lois de la relativité restreinte à l'intérieur d'un repère local d'inertie, à condition de modifier en chaque point de l'espace-temps la valeur des étalons de mesure locaux. Cette situation a pour conséquence au point de vue de la description des milieux matériels créant le champ, que la définition d'un état de référence naturel du milieu, nécessaire pour l'établissement d'une échelle absolue de mesure des grandeurs d'état, perd toute signification physique, et donc que la représentation globale du milieu à l'aide d'équations d'état ne peut plus être envisagée.

Cette difficulté peut cependant être surmontée à condition d'abandonner la description classique des états d'un milieu matériel en faveur de la description de la variation des états du milieu au cours de son évolution. Ce point de vue constitue l'idée directrice de ce travail, dont l'objet est l'étude d'une représentation des milieux continus compatible avec la relativité générale.

Dans le chapitre premier de ce travail, je tente de montrer, à partir d'une analyse des fondements de la relativité générale, la nécessité de l'introduction du point de vue des états variés dans la construction d'une théorie relativiste des milieux continus.

Au cours du chapitre II, je considère une situation physique précise relative aux milieux élastiques adiabatiques, et je construis le groupe des équations de liaison décrivant les états variés de ces milieux. Je pose ensuite selon un schéma adapté au point de vue des états variés le problème de la liaison du champ de gravitation avec ses sources.

J'étends ensuite cette représentation aux milieux continus thermodynamiques, en précisant les postulats de base de la thermodynamique relativiste; cette étude constitue l'objet du chapitre III.

Au cours de la recherche des classes de variétés caractéristiques du pro-

blème des milieux continus thermodynamiques, développée dans le chapitre IV, j'établis la forme générale de l'équation des fronts d'onde thermodynamiques.

En illustration de cette étude générale, j'applique dans le chapitre V les résultats précédents au cas particulier des milieux isotropes. Après avoir proposé une définition de ces milieux adaptée à la relativité générale, je mets en évidence certaines propriétés des fronts d'onde thermodynamiques se propageant dans les milieux isotropes; pour conclure, j'étudie en exemple la structure du champ de gravitation créé par une classe particulière des milieux continus thermodynamiques isotropes.

CHAPITRE PREMIER

LE PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION DES MILIEUX CONTINUS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1. Fondements de la relativité générale.

Le problème de la représentation des sources du champ de gravitation est lié de manière étroite à la signification des principes de la relativité générale; dans le but de poser ce problème dans toute sa généralité, nous nous proposons de refaire brièvement le chemin qui mène de la mécanique classique de Newton à la théorie de la gravitation d'Einstein.

La mécanique newtonienne suppose essentiellement ⁽¹⁾ :

i) L'équivalence des systèmes de référence au repos les uns par rapport aux autres, ce qui assure l'existence des systèmes d'inertie.

ii) L'équivalence des systèmes d'inertie pour la détermination de l'espace et du temps.

iii) Le principe d'action à distance.

A partir de ces postulats, on déduit les conséquences suivantes :

a) A chaque système de référence *S* est associé un espace à trois dimensions qui peut être muni d'une structure de variété euclidienne, et un temps unique valable sur tout cet espace, les horloges ayant été synchronisées au moyen d'un signal de vitesse infinie.

b) En un point d'un tel repère newtonien *S*, la mesure du champ de gravitation tel qu'il est décrit par la théorie de la gravitation de Newton (1679),

⁽¹⁾ Cf. S. Kichenassamy (1964).

s'identifie à la mesure de l'accélération d'un corps d'épreuve placé en ce même point, ce champ possédant la caractéristique empirique remarquable d'être indépendant de la nature du corps d'épreuve (Eotvös (1889), Dicke (1962)). C'est ce fait qui est à l'origine du résultat purement contingent de la proportionnalité entre la masse passive gravitationnelle, concept d'origine théorique, et la masse d'inertie d'un corps; par le postulat de l'identité entre ces deux masses, et en vertu de l'identité entre les masses gravitationnelles passive et active, conséquence stricte des principes de la mécanique, se trouve achevé le processus d'unification du concept de masse, tel qu'il intervient dans l'énoncé de la loi fondamentale de la dynamique.

c) Lorsque l'espace associé à S n'est pas source d'une action gravitationnelle sur les corps en présence, tout point matériel libre admet par rapport à S un mouvement de translation uniforme, ce fait constituant le fond du principe d'inertie; les systèmes d'inertie S sont définis de manière absolue.

L'invariance de la mécanique newtonienne sous le groupe de Galilée, assure donc qu'il est impossible de mettre en évidence le mouvement de translation uniforme d'un système de référence S par le seul moyen d'expériences mécaniques effectuées à l'intérieur de S; c'est cette situation que décrit le *principe de relativité newtonien*.

On sait qu'Einstein (1905) a été conduit, par une analyse critique de la notion de simultanéité à distance, à étendre ce principe pour toutes les expériences, mécaniques et optiques, effectuées à l'intérieur de S; un tel *principe de relativité restreinte* conduit à adopter comme groupe d'invariance des lois de la physique le groupe de Lorentz.

La relativité restreinte admet ⁽²⁾ :

i) De même que la mécanique classique, l'équivalence des repères au repos relatif pour la détermination de l'espace et du temps; ce postulat conserve à l'espace-temps les propriétés attribuées à l'espace et au temps newtonien, et entraîne de la même manière l'existence des repères d'inertie.

ii) La propagation de la lumière isotrope et à vitesse constante par rapport à tout système d'inertie.

Cette théorie conduit à l'abandon de l'espace et du temps absolus de Newton; elle laisse cependant la possibilité de mettre en évidence le mouvement accéléré d'un système de référence S par rapport à un système

⁽²⁾ Ces deux postulats suffisent à fonder entièrement la relativité restreinte, le caractère de réciprocité des systèmes de référence en translation relative uniforme s'en déduisant strictement; cf. S. Kichenassamy (1964).

d'inertie, au moyen d'expériences physiques internes à S et faisant intervenir les forces fictives d'inertie.

Cependant le *principe d'équivalence* d'Einstein (1916), fondé sur l'identité entre masse (passive) gravitationnelle et masse d'inertie, ne permet pas de distinguer localement entre champ d'inertie et champ de gravitation homogène; cette situation entraîne que dans une région de l'espace-temps suffisamment petite pour que l'on ne puisse pas déceler la source du champ de gravitation, le système de référence S peut être assimilé à un système d'inertie. En revanche, si l'on considère une région étendue de l'espace-temps, S ne constitue plus un système d'inertie du fait que l'on peut dans ce cas caractériser le champ gravitationnel. Cela signifie qu'en chaque point du système de référence S deux événements ne sont plus caractérisés par les mêmes intervalles de longueur et de durée. La présence d'un champ de gravitation a donc pour effet de modifier en chaque point la structure géométrique de l'espace-temps; le système de référence S est constitué par le raccord d'une infinité de systèmes d'inertie, et l'espace-temps est représenté par une variété à connexion linéaire.

Ainsi, la représentation de l'espace-temps par une variété à connexion linéaire traduit la situation créée par l'équivalence locale entre champ d'inertie et champ de gravitation homogène. Est-ce qu'il s'ensuit que cette équivalence est *forte*, c'est-à-dire que les lois de la relativité restreinte, y compris leur contenu numérique, sont valables dans un repère d'inertie, indépendamment de la position de ce repère dans l'espace-temps ? En fait non, car S ne constitue pas un véritable repère d'inertie, les étalons de mesure ne coïncidant avec ceux de la relativité restreinte qu'à des infiniment petits près. L'équivalence entre champ d'inertie et champ de gravitation est faible, et cette situation semble bien la seule décrite par l'expérience d'Eotvös⁽³⁾.

2. Les postulats de la relativité générale.

La présence d'un champ de gravitation conduit à représenter l'espace-temps par une variété à connexion linéaire. Einstein a précisé cette conception en munissant cette variété V_4 d'une structure riemannienne définie par la métrique de type hyperbolique normal (signature : $- 2$), supposée régulière :

$$2.1 \quad ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha \text{ et tout indice grec} = 0, 1, 2, 3).$$

Les coordonnées locales (x^γ) n'ont qu'une signification purement topologique, les caractéristiques géométriques de V_4 et la définition des étalons

⁽³⁾ Cf. S. Kichenassamy (1964).

de mesure locaux ne pouvant être obtenues qu'à travers la métrique (2.1).

Conformément à l'interprétation de la théorie, les $g_{\alpha\beta}$ sont identifiés aux potentiels de gravitation. La détermination locale de ces potentiels est obtenue en admettant que :

i) Dans les domaines de V_4 vides d'énergie non gravitationnelle, la métrique est régulière et satisfait aux équations d'Einstein du cas extérieur :

$$2.2 \quad \sqrt{-g}G^{\alpha\beta} = 0,$$

où :

$$2.3 \quad g = \text{dét}(g_{\alpha\beta})$$

et $G^{\alpha\beta}$ désigne le tenseur d'Einstein de V_4 :

$$2.4 \quad G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - 1/2g^{\alpha\beta}R,$$

$R^{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci, et R la courbure scalaire de V_4 .

ii) Dans les domaines de V_4 meublés par une distribution énergétique à laquelle est associée la *densité d'impulsion-énergie* $T^{\alpha\beta}$, les $g_{\alpha\beta}$ supposés réguliers satisfont aux équations d'Einstein du cas intérieur ⁽⁴⁾ :

$$2.5 \quad \sqrt{-g}G^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}.$$

iii) Sur les hypersurfaces frontières limitant les distributions énergétiques, les potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières sont continus, conformément aux conditions de raccordement de Schwarzschild.

Ces postulats sont compatibles avec une hypothèse de différentiabilité de V_4 , que l'on admet être de classe $C^2 - C^4$ par morceaux ⁽⁵⁾.

L'arbitraire sur le choix des coordonnées est assuré par l'existence des quatre identités :

$$2.6 \quad \nabla_{\beta}G^{\alpha\beta} = 0,$$

où ∇ désigne l'opérateur de dérivation covariante relatif à la métrique $g_{\alpha\beta}$; ces identités, conséquences des identités de Bianchi, entraînent en vertu de (2.4) les quatre équations de conservation de la densité d'impulsion-énergie :

$$2.7 \quad \nabla_{\beta}T^{\alpha\beta} = 0.$$

⁽⁴⁾ Le choix des unités adopté dans ce travail est tel que $c = 1$, c désignant la vitesse de la lumière dans le vide, et $\chi = 1$, où $\chi = 8\pi G_n/c^2$ est la constante d'Einstein, et G_n la constante de gravitation newtonienne.

⁽⁵⁾ Cf. A. Lichnerowicz (1955).

Ces équations jouent le rôle de conditions de compatibilité lors de la recherche de solutions exactes des équations de champ; lors du calcul de solutions approchées, leur intégration sur le domaine de V_4 représentatif de l'évolution du milieu matériel fournit la conservation de l'énergie totale et le mouvement des sources du champ.

3. Le problème de la représentation des sources du champ de gravitation.

La description des sources du champ de gravitation est assurée par la donnée de la densité d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ apparaissant dans le second membre des équations d'Einstein du cas intérieur. La construction d'une théorie relativiste de la matière consiste dans la caractérisation de la structure de $T^{\alpha\beta}$ à l'aide d'hypothèses d'origine phénoménologique adaptées aux propriétés du milieu matériel considéré. La mise en forme précise d'un tel problème demande que l'on revienne à nouveau sur la signification des principes de la relativité générale.

Nous avons vu que cette théorie est basée strictement sur le principe d'équivalence faible, ce qui revient à admettre que si les lois de la relativité restreinte restent valables à l'intérieur d'un repère local d'inertie, la présence d'un champ de gravitation a cependant pour effet de modifier soit la valeur des étalons de mesure locaux, soit, ces étalons restant identiques à ceux de la relativité restreinte, la valeur des grandeurs physiques. Il va de soi que ces deux interprétations sont strictement équivalentes au point de vue du contenu numérique des lois de la relativité générale, mais le choix de l'une d'elles est lié de manière profonde à la compréhension de la théorie de la gravitation d'Einstein.

On sait que S. Kichenassamy (1964) a été conduit à admettre que la présence du champ gravitationnel modifie la valeur des étalons de mesure locaux, de telle manière que les phénomènes d'une région petite de l'espace-temps soient décrits par les mêmes nombres que ceux qui leur sont attribués dans un véritable repère d'inertie ⁽⁶⁾ (?).

⁽⁶⁾ Le lien entre le temps propre associé à un système de référence S lié à une particule d'épreuve, et l'accélération de S par rapport au système d'inertie S_0 lié au laboratoire a pu être explicité dans le cas d'un mouvement uniformément sur-accélééré de S par rapport à S_0 ; cf. S. Kichenassamy (1965).

⁽⁷⁾ Cette interprétation permet en particulier de donner une explication satisfaisante du phénomène de décalage vers le rouge, qui distingue, dans l'effet global, l'effet Döppler classique de l'effet purement gravitationnel.

Une telle interprétation conditionne le point de vue adopté pour l'étude du problème de la représentation des milieux continus en relativité générale. Il est nécessaire, pour bien comprendre ce point, d'effectuer un retour sur la manière dont se pose le problème analogue en mécanique classique : il revient dans ce cas à la détermination des équations d'état du milieu matériel qui relient les grandeurs d'état, caractéristiques des propriétés physiques du milieu, aux grandeurs caractéristiques de la configuration de ce milieu. Les grandeurs d'état possèdent une signification absolue, en ce sens qu'elles caractérisent l'état du milieu matériel par rapport à un état de référence défini *a priori* de manière absolue, c'est-à-dire avant toute action d'une influence extérieure au milieu. L'hypothèse que l'on puisse définir un tel *état de référence naturel* est tout à fait fondamentale en théorie classique des milieux continus, bien qu'elle ne soit pas toujours formulée de manière explicite.

Or, la définition d'un état de référence naturel cesse d'être possible en relativité générale, puisque le milieu considéré est lui-même source d'un champ de gravitation qui contribue à modifier la valeur des étalons de mesure destinés à caractériser un tel état. Il s'ensuit qu'il est impossible d'attribuer aux grandeurs d'état caractéristiques du milieu des valeurs absolues, et donc que la représentation des milieux matériels en relativité générale ne peut plus s'effectuer à l'aide des équations d'état du milieu. Cette difficulté conceptuelle, mise en lumière pour la première fois par Synge (1959), doit conduire à une modification radicale des idées classiques concernant le problème de la représentation des milieux continus.

Si la représentation au sens classique d'un milieu matériel nous échappe, nous pouvons toujours décrire celui-ci à partir des caractéristiques connues d'un état antérieur infiniment voisin jouant le rôle d'état de référence; en d'autres termes, il est possible d'attribuer à la variation des états d'un milieu matériel au cours de l'évolution de ce milieu une signification physique intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la définition d'un état naturel de référence⁽⁸⁾. La densité d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ cesse d'avoir une signification physique absolue, seule la variation de cette grandeur restant accessible à l'expérience. Le problème de la représentation des milieux matériels est donc ramené à celui de la détermination des *états variés* du milieu considéré, compatible avec l'interprétation admise de la relativité générale.

(8) Ce point de vue a été également envisagé en mécanique classique, dans un but différent, notamment par C. Truesdell (1955), W. Noll (1955, 1958), B. Bernstein et J. L. Ericksen (1958) ; cf. B. Bernstein (1960).

Ce point de vue, suggéré initialement par Synge (1959), est celui que nous adoptons ici, et dont nous exploitons systématiquement les conséquences en vue de l'élaboration d'une théorie relativiste des milieux continus.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DES MILIEUX CONTINUS ÉLASTIQUES

4. Introduction.

Notre but est la construction d'une théorie relativiste de l'élasticité en accord avec le point de vue des états variés.

Le problème de l'élasticité apparaît déjà d'une grande importance en relativité restreinte, à cause de la trop grande particularité de la classe des mouvements rigides dans le cadre d'un espace-temps de Minkowski, puisque de tels mouvements ne possèdent que trois degrés de liberté⁽⁹⁾; en particulier, ainsi que l'ont montré Herglotz (1910) et Noëther (1910), les mouvements rigides non irrotationnels constituent toujours une isométrie de M_4 .

La situation semble être moins restrictive en relativité générale, où les mouvements rigides au sens de Born⁽¹⁰⁾ possèdent bien les six degrés de liberté requis; cependant, on montre⁽¹¹⁾ que les mouvements rigides des milieux matériels représentés à l'aide d'une densité d'impulsion-énergie de type normal se produisent toujours avec une vitesse angulaire constante. La considération de situations physiques données rend donc nécessaire l'étude de mouvements de types plus généraux.

Le problème de l'élasticité en relativité générale a été posé initialement par Synge⁽¹²⁾ (1959). Dans le but de supprimer les difficultés liées à l'action

⁽⁹⁾ M. Born (1909), G. Herglotz (1910), F. Noëther (1910); cf. W. Pauli (1958) § 45.

⁽¹⁰⁾ N. Rosen (1947), G. Salzman et A. H. Taub (1954); cf. Pirani et Williams (1962).

⁽¹¹⁾ C. B. Rayner (1959), F. A. E. Pirani et G. Williams (1962), R. H. Boyer (1965).

⁽¹²⁾ Le problème de l'élasticité en relativité générale a été notamment abordé par J. L. Synge (1959) et C. B. Rayner (1963); citons également les travaux de J. M. Souriau (1958), A. Bressan (1963), B. de Witt (1963), qui adoptent un point de vue strictement classique.

du champ gravitationnel, cet auteur introduit un groupe d'équations de liaison destinées à décrire les états variés des milieux élastiques; cependant ces équations ne semblent pas entièrement satisfaisantes, du fait de la non-équivalence entre la définition du taux de variation des contraintes et celle du taux de variation des déformations que cet auteur adopte ⁽¹³⁾. La théorie proposée peu de temps après par Rayner (1963) réintroduit les difficultés liées à la définition d'un état de référence naturel du milieu élastique en présence d'un champ de gravitation, cet auteur étant contraint, pour caractériser un tel état, d'introduire une métrique d'espace auxiliaire totalement étrangère à la relativité générale ⁽¹³⁾; on peut cependant déduire, par variation des équations de Rayner, un groupe d'équations de liaison qui ne présentent plus les difficultés des équations de Synge ⁽¹³⁾. De telles théories présentent de toute manière un caractère arbitraire, en ce sens qu'elles ne précisent pas les hypothèses de structure du milieu sous-jacentes aux équations envisagées.

Nous nous proposons, au cours du travail qui suit, de construire une théorie de l'élasticité compatible avec la relativité générale, suivant les idées développées précédemment. Nous mettrons tout d'abord en évidence la structure de la densité d'impulsion-énergie décrivant le caractère élastique du milieu considéré, pour en déduire, par un processus de variation, les équations de liaison du milieu reliant le taux de variation des contraintes au taux de variation des déformations. Nous restreignons cette étude au cas des milieux élastiques adiabatiques, et sans interaction avec un champ extérieur autre que gravitationnel, de manière à dégager nettement les propriétés caractéristiques de ces milieux; nous étendrons ultérieurement cette représentation à une classe plus large de milieux continus.

A. — Détermination de la structure de $T^{\alpha\beta}$.

Nous nous proposons de montrer dans cette section que, sous une hypothèse simple réalisant la transposition en relativité de l'hypothèse de Cauchy-Green sur les milieux élastiques, la densité d'impulsion-énergie révélant cette structure est de type normal, avec une densité des contraintes décrite par un groupe de six équations d'état, que nous déterminerons.

⁽¹³⁾ Cf. J. F. Bennoun (1963).

5. Représentation géométrique d'un milieu matériel dans V_4 .

Considérons, dans la variété riemannienne V_4 de la relativité générale, une classe de transformations ponctuelles, supposées régulières et de classe C^2 ⁽¹⁴⁾ :

$$5.1 \quad x^\alpha = x^\alpha(y^\mu), \quad \det(x^\alpha{}_{,\mu}) \neq 0, \quad x^\alpha{}_{,\mu} = \partial x^\alpha / \partial y^\mu,$$

dont les trajectoires forment une famille à trois paramètres (y^a) (a et tout indice latin = 1, 2, 3) de lignes orientées dans le temps, et paramétrisées par (y^0), ce scalaire étant par hypothèse une fonction strictement croissante du temps propre s ; les *variables lagrangiennes* (y^μ) se comportent comme des scalaires de V_4 ; les quatre vecteurs ($x^\alpha{}_{,\mu}$) définissent un repère en chaque point (x) du domaine Ω de V_4 rempli par les *lignes d'univers*; si l'on choisit s comme paramètre variable le long de ces lignes d'univers, celles-ci peuvent être considérées comme trajectoires du champ de *vecteurs vitesse d'univers* :

$$5.2 \quad u^\alpha = \partial x^\alpha / \partial s = (\partial s / \partial y^0)^{-1} x^\alpha{}_{,0}, \quad (\partial s / \partial x^0)^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha{}_{,0} x^\beta{}_{,0},$$

unitaires, et orientés dans le temps :

$$5.3 \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1.$$

Soit Σ le champ des 3-plans des directions d'espaces orthogonales à \vec{u} ; nous désignons par P l'*opérateur de projection d'espace*, qui permet d'associer, à toute grandeur U de V_4 , sa *composante d'espace* $P(U)$ sur Σ ; par exemple, la composante d'espace $\bar{g}_{\alpha\beta} = P(g_{\alpha\beta})$ de la métrique de V_4 est définie par la relation :

$$5.4 \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = P_\alpha^\gamma P_\beta^\delta g_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta, \quad \bar{g}_{\alpha\beta} u^\alpha = 0, \quad P_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta.$$

Considérons un déplacement infinitésimal sur Σ :

$$5.5 \quad \bar{d}x^\alpha = \bar{x}^\alpha{}_{,\mu} dy^\mu, \quad \bar{x}^\alpha{}_{,\mu} = P(x^\alpha{}_{,\mu}),$$

en remarquant que $\bar{d}x^\alpha$ ne dépend que des différentielles dy^a , puisque :

$$5.6 \quad \bar{x}^\alpha{}_{,0} = x^\alpha{}_{,0} - u_\beta u^\alpha x^\beta{}_{,0} = 0.$$

Les relations (5.5) définissent une classe de transformations ponctuelles de Ω , dépendant du paramètre (y^0), appliquant les points (y^a) de l'*état de référence naturel* d'un milieu matériel sur les points du champ des 3-plans Σ

(14) Cf. Pham Mau Quan (1954).

associé à l'évolution des états du milieu considéré. Précisons certaines des caractéristiques de cette classe de transformations.

i) Soit \bar{ds} l'intervalle élémentaire de longueur de Σ , défini par :

$$5.7 \quad \bar{ds}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{dx}^\alpha \bar{dx}^\beta = \gamma_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu,$$

où les formes de Pfaff $\bar{dx}^\alpha = P(dx^\alpha)$ ne sont des différentielles exactes que lorsque Σ est *intégrable*, et où $\gamma_{\mu\nu}$ désigne la *métrique lagrangienne* :

$$5.8 \quad \gamma_{ab} = \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \cdot_a \bar{x}^\beta \cdot_b, \quad \gamma_{0\alpha} = 0.$$

Les six quantités γ_{ab} définissent la *déformation* du milieu matériel; il est immédiat qu'un tel concept dépende de la définition de l'état de référence naturel du milieu.

En revanche, la *variation des déformations* peut être caractérisée en l'absence du milieu de référence naturel, à l'aide du *tenseur taux de variation des déformations* ⁽¹⁰⁾, ⁽¹⁵⁾ :

$$5.9 \quad E_{\alpha\beta} = 1/2 \mathfrak{L} \bar{g}_{\alpha\beta}, = P(\nabla_{(\alpha} \mu_{\beta)}),$$

introduit par la relation :

$$5.10 \quad \partial/\partial s \bar{ds}^2 = 2E_{\alpha\beta} \bar{dx}^\alpha \bar{dx}^\beta.$$

Cette situation constitue une première illustration du fait que seules les variations des grandeurs d'état possèdent une signification physique intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de la définition d'un état de référence naturel.

ii) Considérons maintenant l'élément de volume défini sur Σ :

$$5.11 \quad \sqrt{-g} d^3x = \sqrt{-g} 1/3! \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^\delta = \sqrt{-g} \det(\bar{x}^\alpha \cdot_\mu) d^3y,$$

où $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ désigne l'indicateur de Kronecker, et :

$$5.12 \quad \det(\bar{x}^\alpha \cdot_\mu) = 1/3! \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{abc} u^\alpha \bar{x}^\beta \cdot_a \bar{x}^\gamma \cdot_b \bar{x}^\delta \cdot_c = (\partial s/\partial y^0)^{-1} \det(x^\alpha \cdot_\mu).$$

La déformation de cet élément de volume, ou *dilatation*, est caractérisée par la grandeur :

$$5.13 \quad \sqrt{-\gamma} = \sqrt{-g} \det(\bar{x}^\alpha \cdot_\mu), \quad \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}),$$

⁽¹⁵⁾ \mathfrak{L} désigne l'opérateur dérivée de Lie par le champ de vecteurs \vec{u} ; cf. A. Lichnerowicz (1958).

où, en vertu de l'hypothèse initiale (5.1), et du fait que les lignes d'univers sont supposées strictement orientées dans le temps, on a :

$$5.14 \quad \det(\bar{x}^\alpha{}_{;\mu}) \neq 0,$$

ce qui assure la régularité de la transformation ponctuelle (5.5); les trois vecteurs $\bar{x}^\alpha{}_{;\mu}$ forment un repère d'espace caractérisant les *directions principales de déformation* du milieu.

Ce concept de dilatation dépend de la définition de l'état de référence naturel du milieu; mais l'on peut, comme précédemment, définir en l'absence de l'existence d'un tel état le *taux de variation des dilatations* θ :

$$5.15 \quad \mathfrak{L}(\sqrt{-g}d^3x) = \theta \sqrt{-g}d^3x, \quad \theta = g^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u^\alpha.$$

Nous venons de préciser les caractéristiques de la représentation géométrique d'un milieu continu dans V_4 ; nous allons, dans les paragraphes qui suivent, mettre en évidence les propriétés de la représentation dynamique d'un tel milieu.

6. Un lemme sur la variation des grandeurs d'état.

Établissons un résultat préliminaire, relatif au comportement des grandeurs d'état; nous supposons que ces grandeurs ne dépendent que de la configuration du milieu continu envisagé, c'est-à-dire qu'elles sont entièrement déterminées par la donnée des variables d'état ($g_{\alpha\beta}$, y^μ , $x^\alpha{}_{;\mu}$).

Soit U une telle grandeur; U est soumise aux hypothèses suivantes, suffisantes pour la suite de notre travail :

i) U est une *densité tensorielle d'espace contravariante* d'ordre n :

$$6.1 \quad U^{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n} u_{\alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

ii) Les *composantes lagrangiennes* de U, que l'on peut considérer soit comme des densités tensorielles $\underset{\circ}{U}$ de même type que U sous le groupe de transformations des paramètres (y^α), soit comme un ensemble de n ! densités scalaires de V_4 , définies par :

$$6.2 \quad U^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \underset{\circ}{U}^{\mu_1 \dots \mu_n} \bar{x}^{\alpha_1}{}_{;\mu_1} \dots \bar{x}^{\alpha_n}{}_{;\mu_n} \det^{-1}(\bar{x}^\alpha{}_{;\mu}),$$

ne dépendent que de la métrique lagrangienne $\gamma_{\mu\nu}$:

$$6.3 \quad \underset{\circ}{U} = \underset{\circ}{U}(\gamma_{\mu\nu}).$$

a) Prenons la dérivée de Lie par le champ de vecteurs \vec{u} des deux membres de (6.2), en tenant compte de l'identité :

$$6.4 \quad \mathfrak{L}x^\alpha \cdot_a = 0$$

provenant de ce que \mathfrak{L} ne modifie pas les valeurs numériques des coordonnées (x^α), et commute avec $\partial/\partial y^a$, puisque les (y^a) sont constants le long de chaque ligne d'univers; nous obtenons de la sorte :

$$6.5 \quad P(\mathfrak{L}U^{\alpha_1 \dots \alpha_n}) = \mathfrak{L}(U^{\mu_1 \dots \mu_n}) \bar{x}^{\alpha_1} \cdot_{\mu_1} \dots \bar{x}^{\alpha_n} \cdot_{\mu_n} \text{dét}^{-1}(\bar{x}^\alpha \cdot_\mu).$$

b) Tenons compte de la seconde hypothèse *ii*) concernant U , en prenant la dérivée variationnelle des deux membres de (6.2) par rapport à la métrique $g_{\alpha\beta}$ ⁽¹⁶⁾; il vient :

$$6.6 \quad \bar{\delta}/\delta g_{\alpha\beta} U^{\gamma_1 \dots \gamma_n} = \delta/\delta \gamma_{\mu\nu} (U^{\rho_1 \dots \rho_n}) \bar{x}^{\gamma_1} \cdot_{\rho_1} \dots \bar{x}^{\gamma_n} \cdot_{\rho_n} \bar{x}^\alpha \cdot_\beta \bar{x}^\beta \cdot_\nu \text{dét}^{-1}(\bar{x}^\alpha \cdot_\mu),$$

où nous avons introduit la notation :

$$6.7 \quad \bar{\delta}/\delta g_{\alpha\beta} (U^{\gamma_1 \dots \gamma_n}) = P(\delta/\delta g_{\alpha\beta} (U^{\gamma_1 \dots \gamma_n})).$$

c) Enfin, en vertu des hypothèses *i*) et *ii*), nous avons identiquement :

$$6.8 \quad \mathfrak{L}(U^{\gamma_1 \dots \gamma_n}) = \delta/\delta \gamma_{\mu\nu} (U^{\gamma_1 \dots \gamma_n}) \mathfrak{L}\gamma_{\mu\nu}.$$

En rassemblant les trois résultats (*a*, *b*, *c*) mis en évidence, nous obtenons le résultat final recherché :

$$6.9 \quad P(\mathfrak{L}U^{\gamma_1 \dots \gamma_n}) = \bar{\delta}/\delta g_{\alpha\beta} (U^{\gamma_1 \dots \gamma_n}) \mathfrak{L}\bar{g}_{\alpha\beta},$$

compte tenu de :

$$6.10 \quad \mathfrak{L}\gamma_{\mu\nu} = (\mathfrak{L}\bar{g}_{\alpha\beta}) \bar{x}^\alpha \cdot_\mu \bar{x}^\beta \cdot_\nu.$$

L'hypothèse de structure initiale concernant U est donc équivalente, *au point de vue de la variation de U*, à l'hypothèse que U ne dépende que des variables dynamiques $\bar{g}_{\alpha\beta}$:

$$6.11 \quad U = U(\bar{g}_{\alpha\beta}).$$

Résumons ces résultats dans le lemme suivant, qui nous sera très utile :

LEMME. — Soit U une densité tensorielle contravariante d'espace (de poids + 1) et d'ordre arbitraire n , et soit \mathfrak{U} la composante lagrangienne de U :

$$U^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \mathfrak{U}^{\mu_1 \dots \mu_n} \bar{x}^{\alpha_1} \cdot_{\mu_1} \dots \bar{x}^{\alpha_n} \cdot_{\mu_n} \text{dét}^{-1}(\bar{x}^\alpha \cdot_\mu), \quad U^{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n} u_{\alpha_i} = 0.$$

⁽¹⁶⁾ Cf. Appendice I.

Les deux hypothèses suivantes sont équivalentes au point de vue variationnel :

1° $\underset{\circ}{U}$ ne dépend que de la métrique lagrangienne :

$$\underset{\circ}{U} = \underset{\circ}{U}(\gamma_{\mu\nu}) \quad (\gamma_{\mu\nu} = \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \cdot_{,\mu} \bar{x}^\beta \cdot_{,\nu}).$$

2° $\underset{\circ}{U}$ est fonction de la composante d'espace de la métrique $g_{\alpha\beta}$:

$$U = U(\bar{g}_{\alpha\beta})$$

ce qui signifie, de manière équivalente, que le taux de variation de $\underset{\circ}{U}$ le long d'une ligne d'univers est caractérisé par la relation :

$$P(\underset{\circ}{U}) = \bar{\delta}U / \delta g_{\alpha\beta} \bar{L} \bar{g}_{\alpha\beta}.$$

7. Représentation dynamique d'un milieu matériel dans V_4 .

Nous allons, dans ce paragraphe, dégager les caractéristiques de la représentation de l'état d'un milieu continu.

Nous faisons l'hypothèse, fondamentale dans la suite de ce travail, que les propriétés de structure du milieu sont entièrement déductibles de la donnée de la *densité d'énergie* L attachée à l'unité de volume de ce milieu; cette grandeur est supposée satisfaire aux conditions suivantes :

i) L est une densité scalaire.

ii) L est fonction de classe C^0 - C^2 des variables d'état du milieu.

Il nous suffira, pour les développements ultérieurs, de considérer des fonctions du type :

$$7.1 \quad L = L(g_{\alpha\beta} ; x^\alpha \cdot_{,\mu}).$$

a) Cela posé, appliquons au lagrangien total de la relativité générale, champ + matière, un principe variationnel :

$$7.2 \quad \delta \int (\sqrt{-g} R + 2L) d^4x = 0 ;$$

nous obtenons :

α) Les équations du champ de gravitation d'Einstein :

$$2.5 \quad \sqrt{-g} G^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}.$$

β) Les équations d'état du milieu, par définition de la *densité d'impulsion-énergie* $T^{\alpha\beta}$:

$$7.3 \quad T^{\alpha\beta} = 2\delta L / \delta g_{\alpha\beta}.$$

γ) Les équations de conservation de $T^{\alpha\beta}$, comme conséquences de l'invariance de L sous le groupe des transformations générales de coordonnées :

$$2.7 \quad \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0.$$

b) La structure postulée (7.1) de L assure, en vertu de l'invariance de cette grandeur sous le groupe des transformations de coordonnées, la validité des identités :

$$7.4 \quad \delta L / \delta g_{\alpha\beta} \vec{\xi} g_{\alpha\beta} + \delta L / \delta x^{\alpha}{}_{,\mu} \vec{\xi} x^{\alpha}{}_{,\mu} - \partial_{\alpha} (L \xi^{\alpha}) = 0,$$

$\vec{\xi}$ étant un champ de vecteurs arbitraires de V_4 ; de ce caractère arbitraire, il s'ensuit que l'on peut annuler séparément les termes du premier membre de (7.4) facteurs de $\vec{\xi}$, et les termes facteurs des dérivées premières de ce vecteur; nous sommes de la sorte conduit au groupe des identités ⁽¹⁷⁾ :

$$7.5-a \quad \delta L / \delta x^{\alpha}{}_{,\mu} \nabla_{\gamma} x^{\alpha}{}_{,\mu} - \nabla_{\gamma} L = 0.$$

$$7.5-b \quad T^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta}.$$

$$7.5-c \quad g^{\gamma[\alpha x^{\beta]}{}_{,\mu} \delta L / \delta x^{\gamma}{}_{,\mu} = 0,$$

où les signes $()$ et $[\]$ désignent les opérations de symétrisation et d'antisymétrisation des indices; $T^{\alpha\beta}$ désigne la densité d'impulsion-énergie (2.7), et $t^{\alpha\beta}$ la *densité canonique d'impulsion-énergie* :

$$7.6 \quad t^{\beta}_{\alpha} = \delta L / \delta x^{\alpha}{}_{,\mu} x^{\beta}{}_{,\mu} + L \delta^{\beta}_{\alpha}.$$

En conclusion, la représentation dynamique d'un milieu continu en relativité, qui se déduit de la donnée de la densité d'énergie du milieu L , est obtenue à travers les 10 équations d'état (7.3); les propriétés d'invariance de L sont mises en évidence, compte tenu de l'hypothèse de structure particulière (7.1), à travers le groupe des identités de Noëther (7.5).

Ces résultats vont être appliqués à l'étude particulière de la caractérisation de la structure des milieux de type élastique.

Remarque. — Dans le formalisme envisagé, la grandeur qui est naturellement attachée à la description de l'impulsion-énergie du milieu continu envisagé est la *densité d'impulsion-énergie* $T^{\alpha\beta}$, c'est-à-dire une densité tensorielle contravariante symétrique d'ordre deux, à laquelle correspond le *tenseur d'impulsion-énergie* $T^{\alpha\beta} / \sqrt{-g}$.

⁽¹⁷⁾ E. Noëther (1918); Cf. A. Trautman (1963).

8. Structure des milieux continus élastiques.

Comme dans toute théorie d'origine phénoménologique, nous devons distinguer entre les divers types d'énergie associés aux propriétés du milieu matériel considéré.

Un milieu continu élastique est caractérisé par la densité d'énergie :

$$8.1 \quad L = m + E,$$

où la *densité scalaire* m désigne la *densité de masse conservative*, et la *densité scalaire* E la *densité d'énergie élastique* caractérisant l'action des forces de contrainte, et identique dans le cas envisagé à la *densité d'énergie interne* du milieu. Les densités m et E sont supposées satisfaire chacune aux hypothèses *i)* et *ii)* du § 7.

α -) Désignons par $\underset{\circ}{m}$ la composante lagrangienne de m ; le caractère conservatif de m est assuré par la relation :

$$8.2 \quad \partial/\partial y^0 \underset{\circ}{m} = 0,$$

qui entraîne, par intégration, et en nous ramenant à un repère naturel de coordonnées locales (cf. 6.2) :

$$8.3 \quad m = \underset{\circ}{m}(y^a) \det^{-1}(\bar{x}^\alpha{}_{,\mu}).$$

β) En vertu de (6.5), l'équation initiale (8.2) s'écrit dans ce repère :

$$8.4 \quad \mathfrak{L}m = 0.$$

γ) La densité canonique d'impulsion-énergie (7.6) associée à m s'écrit ⁽¹⁸⁾ :

$$8.5 \quad t_\alpha^\beta(m) = m u_{,\alpha} u^\beta.$$

C'est la densité d'impulsion-énergie associée à une particule libre.

b -) Effectuons une hypothèse de structure sur E adaptée au caractère élastique du milieu considéré, en étendant dans le cas relativiste l'*hypothèse de Cauchy-Green* de la théorie classique de l'élasticité :

Définition. — La densité d'énergie interne associée à un milieu élastique adiabatique en relativité générale est du type :

$$8.6 \quad E = E(g_{\alpha\beta}; \bar{x}^\alpha{}_{,\mu}).$$

⁽¹⁸⁾ Cf. Appendice I.

Nous allons, par l'étude des identités de Noëther (7.5), préciser la forme de la fonction E (8.6). Remarquons tout d'abord que ces identités étant satisfaites indépendamment par m en vertu de (8.5) ⁽¹⁸⁾, il suffit d'exiger qu'elles le soient indépendamment par E ; il en sera effectivement ainsi si les relations suivantes sont identiquement satisfaites ⁽¹⁸⁾ :

$$8.7-a \quad \delta E / \delta \bar{x}^\gamma \cdot_\mu \bar{x}^{[\beta} \cdot_\mu \bar{g}^{\alpha]\gamma} = 0.$$

$$8.7-b \quad u^\gamma \delta E / \delta \bar{x}^\gamma \cdot_\mu = 0.$$

$$8.7-c \quad 2\delta E / \delta g_{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{x}^{\beta} \cdot_\mu \delta E / \delta \bar{x}^\gamma \cdot_\mu + E g^{\alpha\beta},$$

compte tenu de :

$$8.8 \quad t_\alpha^\beta(E) = \bar{g}_\alpha^\gamma \bar{x}^{\beta} \cdot_\mu \delta E / \delta \bar{x}^\gamma \cdot_\mu + E \delta_\alpha^\beta.$$

Une *condition suffisante* pour que les conditions (8.7) soient identiquement satisfaites est que la composante lagrangienne \mathring{E} de E soit du type ⁽¹⁸⁾ :

$$8.9 \quad \mathring{E} = \mathring{E}(\gamma_{\mu\nu}).$$

Acceptant cette condition, nous pouvons l'énoncer sous la forme équivalente suivante (cf. § 6) :

Proposition. — La densité d'énergie élastique associée à un milieu élastique isotherme et adiabatique en relativité générale est du type :

$$8.10 \quad \mathring{E} = E(\bar{g}_{\alpha\beta}).$$

β) L'hypothèse (8.9) entraîne, compte tenu de (6.2, 6.6), que la densité canonique (8.8) associée à E s'écrit sous la forme ⁽¹⁸⁾ :

$$8.11 \quad t^{\alpha\beta}(E) = 2\bar{\delta}E / \delta g_{\alpha\beta} + E u^\alpha u^\beta.$$

γ) La densité d'énergie E de type (8.10) satisfait bien aux conditions d'application du lemme du § 6; nous obtenons ainsi directement, à l'aide de (6.9), l'équation explicitant la valeur du taux de variation de la densité d'énergie élastique lors de l'évolution du milieu :

$$8.12 \quad \mathcal{L}E = \bar{\delta}E / \delta g_{\alpha\beta} \mathcal{L}\bar{g}_{\alpha\beta}.$$

c) Réunissons les résultats (8.5, 8.11), en tenant compte de l'identité entre densité d'impulsion-énergie, et densité canonique; nous obtenons ainsi

les équations d'état explicitant la forme de la densité d'impulsion-énergie associée à un milieu continu élastique :

$$8.13 \quad T^{\alpha\beta} = (m + E)u^\alpha u^\beta + 2\bar{\delta}E/\delta g_{\alpha\beta}.$$

α) $T^{\alpha\beta}$ est de type *normal*; la densité des contraintes associée au milieu est définie à l'aide des six équations d'état :

$$8.14 \quad \theta^{\alpha\beta} = -2\bar{\delta}E/\delta g_{\alpha\beta},$$

dont les conditions d'intégrabilité s'écrivent :

$$8.15 \quad \bar{\delta}/\delta g_{\gamma\delta}\theta^{\alpha\beta} = \bar{\delta}/\delta g_{\alpha\beta}\theta^{\gamma\delta}.$$

β) La densité de masse ρ est identique à la densité d'énergie associée au milieu :

$$8.16 \quad \rho = L = m + E.$$

γ) Le vecteur propre orienté dans le temps de $T^{\alpha\beta}$ est identique au vecteur vitesse d'univers associé au milieu élastique :

$$8.17 \quad u^\alpha = \partial x^\alpha / \partial s.$$

Résumons ces résultats :

Proposition. — La structure d'un milieu élastique, supposé isotherme et adiabatique, est représentée en relativité générale par une densité d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

i) $T^{\alpha\beta}$ est de type *normal* :

$$8.18 \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \theta^{\alpha\beta}, \quad u_\alpha u^\alpha = 1, \quad \theta^{\alpha\beta} u_\alpha = 0.$$

ii) Son vecteur propre orienté dans le temps est identique au vecteur vitesse-d'univers du milieu.

iii) La valeur propre associée, c'est-à-dire la densité de masse, est identique à la densité d'énergie du milieu.

iv) La composante d'espace de $T^{\alpha\beta}$ est identifiée à la densité des contraintes $\theta^{\alpha\beta}$ du milieu élastique; $\theta^{\alpha\beta}$ est déterminé à partir de la densité d'énergie élastique E à l'aide des six équations d'état :

$$\theta^{\alpha\beta} = -2\bar{\delta}E/\delta g_{\alpha\beta},$$

et doit satisfaire aux conditions d'intégrabilité de ces équations :

$$\bar{\delta}/\delta g_{\gamma\delta}\theta^{\alpha\beta} = \bar{\delta}/\delta g_{\alpha\beta}\theta^{\gamma\delta}.$$

B. — Représentation des états variés des milieux élastiques.

Nous nous proposons, en prenant pour base la représentation des états d'un milieu élastique établie dans la section précédente, de dégager la représentation des états variés du milieu, en accord avec les principes admis de la relativité générale; nous nous efforcerons notamment :

i) d'introduire le concept d'énergie interne sous une forme adaptée au point de vue des états variés, et qui ne fasse donc pas intervenir la masse conservative du milieu, qui réintroduit le concept de masse newtonien déjà abandonné par la relativité restreinte;

ii) d'établir la forme des équations de liaison du milieu, décrivant les états variés de ce milieu, et compatibles avec la donnée de la densité d'énergie interne.

9. Le concept de taux de variation de l'énergie interne.

Considérons les équations de conservation (2.7) de la densité d'impulsion-énergie (8.18) attachée à un milieu du type élastique considéré; celles-ci sont équivalentes au groupe :

$$9.1-a \quad \mathfrak{L}\rho = -1/2\theta^{\alpha\beta}\bar{\mathfrak{L}}g_{\alpha\beta}.$$

$$9.1-b \quad \rho\dot{u}_\alpha = P(\nabla_\beta\theta_\alpha^\beta),$$

où \dot{u}_α désigne le *vecteur accélération* attaché au milieu :

$$9.2 \quad \dot{u}_\alpha = \mathfrak{L}u_\alpha = u^\beta\nabla_\beta u_\alpha, \quad u^\alpha\dot{u}_\alpha = 0.$$

Ces équations expriment localement la conservation de l'énergie et de l'impulsion totales du milieu élastique.

Reportons-nous maintenant à certains des résultats établis dans le paragraphe précédent; tout d'abord, en vertu de (8.4, 8.16), nous avons :

$$9.3 \quad \mathfrak{L}E = \mathfrak{L}\rho ;$$

par ailleurs, d'après (8.12, 8.14), le taux de variation de E est caractérisé par l'équation :

$$9.4 \quad \mathfrak{L}E = -1/2\theta^{\alpha\beta}\bar{\mathfrak{L}}g_{\alpha\beta}.$$

L'une des trois équations (9.1-a), (9.3) ou (9.4) se déduit strictement des deux autres; nous pouvons de la sorte indifféremment *définir* le taux

de variation de l'énergie élastique E par (9.3) ou (9.4). La relation (9.3), qui relie les variations de deux grandeurs, nous semble être la seule manière d'introduire le concept d'énergie interne en relativité sous une forme accessible aux mesures physiques; cette définition ne fait plus intervenir directement le concept théorique d'une masse conservative du milieu; elle concerne des milieux continus de type absolument quelconque, et traduit, en accord avec le point de vue des états variés, le principe relativiste de l'unification de la masse et de l'énergie.

Ces arguments nous conduisent à définir le concept de taux de variation de l'énergie interne en relativité générale de la manière suivante :

Définition. — Le taux de variation de la densité d'énergie interne associée à un milieu continu en relativité générale, est identique au taux de variation de la densité de masse de ce milieu :

$$\mathfrak{L}E = \mathfrak{L}\rho.$$

10. Détermination des équations de liaison du milieu élastique.

Conformément aux idées développées précédemment, nous nous proposons de déduire de la représentation des états d'un milieu élastique, celle des états variés du milieu, compatible avec la relativité générale.

Les équations de liaison assurant la description des états variés du milieu vont être obtenues par application directe du lemme du § 6 à la densité des contraintes (8.14), cette grandeur satisfaisant bien aux conditions d'application de ce lemme. Par variation des deux membres de (8.14), nous obtenons de la sorte les équations :

$$10.1 \quad P(\mathfrak{L}\theta^{\alpha\beta}) = 1/2 C^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathfrak{L}\bar{g}_{\gamma\delta},$$

où nous avons posé :

$$10.2 \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\bar{\delta}/\delta g_{\gamma\delta} \theta^{\alpha\beta} = -4\bar{\delta}^2 E/\delta g_{\gamma\delta} \delta g_{\alpha\beta}.$$

La densité contravariante à quatre indices $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ caractérise les propriétés de structure du milieu élastique; par analogie avec la théorie classique de l'élasticité, nous donnons à cette grandeur le nom de *densité module d'élasticité*; $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est soumis, par construction, aux conditions suivantes :

- i) C'est une densité tensorielle d'espace.
- ii) Elle dépend des variables d'état $\bar{g}_{\alpha\beta}$:

$$10.3 \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}(\bar{g}_{\mu\nu}).$$

iii) Elle est soumise aux conditions de symétrie provenant d'une part de sa définition (10.2), et d'autre part des conditions d'intégrabilité (8.15) des équations d'état (8.14) :

$$10.4-a \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)},$$

$$10.4-b \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\gamma\delta\alpha\beta}.$$

iv) Enfin, elle satisfait à l'ensemble des conditions différentielles :

$$10.5 \quad \bar{\delta}/\bar{\delta}g_{\rho\sigma}C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{\delta}/\bar{\delta}g_{\gamma\delta}C^{\alpha\beta\rho\sigma}$$

assurant l'intégrabilité de (10.1).

En vertu de *i*) et *iii*), $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ possède $N(N+1)/2 = 21$ composantes indépendantes ($N = n(n+1)/2$, $n = 3$), ce qui est conforme aux résultats de la théorie classique de l'élasticité; mais $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ satisfait de plus aux $((N-1)^3 + 3(N-1))/2 = 70$ conditions différentielles *iv*), ce qui laisse 56 conditions supplémentaires de même type d'origine phénoménologique que l'on doit imposer à $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ pour que cette grandeur soit parfaitement déterminée.

Rassemblons ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition. — Les équations de liaison des milieux élastiques en relativité générale admettent la forme :

$$P(\mathcal{L}^{\alpha\beta}) = 1/2 C^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{L}}_{\gamma\delta},$$

où la densité module d'élasticité $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ satisfait aux conditions suivantes :

- i*) C'est une densité tensorielle d'espace.
- ii*) Elle est fonction de classe C^0 - C^2 p. m. des variables d'état $\bar{g}_{\alpha\beta}$.
- iii*) Elle possède les symétries compatibles avec l'existence d'une densité d'énergie élastique :

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}, \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\gamma\delta\alpha\beta}.$$

iv) Elle satisfait aux conditions assurant l'intégrabilité des équations de liaison :

$$\bar{\delta}/\bar{\delta}g_{\rho\sigma}C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{\delta}/\bar{\delta}g_{\gamma\delta}C^{\alpha\beta\rho\sigma}.$$

C. — Le problème de l'élasticité en relativité générale

Nous nous proposons maintenant d'esquisser le problème de la liaison du champ de gravitation avec ses sources, conformément au point de vue des états variés adopté dans ce travail.

11. Équations de champ variées.

Nous nous intéressons tout d'abord aux équations de champ; ayant admis que seule la variation des grandeurs d'état ont une signification physique, nous devons penser que les équations d'Einstein jouent le rôle de conditions initiales, la détermination du champ lui-même devant faire intervenir la variation de ces équations.

Prenons dans ce but la dérivée de Lie par le champ de vecteurs \vec{u} des deux membres des équations de champ (2.5), en tenant compte du caractère normal de $T^{\alpha\beta}$; exprimons ensuite la variation des contraintes à partir du second membre des équations de liaison (10.1); nous obtenons de la sorte la forme cherchée des *équations de champ variées* :

$$11.1 \quad \mathfrak{L}(\sqrt{-g}G^{\alpha\beta}) = \mathfrak{L}\rho u^{\alpha}u^{\beta} + 2u^{(\alpha}\theta^{\beta\gamma)}u_{\gamma} - C^{\alpha\beta\gamma\delta}E_{\gamma\delta}.$$

Nous n'expliciterons pas ici la forme du premier membre de (11.1).

12. Équations de conservation variées.

Le second membre des équations de liaison (10.1) des milieux élastiques doit satisfaire à un groupe de trois conditions, que nous nous proposons maintenant d'établir.

Nous partons dans ce but des identités suivantes ⁽¹⁹⁾, appliquées à la densité des contraintes $\theta^{\alpha\beta}$:

$$12.1 \quad \nabla_{\beta}\mathfrak{L}\theta^{\alpha\beta} - \mathfrak{L}\nabla_{\beta}\theta^{\alpha\beta} = -\theta^{\beta\gamma}\mathfrak{L}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha},$$

où les $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ désignent les symboles de Christoffel.

A cause du caractère spatial de $\theta^{\alpha\beta}$, seules les composantes $P(\mathfrak{L}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha})$ et $P(u_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha})$ de $\mathfrak{L}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ interviennent dans le calcul de (12.1); nous allons calculer ces deux grandeurs en fonction du vecteur accélération \dot{u}_{α} (9.2), du tenseur taux de variation des déformations $E_{\alpha\beta}$ (5.9) et du *tenseur taux de variation des tourbillons* :

$$12.2 \quad \Omega_{\alpha\beta} = u_{\lambda}\bar{\partial}_{[\alpha}(u_{\beta]}u^{\lambda}) = P(\nabla_{[\alpha}u_{\beta]}),$$

dont les composantes explicites sont données par l'identité :

$$12.3 \quad \nabla_{\alpha}u_{\beta} = E_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}.$$

⁽¹⁹⁾ Cf. A. Lichnerowicz (1958). Chap. II.

$\bar{\partial}t = P(\partial t)$, et $\bar{\nabla}t = P(\nabla t)$ désignent les opérations de *dérivation partielle et covariante d'espace* agissant sur les grandeurs géométriques $t \in V_4$.

Partant de l'identité bien connue :

$$12.4 \quad \mathfrak{L}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 1/2g^{\alpha\delta}(\nabla_{\beta}\mathfrak{L}g_{\delta\gamma} + \nabla_{\gamma}\mathfrak{L}g_{\beta\delta} - \nabla_{\delta}\mathfrak{L}g_{\beta\gamma}),$$

nous obtenons les résultats :

$$12.5-a \quad P(\mathfrak{L}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}) = \bar{\nabla}_{\alpha}E_{\beta}^{\gamma} + \bar{\nabla}_{\beta}E_{\alpha}^{\gamma} - \bar{\nabla}^{\gamma}E_{\alpha\beta} + 2\dot{u}_{(\alpha}\Omega_{\beta)}^{\gamma} + \dot{u}^{\gamma}E_{\alpha\beta}.$$

$$12.5-b \quad P(u_{\gamma}\mathfrak{L}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}) = -\mathfrak{L}E_{\alpha\beta} - \dot{u}_{\alpha}\dot{u}_{\beta} + \bar{\nabla}_{[\alpha}\dot{u}_{\beta]}.$$

En reportant ces expressions dans le second membre de (12.1), nous obtenons un groupe de trois identités équivalentes à (12.1); il reste à exprimer dans le premier membre de ces nouvelles identités le terme $P(\mathfrak{L}\theta^{\alpha\beta})$ à partir de sa valeur tirée des équations de liaison (10.1), pour obtenir le groupe des trois conditions de compatibilité de (10.1) cherchées; ces *équations de conservation variées* s'écrivent :

$$12.6 \quad P(\bar{\nabla}_{\beta}(C^{\alpha\beta\gamma\delta}E_{\gamma\delta})) = P(\mathfrak{L}\bar{\nabla}_{\beta}\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\beta\gamma}\nabla_{\delta}(E_{\beta}^{\alpha}\bar{g}_{\gamma}^{\delta} + E_{\gamma}^{\alpha}\bar{g}_{\beta}^{\delta} - E_{\gamma\beta}\bar{g}^{\alpha\delta})).$$

où, par définition :

$$\bar{\nabla}_{\beta}\theta^{\alpha\beta} = P(\bar{g}^{\beta\gamma}\bar{\nabla}_{\beta}\theta_{\gamma}^{\alpha}), \text{ etc.}$$

13. Équations d'évolution des tenseurs taux de variation des déformations et des tourbillons.

Nous nous proposons d'établir un dernier groupe d'équations décrivant l'évolution de la variation des déformations et des tourbillons des milieux continus considérés, et nécessaires à la formulation complète du problème de l'élasticité en relativité générale.

Nous partons dans ce but de l'ensemble des identités.

$$13.1-a \quad \mathfrak{L}E_{\alpha\beta} = \bar{\nabla}_{[\alpha}\dot{u}_{\beta]} - \dot{u}_{\alpha}\dot{u}_{\beta} + (E_{\alpha}^{\gamma} + \Omega_{\alpha}^{\gamma})(E_{\beta\gamma} + \Omega_{\beta\gamma}) + u^{\gamma}u^{\delta}R_{\alpha\gamma\beta\delta}.$$

$$13.1-b \quad \mathfrak{L}\Omega_{\alpha\beta} = \bar{\nabla}_{[\alpha}\dot{u}_{\beta]}.$$

Lorsque la densité des contraintes $\theta^{\alpha\beta}$ est connue par intégration des équations de liaison (10.1), il est possible de tirer des équations de conservation (9.1) la valeur du vecteur accélération \dot{u}_{α} en fonction de la densité de masse, de la métrique et de ses dérivés premières; lorsque l'on reporte

cette valeur de \dot{u}_α dans les seconds membres des identités (13.1), on obtient les équations cherchées, dérivant la *variation des déformations et des tourbillons* du milieu continu considéré ⁽²⁰⁾ ⁽²¹⁾.

14. Le problème de l'élasticité en relativité générale.

L'ensemble des résultats obtenus nous suggère de poser le problème de la détermination du champ de gravitation créé par un milieu continu élastique du type considéré de la manière suivante ⁽²¹⁾ :

Proposition :

- les 10 équations de champ variées (11.1),
- les 4 équations de conservation de la densité d'impulsion-énergie (9.1),
- les 6 équations de liaison (10.1),
- les 3 équations de conservation variées (12.6),
- les 9 équations d'évolution des tenseurs taux de variation des déformations et des tourbillons (13.1),

forment un groupe de 32 équations devant permettre la détermination des 32 grandeurs constituées par :

- les 10 potentiels de gravitation,
- les 3 composantes indépendantes du vecteur vitesse d'univers, compte tenu du caractère unitaire de ce vecteur,
- la densité de masse,
- les 6 composantes de la densité des contraintes,
- les 3 composantes du vecteur accélération,
- les 9 composantes indépendantes des tenseurs taux de variation des déformations et des tourbillons.

⁽²⁰⁾ Les équations d'évolution des tourbillons (J.-F. Bennoun (1964)) constituent l'extension relativiste des équations d'Helmholtz de l'hydrodynamique classique; ces équations comprennent notamment comme cas particuliers les équations analogues établies par Y. Bruhat (1958) dans les cas des fluides parfaits et des fluides parfaits en interaction avec un champ électromagnétique de Maxwell, et par A. Lichnerowicz (1964-1965) dans le cas des fluides parfaits adiabatiques.

⁽²¹⁾ Cf. J.-F. Bennoun (1964); on doit rapprocher le point de vue envisagé ici de celui adopté par A. Lichnerowicz (1964-1965) lors de l'établissement de théorèmes d'existence des équations des fluides parfaits adiabatiques.

CHAPITRE III

REPRÉSENTATION DES MILIEUX CONTINUS THERMODYNAMIQUES

15. Introduction.

La thermodynamique macroscopique phénoménologique, reposant sur une base purement axiomatique, peut être développée de manière cohérente et autonome, même si sa signification profonde ne peut être atteinte qu'à travers une interprétation statistique des concepts de base.

Cette théorie admet ⁽²²⁾ :

- i) La conservation de l'énergie totale du système.
- ii) Le caractère strictement non décroissant de l'entropie totale lors de l'évolution du système considéré.

C'est ce caractère axiomatique de la théorie qui lui permet d'être absorbée avec succès par la relativité restreinte, et, comme nous le verrons, de pouvoir être intégrée à la relativité générale, cette synthèse étant à l'origine d'un enrichissement mutuel des deux théories.

Nous allons tenter de dégager une base pour l'étude de la thermodynamique relativiste à travers une analyse des idées présentes dans les travaux antérieurs effectués en ce domaine ⁽²³⁾.

⁽²²⁾ Nous ne considérons pas ici le *principe zéro*, qui introduit le concept de température par le postulat de son identité entre les différentes parties d'un système en équilibre thermodynamique (Fowler (1931), cité par A. Sommerfeld (1956)), ni le *troisième principe* (Loi de Nernst (1906)), qui définit une échelle absolue pour la mesure de l'entropie, ces postulats n'ayant pas de signification immédiate dans le cadre de l'interprétation admise de la relativité générale.

⁽²³⁾ Les premiers travaux liés à la construction d'une thermodynamique relativiste (Planck (1907, 1908), Einstein (1907)) concernent l'étude de la variance de certaines grandeurs thermodynamiques sous le groupe de Lorentz. La recherche d'une formulation axiomatique de la théorie débute avec Tolman, qui s'est intéressé à l'étude du second principe, mais qui se limite à l'étude des modèles d'univers stationnaires en équilibre thermodynamique. Une formulation explicite des deux principes est due à Eckart (1940), dans le cadre de la relativité restreinte. Les travaux ultérieurs de Pham Mau Quan (1954), puis Stuelckelberg (1962) et Ehlers (1961) qui tendent à la fondation d'une thermodynamique dans le cadre de la relativité générale, s'appuient sur les principes postulés initialement par Eckart. Plus récemment, Lichnerowicz (1964-1965) a établi un ensemble de théorèmes d'existence pour les équations décrivant les fluides parfaits adiabatiques, étudiés initialement par Van Dantzig (1939, 1940), puis A. H. Taub (1948).

a) Il est d'abord nécessaire de préciser la structure de la densité d'impulsion-énergie associée à un milieu continu thermodynamique; une telle grandeur doit comporter :

i) Un terme purement temporel, associé à la masse, c'est-à-dire à l'énergie du système considéré.

ii) Un terme du type quantité de mouvement, lié à l'existence d'un courant de chaleur au sein du milieu.

iii) Un terme purement spatial, décrivant l'action des contraintes du milieu continu considéré.

Ces exigences conduisent à adopter la densité d'impulsion-énergie du type d'Eckart (1940) :

$$15.1 \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - 2u^{(\alpha} q^{\beta)} - \theta^{\alpha\beta}, \quad u_\alpha q^\alpha = 0, \quad \theta^{\alpha\beta} u_\alpha = 0.$$

Contrairement à la situation physique extrêmement claire présentée par l'étude initiale des milieux élastiques, la densité d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ n'est plus de type normal; cette situation entraîne la conséquence suivante : $T^{\alpha\beta}$ est formé des 13 grandeurs constituées par les 3 composantes indépendantes du vecteur vitesse d'univers u^α , la densité de masse (énergie) ρ , les 3 composantes de la densité de courant de chaleur q^α et les 6 composantes indépendantes de la densité des contraintes $\theta^{\alpha\beta}$; or $T^{\alpha\beta}$ ne possède que 10 composantes indépendantes; il s'ensuit que ces 13 grandeurs doivent nécessairement être liées par un groupe de 3 relations. La recherche de ces 3 équations constitue l'un des problèmes importants de la thermodynamique relativiste, lié de manière étroite à la formulation relativiste du second principe.

b) Du fait de l'unification des concepts d'impulsion et d'énergie en relativité, nous devons penser que l'extension relativiste la plus normale du premier principe de la thermodynamique doit consister dans 4 équations de conservation de l'impulsion-énergie totale; nous savons que ces équations sont conséquence immédiate des équations de champ en relativité générale; en ce sens, nous pouvons dire que le premier principe de la thermodynamique relativiste est contenu dans les hypothèses de base de la théorie de la gravitation d'Einstein.

Considérons la partie temporelle de ces équations :

$$15.2 \quad \mathcal{L}\rho = \nabla_\alpha q^\alpha - q^\alpha \dot{u}_\alpha - \theta^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta},$$

qui décrit la conservation de l'énergie totale au cours de l'évolution du milieu continu, et qui est donc l'analogie au sens strict du premier principe de la thermodynamique classique; le second membre de cette équation révèle, dans la contribution au taux de variation de l'énergie calorifique, l'existence d'un terme lié à l'accélération du milieu, terme qui ne disparaît que si le

vecteur courant de chaleur est orthogonal au champ d'accélération. L'existence de ce terme, d'origine purement relativiste, revêt une importance particulière, comme nous allons le voir dans un instant.

c) Soit T le champ scalaire de températures du système matériel considéré, S la densité d'entropie qui lui est associée. Le second principe de la thermodynamique relativiste d'Eckart *et al.* admet que :

i) A l'entropie totale du système est associée une densité vectorielle :

$$15.3 \quad S^\alpha = Su^\alpha - T^{-1}q^\alpha.$$

ii) Le flux de la densité d'entropie totale à travers le bord du système considéré est strictement non décroissant lors de l'évolution de ce système; cette condition s'exprime localement par l'inégalité :

$$15.4 \quad \nabla_\alpha S^\alpha = \ell S - \nabla_\alpha (T^{-1}q^\alpha) \geq 0.$$

Un regard jeté sur (15.4) met en lumière une difficulté essentielle soulevée par cette interprétation du second principe : le premier membre de l'inégalité (15.4), caractéristique du taux de variation de l'entropie totale, ne contient pas de terme lié à la contribution de l'accélération du milieu dans la variation du flux de chaleur; or, on doit s'attendre logiquement à l'existence d'un tel terme, en vertu de l'interprétation du premier principe. Ainsi apparaît, au niveau même de la formation des concepts de base de la thermodynamique relativiste, une contradiction qui doit nous contraindre à une réflexion nouvelle au sujet de l'interprétation du second principe en relativité.

L'énoncé de la loi de Fourier relativiste, obtenue, sous des hypothèses convenables, comme conséquence des deux principes, met en lumière un des aspects de cette difficulté : lorsque l'on adopte la formulation (15.4) du second principe, on est conduit à une loi phénoménologique de conduction de la chaleur du type (Eckart, Stuelckelberg, Ehlers) :

$$15.5 \quad q^\alpha = -\chi^{\alpha\beta}(T^{-1}\bar{\partial}_\beta T - \dot{u}_\beta),$$

où $\chi^{\alpha\beta}$ est une densité tensorielle d'ordre deux, symétrique et définie positive; cette loi se distingue de la loi classique de Fourier par l'apparition d'un terme supplémentaire lié à l'accélération du milieu, terme dont la forme conduit à la difficulté suivante : lors de l'étude du problème de Cauchy, la continuité postulée de q^α , en tant que grandeur d'état, entraîne la disparition des fronts d'onde transversaux, seules subsistant les ondes longitudinales, ce qui est en désaccord avec les résultats de la théorie des milieux continus.

d) La recherche des équations d'état du milieu a été abordée par Pham Mau Quan (1954), dans le cas particulier des fluides parfaits. Outre une équation d'état entre masse, pression et température, cet auteur propose une équation de conduction de la chaleur, dont l'examen appelle certaines remarques :

i) De même que dans l'énoncé (15.4) du second principe, cette loi ne tient pas compte de la contribution au taux de variation de l'énergie calorifique du terme lié à l'accélération de la matière.

ii) Les grandeurs thermodynamiques y sont définies relativement à l'unité de masse du milieu, et les variations de volume sont représentées à l'aide des variations de masse; or ces définitions, admissibles en thermodynamique classique à cause du lien direct entre masse et volume, provenant du caractère conservatif de la masse :

$$15.6 \quad \mathcal{L}\rho = 0,$$

doivent être abandonnées en relativité à cause du principe de l'unification de l'énergie, puisque toutes les formes d'énergie contribuent à la variation de la masse :

$$15.7 \quad \mathcal{L}\rho \neq 0.$$

A ce sujet, remarquons que nombre d'auteurs définissent les grandeurs thermodynamiques relativement à l'unité de masse conservative du milieu; or ce procédé introduit une complication artificielle dans la théorie, puisqu'un tel concept, survivance de la mécanique newtonienne, n'a plus de signification définie dans le cadre d'une mécanique relativiste; ainsi qu'il a été montré précédemment, seule la variation de la masse (énergie) garde un sens.

Cette brève analyse du cadre actuel de la thermodynamique en relativité nous dicte le chemin à suivre. Après nous être efforcé d'établir un énoncé des deux principes de la thermodynamique strictement compatible avec les idées relativistes, nous aborderons le problème de la représentation des états d'un milieu continu thermodynamique, pour en déduire ensuite une description des états variés de ce milieu adaptée à l'interprétation admise de la relativité générale.

A. — Les deux principes de la thermodynamique relativiste.

Nous nous proposons, dans cette section, d'établir une formulation restreinte des deux principes de la thermodynamique compatible avec la relativité, faisant intervenir d'une part un postulat général d'unification

de la masse et de l'énergie, et faisant appel d'autre part à une définition convenable du concept d'entropie totale d'un système thermodynamique.

16. Le premier principe de la thermodynamique relativiste.

Nous considérons toujours un domaine Ω de la variété V_4 de la relativité générale soumise aux conditions de différentiabilité précisées, domaine engendré par une famille de lignes d'univers orientées dans le temps, et trajectoires du champ de vecteurs vitesse d'univers :

$$16.1 \quad u^\alpha = dx^\alpha/ds, \quad g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1.$$

La structure géométrique de Ω est déterminée à l'aide du système des équations de champ du cas intérieur :

$$2.5 \quad \sqrt{-g}G^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta},$$

où, pour des raisons qui ont été analysées dans le paragraphe précédent, la *densité d'impulsion-énergie* $T^{\alpha\beta}$ est du type ⁽²⁴⁾ :

$$15.1 \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - 2u^{(\alpha} q^{\beta)} - \theta^{\alpha\beta}, \quad u_\alpha q^\alpha = 0, \quad u_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0,$$

où ρ désigne la *densité de masse (énergie)* du système considéré, q^α la *densité de courant de chaleur* et $\theta^{\alpha\beta}$ la *densité des contraintes*. Contrairement aux résultats de l'étude dynamique des milieux élastiques effectuée dans le chapitre précédent, la forme de $T^{\alpha\beta}$ constitue un postulat indépendant de la théorie des milieux continus thermodynamiques.

Explicitons la forme des équations de conservation de $T^{\alpha\beta}$:

$$16.2-a \quad u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \mathcal{L}\rho - \nabla_\alpha q^\alpha + q^\alpha \dot{u}_\alpha + 1/2\theta^{\alpha\beta} \mathcal{L}\bar{g}_{\alpha\beta} = 0.$$

$$16.2-b \quad P(\nabla_\beta T^\beta_\alpha) = \rho \dot{u}_\alpha - \mathcal{L}q_\alpha + 2q_\beta \Omega^\beta_\alpha - P(\nabla_\beta \theta^\beta_\alpha) = 0.$$

Ces équations décrivent la conservation de l'impulsion-énergie totale associée au milieu considéré lors de son évolution; la caractérisation de chacun

⁽²⁴⁾ Nous rappelons que les grandeurs (ρ , q^α , $\theta^{\alpha\beta}$, S) caractérisant respectivement la masse (énergie) par unité de volume du milieu, le courant de chaleur, les contraintes agissant à la surface d'un élément de volume unité, et l'entropie spécifique du milieu attachée à l'unité de volume de ce milieu sont des *densités tensorielles de poids + 1*.

En revanche, les grandeurs ($\bar{g}_{\alpha\beta}$, T) caractérisant la déformation et la température du milieu sont des *tenseurs*.

des termes qui interviennent est immédiate; leur examen appelle cependant quelques commentaires :

i) La densité de courant de chaleur \vec{q} se comporte comme une densité de quantité de mouvement; ceci est particulièrement clair dans l'examen des 3 équations de conservation de l'impulsion totale (16.2-b), où cette grandeur intervient d'une part par sa variation, et d'autre part à travers un terme d'origine purement relativiste, terme lié à la rotation du milieu, et formellement analogue à une accélération de Coriolis.

ii) Dans l'équation de conservation de l'énergie (16.2-a), la contribution au taux de variation de l'énergie calorifique fait intervenir, outre un terme de divergence lié à la variation du flux de chaleur, et strictement analogue au terme correspondant de la théorie classique, un terme d'origine purement relativiste lié à l'accélération de la matière \dot{u}_α .

Ces 4 équations de conservation de la densité d'impulsion-énergie nous semblent être le fond du premier principe de la thermodynamique relativiste, qui devient ainsi conséquence stricte des équations de champ; la forme tensorielle de ce principe, qui n'avait pas été dégagée par la thermodynamique classique, provient de l'unification du concept d'énergie en relativité.

Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, nous ne ferons cependant usage que de l'équation scalaire de conservation de l'énergie (16.2-a), qui constitue la traduction au sens strict du premier principe en relativité. Introduisons le concept d'énergie interne associée au milieu continu considéré, à l'aide de la définition générale établie à la suite des considérations du § 9 :

$$16.3 \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}\rho.$$

Cela posé, à partir :

- du postulat (16.3) d'unification de la masse et de l'énergie,
- de l'équation de conservation de l'énergie totale (16.2-a),

nous justifions l'introduction de la proposition suivante, qui constitue la formulation restreinte du *premier principe de la thermodynamique relativiste*.

Proposition. — Le taux de variation de la densité d'énergie interne associée à un milieu continu thermodynamique est égal à la somme des contributions du taux de variation de l'énergie calorifique, et du taux de variation de l'énergie des forces de contraintes agissant au sein du milieu considéré :

$$16.4 \quad \mathfrak{E} = \nabla_\alpha q^\alpha - q^\alpha \dot{u}_\alpha - 1/2 \theta^{\alpha\beta} \mathfrak{E} \bar{g}_{\alpha\beta}.$$

17. Le second principe de la thermodynamique relativiste.

Dans l'introduction à ce chapitre, nous avons été conduit à admettre que la formulation du second principe d'Eckart-Pham Mau Quan n'est pas adaptée aux idées relativistes, car elle ne fait pas intervenir dans l'expression du taux de variation de l'entropie totale de terme lié à l'accélération du milieu, terme dont l'existence est cependant fortement suggérée par l'interprétation relativiste du premier principe.

Par ailleurs, nous avons vu que la définition univoque de la densité d'impulsion-énergie, qui n'est plus de type normal, nécessite l'introduction de 3 relations supplémentaires non connues.

Nous avons été conduit à penser que la solution aux difficultés signalées peut être trouvée à partir d'une formulation tensorielle du second principe, se substituant à la formulation vectorielle initiale; une telle formulation devrait comporter, outre une inégalité de type scalaire faisant intervenir explicitement le terme manquant dans la formulation initiale du second principe, trois nouvelles relations devant être à l'origine des 3 équations manquantes dans l'énoncé complet du problème de la détermination de la structure des milieux continus thermodynamiques. La recherche d'une formulation tensorielle du second principe peut être grandement facilitée en utilisant une analogie avec la formulation du premier principe, bien qu'il soit évident qu'on ne puisse donner de justification immédiate à une telle analogie.

La dynamique des milieux continus en relativité générale se déduit des hypothèses suivantes :

i) L'impulsion-énergie associée à un milieu matériel est représentée par une *densité tensorielle contravariante d'ordre deux symétrique* $T^{\alpha\beta}$.

ii) La divergence de $T^{\alpha\beta}$ décrit le *taux de variation de l'impulsion-énergie totale*; cette grandeur est conservative en vertu des équations de champ.

De la même manière, nous admettons que :

i) A l'entropie totale caractéristique d'un système matériel est associée une *densité tensorielle contravariante d'ordre deux symétrique* $S^{\alpha\beta}$.

ii) La divergence de la *densité d'entropie totale* $S^{\alpha\beta}$ décrit le *taux de variation de la densité d'entropie totale* au cours de l'évolution du milieu considéré.

Nous pouvons facilement mettre en évidence la structure de $S^{\alpha\beta}$ dans

le cas des milieux continus thermodynamiques; une telle grandeur doit en effet comporter dans ce cas :

i) Un terme purement temporel, caractérisant la *densité d'entropie* S associée au système considéré; S est une densité scalaire, supposée strictement non négative ⁽²⁴⁾.

ii) Un terme de type quantité de mouvement, caractérisant l'apparition de la *densité de courant d'entropie* $-T^{-1}q^\alpha$, due à l'existence de la densité de courant de chaleur q^α ; le *champ de températures* T du milieu est un champ de scalaires strictement non négatifs ⁽²⁴⁾.

Il suit de ces exigences que la densité d'entropie totale $S^{\alpha\beta}$, caractéristique du milieu continu thermodynamique, admet nécessairement la forme :

$$17.1 \quad S^{\alpha\beta} = Su^\alpha u^\beta - 2T^{-1}u^{(\alpha} q^{\beta)}.$$

Le taux de variation de la densité d'entropie totale est une grandeur vectorielle, dont les composantes temporelle et spatiales sont explicitées par les relations :

$$17.2-a \quad u_\alpha \nabla_\beta S^{\alpha\beta} = \dot{S} - \nabla_\alpha (T^{-1}q^\alpha) + T^{-1}q^\alpha \dot{u}_\alpha$$

$$17.2-b \quad P(\nabla_\beta S^\beta_\alpha) = \dot{S}u_\alpha - \dot{L}(T^{-1}q_\alpha) + 2T^{-1}q_\beta \Omega^\beta_\alpha.$$

Il est tout à fait encourageant de constater que la relation (17.2-a) fait apparaître le terme manquant dans l'interprétation initiale (15.4) du second principe, terme caractéristique d'une contribution à la variation d'entropie totale due à l'accélération du milieu. L'hypothèse adoptée fait donc disparaître la difficulté présente dans le second principe d'Eckart *et al.*; la formulation tensorielle complète du second principe nécessite l'interprétation préalable des trois nouvelles quantités (17.2-b).

Nous nous limitons donc à l'heure actuelle à une formulation du second principe au sens strict, c'est-à-dire faisant intervenir uniquement la densité scalaire (17.2-a), que nous postulons strictement non négative :

$$17.3 \quad u_\alpha \nabla_\beta S^{\alpha\beta} = \dot{S} - \nabla_\alpha (T^{-1}q^\alpha) + T^{-1}q^\alpha \dot{u}_\alpha \geq 0.$$

En résumé, nous avons admis les hypothèses fondamentales suivantes :

Proposition. — i) L'entropie totale associée à un milieu continu thermodynamique est caractérisée par la densité d'entropie totale :

$$S^{\alpha\beta} = Su^\alpha u^\beta - 2T^{-1}u^{(\alpha} q^{\beta)}.$$

ii) Le taux de variation de la densité d'entropie totale au cours de l'évolution du milieu est défini par la divergence de $S^{\alpha\beta}$:

$$u_\alpha \nabla_\beta S^{\alpha\beta} = \mathfrak{L}S - \nabla_\alpha(T^{-1}q^\alpha) + 2T^{-1}q^\alpha \dot{u}_\alpha$$

$$P(\nabla_\beta S^\beta_\alpha) = S\dot{u}_\alpha - \mathfrak{L}(T^{-1}q_\alpha) + 2T^{-1}q_\beta \Omega^\beta_\alpha.$$

Ces hypothèses nous ont conduit à la formulation restreinte du *second principe de la thermodynamique relativiste* :

Proposition. — La partie temporelle du taux de variation de l'entropie totale associée à un milieu continu thermodynamique est strictement non négative :

$$\mathfrak{L}S - \nabla_\alpha(T^{-1}q^\alpha) + q^\alpha \dot{u}_\alpha \geq 0.$$

B. — Détermination de la structure de $T^{\alpha\beta}$.

L'objet des développements de cette section est la déduction des équations d'état d'un milieu continu thermodynamique, généralisant les équations établies précédemment pour les milieux élastiques, moyennant une hypothèse de structure simple sur la densité d'énergie libre du milieu.

18. Structure des milieux continus thermodynamiques.

A partir de la formulation restreinte des deux principes de la thermodynamique que nous venons d'établir, et d'une hypothèse de structure convenable du milieu continu considéré, nous allons déduire une représentation des états thermodynamiques d'un tel milieu.

L'hypothèse fondamentale est que les propriétés de structure des milieux continus thermodynamiques sont totalement déductibles de la donnée de la *densité d'énergie libre* (au sens de Helmholtz) associée à un tel milieu. Introduisons ce concept d'une manière adaptée à la relativité générale : si E désigne la densité d'énergie interne associée au milieu, le taux de variation de la densité d'énergie libre F est défini par la relation :

$$18.1 \quad \mathfrak{L}F = \mathfrak{L}(E - TS).$$

a) Par extension des hypothèses concernant les milieux élastiques, nous admettons que :

i) Les grandeurs d'état ($T^{\alpha\beta}$, $S^{\alpha\beta}$, F) sont des densités tensorielles de classe C^0 - C^2 p. m.

ii) Ces grandeurs sont fonctions des variables d'état indépendantes $(\bar{g}_{\alpha\beta}; T)$.

Selon l'hypothèse de départ, l'ensemble des propriétés de structure du milieu se déduit de la donnée de la fonction F satisfaisant à i) et ii) :

$$18.2 \quad F = F(\bar{g}_{\alpha\beta}; T).$$

b) Écrivons, à partir de (16.4) et (18.1), la formulation restreinte du premier principe :

$$18.3 \quad \mathcal{L}F = \nabla_{\alpha} q^{\alpha} - q^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} - 1/2\theta^{\alpha\beta} \mathcal{L}\bar{g}_{\alpha\beta} - \mathcal{L}(TS).$$

Le second principe sous la forme restreinte (17.3) affirme, compte tenu de (18.3), que :

$$18.4 \quad -\mathcal{L}F - S\dot{T} - 1/2\theta^{\alpha\beta} \mathcal{L}\bar{g}_{\alpha\beta} + q^{\alpha} T^{-1} \bar{\mathcal{D}}_{\alpha} T \geq 0.$$

c) En vertu des hypothèses i) et ii) ci-dessus, et de la donnée de la fonction F (18.2), la relation précédente (18.4) s'écrit :

$$18.5 \quad -(\delta F/\delta T + S)\dot{T} - (\delta F/\delta g_{\alpha\beta} + 1/2\theta^{\alpha\beta}) \mathcal{L}\bar{g}_{\alpha\beta} + q^{\alpha} T^{-1} \bar{\mathcal{D}}_{\alpha} T \geq 0.$$

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas d'un système adiabatique en équilibre thermodynamique; l'indépendance postulée des variables d'état $(\bar{g}_{\alpha\beta}, T)$ entraîne que soient identiquement vérifiées les relations :

$$18.6-a \quad S = -\delta F/\delta T.$$

$$18.6-b \quad \theta^{\alpha\beta} = -2\bar{\delta}F/\delta g_{\alpha\beta}.$$

Ce sont les équations d'état du milieu continu thermodynamique; ces équations sont intégrables à condition que :

$$18.7-a \quad \delta\theta^{\alpha\beta}/\delta T = 2\bar{\delta}S/\delta g_{\alpha\beta}.$$

$$18.7-b \quad \bar{\delta}/\delta g_{\gamma} \delta\theta^{\alpha\beta} = \bar{\delta}/\delta g_{\alpha\beta} \theta^{\gamma\delta}.$$

Pour ne pas avoir à renoncer à une description du système thermodynamique lorsque celui-ci évolue de manière irréversible, nous devons faire l'hypothèse essentielle que cette évolution ne s'éloigne pas trop d'une évolution de type réversible, de telle manière que les équations (18.6) décrivent toujours l'état du système considéré.

Sous cette condition, d'après (18.6), le second principe (18.5) exige que :

$$18.8 \quad q^{\alpha} T^{-1} \bar{\mathcal{D}}_{\alpha} T \geq 0.$$

Remarque. — L'inégalité précédente est satisfaite en particulier par l'équation :

$$18.9 \quad q^\alpha = -\chi^{\alpha\beta} \bar{\partial}_\beta T T^{-1},$$

où la densité tensorielle d'espace symétrique et définie positive $\chi^{\alpha\beta}$ caractérise la conductivité thermique du milieu; cette équation est l'exacte transposition en relativité de la loi classique de Fourier (1888) de conduction de la chaleur. Ce résultat, en accord avec l'opinion de Pham Mau Quan, conduit à abandonner la forme (15.5) de cette loi (Eckart, Stuelckelberg, Ehlers) déduite de la formulation (15.4) du second principe d'Eckart, qui conduisait aux difficultés que l'on a signalé.

d) En tenant compte dans (18.3) des équations d'état (18.6) nous obtenons l'équation ⁽²⁵⁾ :

$$18.10 \quad T \mathcal{L}S - \nabla_\alpha q^\alpha + q^\alpha \dot{u}_\alpha = 0.$$

Reportons ce résultat dans l'équation de conservation de l'énergie (16.2-a); il vient :

$$18.11 \quad \mathcal{L}\rho - T \mathcal{L}S + 1/2 \theta^{\alpha\beta} \bar{\mathcal{L}}g_{\alpha\beta} = 0;$$

de cette équation, on déduit, compte tenu des hypothèses de structure *i)* et *ii)* des grandeurs d'état, les relations :

$$18.12-a \quad \delta\rho/\delta T = T \delta S/\delta T.$$

$$18.12-b \quad \bar{\delta}\rho/\delta g_{\alpha\beta} = T \bar{\delta}S/\delta g_{\alpha\beta} - 1/2 \theta^{\alpha\beta}.$$

Le groupe des équations (18.12) est bien *intégrable* en vertu des conditions d'intégrabilité (18.7) des équations d'état (18.6), ce qui assure la cohérence des postulats de la thermodynamique relativiste.

Nous pouvons résumer l'ensemble des résultats obtenus.

Proposition. — La représentation des états d'un milieu continu thermodynamique en relativité générale, au voisinage de l'équilibre thermodynamique, est assurée par l'ensemble des relations suivantes :

i) Les équations d'état du milieu, liant les densités des contraintes et d'entropie du milieu à la densité d'énergie libre :

$$S = -\delta F/\delta T, \quad \theta^{\alpha\beta} = -2 \bar{\delta}F/\delta g_{\alpha\beta},$$

et les conditions d'intégrabilité de ces équations :

$$\delta \theta^{\alpha\beta}/\delta T = 2 \bar{\delta}S/\delta g_{\alpha\beta}, \quad \bar{\delta}/\delta g_{\gamma\delta} \theta^{\alpha\beta} = \bar{\delta}/\delta g_{\alpha\beta} \theta^{\gamma\delta}.$$

⁽²⁵⁾ Les fluides adiabatiques ($q^\alpha = 0$) ont été étudiés, dans le cas de l'isotropie, notamment par Van Dantzig (1940), Taub (1948) et Lichnerowicz (1964-1965).

ii) Les équations d'état reliant la densité de masse (énergie) du milieu aux densités d'entropie et des contraintes associés à ce milieu :

$$\frac{\delta \rho}{\delta T} = T \frac{\delta S}{\delta T} \quad \frac{\bar{\delta} \rho}{\delta g_{\alpha\beta}} = T \frac{\bar{\delta} S}{\delta g_{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta}.$$

iii) L'inégalité fondamentale, régissant le phénomène de conduction de la chaleur au sein du milieu :

$$q^\alpha \bar{\partial}_\alpha T T^{-1} \geq 0.$$

C. — Représentation des états variés des milieux continus thermodynamiques.

Nous proposons, dans cette section, de déduire de la description purement théorique précédente des états d'un milieu continu thermodynamique, les équations de liaison assurant la description des états variés de ce milieu, strictement compatibles avec les principes de la relativité générale.

19. Équations de liaison des milieux continus thermodynamiques.

La déduction des équations assurant la représentation des états variés d'un milieu continu thermodynamique à partir des équations d'état (18.6) est immédiate, si nous remarquons que les conditions d'application du lemme du § 6 sont bien réunies en ce qui concerne la densité d'entropie S et la densité des contraintes $\theta^{\alpha\beta}$ attachées à ce milieu, compte tenu des hypothèses de structure des grandeurs d'état *i*) et *ii*) posées dans le § 18.

Par variation des équations d'état (18.6), nous obtenons de la sorte le groupe ⁽²⁶⁾ :

$$19.1-a \quad T \mathfrak{L} S = 1/2 L'^{\alpha\beta} \mathfrak{L} \bar{g}_{\alpha\beta} + C T^{-1} \dot{T}.$$

$$19.1-b \quad P(\mathfrak{L} \theta^{\alpha\beta}) = 1/2 C^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathfrak{L} \bar{g}_{\gamma\delta} + L''^{\alpha\beta} T^{-1} \dot{T}.$$

où, par définition,

$$19.2-a \quad C = T^2 \delta S / \delta T.$$

$$19.2-b \quad L'^{\alpha\beta} = 2 T \bar{\delta} S / \delta g_{\alpha\beta}.$$

$$19.2-c \quad L''^{\alpha\beta} = T \delta / \delta T \theta^{\alpha\beta}.$$

$$19.2-d \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2 \bar{\delta} / \delta g_{\gamma\delta} \theta^{\alpha\beta}.$$

⁽²⁶⁾ Cf. J. F. Bennoun (1964).

i) Les grandeurs $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $L'^{\alpha\beta}$, $L''^{\alpha\beta}$ et C sont des *densités tensorielles d'espace* caractérisant les *propriétés de structure* du milieu continu thermodynamique.

ii) Ces grandeurs sont *fonctions de classe C^0 - C^2 p. m. des variables d'état indépendantes* ($\bar{g}_{\alpha\beta}$, T).

iii) Par construction, les densités $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $L'^{\alpha\beta}$ et $L''^{\alpha\beta}$ satisfont aux *conditions de symétrie* :

$$19.3-a \quad L'^{\alpha\beta} = L'^{(\alpha\beta)}.$$

$$19.3-b \quad L''^{\alpha\beta} = L''^{(\alpha\beta)}.$$

$$19.3-c \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}.$$

iv) Elles satisfont par ailleurs aux conditions supplémentaires suivantes, déduites des *conditions d'intégrabilité* (18.7) des *équations d'état* (18.6) :

$$19.4-a \quad L'^{\alpha\beta} = L''^{\alpha\beta}.$$

$$19.4-b \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\gamma\delta\alpha\beta}.$$

Il s'ensuit que les propriétés de structure des milieux continus thermodynamiques sont caractérisées par un ensemble de 28 grandeurs constituées par la *densité de chaleur spécifique sous conditions de rigidité* $T^{-1}C$, les $N = 6$ composantes de la *densité de chaleur de déformation* $L^{\alpha\beta}$ (19.4-a) et les $N(N + 1)/2 = 21$ composantes de la *densité module d'élasticité* $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

v) Ces 28 grandeurs satisfont à un ensemble de conditions différentielles assurant l'intégrabilité des équations de liaison (19.1), qui s'écrivent :

$$19.5-a \quad T^2 \delta / \delta(T^{-1}L^{\alpha\beta}) = 2\bar{\delta}C / \delta g_{\alpha\beta}.$$

$$19.5-b \quad T \delta / \delta TC^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\bar{\delta} / \delta g_{\gamma\delta} L^{\alpha\beta}.$$

$$19.5-c \quad \bar{\delta} / \delta g_{\rho\sigma} C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{\delta} / \delta g_{\gamma\delta} C^{\alpha\beta\rho\sigma}.$$

Ces conditions sont au nombre de $(N + N(N + 1)/2 + (N - 1)^3/2 + 3(N - 1)/2) = 97$, ce qui signifie qu'il reste 99 conditions de même type à établir par un processus phénoménologique pour que la structure du milieu continu considéré soit parfaitement déterminée.

Ainsi se trouve achevée la représentation des états variés d'un milieu continu thermodynamique. Nous allons rassembler les éléments nécessaires à une telle description sous forme de l'énoncé suivant :

Proposition. — Les équations de liaison des milieux continus thermodynamiques en relativité générale, reliant au voisinage de l'équilibre thermodynamique, les taux de variation des densités d'entropie et des contraintes

aux taux de variation de la température et des déformations du milieu considéré, admettent la forme :

$$T\dot{S} = 1/2L^{\alpha\beta}\bar{L}g_{\alpha\beta} + CT^{-1}\dot{T}, \quad P(L\theta^{\alpha\beta}) = 1/2C^{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{L}g_{\gamma\delta} + L^{\alpha\beta}T^{-1}\dot{T},$$

où les coefficients de structure du milieu, constitués par la densité de chaleur spécifique sous conditions de rigidité $T^{-1}C$, la densité de chaleur de déformation $L^{\alpha\beta}$, et la densité module d'élasticité $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, sont soumis aux conditions suivantes :

i) Ce sont des densités tensorielles d'espace, fonctions de classe C^0 - C^2 p. m. des variables d'état ($\bar{g}_{\alpha\beta}$, T).

ii) Ces grandeurs vérifient les propriétés de symétrie assurant l'existence d'une densité d'énergie libre :

$$L^{\alpha\beta} = L^{(\alpha\beta)}, \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}, \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\gamma\delta\alpha\beta}.$$

iii) Elles satisfont aux conditions assurant l'intégrabilité des équations de liaison :

$$T^2\delta/\delta T(T^{-1}L^{\alpha\beta}) = 2\bar{\delta}C/\delta g_{\alpha\beta}, \quad T\delta/\delta TC^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\bar{\delta}/\delta g_{\gamma\delta}L^{\alpha\beta}, \\ \bar{\delta}/\delta g_{\rho\sigma}C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{\delta}/\delta g_{\gamma\delta}C^{\alpha\beta\rho\sigma}.$$

CHAPITRE IV

ÉTUDE DES VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

Les développements suivants concernent l'étude des variétés caractéristiques des équations d'un milieu continu thermodynamique. Moyennant une hypothèse générale de continuité concernant la variation de l'entropie totale du milieu, hypothèse qui éclaire un des aspects de second principe, nous nous proposons de mettre en évidence les classes de variétés caractéristiques du problème posé, ce qui nous conduira à une étude du phénomène de propagation des fronts d'onde thermodynamiques.

20. Position du problème.

Nous venons d'établir un ensemble d'équations adapté à la description des milieux continus thermodynamiques en relativité générale; cependant, en raison du défaut actuel de l'interprétation de trois des quatre quantités

devant intervenir dans la formulation tensorielle du second principe, nous ne connaissons pas la forme des quatre relations devant compléter le groupe des équations proposées. Il ne nous est donc pas possible ici de poser le problème de Cauchy, c'est-à-dire d'aborder le problème de la recherche d'une solution locale effective de ces équations.

En revanche, nous allons pouvoir caractériser entièrement les variétés caractéristiques de ces équations; cette situation est rendue possible à l'aide d'une hypothèse de continuité relative à la variation d'entropie au cours de l'évolution du milieu considéré, hypothèse qui traduit au fond un des aspects du second principe.

Nous considérons de la sorte l'ensemble des relations suivantes, telles qu'elles ont été dégagées tout au long de l'étude des milieux continus thermodynamiques en relativité, c'est-à-dire :

i) Les équations du champ de gravitation :

$$2.5 \quad \sqrt{-g}G^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta},$$

où :

$$15.1 \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - 2u^{(\alpha} q^{\beta)} - \theta^{\alpha\beta}, \quad u_\alpha q^\alpha = 0, \quad u_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0, \quad u_\alpha u^\alpha = 1.$$

ii) Les 4 équations de conservation de la densité d'impulsion-énergie :

$$16.2-a \quad u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \mathcal{L}\rho - \nabla_\alpha q^\alpha + q^\alpha \dot{u}_\alpha + 1/2 \theta^{\alpha\beta} \mathcal{L} \bar{g}_{\alpha\beta} = 0.$$

$$16.2-b \quad P(\nabla_\beta T^\beta_\alpha) = \rho \dot{u}_\alpha - \mathcal{L}q_\alpha + 2q_\beta \Omega_\alpha^\beta - P(\nabla_\beta \theta^\beta_\alpha) = 0.$$

iii) Les 7 équations de liaison, assurant la description des états variés des milieux continus thermodynamiques :

$$19.1-a \quad T\mathcal{L}S = 1/2 L^{\alpha\beta} \mathcal{L} \bar{g}_{\alpha\beta} + CT^{-1} \dot{T}.$$

$$19.1-b \quad P(\mathcal{L}\theta^{\alpha\beta}) = 1/2 C^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{L} \bar{g}_{\gamma\delta} + L^{\alpha\beta} T^{-1} \dot{T}.$$

iv) 4 relations, non connues actuellement, devant provenir du *second principe de la thermodynamique*, et faire intervenir le *taux de variation de la densité d'entropie totale* :

$$17.2-a \quad u_\alpha \nabla_\beta S^{\alpha\beta} = \mathcal{L}S - \nabla_\alpha (T^{-1} q^\alpha) + T^{-1} q^\alpha \dot{u}_\alpha.$$

$$17.2-b \quad P(\nabla_\beta S^\beta_\alpha) = S \dot{u}_\alpha - \mathcal{L}(T^{-1} q_\alpha) + 2T^{-1} q_\beta \Omega_\alpha^\beta.$$

Nous posons les conditions de différentiabilité suivantes concernant l'ensemble des grandeurs qui interviennent dans le problème posé :

i) Les potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$ sont de classe C^1 - C^3 p. m.

ii) Les grandeurs d'état constituées par la densité d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$, la densité d'entropie totale $S^{\alpha\beta}$, et les coefficients de structure du milieu continu considéré $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $L^{\alpha\beta}$ et C , sont supposés de classe C^0 - C^2 p. m.

iii) Le taux de variation de la densité d'entropie totale $\nabla_\beta S^{\alpha\beta}$ est supposé de classe C^0 .

Les hypothèses *i)* et *ii)*, que nous rappelons, tirent leur origine d'une analogie avec la théorie newtonienne de la gravitation et la dynamique classique.

L'hypothèse *iii)* est fondamentale; c'est elle qui permet de résoudre complètement le problème de la recherche des variétés caractéristiques des équations des milieux continus thermodynamiques. Nous pensons que cette hypothèse doit être au fond une conséquence directe du second principe de la thermodynamique relativiste; en l'absence d'une formulation complète du second principe, nous la posons comme postulat indépendant de la théorie envisagée.

L'ensemble de ces hypothèses nous conduit à poser le problème envisagé de la manière suivante ⁽²⁷⁾ ⁽²⁸⁾ :

i) Nous nous donnons sur l'hypersurface initiale (S) la valeur de l'ensemble des grandeurs constituées par :

— les 10 potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$, et leurs 10 dérivées normales à (S),

— les 15 grandeurs d'état (ρ , u^α , q^α , $\theta^{\alpha\beta}$, T, S),

— les 28 coefficients de structure du milieu ($C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $L^{\alpha\beta}$, C),

satisfaisant aux conditions d'intégrabilité (19.5) des équations de liaison.

ii) Cela posé, nous cherchons à déterminer le comportement de l'ensemble des 25 grandeurs ($g_{\alpha\beta}$; u^α , ρ , q^α , $\theta^{\alpha\beta}$, S, T) au voisinage de l'hypersurface initiale (S) à l'aide des 25 relations *i)* à *iv)* décrivant les milieux continus thermodynamiques.

Nous allons montrer que le problème ainsi posé permet, moyennant des hypothèses de différentiabilité convenables, d'établir la forme générale des équations des hypersurfaces caractéristiques relatives aux milieux continus thermodynamiques.

⁽²⁷⁾ Cf. J. Hadamard (1903), T. Lévi-Civita (1931).

⁽²⁸⁾ Lorsque nous posséderons une formulation satisfaisante du second principe, nous devons chercher à poser le problème de la liaison du champ de gravitation créé par un milieu continu thermodynamique en accord avec le point de vue des états variés, de la même manière que ce problème a pu être posé pour les milieux élastiques (cf. chapitre II, section C).

21 Caractères des fronts d'onde.

Désignons par :

$$21.1 \quad f(x^\alpha) = 0$$

l'équation de l'hypersurface (S) porteuse des données initiales, et soit :

$$21.2 \quad l_\alpha = \partial_\alpha f$$

un vecteur normal à S.

Soit Φ une grandeur géométrique de V_4 constituant une des données initiales du problème; la grandeur Φ , supposée de classe C^0 , est donc continue sur S, mais il n'en est pas de même de sa dérivée $\partial\Phi$, continue par morceaux dans V_4 , et qui est donc susceptible d'être discontinue à la traversée de l'hypersurface initiale S; nous noterons toujours [] une telle discontinuité.

Nous remarquons tout d'abord qu'en vertu de la continuité admise de la métrique et de ses dérivées premières, nous avons identiquement :

$$21.3 \quad [\partial\Phi] = [\nabla\Phi].$$

Les composantes des dérivées de Φ sur S sont connues dès que cette grandeur est donnée sur S; nous faisons l'hypothèse essentielle que ces dérivées admettent les mêmes conditions de différentiabilité que Φ , c'est-à-dire qu'elles sont continues sur (S); il s'ensuit que les seules discontinuités possibles de $\nabla\Phi$ à la traversée de (S) sont celles de la dérivée de cette grandeur le long de la normale à (S), ce qui amène à poser :

$$21.4 \quad [\nabla_\alpha\Phi] = \varphi l_\alpha.$$

Les discontinuités (21.4) sont dites *du type de Hadamard* (27). Si une ou plusieurs discontinuités de ce type sont non nulles, (S) est une *variété caractéristique* du problème posé; en raison de l'arbitraire des discontinuités de $\nabla\Phi$, le problème de Cauchy n'admet pas dans ce cas de solution physiquement unique : il est indéterminé. Supposons que (S) soit une telle variété caractéristique; soit $\pi = S \cap \Sigma$ le 2-plan des directions d'espace orthogonales à la normale à (S), et soit \vec{n} le vecteur unitaire d'espace caractérisant la direction de cette normale :

$$21.5 \quad n_\alpha = (-\bar{l}_\beta \bar{l}^\beta)^{-1/2} \bar{l}_\alpha, \quad \bar{l}_\alpha = P(l_\alpha), \quad n_\alpha u^\alpha = 0, \quad n_\alpha n^\alpha = -1.$$

(π) est dit le *front d'onde* associé à la variété caractéristique (S) relativement à la direction de temps \vec{u} , et \vec{n} le *vecteur d'onde* caractérisant la direction de propagation du front d'onde.

L'existence de variétés caractéristiques d'un problème de Cauchy donné conduit de la sorte à la mise en évidence du phénomène de propagation d'ondes, transportant des discontinuités des grandeurs matérielles ou des grandeurs de champ. Nous nous proposons maintenant de dégager quelques caractères généraux de ces fronts d'onde.

Désignons par $\bar{\varphi} = P(\varphi)$ la composante d'espace de la discontinuité φ (21.4); $\bar{\varphi}$ peut de manière unique être décomposée localement sur (π) et sur la direction normale à (π) , à l'aide du projecteur :

$$21.6 \quad \widehat{P}_\alpha^\beta = \bar{g}_\alpha^\beta + n_\alpha n^\beta, \quad \widehat{P}_\alpha^\beta n^\alpha = 0, \quad \widehat{P}_\alpha^\beta u^\alpha = 0.$$

En particulier, la composante $\widehat{\varphi} = \widehat{P}(\bar{\varphi})$ de $\bar{\varphi}$ dans (π) est appelée la *composante transversale* de $\bar{\varphi}$, et sa composante le long de la normale à (π) sa *composante longitudinale*. Soit, par exemple, une discontinuité vectorielle $\bar{\varphi}^\alpha$; celle-ci peut être décomposée localement en une discontinuité transversale $\bar{\varphi}^\alpha$, et une discontinuité longitudinale $\bar{\varphi}^\alpha$, définies par :

$$21.7 \quad \bar{\varphi}^\alpha = \bar{\varphi}^\alpha + \bar{\varphi}^\alpha, \quad u_\alpha \bar{\varphi}^\alpha = 0, \quad n_\alpha \bar{\varphi}^\alpha = 0, \quad n^{[\alpha} \bar{\varphi}^{\beta]} = 0,$$

où manifestement $\bar{\varphi}^\alpha = (\bar{g}_\beta^\alpha + n_\alpha n^\beta) \bar{\varphi}^\alpha$ et $\bar{\varphi}^\alpha = -n_\alpha n^\beta \bar{\varphi}^\alpha$. Ces notions nous seront utiles lors de l'étude de la propagation indépendante des fronts d'onde longitudinaux et transversaux.

D'après un résultat de A. Lichnerowicz (29), introduisons la notion de vitesse v de propagation du front d'onde (π) par la relation :

$$21.8 \quad v^2 = (-\bar{l}_\alpha \bar{l}^\alpha)^{-1} (l_\beta u^\beta)^2.$$

Conformément aux idées relativistes, une telle vitesse ne peut être supérieure à l'unité (vitesse de la lumière dans le vide) :

$$21.9 \quad v^2 \leq 1.$$

Cette exigence peut être traduite de manière équivalente à l'aide du postulat suivant :

Proposition. — Toute hypersurface caractéristique d'un problème de Cauchy en relativité générale est strictement non orientée dans l'espace :

$$21.10 \quad l_\alpha l^\alpha \geq 0.$$

(29) Cf. A. Lichnerowicz (1955), chapitre II.

L'introduction de ces notions va nous permettre d'aborder directement l'étude du phénomène de propagation des fronts d'onde dans les milieux continus thermodynamiques.

22. Étude des variétés caractéristiques et détermination de l'équation de propagation des fronts d'ondes thermodynamiques.

L'étude des variétés caractéristiques des équations d'un milieu continu thermodynamique fait intervenir d'une part les *conditions de compatibilité géométrique* de type (21.4) des discontinuités des grandeurs en jeu, et d'autre part les *conditions de compatibilité dynamique* imposées à ces discontinuités par l'ensemble des équations régissant le milieu considéré; lorsque le système d'équations linéaire et homogène relatif à l'ensemble de ces discontinuités est régulier, celles-ci sont identiquement nulles, et l'hyper-surface initiale n'est pas caractéristique; nous nous proposons donc maintenant d'écrire explicitement un tel système dans le cas des milieux continus thermodynamiques envisagés.

a) Écrivons tout d'abord les conditions de compatibilité géométrique des discontinuités des grandeurs qui interviennent dans ce problème :

$$22.1 \quad [\partial_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta}] = a_{\alpha\beta} l_{\gamma} l_{\delta}, \quad [\nabla_{\alpha} p] = a l_{\alpha}, \quad [\nabla_{\alpha} u^{\beta}] = b^{\beta} l_{\alpha}, \\ [P(\nabla_{(\alpha} q^{\beta)})] = c^{\beta} l_{\alpha}, \quad [P(\nabla_{(\alpha} \theta^{\beta\gamma)})] = t^{\beta\gamma} l_{\alpha}, \quad [T^{-1} \nabla_{\alpha} T] = t l_{\alpha}, \quad [\nabla_{\alpha} S] = s l_{\alpha}$$

où tout indice placé entre parenthèses est soustrait à l'action de l'opérateur de projection d'espace P. En vertu de l'unitarité de u^{α} , et d'autre part à cause du caractère spatial de q^{α} et $\theta^{\alpha\beta}$, les discontinuités (b^{α} , c^{α} , $t^{\alpha\beta}$) sont des grandeurs d'espace :

$$22.2-a \quad u_{\alpha} b^{\alpha} = 0,$$

$$22.2-b \quad u_{\alpha} c^{\alpha} = 0,$$

$$22.2-c \quad u_{\alpha} t^{\alpha\beta} = 0$$

et l'on a manifestement :

$$22.3-a \quad [\nabla_{\alpha} q^{\beta}] = (c^{\beta} - q^{\gamma} b_{\gamma} u^{\beta}) l_{\alpha}$$

$$22.3-b \quad [\nabla_{\alpha} \theta^{\beta\gamma}] = (t^{\beta\gamma} - 2u^{(\beta} \theta^{\gamma)\delta} b_{\delta}) l_{\alpha}.$$

b) En raison des développements du § 20, nous admettons que l'ensemble des conditions de compatibilité dynamique auxquelles doivent satisfaire les discontinuités précédentes proviennent des hypothèses suivantes :

i) La continuité du tenseur d'Einstein $G^{\alpha\beta}$, conséquence de la continuité postulée de $T^{\alpha\beta}$ et des équations de champ (2.5) entraîne :

$$22.4 \quad [G^{\alpha\beta}] = 0.$$

ii) La continuité du premier membre des équations de conservation (16.2), conséquence de la structure des équations de champ, exige d'autre part :

$$22.5 \quad [\nabla_{\beta} T_{\alpha}^{\beta}] = [(\mathcal{L}\rho - \nabla_{\beta} q^{\beta} + q^{\beta} \dot{u}_{\beta} + 1/2 \theta^{\beta\gamma} \mathcal{L} \bar{g}_{\beta\gamma}) u_{\alpha} + \rho \dot{u}_{\alpha} - \mathcal{L} q_{\alpha} + 2q_{\beta} \Omega_{\alpha}^{\beta} - P(\nabla_{\beta} \theta_{\alpha}^{\beta})] = 0.$$

iii) La continuité postulée du taux de variation de la densité d'entropie totale (17.2), admise comme conséquence du second principe de la thermodynamique, impose par ailleurs :

$$22.6 \quad [\nabla_{\beta} S_{\alpha}^{\beta}] = [(\mathcal{L}S - \nabla_{\beta} (T^{-1} q^{\beta}) + T^{-1} q^{\beta} \dot{u}_{\beta}) u_{\alpha} + S \dot{u}_{\alpha} - \mathcal{L} (T^{-1} q_{\alpha}) + 2T^{-1} q_{\beta} \Omega_{\alpha}^{\beta}] = 0.$$

iv) Enfin, les équations de liaison (19.1) du milieu continu thermodynamique exigent que soient vérifiées les conditions :

$$22.7-a \quad [P(\mathcal{L}\theta^{\alpha\beta}) - 1/2 C^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{L} \bar{g}_{\gamma\delta} - L^{\alpha\beta} T^{-1} T] = 0.$$

$$22.7-b \quad [T \mathcal{L} S - 1/2 L^{\alpha\beta} \mathcal{L} \bar{g}_{\alpha\beta} - C T^{-1} \dot{T}] = 0.$$

Les 25 discontinuités (22.1) doivent donc satisfaire à l'ensemble des 25 conditions (22.4-7).

c) Les discontinuités $a_{\alpha\beta}$ du champ de gravitation satisfont à l'ensemble des 10 conditions (22.4), indépendamment des conditions imposées aux autres discontinuités; ces 10 conditions ne sont pas indépendantes puisque, à cause des identités :

$$22.8 \quad S l_{\alpha}^{\alpha\beta\gamma} [R_{\beta\gamma\delta\epsilon}] = 0,$$

satisfaites par les discontinuités du tenseur de courbure, les discontinuités du tenseur d'Einstein satisfont identiquement aux 4 relations :

$$22.9 \quad l_{\alpha}^{\alpha} [G^{\alpha\beta}] = 0.$$

La recherche de données initiales sur (S) compatibles avec (22.9) constitue le *problème des conditions initiales*; ces conditions montrent seules 6 des conditions (22.4) sont indépendantes, celles qui ne font intervenir que les composantes des discontinuités du champ gravitationnel sur l'hypersurface

initiale (S); seules ces composantes semblent ainsi pouvoir recevoir une signification physique; ce sont :

$$22.10 \quad [G^{\alpha\beta}] = -1/2 l^\gamma l_\gamma (a'^{\alpha\beta} - 1/2 g'^{\alpha\beta} a_\delta^\delta), \quad g'_{\alpha\beta} l^\alpha = 0, \quad a'_{\alpha\beta} l^\alpha = 0,$$

où $g'^{\alpha\beta}$ et $a'_{\alpha\beta}$ désignent respectivement les composantes de $g^{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}$ sur (S). Les conditions (22.4) sont identiquement vérifiées si $a'_{\alpha\beta} = 0$, c'est-à-dire si le champ gravitationnel n'est pas discontinu à la traversée de l'hypersurface (S). Si, en revanche, l'une des discontinuités $a'_{\alpha\beta}$ est non nulle, S est variété caractéristique du problème posé, et les conditions (22.4) imposent dans ce cas la condition :

$$22.11-a \quad l^\alpha l_\alpha = 0;$$

le champ de vecteurs \vec{l} ayant été supposé de type intégrable (21.2), il est facile de montrer que les trajectoires de S sont des géodésiques isotropes de V_4 :

$$22.11-b \quad \mathfrak{L}(\vec{l})l_\alpha = 0.$$

Les fronts d'onde associés aux variétés caractéristiques (22.11) tangentes au cône élémentaire $ds^2 = 0$ sont les *fronts d'onde gravitationnels* ; nous avons vu que les caractères de ces fronts d'onde ne semblent pas dépendre de la structure des milieux matériels sources du champ.

d) Supposons maintenant que S ne soit pas une telle variété, c'est-à-dire ne transporte pas de discontinuités du champ de gravitation :

$$22.12 \quad l^\alpha l_\alpha \neq 0.$$

Nous sommes alors amené à considérer l'ensemble restreint des 15 conditions (22.5-7) auxquelles doivent satisfaire les 15 discontinuités (a , b^α , c^α , $t^{\alpha\beta}$, t , s), où b^α , c^α et $t^{\alpha\beta}$ sont des grandeurs d'espace, en vertu de (22.2).

Nous allons montrer qu'une telle étude se réduit à la considération d'un système de 5 conditions relatives au comportement des 5 discontinuités a , b^α et t .

Les 15 discontinuités envisagées sont en effet soumises à l'ensemble des 15 conditions suivantes, strictement équivalentes aux conditions initiales (22.5-7) ⁽⁸⁰⁾ :

$$22.13-a \quad av^2 u_\alpha + M_\alpha^\beta b_\beta + v N_\alpha t = 0,$$

⁽⁸⁰⁾ Ces relations sont obtenues en effectuant les opérations successives suivantes:
i) Éliminer dans (22.5) les $[\nabla_\alpha q^\beta]$ à l'aide de (22.6). *ii)* Éliminer ensuite dans (22.5-6) les $[\nabla_\alpha S]$ à l'aide de (22.7-b). *iii)* Éliminer dans ces nouvelles relations (22.5'-6') les $[\nabla_\alpha q^\alpha]$ et $[\nabla_\beta \theta^{\alpha\beta}]$ à l'aide de (22.7-a) et de la partie spatiale de (22.6').

$$22.13-b \quad P^\alpha b_\alpha + v^2 C t = 0,$$

$$22.13-c \quad v t^{\alpha\beta} = U^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\gamma b_\delta + v L^{\alpha\beta} t,$$

$$22.13-d \quad v c_\alpha = V_\alpha^\beta b_\beta + v q_\alpha t,$$

$$22.13-e \quad v T s = W^\alpha b_\alpha + v C t ;$$

v désigne la vitesse de propagation (21.8) du front d'onde associé à (S), et \vec{n} le vecteur unitaire d'espace (21.5) caractérisant la direction de propagation de ce front d'onde, et l'on a noté :

$$22.14-a \quad M_\alpha^\beta = v n_\gamma (\bar{g}^{\beta\gamma} + \theta^{\beta\gamma} - L^{\beta\gamma}) u_\alpha + v^2 (L - TS) \bar{g}_\alpha^\beta + \theta_\alpha^\beta \\ - C_\alpha^{\gamma\beta\delta} n_\gamma n_\delta - \theta^{\gamma\delta} n_\gamma n_\delta \bar{g}_\alpha^\beta,$$

$$22.14-b \quad N_\alpha = - (vC + q^\beta n_\beta) u_\alpha - (v q_\alpha + n_\beta L_\alpha^\beta),$$

$$22.14-c \quad P^\alpha = v n_\beta (L^{\alpha\beta} - TS \bar{g}^{\alpha\beta}) + 2 n_\beta q^\beta n^\alpha + 2 v^2 q^\alpha,$$

$$22.14-d \quad U^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} + 2 \bar{g}^{\alpha(\gamma} \theta^{\delta)\beta} - \theta^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta},$$

$$22.14-e \quad V_\alpha^\beta = v TS \bar{g}_\alpha^\beta - q_\alpha n^\beta - q^\gamma n_\gamma \bar{g}_\alpha^\beta,$$

$$22.14-f \quad W^\alpha = n_\beta (L^{\alpha\beta} - TS \bar{g}^{\alpha\beta}).$$

Les 5 conditions (22.13-*a, b*) régissent, indépendamment de la valeur des discontinuités restantes, le comportement des 5 discontinuités (a, t, b^α); il s'ensuit que si ces 5 discontinuités sont nulles, les 10 discontinuités ($t^{\alpha\beta}, c^\alpha, s$) s'annulent identiquement en vertu de (22.13-*c, d, e*), et donc le problème de Cauchy peut être posé sur (S).

Si, au contraire, l'une des discontinuités (a, t, b^α) est non nulle, l'hyper-surface initiale (S) est variété caractéristique; nous sommes de la sorte amené à la conclusion que la recherche des variétés caractéristiques du système des 15 conditions (22.5-7) reliant les 15 discontinuités considérées se ramène à la recherche des situations pour lesquelles le système des 5 conditions (22.13-*a, b*) est singulier. En mettant en évidence de manière explicite le caractère spatial des discontinuités b^α à l'aide de la condition (22.2-*a*), nous écrivons ce système sous la forme :

$$22.15 \quad E_A^B \varphi_B = 0 \quad (A, \dots = 0, 1, 2, \dots, 5),$$

où :

$$22.16-a \quad \varphi_\alpha = b_\alpha, \quad \varphi_4 = a, \quad \varphi_5 = t,$$

$$22.16-b \quad E_\alpha^\beta = M_\alpha^\beta, \quad E_\alpha^4 = v^2 u_\alpha, \quad E_\alpha^5 = v N_\alpha, \\ E_4^\beta = P^\beta, \quad E_4^4 = 0, \quad E_4^5 = v^2 C, \\ E_5^\beta = u^\beta, \quad E_5^4 = 0, \quad E_5^5 = 0.$$

Le système (22.15) est singulier si :

$$22.17 \quad \det (E_A^B) = 1/6 ! \delta_{MNPQRS}^{ABCDEF} E_A^M E_B^N E_C^P E_D^Q E_E^R E_F^S = 0.$$

En vertu de (22.16-b), cette condition s'explicité sous la forme :

$$22.18 \quad v(vC \overline{\det} (\overline{M}_\alpha^\beta) - (\overline{\min} \overline{M})_\alpha^\beta \overline{N}_\beta P^\alpha) = 0,$$

où $\overline{\det} (\overline{M}_\alpha^\beta)$ et $(\overline{\min} \overline{M})_\alpha^\beta$ désignent respectivement le *déterminant d'espace* et le *mineur d'espace* de la matrice 4×4 formée des composantes du tenseur symétrique d'espace $\overline{M}_\alpha^\beta$ ⁽³¹⁾ :

$$22.19-a \quad \overline{\det} (\overline{M}_\alpha^\beta) = 1/3 ! \delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta\gamma\delta} u^\mu u_\alpha \overline{M}_\beta^\nu \overline{M}_\gamma^\rho \overline{M}_\delta^\sigma,$$

$$22.19-b \quad (\overline{\min} \overline{M})_\mu^\alpha = 1/2 ! \delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta u^\nu \overline{M}_\gamma^\rho \overline{M}_\delta^\sigma.$$

Ainsi, seules des grandeurs d'espace apparaissent dans l'équation des fronts d'onde matériels (22.18) :

$$22.20 \quad \overline{M}_\alpha^\beta = v^2((\rho - TS)\overline{g}_\alpha^\beta + \theta_\alpha^\beta) - C_\alpha^{\gamma\beta\delta} n_\gamma n_\delta - \theta^{\gamma\delta} n_\gamma n_\delta \overline{g}_\alpha^\beta,$$

$$22.21 \quad \overline{N}_\alpha = -(vq_\alpha + n_\beta \overline{L}_\alpha^\beta),$$

$$22.14-c \quad P^\alpha = vn_\beta(L^{\alpha\beta} - TS\overline{g}^{\alpha\beta}) + 2n_\beta q^\beta n^\alpha + 2v^2 q^\alpha.$$

e) L'équation (22.18) s'annule en particulier pour $v = 0$, c'est-à-dire lorsque :

$$22.22-a \quad l_\alpha u^\alpha = 0.$$

Puisque nous avons supposé \vec{l} de type intégrable, on déduit que les trajectoires de cette hypersurface (22.22-a) sont les courbes d'équation :

$$22.22-b \quad \Omega l_\alpha = 0.$$

Les conditions (22.22) caractérisent le deuxième type des variétés caractéristiques du problème de Cauchy relatif aux équations des milieux continus thermodynamiques, qui sont les hypersurfaces tangentes aux lignes de courant, ou engendrées par celles-ci; les fronts d'onde associés transportent des discontinuités liées au milieu matériel.

f) Supposons que (S) ne soit pas une telle hypersurface :

$$22.23 \quad l_\alpha u^\alpha \neq 0.$$

(31) Cf. Appendice II.

L'équation (22.18) entraîne que soit alors identiquement vérifiée la condition :

$$22.24 \quad vC \overline{\text{dét}} (\overline{M}_\alpha^\beta) - (\min \overline{M})_\alpha^\beta \overline{N}_\beta P^\alpha = 0.$$

Cette équation décrit la propagation des *fronts d'onde thermodynamiques*; elle est du septième degré en v ; nous devons nous attendre à constater à ce qu'elle mette en évidence :

— La propagation de 6 *fronts d'onde élastiques*, le dédoublement des 3 fronts d'onde connus de la théorie classique étant due à l'existence au sein du milieu considéré de la direction privilégiée du courant de chaleur \vec{q} .

— La propagation d'un *front d'onde thermique*, lié à l'existence du flux de chaleur au sein du milieu.

Ces remarques seront précisées lors de l'étude particulière des milieux isotropes. Rassemblons maintenant les résultats tout à fait généraux établis au long de ce paragraphe :

Proposition. — Les variétés caractéristiques des équations des milieux continus thermodynamiques en relativité générale comportent :

i) Les hypersurfaces tangentes au cône élémentaire, se propageant avec la vitesse unité le long de géodésiques isotropes de V_4 , qui caractérisent la propagation des discontinuités du champ de gravitation :

$$l^\alpha l_\alpha = 0, \quad \Omega(\vec{l})l_\alpha = 0.$$

ii) Les hypersurfaces tangentes aux lignes d'univers, ou engendrées par celles-ci, qui caractérisent la propagation de discontinuités liées au milieu continu considéré,

$$l_\alpha u^\alpha = 0, \quad \Omega l_\alpha = 0.$$

iii) Les hypersurfaces caractérisant la propagation des 7 fronts d'onde thermodynamiques, d'équation :

$$Cv \overline{\text{dét}} (\overline{M}_\alpha^\beta) - (\min \overline{M})_\alpha^\beta \overline{N}_\beta P^\alpha = 0,$$

où :

$$\overline{M}_\alpha^\beta = v^2((\rho - TS)\overline{g}_\alpha^\beta + \theta_\alpha^\beta) - C_\alpha^{\gamma\beta\delta} n_\gamma n_\delta - \theta^{\gamma\delta} n_\gamma n_\delta \overline{g}_\alpha^\beta,$$

$$\overline{N}_\alpha = - (vq_\alpha + n_\beta L_\alpha^\beta),$$

$$P^\alpha = vn_\beta(L^{\alpha\beta} - TS\overline{g}^{\alpha\beta}) + 2n_\beta q^\beta n^\alpha + 2v^2 q^\alpha.$$

CHAPITRE V

APPLICATION : LES MILIEUX CONTINUS
THERMODYNAMIQUES ISOTROPES

A. — Caractérisation des milieux isotropes.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de faire une application dans le cas particulier des milieux isotropes du formalisme élaboré pour l'étude des milieux continus thermodynamiques en relativité générale.

Dans cette première section, nous allons introduire le concept d'isotropie d'un milieu continu à partir d'une propriété particulière des fronts d'onde matériels.

23. Introduction du concept d'isotropie.

Le phénomène de propagation indépendante des fronts d'onde longitudinaux et transversaux est caractéristique des milieux isotropes en théorie classique de l'élasticité; nous nous proposons de montrer que cette propriété suffit à définir le caractère d'isotropie d'un milieu continu élastique en relativité générale.

Considérons donc un milieu de type élastique, c'est-à-dire décrit par les équations de liaison (10.1), et étudions la propagation des ondes élastiques dans ces milieux; par restriction au cas envisagé des résultats (22.13) du paragraphe précédent, le phénomène de propagation des ondes élastiques est régi par les trois équations :

$$23.1 \quad \bar{M}'_{\alpha}{}^{\beta} b_{\beta} = 0, \quad \bar{M}'_{\alpha}{}^{\beta} = v^2(\rho \bar{g}_{\alpha}^{\beta} + \theta_{\alpha}^{\beta}) - C_{\alpha}^{\gamma\beta\delta} n_{\gamma} n_{\delta} - \theta^{\gamma\delta} n_{\gamma} n_{\delta} \bar{g}_{\alpha}^{\beta}.$$

Par définition, nous disons qu'il y a *propagation indépendante des fronts d'onde longitudinaux et transversaux* si les trois conditions (23.1) relatives aux discontinuités b_{α} sont séparables en un groupe de deux conditions faisant intervenir les seules *discontinuités transversales* $\overset{T}{b}_{\alpha}$, et une condition relative à la *discontinuité longitudinale* $\overset{L}{b}_{\alpha}$, où, en vertu des définitions du § 21, ces grandeurs sont caractérisées par les relations :

$$23.2 \quad b_{\alpha} = \overset{T}{b}_{\alpha} + \overset{L}{b}_{\alpha}, \quad n^{\alpha} \overset{T}{b}_{\alpha} = 0, \quad n_{[\alpha} \overset{L}{b}_{\beta]} = 0.$$

Les trois équations (23.1) sont équivalentes au groupe :

$$23.3-a \quad n^\alpha \overline{M}'_\alpha{}^\beta b_\beta^L + n^\alpha \overline{M}'_\alpha{}^\beta b_\beta^T = 0.$$

$$23.3-b \quad n_{[\alpha} \overline{M}'_{\beta]}{}^\gamma b_\gamma^L + n_{[\alpha} \overline{M}'_{\beta]}{}^\gamma b_\gamma^T = 0.$$

Le postulat de propagation indépendante des fronts d'onde exige que ce système se réduise à :

$$23.4-a \quad n^\alpha \overline{M}'_\alpha{}^\beta b_\beta^L = 0,$$

$$23.4-b \quad n_{[\alpha} \overline{M}'_{\beta]}{}^\gamma b_\gamma^T = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'arbitraire sur les discontinuités b_α et de la symétrie du tenseur d'espace $\overline{M}'_\alpha{}^\beta$, que les conditions suivantes soient identiquement vérifiées :

$$23.5 \quad n_{[\alpha} \overline{M}'_{\beta]}{}^\gamma n_\gamma = 0.$$

Nous sommes de la sorte conduit à rechercher la structure des tenseurs $\overline{M}'_\alpha{}^\beta$ de type (23.1) satisfaisant à (23.5), c'est-à-dire tels que :

$$23.6 \quad n_{[\alpha} (\theta_{\beta]}{}^\gamma n_\gamma v^2 - C_{\beta]}{}^{\gamma\delta\epsilon} n_\gamma n_\delta n_\epsilon) = 0.$$

Ces conditions devant être identiquement vérifiées pour chacune des vitesses v de propagation des fronts d'onde, il faut exiger que soient simultanément réalisées les deux types de conditions :

$$23.7-a \quad n_{[\alpha} \theta_{\beta]}{}^\gamma n_\gamma = 0.$$

$$23.7-b \quad n_{[\alpha} C_{\beta]}{}^{\gamma\delta\epsilon} n_\gamma n_\delta n_\epsilon = 0.$$

i) Les conditions (23.7-a) signifient que \vec{n} est vecteur propre de la densité des contraintes $\theta^{\alpha\beta}$, c'est-à-dire est l'un des trois *vecteurs principaux de contraintes* \vec{e}_i définis par :

$$23.8 \quad \theta^{\alpha\beta} = \eta_{ij}^{\alpha\beta} p e^\alpha e^\beta, \quad \overline{g}_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta = \eta_{ij}, \quad \eta_{ij} = -\delta_{ij}.$$

Nous sommes donc conduit à poser :

$$23.9-a \quad n_\alpha = e_\alpha.$$

ii) Cela étant, la densité module d'élasticité $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ doit satisfaire aux deux conditions (23.7-b); une étude purement algébrique montre que, compte tenu

des conditions de symétrie (10.4-a) de cette grandeur, la structure la plus générale des $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ satisfaisant à de telles conditions s'explique sous la forme ⁽³²⁾ :

$$23.9-b \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\substack{k \\ (i \neq j \neq k)}} \{ a e^{\alpha} e^{\beta} e^{\gamma} e^{\delta} + b (e^{\alpha} e^{\beta} e^{\gamma} e^{\delta} + e^{\alpha} e^{\beta} e^{\gamma} e^{\delta}) \\ + c (e^{\alpha} e^{\beta}) e^{\gamma} e^{\delta} + d (e^{\alpha} e^{\beta}) e^{\gamma} e^{\delta} + e^{\alpha} e^{\beta} e^{\gamma} e^{\delta} + e^{\alpha} e^{\beta} e^{\gamma} e^{\delta} \}.$$

Les expressions algébriques (23.9) sont telles que les conditions (23.7) de propagation indépendante des fronts d'onde soient identiquement satisfaites; cependant, la structure des milieux étudiés n'est pas entièrement déterminée; en effet, en vertu des conditions d'intégrabilité (10.5) des équations de liaison, les 15 densités scalaires (a, b, c, d, e) ne sont pas indépendantes : ces conditions entraînent que les densités $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ appartenant à la classe (23.9-b) sont nécessairement du type :

$$23.10-a \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\lambda \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta} - 2\mu \bar{g}^{\alpha(\gamma} \bar{g}^{\delta)\beta},$$

où :

$$23.10-b \quad \bar{\lambda} g^{\alpha\beta} = -2\bar{\delta}\mu/\delta g_{\alpha\beta}; \quad \delta\lambda/\delta g_{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta} = \bar{\delta}\lambda/\delta g_{\gamma\delta} \bar{g}^{\alpha\beta}.$$

En vertu de (23.10-b), les coefficients de structure peuvent s'exprimer à partir d'une seule variable indépendante, par exemple la densité de masse ρ ; si l'on utilise la conséquence de l'équation de conservation de l'énergie :

$$23.11 \quad \bar{\mu} \bar{g}^{\alpha\beta} = -2\bar{\delta}\rho/\delta g_{\alpha\beta};$$

le lien recherché s'écrit :

$$23.12 \quad \lambda = -\mu + (\rho + \mu)\partial\mu/\partial\rho,$$

où :

$$23.13 \quad \partial\mu/\partial\rho = \delta(\mu/\sqrt{-g})/\delta(\rho/\sqrt{-g}).$$

⁽³²⁾ Dans le cas de milieux continus de types plus généraux, les deux conditions (23.9), nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait propagation indépendante des fronts d'onde longitudinaux et transversaux, entraînent la remarquable particularité que chacune des ondes transversales se propage avec une vitesse différente; cf. J.-F. Bennoun (1964).

Le milieu décrit est un *fluide parfait* ⁽³³⁾ :

$$23.14 \quad \theta^{\alpha\beta} = \mu \bar{g}^{\alpha\beta}.$$

Il s'ensuit que le tenseur $\bar{M}'_{\alpha}{}^{\beta}$ (23.1) admet la forme :

$$23.15 \quad \bar{M}'_{\alpha}{}^{\beta} = (\rho + \mu)(v^2 \bar{g}_{\alpha}{}^{\beta} + \partial_{\mu}/\partial \rho n_{\alpha} n^{\beta}),$$

qui, à partir de (23.4), entraîne de manière immédiate le résultat bien connu qu'il y a propagation d'une seule onde longitudinale dans le milieu élastique considéré, avec la vitesse :

$$23.16 \quad v_0 = (\partial \mu / \partial \rho)^{1/2}.$$

Ainsi, le seul postulat de la propagation indépendante des fronts d'onde longitudinaux et transversaux dans les milieux continus élastiques suffit à définir complètement le caractère d'isotropie d'un tel milieu :

Proposition. — Étant donné un milieu élastique adiabatique en relativité générale, il y a équivalence stricte entre les deux hypothèses :

i) Les fronts d'onde longitudinaux et transversaux se propagent indépendamment :

$$n^{[\alpha\theta\beta]\gamma} n_{\gamma} = 0, \quad n^{[\alpha C^{\beta}]\gamma\delta\epsilon} n_{\gamma} n_{\delta} n_{\epsilon} = 0.$$

ii) Le milieu est isotrope :

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = (p - (\rho + p)\partial p/\partial \rho) \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta} - 2p \bar{g}^{\alpha(\gamma} \bar{g}^{\delta)\beta}, \quad \theta^{\alpha\beta} = p \bar{g}^{\alpha\beta}.$$

24. Structure des milieux continus thermodynamiques isotropes.

a) Par extension du résultat précédent, nous définissons le caractère d'isotropie des milieux continus thermodynamiques à l'aide des conditions :

$$24.1-a \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\lambda \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta} - 2\mu \bar{g}^{\alpha(\gamma} \bar{g}^{\delta)\beta}.$$

$$24.1-b \quad L^{\alpha\beta} = L \bar{g}^{\alpha\beta}.$$

⁽³³⁾ Bernstein (1960) avait établi en théorie classique le résultat extrêmement restrictif suivant : les seuls milieux élastiques pouvant être décrits par des équations d'état variées, et compatibles avec la donnée d'une densité d'énergie élastique, sont les milieux *isotropes*; un tel résultat ne peut cependant être retenu, car il est basé sur un choix non convenable des équations des états variés des milieux élastiques de Truesdell (1955).

En vertu des équations (19.2) et (19.5), conséquences des équations de liaison et de leurs conditions d'intégrabilité, les quatre coefficients de structure du milieu considéré sont liés par l'ensemble des relations :

$$24.2-a \quad \bar{\lambda}g^{\alpha\beta} = -2\bar{\delta}\mu/\delta g_{\alpha\beta}.$$

$$24.2-b \quad L = T\bar{\delta}\mu/\delta T.$$

$$24.2-c \quad L\bar{g}^{\alpha\beta} = 2T\bar{\delta}S/\delta g_{\alpha\beta}.$$

$$24.2-d \quad C = T^2\bar{\delta}S/\delta T.$$

$$24.2-e \quad T\bar{\delta}\lambda/\delta T\bar{g}^{\alpha\beta} = -2\bar{\delta}L/\delta g_{\alpha\beta}.$$

$$24.2-f \quad T^2\bar{\delta}(T^{-1}L)/\delta T\bar{g}^{\alpha\beta} = 2\bar{\delta}C/\delta g_{\alpha\beta}.$$

$$24.2-g \quad \bar{\delta}\lambda/\delta g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} = \bar{\delta}\lambda/\delta g_{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}.$$

Par ailleurs, les équations (18.12) provenant de l'équation de conservation de l'énergie permettent de lier la densité de masse à ces coefficients :

$$24.3-a \quad \delta\rho/\delta T = T\bar{\delta}S/\delta T.$$

$$24.3-b \quad \bar{\delta}\rho/g_{\alpha\beta} = T\bar{\delta}S/\delta g_{\alpha\beta} - 1/2\mu\bar{g}^{\alpha\beta}.$$

On en déduit, par intégration des équations de liaison, que le milieu ainsi décrit est un *fluide parfait* :

$$24.4-a \quad \theta^{\alpha\beta} = p\bar{g}^{\alpha\beta},$$

où la densité de pression scalaire p est définie par la relation :

$$24.4-b \quad p = \mu,$$

ce qui justifie *a posteriori* la définition adoptée de l'isotropie des milieux continus thermodynamiques.

b) Les milieux continus thermodynamiques isotropes sont ainsi décrits à l'aide de deux variables d'état indépendantes; nous choisissons ici pour variables la température T , et le scalaire V défini par la relation :

$$24.5 \quad V = \exp \int \theta ds$$

où l'intégrale est étendue le long d'une ligne d'univers, de telle manière que l'on ait :

$$24.6 \quad 2V^{-1}\bar{\delta}V/\delta g_{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\beta}.$$

Cela étant, les coefficients de structure du milieu s'expriment à partir de la densité de pression scalaire p par les relations :

$$\begin{aligned}
 24.7-a \quad & \mu = p \\
 24.7-b \quad & \lambda = -\partial(pV)/\partial V \\
 24.7-c \quad & L = T\partial p/\partial T \\
 24.7-d \quad & C = V^{-1} \int T^2 \partial^2 p / \partial T^2 dV
 \end{aligned}$$

et les densités de masse (énergie) et d'entropie de ce milieu se déduisent de p à l'aide des intégrales :

$$\begin{aligned}
 24.8-a \quad & \rho = V^{-1} \int T^2 \partial(pT^{-1}) / \partial T dV \\
 24.8-b \quad & S = V^{-1} \int \partial p / \partial T dV.
 \end{aligned}$$

c) Nous en déduisons que la *densité d'enthalpie libre* attachée au milieu isotrope considéré admet l'expression :

$$24.9 \quad \rho + p - TS = V^{-1} \int V \partial p / \partial V dV$$

et que la *densité de chaleur de dilatation* s'écrit :

$$24.10 \quad L - TS = -T \partial / \partial T \left(V^{-1} \int V \partial p / \partial V dV \right)$$

où, par définition :

$$\int V \partial p / \partial V dV = \sqrt{-g} \int V \partial / \partial V (p / \sqrt{-g}) dV.$$

Lorsque les grandeurs d'état ne dépendent pas de V , les seconds membres de ces deux dernières expressions s'annulent identiquement, et l'on peut dire alors que le système considéré évolue de manière *réversible*, selon une succession d'états infiniment voisins de l'équilibre thermodynamique. Cette situation se produit, en particulier, dans le cas des mouvements rigides du milieu considéré.

Nous allons mettre en évidence, dans le paragraphe suivant, la structure de deux classes de milieux isotropes de ce type.

25. Deux classes particulières des milieux continus thermodynamiques isotropes.

a) Proposons-nous de mettre en évidence les caractéristiques des milieux isotropes, lorsque ceux-ci peuvent être décrits à l'aide d'une seule variable *indépendante*; l'examen des résultats du paragraphe précédent montre immédiatement que l'état d'un tel milieu ne dépend que de sa température T .

i) Les coefficients de structure du milieu isotrope considéré, exprimés par exemple à partir de la pression p , s'écrivent :

$$\begin{aligned} 25.1-a & \quad \mu = p \\ 25.1-b & \quad \lambda = -p \\ 25.1-c & \quad L = T\delta p/\delta T \\ 25.1-d & \quad C = T^2\delta^2 p/\delta T^2. \end{aligned}$$

ii) La solution des équations de liaison s'écrit :

$$\begin{aligned} 25.2-a & \quad \rho = T^2\delta/\delta T(T^{-1}p), \\ 25.2-b & \quad S = \delta p/\delta T. \end{aligned}$$

Comme nous venons de le voir, les cinq grandeurs d'état (ρ , p , T , S , L) sont liées par les relations :

$$25.3 \quad L - TS = \rho + p - TS = 0.$$

Une seule relation d'origine phénoménologique suffit pour que la structure de ces milieux soit parfaitement déterminée; nous allons donner immédiatement deux exemples de cette situation.

b-i) Supposons tout d'abord que les densités de pression et de masse soient liées par la relation :

$$25.4 \quad p/\sqrt{-g} = m(\rho/\sqrt{-g})^n, \quad m = \text{cte}, n = \text{cte}, n \neq 1.$$

D'après (25.1-2), les équations d'état du milieu admettent dans ce cas la forme :

$$\begin{aligned} 25.5-a & \quad \rho/\sqrt{-g} = (m^{-1}(aT^{(n-1)/n} - 1))^{1/(n-1)} \\ 25.5-b & \quad p/\sqrt{-g} = m(m^{-1}(aT^{(n-1)/n} - 1))^{n/(n-1)} \\ 25.5-c & \quad S/\sqrt{-g} = aT^{-1/n}(m^{-1}(aT^{(n-1)/n} - 1))^{1/(n-1)}, \end{aligned}$$

où a est une constante d'intégration, dont la signification est liée à l'interprétation physique de la solution.

ii) Étudions à part le cas particulier $n = 1$ non compris dans l'étude précédente, c'est-à-dire posons :

$$25.6 \quad p = m\rho, \quad m = \text{cte}.$$

Nous obtenons par le même procédé les équations d'état :

$$\begin{aligned} 25.7-a & \quad \rho/\sqrt{-g} = aT^{(1+1/m)} \\ 25.7-b & \quad p/\sqrt{-g} = maT^{(1+1/m)} \\ 25.7-c & \quad S/\sqrt{-g} = (m+1)aT^{1/m}. \end{aligned}$$

Ce deuxième type de solutions des équations des milieux continus thermodynamiques isotropes nous servira ultérieurement d'exemple d'application du formalisme élaboré dans ce travail, à l'étude de la liaison du champ de gravitation avec ses sources.

B. — Propagation des ondes thermodynamiques dans les milieux isotropes.

Par une étude particulière du phénomène de propagation des ondes thermodynamiques dans le cas des milieux continus isotropes, nous nous proposons de mettre en évidence certaines des particularités de ces fronts d'onde, dont nous n'avons pu donner qu'un aspect qualitatif dans le cas général.

26. Propagation des ondes thermodynamiques dans les milieux continus isotropes.

Nous nous reportons à l'équation des ondes thermodynamiques :

$$22.24 \quad vC \overline{\text{dét}} (\overline{M}_\alpha^\beta) - (\overline{\text{min}} \overline{M})_\alpha^\beta \overline{N}_\alpha P^\beta = 0,$$

où, en vertu de (24.1), les grandeurs (22.20), (22.21) et (22.14-c) admettent les expressions particulières :

$$26.1-a \quad \overline{M}_\alpha^\beta = (\rho + p - TS)(v^2 g_\alpha^\beta + v_0^2 n_\alpha n^\beta),$$

$$26.1-b \quad \overline{N}_\alpha = -(v q_\alpha + L n_\alpha),$$

$$26.1-c \quad P^\alpha = v(L - TS)n^\alpha + 2n_\beta q^\beta n^\alpha + 2v^2 q^\alpha,$$

compte tenu de la relation tirée de (24.2,3) :

$$26.2 \quad \lambda = -p + (\rho + p - L)\partial p / \partial \rho,$$

et où l'on a noté :

$$26.3 \quad v_0^2 = (\rho + p - L) / (\rho + p - TS)\partial p / \partial \rho.$$

Nous voyons immédiatement que lorsque le milieu évolue selon une succession d'états d'équilibre thermodynamique, l'équation des ondes (22.24) est identiquement vérifiée, ce qui signifie que, dans ce cas, il n'y a plus propagation d'ondes thermodynamiques.

Si nous écartons cette situation, nous pouvons écrire l'équation des ondes

thermodynamiques sous la forme suivante, après avoir supprimé le facteur surabondant $(\rho + p - TS)v^4$ ⁽³⁴⁾ :

$$26.4 \quad C(\rho + p - TS)v(v^2 - v_0^2) - L(L - TS)v + 2Ln_\alpha q^\alpha(v^2 - 1) \\ + (L - TS)n_\alpha q^\alpha v^2 + 2q_\alpha q^\alpha v(v^2 - v_0^2) + 2(n_\alpha q^\alpha)^2 v(1 - v_0^2) = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en v , alors que l'équation générale était de degré sept; nous interprétons immédiatement ce fait en disant que l'isotropie fait disparaître les fronts d'onde transversaux, résultat connu en théorie hydrodynamique des fluides parfaits. L'équation (26.4) doit donc permettre de mettre en évidence deux vitesses de propagation des ondes élastiques, la différence entre ces deux ondes étant due à l'existence de la direction privilégiée du vecteur courant de chaleur \vec{q} au sein du milieu, et une vitesse de propagation de l'onde thermique.

De manière à mettre en évidence ces caractéristiques, et à donner un ordre de grandeur des vitesses de propagation de ces différents types d'ondes plaçons-nous dans une situation voisine de l'équilibre thermodynamique, pour laquelle il est justifié de négliger dans (26.4) les termes quadratiques en $|\vec{q}|$. Compte tenu de cette hypothèse, nous obtenons facilement les valeurs cherchées des trois vitesses de propagation des ondes thermodynamiques dans les milieux isotropes au premier ordre d'approximation (ce que nous indiquons par le signe \sim) :

$$26.5-a \quad v \sim \pm v'_0 - (L(3 - 2/v_0'^2) - TS)/2C(\rho + p - TS) \cdot n^\alpha q_\alpha.$$

$$26.5-b \quad v \sim - (2L/v_0'^2)/C(\rho + p - TS) \cdot n^\alpha q_\alpha$$

où :

$$26.6 \quad v_0'^2 = v_0^2 + L(L - TS)/C(\rho + p - TS).$$

(26.5-a) montre effectivement la séparation du front d'onde élastique en deux fronts d'onde distincts, due à l'existence du flux de chaleur, et indique la correction à apporter à la vitesse $v_{00} = \pm (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$ de la théorie hydrodynamique des fluides parfaits; remarquons que cette séparation ne se produit pas, au moins à l'ordre d'approximation adopté, lorsque le flux de chaleur se propage transversalement, c'est-à-dire selon une direction située dans le 2-plan d'espace orthogonal à la direction de propagation d'ondes \vec{n} . (26.5-b) indique la valeur de la vitesse de propagation du front d'onde thermique; ce type d'ondes disparaît lors d'une propagation transversale du flux de chaleur au sein du milieu.

⁽³⁴⁾ Cf. Appendice II.

Remarque : Ce résultat fait disparaître une des grandes difficultés présentée par la théorie de Pham Mau Quan, difficulté qui tenait probablement au fait que cet auteur avait été contraint, lors de l'étude du problème de Cauchy, d'introduire une variable surabondante $Z = \dot{T}$; cet auteur mettait en effet en évidence l'existence d'un deuxième type d'ondes thermiques, se propageant avec une vitesse extrêmement grande, inversement proportionnelle à $n^\alpha q_\alpha$, cette vitesse devenant notamment infinie dans le cas des mouvements adiabatiques du milieu considéré; un tel résultat est en contradiction absolue avec les idées relativistes, et il est donc satisfaisant de constater que, sous les hypothèses adoptées dans ce travail, ce type d'ondes thermiques n'existe pas.

C. — L'univers de Stefan-Boltzmann.

En conclusion à ce travail, nous allons chercher à caractériser la structure du champ de gravitation créé par un milieu continu faisant partie d'une classe particulière des milieux continus thermodynamiques isotropes précédemment définis.

27. Position du problème.

Considérons la classe particulière des milieux thermodynamiques isotropes décrits à l'aide des équations (25.7); nous nous proposons, en application des considérations générales précédentes, d'étudier la structure du champ gravitationnel créé par une telle source.

Nous restreignons le cadre de cette étude en effectuant les hypothèses suivantes :

i) L'état du milieu est *adiabatique* : il est donc décrit à l'aide de la densité d'impulsion-énergie :

$$27.1 \quad T^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} T^n (u^\alpha u^\beta - 1/(n-1) \bar{g}^{\alpha\beta}).$$

En raison du caractère fini de la vitesse de propagation des ondes hydrodynamiques, les seules valeurs admissibles de n se trouvent dans le domaine :

$$27.2 \quad n \geq 2.$$

ii) Les lignes d'univers forment une *congruence normale* au champ des 3-plans des directions d'espace :

$$27.3 \quad \Omega_{\alpha\beta} = 0.$$

iii) Cette congruence est *sans distorsion* :

$$27.4 \quad \sigma_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} - 1/3 \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{\theta} = 0 \quad (\sigma_{\alpha}^{\alpha} = 0).$$

a) L'écriture des équations du champ de gravitation relatif à une telle source fait appel à la décomposition du tenseur de courbure de V_4 en termes d'espace et de temps :

$$27.5-a \quad P(R_{\alpha\beta\gamma\delta}) = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta} - 2\Omega_{\alpha[\gamma}\Omega_{\delta]\beta} + 2E_{\alpha[\gamma}E_{\delta]\beta}.$$

$$27.5-b \quad P(u^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 2\bar{\nabla}_{[\beta}(E_{\alpha]\gamma} + \Omega_{\alpha]\gamma}) - 2\dot{u}_{\gamma}\Omega_{\alpha\beta}.$$

$$27.5-c \quad u^{\gamma}u^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\bar{\nabla}_{(\alpha}\dot{u}_{\beta)} + \dot{u}_{\alpha}\dot{u}_{\beta} + \mathfrak{L}E_{\alpha\beta} - (E_{\alpha}^{\gamma} + \Omega_{\alpha}^{\gamma})(E_{\beta\gamma} + \Omega_{\beta\gamma}),$$

où $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est un tenseur généralisant le tenseur de courbure d'espace, ce dernier n'étant défini que dans le seul cas des sections d'espace intégrables ⁽³⁵⁾.

Les équations cherchées s'écrivent :

$$27.6-a \quad [\bar{R}_{\alpha\beta} + \bar{\nabla}_{(\alpha}\dot{u}_{\beta)} - \dot{u}_{\alpha}\dot{u}_{\beta}]^{+} = 0,$$

$$27.6-b \quad \bar{R} - 2/3\theta^2 = -2aT^n,$$

$$27.6-c \quad \bar{\partial}_{\alpha}\theta = 0,$$

$$27.6-d \quad \bar{\nabla}_{\alpha}\dot{u}^{\alpha} - \dot{u}_{\alpha}\dot{u}^{\alpha} - \dot{\theta} - 1/3\theta^2 = (n+2)/2(n-1)aT^n,$$

le signe []⁺ désignant la partie sans trace de l'expression située entre crochets, et le signe \cdot l'opérateur ($u^{\alpha}\nabla_{\alpha}$).

b) Les équations de champ (27.6) doivent être compatibles avec les quatre équations de conservation de $T^{\alpha\beta}$:

$$27.7-a \quad \theta = -(n-1)\dot{T}/T,$$

$$27.7-b \quad \dot{u}_{\alpha} = \bar{\partial}_{\alpha}T/T.$$

c) Considérons la décomposition de la métrique de V_4 en une somme de carrés :

$$27.8 \quad ds^2 = -\sum_{i=1}^3 (\theta^i)^2 + (\theta^0)^2 = \bar{ds}^2 + (u_{\alpha}dx^{\alpha})^2.$$

⁽³⁵⁾ $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ possède les propriétés suivantes : 1° C'est un tenseur d'espace. 2° Il possède les propriétés de symétrie d'un tenseur de courbure d'une variété riemannienne. 3° Lorsque Σ est une section d'espace intégrable ($\Omega_{\alpha\beta} = 0$), il se réduit au tenseur de courbure de Σ . 4° Enfin, lorsque le mouvement de Σ est rigide ($\mathfrak{L}\bar{g}_{\alpha\beta} = 0$), $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est invariant lors du mouvement de Σ ($\mathfrak{L}\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$).

Note ajoutée à la correction des épreuves : Le tenseur $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ a été également mis en évidence par G. FERRARÈSE, *Rend. Mat.* (1,2), 24 (1965), p. 57.

Les équations (27.3) et (27.7-b) sont les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité de la forme de Pfaff $\theta^0 = u_\alpha dx^\alpha$; il s'ensuit que les 3-plans Σ sont de type intégrable, et peuvent être doués d'une structure de variété riemannienne définie par la métrique elliptique \overline{ds}^2 , dont le tenseur de courbure est le tenseur $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ introduit précédemment ⁽³⁵⁾. La forme des équations de conservation (27.7) permet de préciser le choix de la métrique (27.8) du type ⁽³⁶⁾ :

$$27.9 \quad ds^2 = - T^{-2(n-1)/3} \tilde{ds}^2 + T^{-2} dt^2.$$

28. Structure du champ gravitationnel.

Nous nous proposons de montrer que la structure des équations de champ entraîne les conséquences suivantes :

- A. — L'espace Σ muni de la métrique \overline{ds}^2 est isotrope.
- B. — La variété riemannienne V_4 est *conforme euclidienne*.
- C. — Les lignes d'univers décrivent des *géodésiques* de V_4 .

Cela étant, nous montrerons que le groupe des équations de champ se réduit à une seule équation différentielle, que nous étudierons dans un cas particulier.

a) Pour établir (A), il est nécessaire de dégager deux résultats préliminaires.

i) A partir de la formule générale :

$$28.1 \quad \mathfrak{L} \overline{\nabla}_{\alpha} \dot{u}_{\beta} = \overline{\nabla} \mathfrak{L}_{\alpha} \dot{u}_{\beta} - \dot{u}_{\alpha} \mathfrak{L} \dot{u}_{\beta} + 2 \dot{u}_{\alpha} (E_{\beta}^{\gamma} + \Omega_{\beta}^{\gamma}) \dot{u}_{\gamma} - \dot{u}_{\gamma} P(\mathfrak{L} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma})$$

et en vertu des hypothèses (27.3-4), de (27.7) et de (12.5-a), nous obtenons tout d'abord :

$$28.2 \quad \mathfrak{L}(\overline{\nabla}_{(\alpha} \dot{u}_{\beta)} - \dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\beta}) = 1/(n-1) (\overline{\nabla}_{(\alpha} \dot{u}_{\beta)} - \dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\beta}) + 2(n-4)/(n-1) \theta \dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\beta} - 1/3 \overline{g}_{\alpha\beta} \dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\beta}.$$

ii) Par ailleurs, la variation du tenseur de courbure d'espace :

$$28.3 \quad \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = - (\overline{g}_{\alpha\gamma} \overline{R}_{\beta\delta} + \overline{g}_{\beta\gamma} \overline{R}_{\alpha\delta} - \overline{g}_{\alpha\delta} \overline{R}_{\beta\gamma} - \overline{g}_{\beta\delta} \overline{R}_{\alpha\gamma}) + \overline{g}_{\alpha[\gamma} \overline{g}_{\delta]\beta} \overline{R}$$

⁽³⁶⁾ Cf. M. Trümper (1962).

s'écrit, dans le cas particulier envisagé ⁽³⁷⁾ :

$$28.4 \quad \bar{\mathfrak{L}}\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1/3\bar{\theta}\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 1/3\bar{g}_{\alpha[\gamma}\bar{g}_{\delta]\beta}\bar{\theta}(-2\bar{R} + 4/3\bar{\theta}^2 + 4/3\dot{\bar{\theta}} - (n-2)/(n-1)aT^n).$$

On en déduit :

$$28.5 \quad \bar{\mathfrak{L}}\bar{R}_{\alpha\beta} = -1/3\bar{\theta}\bar{R}_{\alpha\beta} + 2/9\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{\theta}(\bar{\theta}^2 + 2\dot{\bar{\theta}} + 3/(n-1)aT^n).$$

iii) A l'aide des résultats (28.2-5), on obtient par variation des cinq premières équations de champ (27.6-a) :

$$28.6 \quad [4(n-4)/(n-1)\dot{u}_\alpha\dot{u}_\beta + (n+2)/3\bar{R}_{\alpha\beta}]^+ = 0.$$

En variant une nouvelle fois (28.6), et par comparaison avec l'équation initiale, nous obtenons le groupe :

$$28.7-a \quad (n+2)(n+5)[\bar{R}_{\alpha\beta}]^+ = 0,$$

$$28.7-b \quad (n-4)(n+5)[\dot{u}_\alpha\dot{u}_\beta]^+ = 0.$$

Compte tenu de l'hypothèse fondamentale (27.2), les équations (28.7-a) entraînent :

$$28.8 \quad [\bar{R}_{\alpha\beta}]^+ = 0,$$

ce qui montre que l'espace Σ est *isotrope*.

b) Le caractère *conforme euclidien* de V_4 est un résultat équivalent au résultat précédent (28.8), puisque, sous les hypothèses adoptées, le tenseur de Weyl de V_4 admet la forme :

$$28.9 \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta} = -(\bar{g}_{\alpha\gamma}[\bar{R}_{\beta\delta}]^+ + \bar{g}_{\beta\delta}[\bar{R}_{\alpha\gamma}]^+ - \bar{g}_{\alpha\delta}[\bar{R}_{\beta\gamma}]^+ - \bar{g}_{\beta\gamma}[\bar{R}_{\alpha\delta}]^+) + 4u_{[\alpha}[\bar{R}_{\beta][\delta]}^+u_{\gamma]} = 0.$$

On en déduit que le tenseur de courbure de V_4 est du type :

$$28.10 \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2/3aT^n(\bar{g}_{\alpha[\gamma}\bar{g}_{\delta]\beta} - (n+2)/(n-1)u_{[\alpha}\bar{g}_{\beta][\gamma}u_{\delta]}).$$

⁽³⁷⁾ Dans le cas général, la variation de $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{L}}\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = & E_{\lambda[\gamma}\bar{R}^\lambda_{\delta]\alpha\beta} + E_{\lambda[\alpha}\bar{R}^\lambda_{\beta]\gamma\delta} \\ & + \bar{\nabla}_{(\delta}\bar{\nabla}_{\beta)}E_{\alpha\gamma} + \bar{\nabla}_{(\gamma}\bar{\nabla}_{\alpha)}E_{\beta\delta} - \bar{\nabla}_{(\delta}\bar{\nabla}_{\alpha)}E_{\beta\gamma} - \bar{\nabla}_{(\gamma}\bar{\nabla}_{\beta)}E_{\alpha\delta} \\ & + 2\bar{\nabla}_{[\beta}(E_{\alpha][\delta}\dot{u}_{\gamma]}) + 2\bar{\nabla}_{[\gamma}(E_{\delta][\alpha}\dot{u}_{\beta]}) \\ & + 2\bar{\nabla}_{[\beta}(E_{\alpha][\delta}\dot{u}_{\gamma]}) + 2\bar{\nabla}_{[\gamma}(E_{\delta][\alpha}\dot{u}_{\beta]}) \\ & + 4\dot{u}_{[\alpha}E_{\beta][\delta}\dot{u}_{\gamma]} + 2E_{\lambda[\delta}E_{\gamma][\beta}\Omega_{\alpha]}^\lambda + 2E_{\lambda[\beta}E_{\alpha][\delta}\Omega_{\gamma]}^\lambda. \end{aligned}$$

c) Introduisons explicitement la métrique d'espace $\tilde{d}s^2$ conforme à $\bar{d}s^2$, définie dans (27.9); en vertu de (27.7-a), la structure de l'espace $\tilde{\Sigma}$ muni de la métrique $\tilde{d}s^2$ est invariante par la transformation infinitésimale engendrée par le champ de vecteurs \vec{u} :

$$28.11 \quad \mathfrak{L}\tilde{d}s^2 = 0,$$

et l'on a donc :

$$28.12 \quad \mathfrak{L}\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\beta} = 0.$$

En vertu d'une formule générale de conformité, le tenseur de Ricci $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\beta}$ de $\tilde{\Sigma}$ admet pour expression :

$$28.13 \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\beta} = & \bar{\mathbf{R}}_{\alpha\beta} - (n-1)/3 \bar{\nabla}_{(\alpha} \dot{u}_{\beta)} + (n-1)^2/9 \dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\beta} \\ & - \bar{g}_{\alpha\beta} ((n-1)/3 \bar{\nabla}_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} + (n-1)^2/9 \dot{u}_{\gamma} \dot{u}^{\gamma}). \end{aligned}$$

Compte tenu des équations (27.6-a) et de (28.7), il découle de (28.13) que $\tilde{\Sigma}$ est *isotrope* :

$$28.14 \quad [\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\beta}]^+ = 0.$$

Prenons la trace des deux membres de (28.13); il vient :

$$28.15 \quad -T^{2(n-1)/3} \tilde{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}} - 4/3(n-1)(\bar{\nabla}_{\alpha} \dot{u}^{\alpha} - \dot{u}_{\alpha} \dot{u}^{\alpha}) - 2/9(n-1)(n+5) \dot{u}_{\alpha} \dot{u}^{\alpha}.$$

Considérons la variation de (28.15), en tenant compte de (28.12), et en utilisant (28.2); l'équation obtenue n'est compatible avec les équations de champ (27.6-b, d) que si :

$$28.16 \quad (n-1)(n+5) \dot{u}_{\alpha} \dot{u}^{\alpha} = 0,$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'hypothèse fondamentale (27.2), et du fait que \dot{u}_{α} est strictement orienté dans l'espace, à condition que :

$$28.17 \quad \dot{u}_{\alpha} = 0,$$

ce qui montre effectivement que les lignes d'univers sont des géodésiques de V_4 ; ce résultat aurait pu être atteint de manière immédiate en utilisant les identités de Bianchi relatives à $\bar{\mathbf{R}}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, compte tenu de (28.8), et de l'équation de champ (27.6-b), mais ce processus aurait masqué la signification de (28.17), qui est en fait la condition de compatibilité des équations (27.6-b) et (27.6-d); (27.6-b) est donc une intégrale première de

(27.6-d), et la détermination du champ de gravitation se réduit à l'intégration de la seule équation de champ (27.6-b).

De (28.17), on déduit :

$$28.18 \quad \bar{\partial}_\alpha T = 0,$$

ce qui est absolument compatible avec l'hypothèse initiale d'état adiabatique du milieu, compte tenu de la forme (18.9) de l'équation relativiste de conduction de la chaleur.

d) Relativement à la métrique (27.9), la seule équation de champ restante s'écrit :

$$28.19 \quad T^{2(n-1)/3} \tilde{R} + 2/3(n-1)^2 (dT/dt)^2 = 2aT^n,$$

où \tilde{R} est une constante, en vertu de (28.12), et des identités de Bianchi relatives à $\tilde{R}_{\alpha\beta}$. La solution de (28.19), assurée sous la condition :

$$28.20 \quad \tilde{R} < 2aT^{(n+2)/3}$$

fait intervenir une intégrale de type elliptique.

Dans le cas particulier $n = 4$, le milieu considéré est analogue à un corps noir décrit par la célèbre loi du rayonnement de Stefan-Boltzmann (1884), et la variété V_4 est conforme à une variété V'_4 homéomorphe au produit $V'_3 \times \mathbb{R}$ d'un 3-espace isotrope par la droite réelle :

$$28.21 \quad ds^2 = T^{-2}(-\tilde{d}s^2 + dt^2);$$

le champ de températures T du milieu est caractérisé, suivant le signe de \tilde{R} , par les fonctions :

$$28.22-a \quad T = -\sqrt{3/a} \sqrt{\tilde{R}/6} \operatorname{Sin}^{-1} \sqrt{\tilde{R}/6} (t - t_0) \quad \tilde{R} > 0$$

$$28.22-b \quad T = \sqrt{3/a} \sqrt{-\tilde{R}/6} \operatorname{Sh}^{-1} \sqrt{-\tilde{R}/6} (t - t_0) \quad \tilde{R} < 0$$

$$28.22-c \quad T = \sqrt{3/a} (t - t_0)^{-1}. \quad \tilde{R} = 0$$

Résumons ces résultats :

Proposition. — Considérons une distribution matérielle décrite à l'aide de la classe particulière des milieux thermodynamiques isotropes :

$$\rho = \sqrt{-gaT^n}, \quad p = 1/(n-1) \sqrt{-gaT^n} \quad (n \geq 2),$$

distribution supposée adiabatique, engendrée par une congruence de lignes d'univers normale aux sections d'espace Σ , et sans distorsion.

Le champ gravitationnel créé par une telle source est caractérisé par les propriétés suivantes :

- i)* Les sections d'espace Σ sont isotropes.
- ii)* Le champ de températures est homogène sur chaque section d'espace.
- iii)* Les lignes d'univers sont des géodésiques de V_4 .
- iv)* V_4 est de type conforme euclidien.

La métrique révélant cette structure est du type :

$$ds^2 = - T^{-2(n-1)/3} \tilde{d}s^2 + T^{-2} dt^2$$

où $\tilde{d}s^2$ désigne la métrique d'un espace isotrope de structure invariante par la transformation infinitésimale engendrée par le champ de vecteurs \vec{u} , et T est déterminé par l'intégrale :

$$\int T^{-(n-1)/3} (T^{(n+2)/3} - \tilde{R}/2a)^{-1/2} dT = 1/(n-1)(3a)^{1/2} \int dt.$$

CONCLUSION

L'objet de ce travail était l'établissement d'un formalisme d'étude des milieux continus en relativité générale; il est entièrement inspiré par la nécessité de substituer à la description classique des états d'un milieu matériel, celle de la variation des états du milieu. Cette conception permet de supprimer effectivement la difficulté liée au fait que la définition d'une échelle absolue de mesure des grandeurs d'état n'est pas compatible avec les principes de la relativité générale.

Dans une approche au problème posé, j'ai d'abord considéré le cas des milieux continus élastiques. Après avoir montré que la structure de tels milieux est représentée par une densité d'impulsion-énergie de type normal, j'ai construit le groupe des six équations de liaison décrivant les états variés du milieu; le second membre de ces équations doit satisfaire à trois équations de conservation variées, dont j'ai établi la forme générale; en joignant à ces neuf équations les dix équations de champ variées, les quatre équations de conservation de la densité d'impulsion-énergie, et les neuf équations

tions d'évolution des déformations et des tourbillons du milieu, j'ai pu mettre en évidence un groupe de 32 équations devant permettre de poser, d'une manière adaptée au point de vue des états variés, le problème de l'élasticité en relativité générale.

Je me suis efforcé ensuite d'étendre ce schéma à un cadre thermodynamique. Une analyse préliminaire des postulats de la thermodynamique relativiste a permis de dégager des arguments solides en faveur d'une interprétation tensorielle du concept d'entropie totale d'un système matériel, la définition vectorielle précédemment admise n'étant pas adaptée aux idées relativistes. Cette conception conduit nécessairement à une formulation du second principe devant faire intervenir quatre relations décrivant le comportement du vecteur taux de variation de la densité d'entropie totale, en analogie avec la formulation du premier principe, constituée par les quatre équations de conservation de l'impulsion-énergie totale, mais qui est elle conséquence stricte des équations de champ. Une telle formulation, qui doit permettre de définir univoquement la densité d'impulsion-énergie, est liée à l'interprétation de la partie spatiale du vecteur taux de variation de l'entropie totale, et reste à l'heure actuelle un problème ouvert. Je me suis donc limité dans ce travail à une formulation restreinte des deux principes, mettant en jeu d'une part un postulat général d'unification de la masse et de l'énergie, et d'autre part le postulat du caractère strictement non négatif de la partie temporelle du taux de variation de l'entropie totale. Dans le cadre de cette axiomatique, j'ai construit les équations des milieux continus thermodynamiques, généralisant les équations de liaison des milieux élastiques; cette étude a permis incidemment d'apporter une justification de la loi de Fourier relativiste, comme exacte transposition de la loi classique.

A l'aide d'une hypothèse de continuité relative au taux de variation de l'entropie totale, hypothèse qui éclaire un des aspects du second principe, j'ai mis en évidence les classes de variétés caractéristiques du problème posé, ce qui m'a permis de dégager la forme générale de l'équation des fronts d'onde thermodynamiques; celle-ci montre l'existence de sept fronts d'onde, constitués d'une part par les six fronts d'onde élastiques, provenant du dédoublement de chacun des trois fronts d'onde connus, dédoublement dû à l'existence de la direction privilégiée du courant de chaleur, et d'autre part par le front d'onde thermique, dont l'apparition est liée directement à la propagation du flux de chaleur.

En application de ce formalisme, j'ai effectué une étude particulière des milieux continus thermodynamiques isotropes. Après avoir introduit le concept d'isotropie en partant d'une propriété particulière de la propagation

des ondes, j'ai mis en évidence les propriétés de structure de ces milieux. J'ai illustré l'étude générale précédente par une étude du problème de la liaison du champ de gravitation avec ses sources, lorsque celles-ci sont décrites par une classe particulière de solutions des équations de liaison proposées dans le cas de l'isotropie.

Une classification préalable des équations de liaison des milieux continus thermodynamiques, en relation avec chaque situation physique envisagée, reste nécessaire avant de pouvoir aborder le problème fondamental de la liaison du champ de gravitation avec ses sources; la résolution de ce programme est liée à l'établissement d'une formulation satisfaisante du second principe de la thermodynamique relativiste, dont nous n'avons pu ici qu'esquisser les fondements.

Ce travail doit son origine à M. S. Kichenassamy, dont l'aide amicale et les conseils et critiques inspirés par une exigence profonde de la compréhension des phénomènes physiques ont contribué de manière essentielle à son élaboration; je le remercie profondément.

Je suis heureux de dire ma reconnaissance à M. A. Lichnerowicz, pour l'intérêt qu'il a constamment porté à ce travail, et ses suggestions dont j'ai tiré grand profit.

Je remercie Mme M. A. Tonnelat pour son soutien constant au cours de ces années de recherches, ainsi que Mme Y. Choquet pour l'attention qu'elle a portée à ce travail.

APPENDICE I

SUR LA DÉTERMINATION DE LA STRUCTURE DE $T^{\alpha\beta}$ (Chap. II)

A. — On utilise les identités successives :

$$A.1 \quad \delta/\delta g_{\alpha\beta}(\partial s/\partial y^0) = 1/2\partial s/\partial y^0 u^\alpha u^\beta.$$

$$A.2 \quad \delta/\delta g_{\alpha\beta} u^\gamma = -1/2u^\alpha u^\beta u^\gamma.$$

$$A.3 \quad \delta/\delta \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{g}_\gamma^\delta = -u^\delta u^{(\alpha} \bar{g}_\gamma^{\beta)}.$$

$$A.4 \quad \delta/\delta g_{\alpha\beta} \bar{g}_{\gamma\delta} = \bar{g}_\gamma^{\alpha} \bar{g}_\delta^{\beta)},$$

pour établir :

$$A.5 \quad \delta/\delta g^{\alpha\beta} \bar{x}^\gamma_{,\mu} = -u^\gamma u^{(\alpha} \bar{x}^{\beta)}_{,\mu}$$

$$A.6 \quad \delta/\delta g_{\alpha\beta} \det(\bar{x}^\alpha_{,\mu}) = -1/2u^\alpha u^\beta \det(\bar{x}^\alpha_{,\mu}).$$

B. — A partir du groupe des deux identités :

$$B.1 \quad x^\beta_{,\mu} \delta/\delta x^\alpha_{,\mu} (\partial s/\partial y^0) = \partial s/\partial y^0 u_\alpha u^\beta.$$

$$B.2 \quad x^\beta_{,\mu} \delta/\delta x^\alpha_{,\mu} u^\gamma = \bar{g}_\alpha^\gamma u^\beta,$$

on déduit en premier lieu :

$$B.3 \quad x^\beta_{,\mu} \delta/\delta x^\alpha_{,\mu} \bar{x}^\gamma_{,\rho} = \bar{g}_\alpha^\gamma \bar{x}^\beta_{,\rho} - \bar{g}_{\alpha\delta} \bar{x}^\delta_{,\rho} u^\gamma u^\beta.$$

$$B.4 \quad x^\beta_{,\mu} \delta/\delta x^\alpha_{,\mu} \det(\bar{x}^\alpha_{,\mu}) = \bar{g}_\alpha^\beta \det(\bar{x}^\alpha_{,\mu}),$$

puis :

$$B.5 \quad x^\beta_{,\rho} \delta/\delta x^\alpha_{,\rho} \gamma_{\mu\nu} = 2\bar{g}_{\alpha\gamma} \bar{x}^\gamma_{,(\mu} \bar{x}^{\beta)}_{,\nu)}.$$

$$B.6 \quad x^\beta_{,\rho} \delta/\delta x^\alpha_{,\rho} \gamma = \bar{g}_\alpha^\beta \gamma.$$

APPENDICE II

SUR L'ÉQUATION DES FRONTS
D'ONDE THERMODYNAMIQUES (Chap. IV)

A. — Le calcul du déterminant et du mineur d'espace d'un tenseur d'espace $\overline{M}_\alpha^\beta$ fait intervenir les identités :

A.1 $1/4 ! \delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta_{\mu}^{[\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\rho}^{\gamma} \delta_{\sigma}^{\delta]}$.

A.2 $1/3 ! \delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u^\mu = \overline{g}_\nu^{[\beta} \overline{g}_\rho^{\gamma} \overline{g}_\sigma^{\delta]}$.

A.3 $1/2 ! \delta_{\mu\nu\rho\delta}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u^\mu = \overline{g}_\nu^{[\beta} \overline{g}_\rho^{\gamma]}$.

A.4 $1/2 ! \delta_{\mu\nu\gamma\delta}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u^\mu = \overline{g}_\nu^\beta$,

qui entraînent :

A.5 $\overline{\text{dét}} (\overline{M}_\alpha^\beta) = 1/6 (\overline{M}_\alpha^\alpha)^3 - 1/2 \overline{M}_\alpha^\alpha \overline{M}_\beta^\gamma \overline{M}_\gamma^\beta + 1/3 \overline{M}_\alpha^\beta \overline{M}_\beta^\gamma \overline{M}_\gamma^\alpha$.

A.6 $(\overline{\text{min}} \overline{M})_\alpha^\beta = \overline{M}_\alpha^\gamma \overline{M}_\gamma^\beta - \overline{M}_\gamma^\gamma \overline{M}_\alpha^\beta + 1/2 ((\overline{M}_\gamma^\gamma)^2 - \overline{M}_\gamma^\delta \overline{M}_\delta^\gamma) \overline{g}_\alpha^\beta$.

B. — Dans le cas de l'isotropie, le calcul de l'équation des ondes fait intervenir les identités :

B.1 $1/2 ! \delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u^\mu n_\delta n^\sigma = - \widehat{g}_\nu^{[\beta} \widehat{g}_\rho^{\gamma]}$, $\widehat{g}_\alpha^\beta = \overline{g}_\alpha^\beta + n_\alpha n^\beta$.

B.2 $\delta_{\mu\nu\rho\delta}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u^\mu n_\gamma n^\rho = - \widehat{g}_\nu^\beta$.

BIBLIOGRAPHIE

BENNOUN J. F., *Bol. Univ. Parana, Fisica teorica*, n° 6, Brésil, 1963.
 BENNOUN J. F., *Comptes Rendus*, t. 258, 1964, p. 94.
 BENNOUN J. F., *Étude de la représentation des milieux continus en Relativité générale* (miméographié), Paris, 1964.
 BENNOUN J. F., *Comptes Rendus*, t. 259, 1964, p. 3705.
 BOYER R. H., *Proc. Roy. Soc.*, t. 283 A, 1965, p. 343.
 BERNSTEIN B., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, t. 6, n° 2, 1960, p. 89.
 BRUHAT Y., *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 86, 1958, p. 155.
 ECKART C., *Ph. Rev.*, t. 58, 1940, p. 919.
 EHLERS J., *Akad. Wiss. (Mainz)*, t. 11, 1961, p. 3.
 HADAMARD J., *Leçons sur la propagation des ondes*, Hermann, 1903.
 KICHENASSAMY S., *Ann. Inst. Poincaré*, t. 1, n° 2, 1964, p. 129.
 KICHENASSAMY S., *Comptes Rendus*, t. 259, 1964, p. 4521.
 KICHENASSAMY S., *Comptes Rendus*, t. 260, 1965, p. 3865.
 LEVI-CIVITA T., *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Zanichelli, Bologne, 1931.
 LICHNEROWICZ A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

- LICHNEROWICZ A., *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.
- LICHNEROWICZ A., *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome, 1962.
- LICHNEROWICZ A., Cours au Collège de France, 1964-1965.
- PAULI W., *Theory of Relativity*, Pergamon Press, 1958.
- PHAM MAU QUAN, Thèse Sc. Math., Paris, 1955.
- PIRANI F. A. E. et WILLIAMS G., Séminaire Méc. Anal. Méc. Cél., Paris, nos 8-9, 1961-1962.
- RAYNER C. B., *Proc. Roy. Soc.*, t. 272 A, 1963, p. 44.
- SOMMERFELD A., Thermodynamics and Statistical Mechanics. *Lectures in Theoretical Physics*, t. 5, New York, Academic Press, 1956.
- STUELCKELBERG E. C. G., *Helvetica Physica Acta*, t. 35, nos 7-8, 1962, p. 568.
- SYNGE J. L., *Math. Zeitschr.*, t. 72, 1959, p. 82.
- TOLMAN R. C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1934.
- TRAUTMAN A., *Gravitation* (édité par L. Witten), Wiley, New York, 1963, chap. 5.
- TRAUTMAN A., Conférences au Collège de France (miméographié), 1963.
- TRUMPER M., *Ph. Zeitschr.*, t. 168, 1962, p. 55.
- DE WITT B. S., *Gravitation* (édité par L. Witten), Wiley, New York, 1963, chap. 8.

(Manuscrit reçu en mai 1965).
