ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ROLAND GUY

Sur une géométrisation des champs gravifique et électromagnétique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 2, nº 4 (1965), p. 307-325
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__2_4_307_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 4, 1965, p. 307-325.

Section A :
Physique théorique.

Sur une géométrisation des champs gravifique et électromagnétique

par

Roland GUY
(Département de Mathématiques,
Université de Montréal).

INTRODUCTION

La notion de variété à connexion affine est une généralisation de la notion classique due à M. A. Lichnerowicz (1), exposée dans le cadre de la théorie générale des connexions infinitésimales sur un espace fibré principal.

Ces connexions ont été étudiées entre autres par Mme I. Cattanéo qui les a utilisées, d'ailleurs incomplètement, dans la théorie relativiste des champs gravifique et électromagnétique (2).

Je reprends ici, complètement, cette étude et je montre qu'il est possible d'écrire les équations de Maxwell-Einstein et celles de la gravitation, uniquement à l'aide de grandeurs ayant une signification géométrique. On arrive ainsi à obtenir une géométrisation tout à fait naturelle de l'électromagnétisme et de la gravitation.

J'ai essayé d'exposer ici, pour les physiciens, la notion de variété à connexion affine d'une manière aussi intuitive que possible, à l'aide de considérations géométriques élémentaires.

---

(1) LICHNEROWICZ [*5*], p. 88 et s.
(2) I. CATTANÉO-GASPARINI [*1*] [*2*].

CHAPITRE PREMIER

LES VARIÉTÉS A CONNEXIONS AFFINES

1. — Espaces affines ponctuels (1).

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble quelconque d'éléments que nous appellerons points, E un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K.

Nous appellerons tout couple ordonné (A, B) d'éléments de $\mathcal{E}$ *vecteur lié* d'origine A, d'extrémité B.

Supposons qu'il existe une application φ de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans E, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$, $\forall$ A, B $\in \mathcal{E}$;

b) $\varphi(A, C) + \varphi(C, B) = \varphi(A, B)$, $\forall$ A, B, C $\in \mathcal{E}$;

c) Un point $0 \in \mathcal{E}$ étant choisi d'avance, à tout vecteur $a \in E$, il correspond un et un seul point A de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi(0, A) = a$.

$\mathcal{E}$ sera dit *espace affine ponctuel de dimension n associé à l'espace vectoriel* E.

2. — Sous-espaces affines, sous-espaces affines parallèles.

On appelle sous-espace affine de dimension r d'un espace affine $\mathcal{E}$ toute partie $\mathcal{V}$ de $\mathcal{E}$ telle que, quel que soit le point $O \in \mathcal{V}$, les vecteurs $\varphi(O, M)$ associés aux différents points $M \in \mathcal{V}$ constituent un sous-espace vectoriel de dimension r de E. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour un point O particulier, les vecteurs $\varphi(O, M)$ constituent un sous-espace vectoriel de E (2).

Soient alors $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux sous-espaces affines tels que O et O′ étant choisis dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$, pour tout $M \in \mathcal{V}$, $M' \in \mathcal{V}'$, $\varphi(OM)$ et $\varphi(O'M')$ appartiennent au même sous-espace vectoriel de E, on dira que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont *parallèles*. C'est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-espaces affines de même dimension (mais pas dans l'ensemble de tous les sous-espaces affines).

(1) Nous reprenons ici la définition proposée par A. LICHNEROWICZ dans [*3*], p. 37.

(2) A. LICHNEROWICZ [*3*], p. 90-91.

3. — Structure affine naturelle associée à un espace vectoriel.

Soit F un espace vectoriel, x, y deux vecteurs de F ; au vecteur lié (x, y) on fait correspondre le vecteur $z \in F$ défini par $\varphi(x, y) = z = y - x$. On dit alors qu'on a défini dans F une *structure naturelle d'espace affine.* Les sous-espaces affines de la structure affine de F sont les variétés linéaires affines de l'espace vectoriel F.

4. — Vecteurs équipollents, vecteurs libres.

On dira que deux vecteurs liés (A, B), (A′, B′) d'un espace affine $\mathcal{E}$ sont *équipollents* $\Leftrightarrow \varphi(A, B) = \varphi(A', B')$. Il est facile de voir que ceci est une relation d'équivalence dans l'ensemble des vecteurs liés; une classe d'équivalence est dite *vecteur libre.* Des définitions précédentes il suit qu'une classe d'équivalence ne peut être constituée que par des vecteurs liés qui sont dans un même sous-espace affine, ou dans des sous-espaces affines parallèles, c'est pourquoi nous dirons aussi que *deux vecteurs équipollents sont parallèles.*

5. — Repère affine.

Soit X un point fixe de $\mathcal{E}$, que nous appellerons *point de base* de $\mathcal{E}$. A tout vecteur $\xi \in E$ il correspond un seul point $O \in \mathcal{E}$, ((*a*) § 1) tel que $\varphi(X, O) = \xi$. Nous appellerons *repère affine de* $\mathcal{E}$, *relativement à* X, *d'origine* O, l'ensemble S_X d'un vecteur $\xi \in E$ et d'une base B (définie par un ensemble ordonné de n vecteurs indépendants $e_1, \ldots, e_n$ de E), $S_X = (\xi, B)$.

Il est facile d'obtenir les formules de changement de repères [3].

Soit alors $A \in \mathcal{E}$, on appelle *coordonnées* de A par rapport au repère $S_X = (\xi, B)$ les composantes du vecteur $\varphi(O, A)$ par rapport à la base B.

6. — Expression analytique du parallélisme dans $\mathcal{E}$.

Soient $S_X = (\xi, B_0)$ et $S'_{X'} = (\xi', B'_{0'})$ deux repères affines repérant respectivement les deux vecteurs liés (X, M), (X′, M′) que nous supposons parallèles, c'est-à-dire tels que $\varphi(X, M) = \varphi(X', M')$.

---

(3) Voir § 9.

Posons :

	Dans le repère S_X		Dans le repère $S'_{X'}$
(6,1)	$\varphi(O, M) = v^\alpha e_\alpha$	(6,1')	$\varphi(O', M') = v'^\beta e'_\beta$
(6,2)	$\varphi(X, O) = \xi = \xi^\alpha e_\alpha$	(6,2')	$\varphi(X', O') = \xi' = \xi'^\beta e'_\beta$
(6,3)	$\varphi(X, X') = x = x^\alpha e_\alpha$	(6,3')	$\varphi(X', X) = -x = x'^\beta e'_\beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots n$.

On suppose qu'on connaît de plus la matrice $(a^\alpha_\beta) = A$ du changement de base (6,4) $e'_\beta = a^\alpha_\beta e_\alpha$, qui peut s'écrire $B' = AB$.

Nous allons établir la relation nécessaire liant v^α, ξ^α d'une part et v'^β, ξ'^β d'autre part.

De $\varphi(X', M') = \varphi(O', M') + \varphi(X', O')$, on obtient, en utilisant les relations précédentes :

$$\varphi(X', M') = (v'^\beta + \xi'^\beta)e'_\beta = (v'^\beta + \xi'^\beta)a^\alpha_\beta e_\alpha.$$

D'autre part

$$\varphi(X, M) = (v^\alpha + \xi^\alpha)e_\alpha, \tag{6,5}$$

ce qui donne en utilisant l'hypothèse de parallélisme

$$v^\alpha + \xi^\alpha = (v'^\beta + \xi'^\beta)a^\alpha_\beta. \tag{6,6}$$

Inversement si on a les relations (6,6) (X, M) et (X', M') seront parallèles.

7. — Parallélisme entre deux espaces affines arbitraires.

Entre deux espaces affines $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$ quelconques (associés à un même espace vectoriel E) il n'existe évidemment pas de parallélisme au sens habituel. Mais il est possible d'établir arbitrairement entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ une correspondance telle que si $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, on retrouve la correspondance précédente de parallélisme.

Soient alors S_X et $S'_{X'}$ des repères respectivement de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$, φ et φ' étant les applications correspondantes définies plus haut (§ 4).

A tout point $P' \in \mathcal{E}'$ on peut faire correspondre un point unique $P'_1 = \pi(P')$ de $\mathcal{E}$ de la manière suivante : un vecteur $t \in E$ étant choisi, fixe, on pose :

$$P'_1 = \pi(P') \Leftrightarrow \varphi(O, P'_1) - \varphi'(O', P') = t. \tag{7,1}$$

Si P'_1 n'était pas univoquement déterminé, on aurait un point $P'_2 = \pi(P')$ tel que $\varphi(O, P'_2) - \varphi'(O', P') = t$, d'où par soustraction avec (7,1),

$$\varphi(O, P'_2) = \varphi(O, P'_1)$$

et par (*c*) § 1), $P'_2 = P'_1$.

Inversement supposons donné P'_1 de $\mathcal{E}$, par (7,1) il existe aussi un et un seul point P' de $\mathcal{E}$ tel que $\pi(P') = P'_1$. On a ainsi défini par (7,1) une bijection entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Il est clair que cela implique la connaissance des bases B et B' l'une par rapport à l'autre.

Cela étant, on dira que (X, M) de $\mathcal{E}$ et (X', M') de $\mathcal{E}'$ sont *parallèles relativement à* $\pi \Leftrightarrow X = \pi(X')$, $M = \pi(M')$ et $\varphi(X, M) = \varphi'(M', X')$.

Remarquons que si $M' = O'$, $\varphi(O, \pi(O')) = t$. La condition nécessaire et suffisante de parallélisme (6,5) subsiste. La seule différence est que $(a^i_j) = A$ est donnée arbitrairement.

8. — Analyse affine en coordonnées curvilignes.

Nous pouvons aborder maintenant une généralisation de l'analyse classique en coordonnées curvilignes.

Soit F un espace vectoriel de dimension n sur un corps K commutatif, doué de sa structure affine naturelle.

On suppose définis sur F : *a*) un système de coordonnées curvilignes (4) (x^α); *b*) un champ de vecteurs contravariants $\xi(x)$, de telle manière que, en tout point $x \in F$, dans l'espace vectoriel tangent T_x soit défini un repère affine

$$S_x = \left\{ \xi(x), \left(\frac{\partial x}{\partial x^\alpha}\right)_x = e_\alpha \right\},$$

les $\dfrac{\partial x}{\partial x^\alpha}$ étant les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées en x.

Considérons un champ de vecteurs contravariants $v(x)$ (on écrivait dans la notation des paragraphes précédents (x, v)).

Nous allons calculer l'accroissement total du champ de vecteurs $v(x)$ lorsqu'on passe d'un point x à un point $x' = x + \nabla x$. Posons alors $v(x) = v^\alpha(x) e_\alpha$, $v_{\parallel}(x') = v'^\beta(x') e'_\beta$, $v_{\parallel}(x')$ étant le vecteur en x' parallèle à $v(x)$ en x. D'après la théorie classique (5) on sait qu'il est possible d'avoir une relation du type

$$e_\alpha(x) = (\omega^\beta_\alpha + \delta^\beta_\alpha) e'_\beta(x').$$

(4) LICHNEROWICZ, A. [*3*], p. 78 et s.
(5) LICHNEROWICZ, A. [*3*], p. 84 et s.

$v(x)$ et $v'_{\|}(x')$ étant parallèles, par la relation (6,6), nous avons

$$v^\alpha(x) + \xi^\alpha(x) = (\xi'^\beta(x') + v'^\beta(x'))(\delta^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\beta),$$

d'où on déduit l'accroissement $\underset{\|}{\nabla} v^\alpha$ dû au « transport parallèle » du vecteur v de x' à x :

$$(8{,}1)\qquad \underset{\|}{\nabla} v^\alpha = v^\alpha(x) - v'^\alpha(x') = \omega^\alpha_\beta v'(x')^\beta + (\delta^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\beta)\xi'^\beta(x') - \xi^\alpha(x).$$

Pour avoir l'accroissement total ∇v, il faut ajouter à $\underset{\|}{\nabla} v$ l'accroissement $\underset{|}{\nabla} v(x)$ de $v(x)$, d'où

$$\nabla v^\alpha = \underset{\|}{\nabla} v^\alpha + \underset{|}{\nabla} v^\alpha.$$

En faisant tendre $\nabla x \to 0$, et en posant

$$(8{,}2)\qquad dv^\alpha + \omega^\alpha_\beta v^\beta = \overset{\omega}{\nabla} v^\alpha$$

on obtient

$$(8{,}3)\qquad \mathrm{D}v^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} v^\alpha + \overset{\omega}{\nabla} \xi^\alpha.$$

Le vecteur $\mathrm{D}v^\alpha e_\alpha = \mathrm{D}v$ sera dit *différentielle affine absolue* du vecteur *contravariant* $v(x)$.

Il est clair que si $w(x)$ est un autre champ de vecteurs contravariants

$$\mathrm{D}(v^\alpha + w^\alpha) = \overset{\omega}{\nabla}(v^\alpha + w^\alpha) + \overset{\omega}{\nabla} \xi^\alpha.$$

D *n'est pas un opérateur linéaire, mais affine.*

Plus généralement, supposons donnée dans T_x une application linéaire par

$$(8{,}4)\qquad \Phi[\varphi(x, x')] = \Phi^\alpha_\beta(\varphi(x, x'))^\beta e_\alpha.$$

Alors dans le § 6, rien n'est changé, sauf (6,5) qui devient

$$(8{,}5)\qquad \varphi(x, v) = [v^\alpha + \xi^\alpha + \Phi^\alpha_\beta(\varphi(x, x')^\beta]e_\alpha\ ;$$

en envisageant dans T_x, non plus le vecteur ξ, mais le vecteur

$$\xi(x) + \Phi^\alpha_\beta(\varphi(x, x'))^\beta e_\alpha,$$

(8,3) prend la forme

$$(8{,}6)\qquad \mathrm{D}v^\alpha(x) = \overset{\omega}{\nabla} v^\alpha + \overset{\omega}{\nabla} \xi^\alpha + \Phi^\alpha_\beta(\varphi(x, x'))^\beta.$$

On peut poser $(\varphi(x, x'))^\beta \approx dx^\beta$, ainsi que

$$\overset{\omega}{\nabla}_\lambda v^\alpha dx^\lambda = \overset{\omega}{\nabla} v^\alpha, \qquad \overset{\omega}{\nabla}_\lambda \xi^\alpha dx^\lambda = \overset{\omega}{\nabla} \xi^\alpha,$$

et (8,6) peut s'écrire :

$$D_\lambda v^\alpha = \overset{\omega}{\nabla}_\lambda v^\alpha dx^\lambda + \overset{\omega}{\nabla}_\lambda \xi^\alpha dx^\lambda + \Phi^\alpha_\lambda dx^\lambda. \tag{8,7}$$

On peut poser encore

$$(\overset{\omega}{\nabla}_\lambda \xi^\alpha + \Phi^\alpha_\lambda) dx^\lambda = \pi^\alpha_0, \tag{8,8}$$

$$\omega^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\beta. \tag{8,9}$$

(8,8) et (8,9) sont $n^2 + n$ formes différentielles linéaires. On sait par l'analyse en coordonnées curvilignes que les ω^α_β définissent un élément de l'algèbre de Lie du groupe linéaire général Gl (n, k).

De même $\pi = (\pi^\alpha_\beta, \pi^\alpha_0)$ définit un élément de l'algèbre de Lie du groupe affine $\mathcal{A}_n(k)$. Le système de Pfaff $\pi^\alpha_\beta = 0$ est intégrable, provenant de la donnée d'un système de coordonnées curvilignes, tandis que π^α_0 ne l'est pas forcément. On pourrait dire que la donnée sur F, muni d'un système de coordonnées curvilignes (x), d'un ensemble de n formes linéaires $\pi^\alpha_0 = 0$ définit sur F une *connexion de translation.*

9. — Variétés à connexion affines.

Pour simplifier l'exposé et le raccorder avec celui de M. Lichnerowicz nous allons utiliser classiquement, au lieu du groupe affine $\mathcal{A}_n(K)$, un groupe isomorphe que nous allons définir [6].

Soient V_n une variété différentiable de classe convenable, T_x l'espace vectoriel tangent au point x de V_n muni de sa structure naturelle d'espace affine, R et R' étant deux bases de T_x,

$$S_x = (\xi, R) \qquad \text{et} \qquad S_x = (\xi', R')$$

deux repères affines en x. On désignera par v le vecteur $\xi' - \xi$ et on posera

$$e_0 = \xi \qquad e_{0'} = \xi'.$$

---

[6] Nous suivons l'exposé de A. LICHNEROWICZ [5], p. 88 et s.

Si $A = (A^\alpha_\beta)$ est le passage de R à R′, on a

$$(9,1) \qquad \begin{cases} e_{0'} = e_0 + v^\alpha e_\alpha \\ e_{\beta'} = e_\alpha A^\alpha_{\beta'}. \end{cases}$$

On peut alors introduire les matrices $B(n+1)\times(n+1)$ d'éléments généraux $B^i_{j'}$ $(i, j = 0, 1 \ldots n)$ définies par

$$B^0_{0'} = 1, \qquad B^0_{\alpha'} = 0, \qquad B^\alpha_{0'} = v^\alpha, \qquad B^\alpha_{\beta'} = A^\alpha_{\beta'}$$

soit

$$(9,2) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & v^\alpha \\ 0 & A^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix}$$

et (9,1) peut se traduire par :

$$e_{j'} = e_i B^i_{j'},$$

ce qui peut se noter aussi

$$S' = SB.$$

Les matrices B de la forme (9,2) définissent pour la multiplication le groupe isomorphe au groupe affine $\mathcal{A}_n(K)$ annoncé plus haut, et que nous identifierons avec lui.

Tout repère linéaire au point x, c'est-à-dire toute base en x de T_x, peut être alors identifié à un repère affine d'origine x, et sur ces repères opérera le groupe défini par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1\ , & 0 \\ 0\ , & A^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix}$$

isomorphe au groupe linéaire Gl (n, k).

Étant alors donné un recouvrement de V^n par des voisinages munis de repères affines, une connexion affine par V^n peut être définie par la donnée pour chaque voisinage U de V^n d'une 1-forme π_U à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe affine. Une telle forme, dans le formalisme adopté plus haut, peut être représentée au moyen d'une matrice $(n+1)\times(n+1)$ que nous noterons encore π_U et qui sera dans la forme

$$(9,3) \qquad \pi_U = \begin{pmatrix} 0\ , & \pi^\alpha_0 \\ 0\ , & \pi^\alpha_\beta \end{pmatrix},$$

chacun de ses éléments étant des 1-formes différentielles sur U. Si

$$S_V(x) = S_U(x) B^U_V(x),$$

les matrices π_U doivent satisfaire pour $x \in U \cap V$ à la relation matricielle de cohérence :

$$\pi_V = B^{-1}{}^U_V \pi_U B^U_V + B^{-1}{}^U_V dB^U_V \tag{9,4}$$

où

$$B^U_V = \begin{pmatrix} 1 & v^U_V \\ 0 & A^U_V \end{pmatrix}$$

v^U_V désignant la matrice à une ligne représentant par rapport au repère S_U le vecteur $\xi_V - \xi_U$.

Pour introduire le tenseur de courbure d'une telle connexion il suffirait de se reporter aux travaux de Mme Cattanéo, mais le plus simple est la présentation non intrinsèque suivante (7).

10. — Tenseur de courbure d'une connexion affine.

Soit sur le voisinage U de V^n, un ensemble ordonné de n vecteurs linéairement indépendants (e_α) formant la base associée au repère affine donné (§ 9), nous désignerons par θ^α, la cobase sur U (on peut utiliser la base naturelle associée au système de coordonnées curvilignes utilisé dans U, alors $\theta^\alpha = dx^\alpha$).

L'opérateur dérivée covariante D associé à la connexion affine π est défini comme dans le § 8 (8).

Étant donné un champ de vecteurs v sur V^n, de composantes v^α dans le repère choisi en x, nous poserons

$$Dv^\mu = D_\alpha v^\mu \theta^\alpha. \tag{10,1}$$

Par un calcul simple on voit alors que (9)

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) v^\mu = R^\mu_{\rho,\alpha\beta} v^\rho + R^\mu_{0,\alpha\beta} + 2S^\rho_{\alpha\beta} D_\rho v^\mu \tag{10,2}$$

où $R^\mu_{\rho,\alpha\beta}$ est le tenseur de courbure classique associé à la connexion

---

(7) Nous avons effectué en appendice un certain nombre de calculs se rapportant à des éléments géométriques d'une variété à connexion affine.

(8) La connexion linéaire $\omega\left(\omega^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\beta\right)$ définie par la connexion affine $\pi\left(\pi^\beta_\alpha, \pi^\beta_0\right)$ sera dite connexion linéaire associée à la connexion affine π.

(9) La formule (10,2) est l'identité de Ricci de la connexion affine pour un vecteur contravariant, pour les autres tenseurs, elle est celle relativement à la connexion linéaire ω associée à π.

$\omega = (\omega^\alpha_\beta)$, où $S^\rho_{\alpha\beta}$ est le tenseur de torsion relativement à cette même connexion, et où, si on pose

$$\pi^\alpha_\beta = \gamma^\alpha_{\beta\rho}\theta^\rho, \qquad \pi^\alpha_0 = \gamma^\alpha_{0\beta}\theta^\beta,$$

$$R^\mu_{0,\alpha\beta} = \overset{\omega}{\nabla}_\alpha \gamma^\mu_{0\beta} - \overset{\omega}{\nabla}_\beta \gamma^\mu_{0\alpha} - 2S^\rho_{\alpha\beta}\gamma^\mu_{0\rho}. \tag{10,3}$$

Ce tenseur contracté une fois donne

$$R_{0\beta} \equiv R^\alpha_{0,\alpha\beta} = \overset{\omega}{\nabla}_\alpha \gamma^\alpha_{0\beta} - \overset{\omega}{\nabla}_\beta \gamma^\alpha_{0\alpha}. \tag{10,4}$$

Nous sommes prêts maintenant à exposer l'application que nous avons faite de cette théorie géométrique à la gravitation et à l'électromagnétisme.

CHAPITRE II

APPLICATION DE LA THÉORIE DES VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINES A LA GRAVITATION ET A L'ÉLECTROMAGNÉTISME

On sait que dans la théorie de la relativité générale l'électromagnétisme n'a pas reçu de signification géométrique. Le champ électromagnétique intervient au deuxième membre des équations d'Einstein d'une manière qui n'est pas déduite des axiomes de la relativité générale.

La notion de variété à connexion affine permet

1° de donner une signification géométrique au tenseur champ électromagnétique,

2° d'exprimer les équations devant restreindre la généralité des variétés au moyen de tenseurs déduits d'éléments ayant une signification géométrique.

Par contre ces équations ne se déduisent pas, comme les équations du vide, des axiomes de la théorie [1].

11. — Équations de la théorie.

Nous supposons donnée une variété différentiable V_4, orientable, sur laquelle est définie une connexion affine $\pi = (\pi^\alpha_\beta, \pi^\alpha_0)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

---

[1] Voir LICHNEROWICZ, A. [*4*], p. 10.

1° π^α_β définit une connexion riemannienne

$$\omega = (\omega^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\beta), \qquad \omega^\alpha_\beta = \gamma^\alpha_{\beta\mu} dx^\mu.$$

2°

$$\pi^\beta_0 = \gamma^\beta_{0\rho} dx^\rho$$

avec

$$\gamma^\beta_{0\rho} = F_{\lambda\rho} g^{\lambda\beta},$$

où $F_{\lambda\rho}$ est un champ de tenseurs antisymétriques.

3° De plus V^4 est supposée être de classe C^2, la métrique associée à ω, soit le champ $g_{\alpha\beta}$ de classe C^3 par morceaux tandis que le champ $F_{\lambda\rho}$ de classe C^2 par morceaux.

Nous allons maintenant écrire les équations de Maxwell et d'Einstein dans le cas du schéma « matière pure-champ électromagnétique » au moyen des éléments géométriques qui viennent d'être introduits.

Le premier groupe des équations de Maxwell s'écrit (2)

$$D^\alpha = \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha$$

où J^α est le vecteur courant électrique, mais d'après les propriétés de $\overset{\pi}{\nabla}$ (3), on peut aussi bien écrire

$$D^\alpha \equiv \overset{\pi}{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha$$

où

$$F^{\beta\alpha} = F_{\lambda\rho} g^{\lambda\beta} g^{\rho\alpha} = \gamma^\beta_{0\rho} g^{\rho\alpha},$$

comme $\overset{\pi}{\nabla} g^{\rho\alpha} = \overset{\omega}{\nabla} g^{\rho\alpha} = 0$, on en déduit que, en vertu de (10,4)

$$D^\alpha \equiv \overset{\pi}{\nabla}_\beta \gamma^\beta_{0\rho} g^{\rho\alpha} = g^{\rho\alpha} \overset{\pi}{\nabla}_\beta \gamma^\beta_{0\rho} = g^{\rho\alpha} R_{0\rho} = R^\alpha_0 = J^\alpha$$

d'où le premier groupe

(11,1) $$R^\alpha_0 = J^\alpha.$$

Quant au deuxième groupe, il s'écrit

$$E^\alpha \equiv 1/2 \eta^{\beta\gamma\delta\alpha} \overset{\pi}{\nabla}_\beta F_{\gamma\delta} = 0$$

---

(2) Voir pour ces questions A. Lichnerowicz [*4*], dont nous utilisons la terminologie et la notation.

(3) Dès maintenant $\overset{\pi}{\nabla}$ indique la différentielle covariante affine relativement à π.

où η est le tenseur antisymétrique de volume (relatif à g). Comme $F_{\gamma\delta}=\gamma^{\rho}_{0\delta}g_{\rho\delta}$,

$$E^{\alpha} \equiv 1/2\eta^{\beta\gamma\delta\alpha}\overset{\pi}{\nabla}_{\beta}\gamma^{\rho}_{0\delta}g_{\rho\gamma} = 1/2\eta^{\beta\gamma\delta\alpha}g_{\rho\gamma}\overset{\pi}{\nabla}_{\beta}\gamma^{\rho}_{0\delta} = 0.$$

D'où le deuxième groupe

$$E^{\alpha} \equiv 1/2\eta^{\beta\gamma\delta\alpha}g_{\rho\gamma}\overset{\pi}{\nabla}_{\beta}\gamma^{\rho}_{0\delta} = 0. \tag{11,2}$$

Les équations d'Einstein du schéma envisagé s'écrivent :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + 1/2(R + k)g_{\alpha\beta}$$

et

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_{\alpha}u_{\beta} + \tau_{\alpha\beta}$$

$\rho > 0$ étant la densité propre de matière, u_{α} un vecteur unitaire, $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie de Maxwell

$$\tau_{\alpha\beta} = 1/4g_{\alpha\beta}(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}) - F_{\alpha\rho}F^{\rho}_{\beta}.$$

En introduisant la connexion π, on peut écrire

$$G_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi\big(1/4g_{\alpha\beta}(\gamma^{\rho}_{0\mu}g_{\rho\lambda}\gamma^{\lambda}_{0\sigma}g^{\sigma\mu}) + \gamma^{\nu}_{0\rho}g_{\nu\alpha}\gamma^{\rho}_{0\beta}\big) = \rho u_{\alpha}u_{\beta}$$

ou encore

$$G_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi\big(1/4g_{\alpha\beta}g_{\rho\lambda}g^{\sigma\mu}\gamma^{\rho}_{0\mu}\gamma^{\lambda}_{0\sigma}\big) + g_{\nu\alpha}\gamma^{\nu}_{0\rho}\gamma^{\rho}_{0\beta} = \chi\rho u_{\alpha}n_{\beta}. \tag{11,3}$$

On remarque donc que les premiers membres des équations (11,1) (11,2) et (11,3) s'expriment uniquement au moyen d'éléments géométriques. S'il n'y a pas de matière, $D^{\alpha} = 0$, $E^{\alpha} = 0$, $G_{\alpha\beta} = 0$ s'écrivent comme le cas champ gravifique pur, donc cas extérieur.

12. — Les identités de conservation.

Pour les équations de Maxwell, on a les relations de conservation :

$$\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha}E^{\alpha} = 0,$$

$$\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha}D^{\alpha} = 0,$$

en introduisant la dérivation relativement à π, ces deux équations donnent successivement :

$$0 = \overset{\omega}{\nabla}_{\alpha}D^{\alpha} = \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}D^{\alpha} - \gamma^{\alpha}_{0\alpha},$$

$$0 = \overset{\omega}{\nabla}_{\alpha}E^{\alpha} = \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}E^{\alpha} - \gamma^{\alpha}_{0\alpha},$$

mais $\gamma^{\alpha}_{0\alpha} = 0$ car $F_{\lambda\mu}$ est un tenseur antisymétrique, d'où les conditions de conservation :

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} D^{\alpha} = 0. \tag{12,1}$$

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} E^{\alpha} = 0. \tag{12,2}$$

De plus on doit avoir $\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha} J^{\alpha} = 0$, ce qui entraîne

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} J^{\alpha} = 0, \tag{12,3}$$

le vecteur courant électrique est conservatif aussi relativement à la connexion affine.

Voyons ce qu'il en est des conditions de conservation relativement à $G_{\alpha\beta}$.

On sait que le tenseur $S_{\alpha\beta}$ est conservatif. Il en est de même de $\tau_{\alpha\beta}$ s'il n'y a pas présence de matière, mais en présence de matière, on montre que

$$\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha} \tau^{\alpha}_{\beta} = F_{\rho\beta} J^{\rho},$$

alors

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} G^{\alpha}_{\beta} \equiv -\chi F_{\rho\beta} J^{\rho} = \chi \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} \rho u_{\beta} u^{\alpha}, \tag{12,4}$$

ce qui peut s'écrire

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}(\rho u^{\alpha} u_{\beta}) = - F_{\rho\beta} J^{\rho}. \tag{12,4'}$$

Pour établir l'équation de continuité, on ne peut pas le faire de la manière classique car on n'a pas généralement :

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} u^{\alpha} u_{\beta} = u^{\alpha} \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} u_{\beta} + u_{\beta} \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} u^{\alpha},$$

du fait que $\overset{\pi}{\nabla}$ pour les vecteurs contravariants n'est pas un opérateur homogène. Cependant le fait que $\gamma_{0\alpha}^{\alpha} = 0$ nous permet d'opérer ainsi :

$$\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha}(\rho u_{\beta} u^{\alpha}) = u_{\beta} \overset{\omega}{\nabla}_{\alpha} \rho u^{\alpha} + \rho u^{\alpha} \overset{\omega}{\nabla}_{\alpha} u_{\beta} = - F_{\rho\beta} J^{\rho}.$$

Cependant

$$u_{\beta} \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} \rho u^{\alpha} = u_{\beta}\left(\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha} \rho u^{\alpha} + \gamma^{\alpha}_{0\alpha}\right) = u_{\beta} \overset{\omega}{\nabla}^{\alpha} \rho u^{\alpha}$$

et

$$\rho u^{\alpha} \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} u_{\beta} = \rho u^{\alpha} \overset{\omega}{\nabla}_{\alpha} u_{\beta},$$

d'où en remplaçant dans l'équation ci-dessus

$$\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha}(\rho u_{\beta} u^{\alpha}) = \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}(\rho u_{\beta} u^{\alpha}) = u_{\beta} \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} \rho u^{\alpha} + \rho u^{\alpha} \overset{\pi}{\nabla}_{\alpha} u_{\beta} = - F_{\rho\beta} J^{\rho}. \tag{12,4''}$$

Faisons la multiplication contractée par u^{β}, on a

$$u^{\beta}u_{\beta}\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}\rho u^{\alpha}+\rho u^{\alpha}u^{\beta}\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}=-\mathrm{F}_{\rho\beta}\mathrm{J}^{\rho}u^{\beta}.$$

Mais comme $u^{\beta}\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}u^{\beta}=u^{\beta}\overset{\omega}{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}$ et qu'on établit aisément que le deuxième membre est nul, on peut écrire l'équation de continuité

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}\rho u^{\alpha}=-\mathrm{F}_{\rho\beta}\mathrm{J}^{\rho}u^{\beta}, \tag{12,5}$$

ou en introduisant la connexion π

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}\rho u^{\alpha}=-\gamma^{\mu}_{0\beta}g_{\mu\rho}\mathrm{J}^{\rho}u^{\beta}=-\gamma^{\mu}_{0\beta}\mathrm{J}_{\mu}u^{\beta}$$

ou encore

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}\rho u^{\alpha}=-\gamma^{\mu}_{0\beta}\mathrm{J}_{\mu}u^{\beta}. \tag{12,6}$$

Portons (12,5) dans (12,4″), il vient

$$-u_{\beta}\mathrm{F}_{\rho\lambda}\mathrm{J}^{\rho}u^{\lambda}+\rho u^{\alpha}\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}=-\mathrm{F}_{\rho\beta}\mathrm{J}^{\rho},$$

puis

$$\begin{aligned}u^{\alpha}\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}&=-\frac{1}{\rho}(\mathrm{F}_{\rho\beta}\mathrm{J}^{\rho}-u_{\beta}\mathrm{F}_{\rho\lambda}\mathrm{J}^{\rho}u^{\lambda})\\&=-\frac{1}{\rho}(\mathrm{F}^{\alpha}_{\beta}\mathrm{J}^{\rho}g_{\rho\alpha}-u_{\beta}u_{\nu}g^{\nu\lambda}\mathrm{F}_{\rho\lambda}\mathrm{J}^{\rho})\\&=-\frac{1}{\rho}(\mathrm{F}^{\alpha\nu}g_{\nu\beta}\mathrm{J}_{\alpha}-u_{\beta}u_{\nu}\mathrm{F}^{\nu}_{\rho}\mathrm{J}^{\rho}),\end{aligned}$$

d'où finalement

$$u^{\alpha}\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}=\frac{1}{\rho}(g_{\nu\beta}-u_{\nu}u_{\beta})\mathrm{F}^{\nu\alpha}\mathrm{J}_{\alpha}. \tag{12,7}$$

Transformons les équations (12,5) et (12,7). Pour cela utilisons l'équation de transfert de Lorentz $\mathrm{J}^{\lambda}=\mu u^{\lambda}$ ou $\mathrm{J}_{\lambda}=\mu u_{\lambda}$, où μ est un scalaire appelé densité de charge électrique propre. On a

$$\mathrm{F}_{\rho\sigma}\mathrm{J}^{\rho}u^{\sigma}=\mu\mathrm{F}_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}=0$$

du fait de l'antisymétrie de F, ce qui donne

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\alpha}(\rho u^{\alpha})=0 \tag{12,5'}$$

pour l'équation de continuité.

De plus le deuxième terme de (12,7) au second membre est nul lui aussi, il reste

$$u^\alpha \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u_\beta = \frac{\mu}{\rho} g_{\nu\beta} F^{\nu\alpha} u_\alpha = \frac{\mu}{\rho} F^\alpha_\beta u_\alpha = \frac{u}{\rho} F_{\beta\nu} u^\nu.$$

Faisons la multiplication contractée par $g^{\beta\lambda}$, il vient

$$(u^\alpha \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u_\beta) g^{\beta\lambda} = \frac{\mu}{\rho} F^\lambda_\nu u^\nu = \frac{\mu}{\rho} \gamma^\lambda_{0\nu}.$$

Mais

$$\overset{\pi}{\nabla}_\alpha u_\beta g^{\beta\lambda} = \overset{\omega}{\nabla}_\alpha u_\beta g^{\beta\lambda} + \gamma^\lambda_{0\alpha} = g^{\beta\lambda} \overset{\omega}{\nabla}_\alpha u_\beta + \gamma^\lambda_{0\alpha} = g^{\beta\lambda} \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u_\beta + \gamma^\lambda_{0\alpha}$$

d'où

$$g^{\beta\lambda} \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u_\beta = \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u_\beta g^{\beta\lambda} - \gamma^\lambda_{0\alpha},$$

ce qui donne

$$u^\alpha \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u^\lambda - \gamma^\lambda_{0\alpha} u^\alpha = \frac{\mu}{\rho} \gamma^\lambda_{0\nu} u^\nu$$

d'où la nouvelle expression pour l'équation aux lignes de courant

$$u^\alpha \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u^\lambda = \left(1 + \frac{\mu}{\rho}\right) \gamma^\lambda_{0\nu} u^\nu. \tag{12,7'}$$

On peut remarquer que les lignes de courant ne sont pas des géodésiques relativement à la connexion affine, telles que les a définies Mme Cattanéo.

Si on avait posé $\gamma^\lambda_{0\nu} = \frac{\mu}{\rho} F^\lambda_\nu$, on aurait trouvé à la place de (12,7') $u^\alpha \overset{\pi}{\nabla}_\alpha u^\lambda = 0$, comme Mme Cattanéo, mais la connexion aurait dépendu du rapport $\frac{\mu}{\rho}$ et aurait changé avec la particule chargée envisagée. On aurait une famille de variétés à connexions affines dépendant de $k = \frac{\mu}{\rho}$, ce qui n'est pas satisfaisant.

Nous obtenons donc ainsi une interprétation simple de l'électromagnétisme et de la gravitation dans le cadre des variétés à connexions affines.

APPENDICE

CALCULS DE QUELQUES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINE GÉNÉRALISÉE

1. — Tenseur de courbure.

Pour un recouvrement de V_4 par des voisinages U_i et pour des sections locales $z_i(x)$ sur $\varepsilon(V_4)$ espace fibré des repères affines de V_4, une connexion affine est définie par un système de 1-formes locales $\pi_{(i)}$ de V_4 à valeurs dans $L(\mathcal{A}_4)$, algèbre de Lie du groupe affine $\mathcal{A}_4$.

Si X^β_α, X^0_α est une base de $L(\mathcal{A}_4)$, les $\pi_{(i)}{}^\alpha_\beta$, $\pi_{(i)}{}^\alpha_0$ étant des 1-formes locales sur V_4, $\pi_{(i)}$ s'écrit

$$\pi_{(i)} = \pi_{(i)}{}^\alpha_\beta \otimes X^\beta_\alpha + \pi_{(i)}{}^\alpha_0 \otimes X^0_\alpha \qquad \alpha = 1, \ldots, 4$$

($\otimes$ indique le produit tensoriel).

La forme de courbure Ω est donnée par la 2-forme (1) sur V_4 à valeurs dans $L(\mathcal{A}_4)$ (en supprimant par simplicité l'indice i relatif au voisinage U_i).

$$\Omega = d\pi + 1/2[\pi, \pi] \tag{1}$$

(d, signe de dérivation extérieure). En exprimant ce crochet généralisé (2)

$$\Omega = d\pi + [X^i_r, X^j_s] \otimes \pi^r_i \wedge \pi^s_j \qquad i, j = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{2}$$

Appelons C le deuxième terme, et évaluons-le.

$$\begin{aligned} C = 1/2\big([X^\alpha_\rho, X^\nu_\beta] \otimes \pi^\rho_\alpha \wedge \pi^\beta_\nu + [X^\rho_\beta, X^\alpha_\nu] \otimes \pi^\beta_\rho \wedge \pi^\nu_\alpha \\ + [X^0_\rho, X^\nu_\alpha] \otimes \pi^\rho_0 \wedge \pi^\alpha_\nu + [X^\rho_\alpha, X^0_\nu] \otimes \pi^\alpha_\rho \wedge \pi^\nu_0\big). \end{aligned}$$

Les calculs des différents crochets de la base, donnent

$$[X^\alpha_\beta, X^\nu_\lambda] = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha \neq \lambda \text{ et } \beta \neq \nu \\ X^\nu_\beta, \text{ si } \alpha = \lambda \\ -X^\alpha_\lambda, \text{ si } \nu = \beta \end{cases}$$

$$[X^\alpha_\beta, X^0_\tau] = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha \neq \tau, \\ X^0_\beta, \text{ si } \alpha = \tau, \end{cases} \qquad [X^0_\beta, X^\nu_\lambda] = \begin{cases} 0, \text{ si } \nu \neq \beta, \\ -X^0_\lambda, \text{ si } \nu = \beta \end{cases}$$

en tenant compte des constantes de structure du groupe affine $\mathcal{A}_{(4)}$. D'où

$$C = 1/2[X^\alpha_\beta \otimes (\pi^\beta_\rho \wedge \pi^\rho_\alpha - \pi^\rho_\alpha \wedge \pi^\beta_\rho) + X^0_\beta \otimes (\pi^\beta_\rho \wedge \pi^\rho_0 - \pi^\rho_0 \wedge \pi^\beta_\rho)]$$

et d'après la règle de commutation du produit extérieur

$$C = 1/2[X^\alpha_\beta \otimes 2\pi^\beta_\rho \wedge \pi^\rho_\alpha + 2X^0_\beta \otimes \pi^\beta_\rho \wedge \pi^\rho_0]$$

---

(1) Lichnerowicz, A. [5], p. 70.
(2) *Ibid.*, p. 45.

comme (par définition de la différentielle extérieure des formes à valeurs vectorielles)

(3) $$d\pi = X_\alpha^\beta \otimes d\pi_\beta^\alpha + X_\alpha^0 \otimes d\pi_0^\alpha$$

il vient

(4) $$\Omega = X_\alpha^\beta \otimes \Omega_\beta^\alpha + X_\alpha^0 \otimes \Omega_0^\alpha$$

avec

(5) $$\Omega_\beta^\alpha = d\pi_\beta^\alpha + \pi_\rho^\alpha \wedge \pi_\beta^\rho$$

(6) $$\Omega_0^\alpha = d\pi_0^\alpha + \pi_\rho^\alpha \wedge \pi_0^\rho.$$

De Ω_β^α on peut déduire par un calcul classique le tenseur de courbure associé à la connexion ω.

Calculons l'expression du tenseur associé à Ω_0^α. Soit θ^α la cobase associée à la base e_γ. On a

$$d\pi_0^\alpha = d(\gamma_{0\mu}^\alpha \theta^\mu) = d\gamma_{0\mu}^\alpha \wedge \theta^\mu + \gamma_{0\mu}^\alpha d\theta^\mu$$

ce qui peut s'écrire encore

$$d\pi_0^\alpha = \partial_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha \theta^\lambda \wedge \theta^\mu + \gamma_{0\mu}^\alpha d\theta^\mu$$

les $\partial_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha$ étant les dérivées pfaffiennes des $\gamma_{0\mu}^\alpha$ par rapport aux θ^λ. D'autre part $\gamma_{\rho\lambda}^\alpha$ étant les coefficients de Ricci de la connexion linéaire ω associée à $\pi(\pi_\rho^\alpha = \omega_\rho^\alpha)$

$$\pi_\rho^\alpha \equiv \gamma_{\rho\lambda}^\alpha \theta^\lambda,$$

il vient

$$\Omega_0^\alpha = \partial_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha \theta^\lambda \wedge \theta^\mu + \gamma_{0\mu}^\alpha d\theta^\mu + \gamma_{\rho\lambda}^\alpha \theta^\lambda \wedge \gamma_{0\mu}^\rho \theta^\mu.$$

Il est dès lors possible d'introduire la torsion relative à ω, soit la 2-forme Σ^β et d'écrire

$$d\theta^\beta = \Sigma^\beta - \pi_\rho^\alpha \wedge \theta^\rho,$$

et en introduisant le tenseur de torsion :

$$d\theta^\beta = - S_{\lambda\mu}^\beta \theta^\lambda \wedge \theta^\mu - \gamma_{\rho\mu}^\beta \theta^\mu \wedge \theta^\rho,$$

ce qui donne

$$\Omega_0^\alpha = (\partial_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha + \gamma_{\rho\lambda}^\alpha \gamma_{0\mu}^\rho)\theta^\lambda \wedge \theta^\mu + \gamma_{0\beta}^\alpha(- S_{\lambda\mu}^\beta \theta^\lambda \wedge \theta^\mu - \gamma_{\lambda\mu}^\beta \theta^\mu \wedge \theta^\lambda)$$

(7) $$\Omega_0^\alpha = (\partial_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha + \gamma_{\rho\lambda}^\alpha \gamma_{0\mu}^\rho - \gamma_{\mu\lambda}^\rho \gamma_{0\rho}^\alpha - \gamma_{0\beta}^\alpha S_{\lambda\mu}^\beta)\theta^\lambda \wedge \theta^\mu,$$

qui peut encore s'écrire, en introduisant la dérivation covariante $\overset{\omega}{\nabla}$ relativement à la connexion linéaire associée à π

(8) $$\pi_0^\alpha = (\overset{\omega}{\nabla}_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha - \gamma_{0\rho}^\alpha S_{\lambda\mu}^\rho)\theta^\lambda \wedge \theta^\mu$$

d'où en posant [3]

$$\Omega_0^\alpha = 1/2 R_{0\lambda\mu}^\alpha \theta^\lambda \wedge \theta^\mu$$

$$1/2 R_{0\lambda\mu}^\alpha \theta^\lambda \wedge \theta^\mu = 1/2(\overset{\omega}{\nabla}_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha - \overset{\omega}{\nabla}_\mu \gamma_{0\lambda}^\alpha)\theta^\lambda \wedge \theta^\mu - 1/2\gamma_{0\rho}^\alpha(S_{\lambda\mu}^\rho - S_{\mu\lambda}^\rho)\theta^\lambda \wedge \theta^\mu.$$

Comme $S_{\lambda\mu}^\rho = - S_{\mu\lambda}^\rho$, le dernier terme devient $- \gamma_{0\rho}^\alpha S_{\lambda\mu}^\rho$ d'où finalement :

(9)
$$R_{0\lambda\mu}^\alpha = \overset{\omega}{\nabla}_\lambda \gamma_{0\mu}^\alpha - \overset{\omega}{\nabla}_\mu \gamma_{0\lambda}^\alpha - 2S_{\lambda\mu}^\rho \gamma_{0\rho}^\alpha.$$

Ce tenseur contracté une fois donne

$$R_{0,\alpha\mu}^\alpha = \overset{\omega}{\nabla}_\alpha \gamma_{0\mu}^\alpha - \overset{\omega}{\nabla}_\mu \gamma_{0\alpha}^\alpha$$

d'où le tenseur

(10)
$$R_{0\mu} = \overset{\omega}{\nabla}_\alpha \gamma_{0\mu}^\alpha - \overset{\omega}{\nabla}_\mu \gamma_{0\alpha}^\alpha.$$

2. — Identités de Bianchi.

En prenant la différentielle absolue de la forme de courbure Ω, on obtient les identités de Bianchi pour la courbure

(11)
$$d\Omega + [\pi, \Omega] = 0.$$

Par un calcul semblable à celui qui a été fait pour la courbure en tenant compte du crochet généralisé et des constantes de structure du groupe affine (π est une 1-forme, Ω une 2-forme)

$$\begin{aligned} d\Omega = {} & X_\beta^\alpha \otimes (\pi_\alpha^\rho \wedge \Omega_\rho^\beta - \pi_\rho^\beta \wedge \Omega_\alpha^\rho) \\ & + X_\alpha^0 \otimes (\pi_0^\rho \wedge \Omega_\rho^\alpha - \pi_\rho^\alpha \wedge \Omega_0^\rho), \end{aligned}$$

(12)
$$d\Omega = X_\beta^\alpha \otimes d\Omega_\alpha^\beta + X_\alpha^0 \otimes d\Omega_0^\alpha$$

avec

(13)
$$d\Omega_\alpha^\beta = \Omega_\rho^\beta \wedge \pi_\alpha^\rho - \pi_\rho^\beta \wedge \Omega_\alpha^\rho.$$

(14)
$$d\Omega_0^\alpha = \Omega_\rho^\alpha \wedge \pi_0^\rho - \pi_\rho^\alpha \wedge \Omega_0^\rho.$$

On suppose dans la suite la connexion ω riemannienne et $\theta^\alpha = dx^\alpha$ (x^α coordonnées naturelles).

Par (13) on obtient l'identité classique pour une connexion affine. Voyons ce que donne (14).

On avait posé

$$\Omega_0^\alpha = 1/2 R_{0,\lambda\mu}^\alpha \theta^\lambda \wedge \theta^\mu$$

d'où

$$d\Omega_0^\alpha = 1/2 \partial_\nu R_{0,\lambda\mu}^\alpha \theta^\nu \wedge \theta^\lambda \wedge \theta^\mu$$

(∂_ν = dérivée partielle ordinaire).

---

[3] π_0^α est une 1-forme à valeur contravariante, et définit ainsi un tenseur mixte de composante $\gamma_{0\mu}^\alpha$.

D'autre part le deuxième membre de (14) s'écrit

$$1/2R^{\alpha}_{\rho,\nu\lambda}\theta^{\nu} \wedge \theta^{\lambda} \wedge \gamma^{\rho}_{0\,\mu}\theta^{\mu} - 1/2\gamma^{\alpha}_{\rho\,\nu}\theta^{\nu} \wedge R^{\rho}_{0,\lambda\mu}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu}$$
$$= 1/2(R^{\alpha}_{\rho,\nu\lambda}\gamma^{\rho}_{0\,\mu} - \gamma^{\alpha}_{\rho\,\nu}R^{\rho}_{0,\lambda\mu})\theta^{\nu} \wedge \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu}$$

d'où le coefficient de X^{0}_{α} :

$$1/2(\partial_{\nu}R^{\alpha}_{0,\lambda\mu} - R^{\alpha}_{\rho,\nu\lambda}\gamma^{\rho}_{0\,\mu} + \gamma^{\alpha}_{\rho\,\nu}R^{\rho}_{0,\lambda\mu})\theta^{\nu} \wedge \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu}.$$

En introduisant $\overset{\pi}{\nabla}_{\nu}$, $R^{\alpha}_{0,\lambda\mu}$ il vient

$$1/2(\overset{\omega}{\nabla}_{\nu}R^{\alpha}_{0,\lambda\mu} + \gamma^{\rho}_{\lambda\,\nu}R^{\alpha}_{0,\rho\mu} + \gamma^{\rho}_{\mu\,\nu}R^{\alpha}_{0,\lambda\rho} - R^{\alpha}_{\rho,\nu\lambda}\gamma^{\rho}_{0\,\mu})\theta^{\nu} \wedge \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu}.$$

Ceci doit être nul, ce qui équivaut à la somme suivante :

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\nu}R^{\alpha}_{0\,\lambda\mu} + \overset{\pi}{\nabla}_{\lambda}R^{\alpha}_{0\,\mu\nu} + \overset{\pi}{\nabla}_{\mu}R^{\alpha}_{0,\nu\lambda} + \gamma^{\rho}_{\lambda\,\nu}R^{\alpha}_{0,\rho\mu} + \gamma^{\rho}_{\nu\,\mu}R^{\alpha}_{0\,\rho\lambda} + \gamma^{\rho}_{\mu\,\lambda}R^{\alpha}_{0\,\rho\nu}$$
$$+ \gamma^{\rho}_{\mu\,\nu}R^{\alpha}_{0,\lambda\rho} + \gamma^{\rho}_{\nu\,\lambda}R^{\alpha}_{0\,\mu\rho} + \gamma^{\rho}_{\lambda\,\mu}R^{\alpha}_{0\,\nu\rho} - R^{\alpha}_{\rho,\nu\lambda}\gamma^{\rho}_{0\,\mu} - R^{\alpha}_{\rho,\lambda\mu}\gamma^{\rho}_{0\,\nu} - R^{\alpha}_{\rho,\mu\nu}\gamma^{\rho}_{0\,\lambda} = 0$$

d'où l'identité :

$$\overset{\pi}{\nabla}_{\nu}R^{\alpha}_{0,\lambda\mu} + \overset{\pi}{\nabla}_{\lambda}R^{\alpha}_{0,\mu\nu} + \overset{\pi}{\nabla}_{\mu}R^{\alpha}_{0,\nu\lambda} = R^{\alpha}_{\rho,\nu\lambda}\gamma^{\rho}_{0\,\mu} + R^{\alpha}_{\rho,\lambda\mu}\gamma^{\rho}_{0\,\nu} + R^{\alpha}_{\rho,\mu\nu}\gamma^{\rho}_{0\,\lambda}. \tag{15}$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] CATTANÉO-GASPARINI, I., *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa, t. 10, 1956, p. 119.
[*2*] CATTANÉO-GASPARINI, I., *Rend. Acad. Lincei*, t. 22, 1957, p. 146.
[*3*] LICHNEROWICZ, A., *Éléments de Calcul Tensoriel*, A. Colin, Paris, 1950.
[*4*] LICHNEROWICZ, A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson, Paris.
[*5*] LICHNEROWICZ, A., *Théorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie*, Cremonese, Rome, 1955.

(Manuscrit reçu le 1er février 1965).