FRANCIS HALBWACHS

MOHAMMED MEBKHOUT

Groupes de symétrie et groupes d'invariance interne dans la théorie des particules à interactions fortes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 2, n° 1 (1965), p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__2_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 1, 1965, p. 1-20.

Section A :
Physique théorique.

Groupes de symétrie et groupes d'invariance interne dans la théorie des particules à interactions fortes

par

Francis HALBWACHS et Mohammed MEBKHOUT
Faculté des Sciences, Marseille.

SUMMARY. — A parallel treatment is proposed for the ordinary symmetry concept governing the interactions of strongly interacting particles, and for the idea of the invariance of an « internal » dynamics ascribed to a geometrical model of an extended structure for elementary particles. After a short survey of the well-known pion-nucleon treatment, where both points of view are equivalent, this conception is applied to the relativistic rotator theory, in order to derive an interaction Hamiltonian consistent with the invariance group of the model. Some qualitative outcomes are obtained concerning the unobserved states provided by the theory, and their unappearance is interpreted.

La théorie des particules élémentaires, notamment des « particules à interactions fortes » (baryons et bosons), est apparue depuis une dizaine d'années [*1*], comme un domaine d'application privilégié de la théorie des groupes. Peut-être même a-t-on été entraîné dans ce domaine à quelque exagération, perdant de vue le problème de l'analyse de la réalité physique pour ne considérer que de pures structures mathématiques régnant dans un « ciel intelligible », et produisant finalement les résultats qui surgissent dans l'expérience, par une sorte de « miracle » platonicien.

On peut caractériser a cet égard trois points de vue distincts :

1° Le point de vue, qui se manifeste notamment dans l'Eightfoldway de Néeman et Gell-Mann [*2*] [*3*], qui part d'un *groupe abstrait* considéré comme « matrice » suprême de la physique des particules, et construit certaines de ses représentations irréductibles (1) dans lesquelles on classe les différents « supermultiplets » entre lesquels se distribuent les particules et résonances.

2° Le point de vue, adopté notamment par le schéma de Sakata [*4*] [5], qui considère un *groupe de symétrie* opérant sur un espace abstrait encadré par les particules.

3° Le point de vue des théories à « modèle » telles que celle de Vigier-Yukawa [*6*] [*7*] qui quantifie un modèle doté d'une structure étendue dans l'espace, et utilise par conséquent un *groupe d'invariance* opérant sur cette structure, dans l'espace-temps physique.

Pour mettre en évidence en particulier la différence entre les points de vue 2 et 3, rappelons, sans préciser le traitement technique bien connu, la théorie du spin isotopique pour les particules d'étrangeté nulle, soit la théorie déjà ancienne des interactions nucléons-pions [*8*] que l'on peut étendre au cas du besoin isosinglet η et à l'isoquadruplet de baryons Δ (2).

Si nous prenons le point de vue *2°* développé notamment par d'Espagnat et Prentki [*9*] nous nous contentons de formuler mathématiquement le fait expérimental de l'*indépendance de charge* pour les interactions fortes. On part d'un espace complexe à deux dimensions E_0^1 encadré par l'isospineur $N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$, et son dual E_1^0, encadré par les antiparticules $\overline{N} = (-\bar{p}\bar{n})$, et on considère le *groupe de symétrie* $G_S = SU_2$. Remarquons tout de suite que, d'un point de vue strictement phénoménologique, seules les transformations *discontinues* (représentées par les matrices de Pauli τ_K) peuvent recevoir une interprétation physique et caractériser la symétrie des interactions fortes vis-à-vis de l'échange des nucléons. Le procédé employé, qui exploite les relations générales entre un groupe unitaire SU_n et le groupe symétrique S_n [*39*], revient à passer au groupe continu SU_2, et introduit une infinité d'opérations qui ne peuvent être définies physiquement (notons

(1) On sait que le développement logique de la théorie oblige à considérer également, dans les interactions prévues, des représentations irréductibles (Quarks) auxquelles ne correspond aucune particule expérimentale. C'est à l'heure actuelle, une grave objection contre l'Eightfoldway.

(2) Dans tout ce qui suit nous utiliserons la nomenclature proposée par Gell-Mann [*20*].

à ce propos que dans un article récent, Yamaguchi propose de s'en tenir au groupe des permutations [*10*]).

Les représentations irréductibles de G_s se construisent de la façon classique [*11*] en réduisant les produits tensoriels $E_0^1 \otimes E_1^0$, $E_0^1 \otimes E_0^1 \otimes E_1^0$, etc. On obtient alors :

Dans E_0^0 le scalaire η.

Dans E_1^1 un isovecteur $\pi_k = \pi^+ \pm i\pi^-$, π_0 qu'on écrit matriciellement :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\pi^0 & \sqrt{2}\,\pi^+ \\ -\sqrt{2}\,\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix}.$$

Dans E_1^2 un « quartet » $\Delta = \Delta^{++}$, Δ^+, Δ^0, Δ^- qu'on représente par deux matrices :

$$\mathcal{R}_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -\frac{\Delta^+}{3} & \frac{\Delta^{++}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\Delta^0}{3} & \frac{\Delta^+}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -\frac{\Delta^0}{3} & \frac{\Delta^+}{3} \\ -\frac{\Delta^-}{\sqrt{3}} & \frac{\Delta^0}{3} \end{pmatrix}$$

Il est alors facile, au moyen des spineurs ψ, $\bar{\psi}$, du scalaire η et des matrices $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_\alpha$ et $\bar{\mathcal{R}}^\alpha$, d'écrire toutes les combinaisons invariantes par le groupe G_s, qui, munies de constantes d'interactions convenables, fourniront toutes les interactions fortes (pour l'identification physique on pourra s'en tenir aux isomultiplets de spin minimum) soit :

$$\eta(0^-, 548),\ N\left(\frac{1^+}{2}, 939\right),\ \pi(0^-, 137),\ \Delta\left(\frac{3^+}{2}, 1237\right).$$

Cette théorie, qui suppose, contrairement à l'expérience, que la symétrie par le groupe G_s est exacte et les isomultiplets rigoureusement dégénérés, peut être raffinée en faisant appel à la théorie de la jauge locale d'Utiyama et Sakurai [*12*] [*13*], laquelle, soulignons-le, est relative essentiellement au groupe continu, puisqu'elle considère uniquement les transformations infinitésimales du groupe G_s. D'après cette théorie, l'invariance du Lagrangien sous SU_2 entraîne l'interaction de chaque particule avec un système de trois champs vectoriels de l'espace de Minkowski [*14*], interaction qui conserve la symétrie sous le groupe G_s. En réalité, dans l'expérience, un seul de ces champs intervient, c'est le champ électromagnétique A_μ, et son interaction avec les particules précédentes est invariante seulement sous le groupe de jauge abélien G_M qui se présente comme le sous-groupe de G_s engendré par la seule matrice τ_3. C'est la *rupture de la symétrie isotopique* par les interactions électromagnétiques. Comme les termes contenant A_μ

ont une constante d'interaction minime, il en résulte une « structure fine » des isomultiplets dans le spectre de masse.

Adoptons au contraire, le point de vue *3°* comme l'a fait pour la première fois, C. Van Winter [*15*]. Nous considérons comme modèle classique, une structure étendue dans l'espace physique et possédant la symétrie sphérique. Soit B un trièdre orthonormé attaché à la structure et A un trièdre de référence. Les variables du système sont les paramètres ω, fonction du temps, de la rotation $\Omega(\omega)$ qui amène le référentiel fixe A sur le trièdre mobile B. A, comme référentiel arbitraire n'est défini qu'à une rotation $\Omega(\alpha)$ près, et B n'est lui aussi défini qu'à une rotation $\Omega(\beta)$ près à cause de la symétrie sphérique. Ainsi la dynamique du système est invariante sous les transformations $\omega \to \omega'$ définies par la relation :

$$\Omega(\omega') = \Omega(\beta)\ \Omega(\omega)\ \Omega^{-1}(\alpha).$$

Ces transformations constituent le groupe bilatère de SO_3, que nous appellerons *groupe d'invariance* G de la théorie. Contrairement au groupe G_S ci-dessus, il opère dans l'espace physique, et il a une signification claire comme groupe continu. Son algèbre de Lie admet pour générateurs un double système J_i, J'_i d'opérateurs isomorphes aux τ_i de Pauli, et qui commutent entre eux. La quantification d'un tel système, opérée formellement dans un travail déjà ancien de Casimir [*16*], met en jeu les fonctions propres communes des trois opérateurs commutables, J_3, J'_3 et $J_kJ_k = J'_kJ'_k$ (fonctions sphériques généralisées) qui ont la forme $Y_l^{mm'}.m$, $m' = -l$, $-l+1 \ldots l-1, l$, et sont définies sur le groupe des rotations. G. Lochak a montré [*17*] que si on impose à ces fonctions, non d'être uniformes mais seulement d'être *continues sur le groupe des rotations,* on doit considérer des états quantiques aussi bien pour les valeurs demi-entières de l que pour les valeurs entières, si bien que les fonctions correspondant à des valeurs de l et de m' données encadrent l'espace de la représentation $D(l)$ *du groupe* SU_2, recouvrement universel de SO_3. Ceci dit, si on assimile m au spin isotopique et m' au demi-nombre baryonique, on obtient une théorie exactement équivalente, en ce qui concerne les symétries des interactions, à celle de d'Espagnat et Prentki, mais avec une signification sous-jacente complètement différente. En fait dans celle-ci on forme les représentations irréductibles du groupe G_S opérant dans l'espace abstrait des nucléons, et qui n'a de signification que relativement aux deux sortes de nucléons prises ensemble. Dans celle-là on forme les représentations irréductibles (bivaluées) du groupe G_I, groupe continu opérant sur la structure du modèle classique dans l'espace physique, chaque espèce de particules étant considérée isolément comme un *état quantifié stable du mouvement du rotateur sphérique.*

Chacune des formes équivalentes de cette théorie a donné naissance, dans les dernières années, à une généralisation ayant pour but d'englober dans un même schéma, d'abord les particules « étranges », puis les particules hautement instables observées comme résonances. Et il est remarquable que les schémas obtenus ont été très différents suivant la signification choisie pour la théorie.

Dans la ligne phénoménologique de la théorie de Despagnat et Prentki, nous trouvons le schéma de Sakata qui étend le groupe de symétrie $G_S = SU_2$ à un groupe de « supersymétrie » $G_H = SU_3$ incluant les échanges $p - \Lambda$ et $n - \Lambda$. Le groupe opère sur un espace complexe à trois dimensions $\mathcal{E}_0^1$ encadré par le « superspineur » $S = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix}$ (Sakaton), et son dual $\mathcal{E}_1^0$ encadré par les anti-particules $\bar{S} = (\bar{p}\ \bar{n}\ \bar{\Lambda})$. On forme comme plus haut les représentations irréductibles de G_H qui encadrent les espaces $\mathcal{E}_0^0$, $\mathcal{E}_1^1$, $\mathcal{E}_1^2$, etc. Chaque espace forme un « supermultiplet » stable sous le groupe G_H. Comme le groupe G_S est un sous-groupe de G_H, les supermultiplets se subdiviseront en isomultiplets (ainsi le Sakaton se subdivise en l'isodoublet $N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ et l'isosinglet Λ). On trouvera le détail des calculs, désormais classiques, aux références [*5*] [*11*], voir aussi [*18*] [*19*].

Disons seulement que, si la physique était invariante sous le groupe G_H, les supermultiplets seraient dégénérés. En considérant G_H comme un groupe de jauge locale à 8 générateurs, on est amené à introduire 8 champs vectoriels de Sakurai. La rupture de la « supersymétrie » ainsi définie, se fait en considérant le *groupe de symétrie des interactions fortes expérimentales* soit $G_F = U_2$. G_F s'étudie en tant qu'extension de G_S par G_Y, où G_S est le groupe SU_2 considéré précédemment, et G_Y un groupe de jauge abélienne défini par $e^{i\alpha Y}$ où Y est l'hypercharge de chaque particule. Les groupes G_S et G_Y sont deux sous-groupes de G_H qui commutent entre eux. Les termes d'interaction avec les champs vectoriels correspondants vont séparer chaque supermultiplet en des isomultiplets différant par leur hypercharge. La constante d'interaction est ici une constante « forte », si bien que la séparation est importante. Enfin l'interaction électromagnétique introduit une nouvelle rupture de symétrie et une structure fine des isomultiplets comme dans la théorie de Despagnat et Prentki.

Par ailleurs on sait que la théorie de Sakata a été assez généralement abandonnée au profit de théories plus abstraites, basées elles aussi sur le groupe unitaire à trois dimensions [*2*] [*8*] [*21*], et que ces tout derniers temps, en raison de difficultés ayant surgi avec les derniers résultats expérimentaux, les promoteurs de l'Eightfoldway inclinent à introduire, non plus trois, mais quatre champs fondamentaux [*22*] [*23*] ce qui peut introduire une analogie avec la théorie sur laquelle nous allons maintenant insister plus particulièrement.

La théorie proposée ces dernières années par L. de Broglie, Yukawa, Vigier [*6*] [*7*] [*24*] dérive de la théorie du spin isotopique d'une toute autre manière. On part de la théorie du rotateur sphérique résumée plus haut, et on *généralise le modèle* en passant de l'image classique à l'image *relativiste*. Ceci peut se faire de plusieurs façons et ouvre plusieurs voies qu'on est en train d'explorer. Nous nous en tiendrons ici à la généralisation la plus naturelle et la mieux étudiée, à savoir le modèle du *rotateur relativiste à symétrie sphérique*. On attache au centre de la structure un tétrapode relativiste orthonormé B dont le vecteur du genre temps coïncide avec la vitesse unitaire du centre, les trois vecteurs du genre espace étant liés à la structure comme dans le rotateur non relativiste. La théorie ne sera donc invariante que sous une rotation *spatiale* $\Omega(\alpha)$ du tétrapode B laissant fixe la vitesse unitaire. Le tétrapode B sera repéré par rapport à un référentiel d'inertie A parallèle au référentiel du laboratoire, et pouvant, comme lui subir une transformation de Lorentz homogène quelconque $\Lambda(\beta)$. Les variables du système sont les paramètres ω, fonction du temps, de la transformation de Lorentz homogène orthochrome propre $\Lambda(\omega)$ qui amène A sur B. La dynamique classique et quantique du système sera donc invariante sous les transformations $\omega \to \omega'$ définies par :

$$\Lambda(\omega') = \Lambda(\beta)\, \Lambda(\omega),\ \Omega^{-1}(\alpha).$$

Ces transformations forment un groupe G_T engendré par trois systèmes d'opérateurs J_k^+, J_k^-, J'_k tous trois isomorphes aux matrices de Pauli et commutant entre eux. Le groupe infinitésimal est engendré par la transformation :

$$\mathcal{T} = 1 + \beta_k^+ J_k^+ + \beta_k^- J_k^- + \alpha_k J'_k$$

où les α_k sont réels, les β_k^+ et β_k^- complexes conjugués.

On peut définir à partir des six opérateurs commutables $J_3^\pm$, J'_3, $J_k^\pm J_k^\pm$, $J'_k J'_k$, un système de fonctions propres des variables $\omega(\tau)$: $Z(l^+, l^-, l' ; m^+, m^-, m')$ caractérisées par six nombres quantiques avec les valeurs suivantes

$$l^\pm = 0, \frac{1}{2}, 1 \ldots m^\pm = -l^\pm, -l^\pm + 1 \ldots l^\pm - 1, l^\pm$$

$$l' = l^+ + l^-, l^+ + l^- - 1 \ldots |l^+ - l^-| \quad m' = -l', -l' + 1 \ldots l' - 1, l'.$$

Un argument analogue à celui de Lochak [17] permet de justifier l'emploi des valeurs semi-entières pour $l^{\pm}$. Dès lors on voit que les transformations à gauche :

$$T = 1 + \beta_k^+ J_k^+ + \beta_k^- J_k^-$$

engendreront un groupe qui sera le *recouvrement universel du groupe homogène orthochrome propre de Lorentz*, et qui, comme nous le préciserons plus loin, est isomorphe au *complexifié (au sens de Cartan) du groupe propre unitaire à deux dimensions*. Nous le notons SU_2^*. La transformation générale $\mathcal{T}$ engendrera le groupe d'invariance G_T de la théorie qui sera alors précisément :

$$G_T = SU_2^* \times SU_2/S_2$$

$\left(S_2 \text{ est le groupe symétrique à deux éléments } \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)$ tandis que la transformation à gauche T engendrera simplement le groupe restreint $G'_T = SU_2^*$.

On propose les interprétations suivantes :

m^+ = spin isotopique, m^- = demi-étrangeté,

m' = demi-nombre baryonique, $m^+ + m^- + m'$ = charge.

Ce choix [7] [26] n'est pas unique [24] [25] [27]. Il entraîne les identifications suivantes pour les espaces de représentation E_0^1 et E_1^0 :

$$Z\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} ; 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = n \qquad Z\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = p$$

$$Z\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} ; 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Lambda \qquad Z\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} ; 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = V.$$

La dernière particule (qui figure aussi dans le schéma de Sakata) est un isosinglet étrange de charge + 1 correspondant d'après Vigier et Yukawa à un état très instable récemment aperçu dans le « backward scattering » K^0p [30] [31]. Les antiparticules correspondront au changement des signes de m^+, m^-, m'.

L'espace E_0^1 est ainsi encadré par quatre vecteurs de base qu'on peut grouper en un « superspineur » $Y = \begin{pmatrix} p \\ n \\ V \\ \Lambda \end{pmatrix}$ (Yukawon). Sur cet espace, la représentation du groupe restreint G'_T engendré par les transformations T sera :

$$S = 1 + \frac{i}{2}\beta_k^+ \overline{\Sigma}_k + \frac{i}{2}\beta_k^- \underline{\Sigma}^k \tag{1}$$

où $\overline{\Sigma}_k$ et $\underline{\Sigma}_k$ représentent les matrices 4×4 :

$$\overline{\Sigma}_k = \begin{pmatrix} \tau_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\Sigma}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_k \end{pmatrix}.$$

Montrons que la transformation S, qui fournit évidemment la self-représentation de SU_2^*, fournit en même temps la représentation bivaluée du groupe orthochrone propre de Lorentz : on sait que la représentation de spin d'une transformation infinitésimale de Lorentz :

$$\Lambda_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}$$

($\omega_{\mu\nu} = -\,\omega_{\nu\mu}$, ω_{ij} réels, $\omega_{i4} = -\,\omega_{4i}$ imaginaires) est donnée par la matrice 4×4 :

$$S = 1 + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\Gamma_\mu\Gamma_\nu$$

les quatre Γ_μ constituant une réalisation de l'algèbre de Clifford 4×4. Prenons la réalisation suivante :

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & i\tau_k \\ -\,i\tau_k & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En formant les combinaisons self-duales et antiduales des $\omega_{\mu\nu}$, qui nous fourniront les β_k^+ et β_k^- complexes conjuguées, on fait apparaître les combinaisons :

$$\frac{1}{2i}(\varepsilon_{ijk}\Gamma_i\Gamma_j + 2\Gamma_k\Gamma_4) = \overline{\Sigma}_k$$

$$\frac{1}{2i}(\varepsilon_{ijk}\Gamma_i\Gamma_j - 2\Gamma_k\Gamma_4) = \underline{\Sigma}_k$$

et la matrice S prend la forme *(1)* ce qui exprime un isomorphisme connu [*28*] [*29*].

Une fois établi l'isomorphisme entre le groupe d'invariance physique G'_T opérant sur le rotateur relativiste dans l'espace de Minkowski, et le groupe de symétrie SU_2^* opérant sur l'espace abstrait E_0^1 encadré par le Yukawon, nous pouvons partir formellement de l'expression matricielle *(1)* et rechercher ses représentations irréductibles sur les puissances tensorielles des espaces E_0^1 et E_1^0. Les deux conceptions sont équivalentes, comme nous l'avons montré pour le groupe SU_2. Signalons ici que notre groupe *n'est plus unitaire*, à cause des coefficients complexes, et comme cela doit être, pour les représentations finies du groupe de Lorentz. Dès lors, si nous voulons définir une dualité intrinsèque entre les espaces E_0^1 et E_1^0, la métrique que nous introduirons ainsi dans l'espace fonctionnel *ne sera pas définie.* Il est cependant possible de manier un tel espace « pseudo-hilbertien » comme on le verra à la référence [*6*] et dans un traitement plus détaillé que nous avons élaboré avec M. Souriau [*32*] (3).

On peut ainsi faire correspondre au vecteur $| Y \rangle$ de E_0^1 un covecteur $\langle \overline{Y} |$ défini par $\langle \overline{Y} Y \rangle = \| \overline{Y} Y \|$ où $\overline{Y}$ désigne la ligne $(-\overline{p}, \overline{n}, -\overline{V}, \overline{\Lambda})$ formée avec les fonctions Z des antiparticules, et où les doubles barres indiquent qu'on prend la mesure invariante sous G_T de la fonction encadrée :

$$\overline{Y}Y = -\overline{p}p + \overline{n}n - \overline{V}V + \overline{\Lambda}\Lambda \cdot$$

Il résulte immédiatement de la forme (*1*) de la transformation S, que celle-ci agit séparément sur les fonctions p, n et sur les fonctions V, Λ. Autrement dit, les projections de $| Y \rangle$ respectivement sur les plans 1, 2 et 3, 4, se transformant séparément, l'espace E_0^1 est *réductible* en ces deux plans en tant que représentation du groupe G'_T. Cependant, pour utiliser une seule et même représentation, nous resterons dans E_0^1 et nous considérerons respectivement les deux vecteurs

$$| N \rangle = \begin{pmatrix} p \\ n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad | L \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \\ \Lambda \end{pmatrix}$$

dont la *somme* constitue le vecteur $| Y \rangle$ dans E_0^1. Moyennant cet artifice, la transformation T du groupe G'_T induira sur $| N \rangle$ et $| L \rangle$ la *même* transformation S opérant dans E_0^1 : $| N \rangle \to S | N \rangle$, $| L \rangle \to S | L \rangle$ tandis que les covecteurs se transforment par $\langle \overline{N} | \to \langle \overline{N} | S^{-1}$, $\langle \overline{L} | \to \langle \overline{L} | S^{-1}$ en posant :

$$\overline{N} = (-\overline{p}\overline{n}00) \qquad \overline{L} = (00 - \overline{V}\overline{\Lambda}).$$

Nous nous proposons dans ce qui suit de former les premières représentations irréductibles du groupe G'_T par réduction des produits tensoriels

(3) La variété sur laquelle opère le groupe d'invariance G_T est la sphère S_4^* de rayon 1 dans l'espace euclidien complexe à 4 dimensions $\mathcal{C}_4$. Si on prend comme paramètres ω les coordonnées ξ_μ ($\xi_\mu \xi_\mu = 1$) du point courant de S_4^* dans $\mathcal{C}_4$, on voit que les fonctions Z sont des produits de polynômes homogènes en ξ_μ et ξ_μ^* respectivement. Il est alors possible, en prolongeant analytiquement ces fonctions à tout l'espace $\mathcal{C}_4$ et en prenant leur valeur au centre de S_4^*, de définir pour chaque fonction de cette forme une *mesure invariante* sous le groupe G_T, en évitant les intégrations divergentes. Notons qu'on se limite à un *espace de polynômes.*

successifs de E_0^1 et E_1^0. La méthode classique [*11*] [*19*] consiste à former des combinaisons tensorielles dont toutes les contractions sont nulles, puis à prendre la partie complètement symétrique des tenseurs formés, encadrant ainsi un *espace de représentation* décomposé en sous-espaces irréductibles. Mais si on identifie les particules élémentaires à des fonctions $Z_{(\omega)}$ définies sur le groupe de Lorentz, on aboutit à un *espace vectoriel de fonctions* isomorphe au précédent et les deux réductions sont exactement équivalentes (4). Cette équivalence généralise l'isomorphisme, bien connu dans le cas du groupe SU_2, entre le produit de Clebsch-Gordan des fonctions sphériques et la réduction du produit tensoriel des sous-espaces irréductibles sous SU_2 dans l'espace de Hilbert. Il est utile de remarquer ici que ces deux formalismes équivalents sous-tendent deux conceptions physiques profondément différentes : celle du groupe de symétrie des systèmes de particules en interaction (forte), et celle du groupe d'invariance d'une dynamique interne (quantifiée) que l'on attribue à chaque particule. Il résulte de notre façon de poser le problème que l'invariance de la dynamique interne entraîne non seulement une classification des états quantifiés, mais la symétrie de leurs interactions *sous un groupe isomorphe au groupe d'invariance* (ou tout au moins à un sous-groupe discret de celui-ci).

Comme nous avons à considérer *deux* vecteurs de base $| N \rangle$ et $| L \rangle$ dans E_0^1, nous utiliserons séparément les contractions partielles dans les deux demi-espaces irréductibles, en introduisant les matrices restreintes :

$$\bar{\delta}_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\delta}_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont tensorielles sous la transformation (*1*). On peut ainsi former deux expressions séparément invariantes : $\langle \bar{N}N \rangle$ et $\langle \bar{L}L \rangle$ soit $\bar{Y}^\beta \bar{\delta}_\beta^\alpha Y_\alpha$ et $\bar{Y}^\beta \underline{\delta}_\beta^\alpha Y_\alpha$, qui représenteront le Lagrangien des *baryons* libres (nous réservons le nom de baryons aux particules de base *p*, *n*, V, Λ). Ces expressions sont invariantes sous le groupe fondamental G'_T engendré par $1 + \frac{i}{2} \beta_k^+ \bar{\Sigma}_k + \frac{i}{2} \beta_k^- \underline{\Sigma}_k$ mais non sous le groupe des interactions *fortes* G_F qui, ne conservant que le spin isotopique (vecteur) et l'étrangeté S, sera engendré par $1 + \frac{i}{2} \beta_k^+ \bar{\Sigma}_k + \frac{i}{2} \beta_3^- \underline{\Sigma}_3$. Il y aura donc rupture de la symétrie par les inter-

(4) Le produit algébrique de deux fonctions Z est commutatif tandis que le produit tensoriel de deux vecteurs ne l'est pas. Mais il le devient lorsqu'on prend la partie complètement symétrique.

actions fortes qui sépareront l'isodoublet N et les deux isosinglets Λ et V, et on peut, moyennant un choix de signe qui sera fait une fois pour toutes pour toutes les représentations, en tirer la conséquence que V est beaucoup plus lourd que Λ, donc hautement instable. Une telle situation se retrouvera pour toutes les particules que nous ferons apparaître dans les représentations successives (nous n'y reviendrons plus), et on voit immédiatement que la rupture de symétrie stabilisera les particules d'étrangeté négative de chaque supermultiplet étrange, et enverra les autres particules dans des régions de grande énergie et haute instabilité. Ce fait peut constituer une première explication pour la présence dans notre schéma de particules (désignés par X, Y, etc.) qui n'apparaissent pas dans l'expérience. Nous en donnerons tout à l'heure une autre. Contentons-nous de signaler le parallélisme entre la rupture de symétrie des interactions fortes (restrictions de $\beta_k^- \Sigma_k$ à $\beta_3^- \overline{\Sigma}_3$) et celles des interactions électromagnétiques (restriction de $\beta_k^+ \overline{\Sigma}_k$ à $\beta_3^+ \overline{\Sigma}_3$) la seule différence tenant à la constante d'interaction. Bien entendu, l'une et l'autre rupture fait disparaître l'isomorphisme avec le groupe de Lorentz (plus précisément ni le groupe G_F, ni le groupe G_M ne sont plus isomorphes du groupe de spin du groupe de Lorentz).

Les deux scalaires $\langle \overline{N}N \rangle = \overline{N}_\alpha N^\alpha$ et $\langle \overline{L}L \rangle = \overline{L}_\alpha L^\alpha$ nous fournissent deux représentations irréductibles D(0, 0) [5] dans E_0^0. Montrons comment on construit les représentations D(1, 0), D(0, 1) et $D\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$ dans E_1^1. On peut former avec les deux demi-spineurs quatre expressions tensorielles irréductibles :

$$M_\alpha^{\cdot\beta} = N_\alpha \overline{N}^\beta - \frac{1}{2}\, \delta_\alpha^\beta N_\gamma \overline{N}^\gamma$$

$$B_\alpha^{\cdot\beta} = L_\alpha \overline{L}^\beta - \frac{1}{2}\, \delta_\alpha^\beta L_\gamma \overline{L}^\gamma$$

$$P_\alpha^{\cdot\beta} = N_\alpha \overline{L}^\beta$$

$$Q_\alpha^{\cdot\beta} = L_\alpha \overline{N}^\beta.$$

En remplaçant les composantes des spineurs par les fonctions Z, et en effectuant les produits de Clebsch-Gordan, on fait apparaître les fonctions Z

(5) On désigne les représentations irréductibles du groupe SU_2^* par la notation $D(l^+l^-)$.

des bosons, d'où les expressions tensorielles équivalentes aux précédentes qu'on explicitera sous forme matricielle :

$$M_{\alpha}^{\cdot\beta} \text{ donne } \Pi_{\alpha}^{\cdot\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & 0 & 0 \\ -\pi^- & \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une expression analogue notée $\mathcal{B}_{\alpha}^{\cdot\beta}$ fait intervenir Λ, V et trois bosons instables β^+, β^0, β^- correspondant aux fonctions $Z(0, 1, 1; 0, m^-, 0)$, singlets d'étrangetés 2, 0, — 2.

Les expressions $P_{\alpha}^{\cdot\beta}$ et $Q_{\alpha}^{\cdot\beta}$ font apparaître deux sortes de fonctions :

$$Z\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\;0\;;\;m^+\,m^-\;0\right) = K_s$$

qui appartiennent à un *singlet* de nombre baryonique, et :

$$Z\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\;1\;;\;m^+\,m^-\;0\right) = K_t$$

qui appartiennent au terme central d'un *triplet* de nombre baryonique, ce qui nous conduit à introduire deux quadruplets de bosons étranges isobares. Suivant une idée déjà avancée par J. P. Vigier et l'un d'entre nous [*33*], nous associerons les particules physiques, non aux fonctions propres elles-mêmes, mais aux combinaisons linéaires entre singlet et triplet qui apparaissent dans les matrices P_{α}^{β} et Q_{α}^{β}, soit $K_s - K_t = K$ aux kaons ordinaires, et $K_s + K_t = M$ à des isobares instables qu'on pourrait identifier à la résonance à 730 MeV [*34*] si elle a le spin 0 (6). On aura ainsi les matrices :

$$\mathcal{K}_{(1)\alpha}^{\;\;\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\overline{M}^0 & -K^+ \\ 0 & 0 & M^- & K^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

(6) Les bosons vectoriels formant, comme il est bien connu, un système parallèle à celui des bosons pseudoscalaires, il est clair, comme nous le signalons dans l'article référence [*33*], qu'on devra introduire quatre autres matrices, ayant même forme que π, $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}_{(1)}$, $\mathcal{K}_{(2)}$ mais constituées par des isobares de spin 1. Si les bosons M sont de spin 0, on est ainsi amené à introduire, outre les kaons vectoriels K* (888 MeV), des isobares vectoriels de M, qui ont été aperçus vers 1 200 MeV.

$$\mathcal{K}_{(2)\alpha}^{\;\;\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_0 & M^+ & 0 & 0 \\ -K^- & \overline{K}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le Hamiltonien des interactions invariantes sous G'_T s'écrit en formant toutes les combinaisons contractées des tenseurs baryons-antibaryons $M_{\alpha}^{\cdot\beta}$, $B_{\alpha}^{\cdot\beta}$, $P_{\alpha}^{\cdot\beta}$, $Q_{\alpha}^{\cdot\beta}$ avec les tenseurs bosons $\pi_{\alpha}^{\cdot\beta}$, $\mathcal{B}_{\alpha}^{\cdot\beta}$, $\mathcal{K}_{(1)\alpha}^{\;\;\cdot\beta}$, $\mathcal{K}_{(2)\alpha}^{\;\;\cdot\beta}$, qui s'obtiennent en prenant la trace de tous les produits matriciels non nuls, affectés chacun d'une constante de couplage différente, sauf en ce qui concerne les termes en $\mathcal{K}_{(1)}$ et $\mathcal{K}_{(2)}$ qui sont conjugués de charge, et ont même constante de couplage. On aura ainsi :

$$\mathcal{H}_1 = g_{\pi_1}(M, \Pi) + g_{\beta_1}(B, \mathcal{B}) + g_{k_1}[(P, \mathcal{K}_{(2)}) + (Q, \mathcal{K}_{(1)})]$$

les parenthèses désignant la trace des produits matriciels. Le premier terme donne les interactions nucléons-pions de la théorie ordinaire du spin isotopique. Le second ne correspond à aucune interaction observable, les bosons β étant supposés très instables. Les deux derniers termes donnent le développement :

$$-\bar{p}\overline{M}^0V + \bar{n}M^-V - \underline{\bar{p}K^+\Lambda} + \underline{\bar{n}K^0\Lambda} + \overline{V}M^0p - \underline{\overline{\Lambda}K^-p} - \overline{V}M^+n + \overline{\Lambda}\overline{K}^0n.$$

On voit que les bosons instables M sont associés à la particule instable V, c'est pourquoi les termes non soulignés ne pourront pas apparaître expérimentalement. Les termes soulignés fournissent les interactions prévues par la théorie de Despagnat et Prentki.

Dans la représentation $\mathcal{D}_2^1$ on aura à considérer quatre cas mettant en jeu respectivement les fonctions propres pour lesquelles :

$$\mathcal{D}(l^+, l^-) = \mathcal{D}(1, 1/2), \mathcal{D}(1/2, 1), \mathcal{D}(3/2, 0) \text{ et } \mathcal{D}(0, 3/2).$$

a) *Cas* $\mathcal{D}(1, 1/2)$.

On obtient deux tenseurs irréductibles :

$$R_{\gamma\cdot\alpha}^{\cdot\beta} = \psi_\gamma P_\alpha^{\cdot\beta} \quad \text{symétrique}$$

et :

$$T_{\gamma\cdot\alpha}^{\cdot\beta} = \psi_\gamma Q_\alpha^{\cdot\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_\gamma^\beta \psi_\lambda Q_\alpha^{\cdot\lambda}$$

dont on conservera la partie symétrique :

$$S_{\gamma\cdot\alpha}^{\cdot\beta} = T_{\gamma\cdot\alpha}^{\cdot\beta} + T_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}.$$

Si nous exprimons ces deux tenseurs au moyen des fonctions de $\mathcal{D}(1, 1/2)$ nous verrons apparaître deux triplets d'hypérons Σ^+, Σ^0, Σ^- pour $m^- = -\frac{1}{2}$ et Y^{++}, Y^+, Y^0 pour $m^- = +\frac{1}{2}$. Le second triplet (qui figure aussi dans les états composés de la théorie de Sakata) est très instable. En outre ces deux triplets figureront sous deux formes, toutes deux de nombre baryonique 1, mais l'une notée Σ_d, Y_d appartenant à un *doublet* de nombre baryonique avec $m' = \pm\frac{1}{2}$ l'autre notée Σ_q, Y_q appartenant à un *quadruplet* de nombre baryonique avec $l' = \frac{3}{2}$, $m' = \pm\frac{1}{2}$. Ces deux types de fonctions apparaîtront par les combinaisons linéaires :

$$Z_q - \sqrt{2}Z_d \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2}Z_q + Z_d.$$

Nous nous trouvons donc dans la même situation que dans le cas des mésons K et comme plus haut nous considérerons que ces deux types de combinaisons (et non pas les fonctions propres elles-mêmes) représenteront deux états des hypérons correspondants, l'un (relativement) stable que nous désignerons par Σ et Y, l'autre très instable que nous désignerons par Σ^* et Y^*. Dans ces conditions les 2 tenseurs irréductibles exprimés à l'aide des hypérons donneront l'un $R \to \mathcal{R}$ qui ne contiendra que les hypérons *, l'autre $S \to \mathcal{S}$ qui ne contiendra que des hypérons non *.

Tous les invariants sont inclus dans l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}_2 = g_{\pi_2}(\bar{\psi}^{\gamma}\mathcal{S}_{\gamma}, \pi) + g_{k_2}[(\bar{\psi}^{\gamma}\mathcal{R}_{\gamma}, \mathcal{K}_{(2)}) + (\bar{\psi}^{\gamma}\mathcal{S}_{\gamma}, \mathcal{K}_{(1)})].$$

Le premier terme nous fournit les interactions $\bar{\Lambda}\Pi\Sigma$, et des interactions du type $\bar{V}\Pi Y$ qui ne peuvent se manifester, étant donné l'instabilité des particules V et Y d'étrangeté positive. Le second terme nous fournit des interactions de type $\bar{N}M\Sigma^*$ inobservables pour la même raison et des interactions $\bar{N}KY^*$. Celles-ci pourraient apparaître comme résonances N-K, mais on peut admettre que les particules Y^* *doublement* instables (comme états « étoilés » et comme états d'étrangeté positive) exigent une énergie qui est hors des possibilités expérimentales actuelles.

Le troisième terme fournit les interactions $\bar{N}K\Sigma$ classiques et des interactions $\bar{N}MY$ manifestement inobservables.

b) *Cas de* $\mathcal{D}(1/2, 1)$.

Un calcul symétrique au précédent fera apparaître trois doublets d'hypérons : X^{++}, X^+ d'étrangeté $+ 2$, $\tilde{p}$, $\tilde{n}$ isobares instables de n et p, Ξ^0, Ξ^-, d'étrangeté — 2 et ceci sous une forme « non étoilée » (relativement stable) et sous une forme « étoilée » très instable.

Les tenseurs irréductibles seront $\varphi_\gamma . Q^\beta_\alpha$, soit $\mathcal{U}^\beta_{\gamma\alpha}$ qui ne contiendra que des hypérons « non étoilés » et partie sym. $\left(\varphi_\gamma . P^\beta_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\gamma \varphi_\lambda . P^{\cdot\lambda}_\alpha\right)$, soit $\mathcal{V}^\beta_{\gamma\alpha}$ qui ne contiendra que des hypérons « étoilés ».

L'hamiltonien d'interaction sera :

$$\mathcal{H}_3 = g_{\beta_3}(\bar{\psi}^\gamma \mathcal{V}_\gamma, \mathcal{B}) + g_{k_3}[(\bar{\psi}^\gamma \mathcal{U}_\gamma, \mathcal{K}_{(1)}) + (\bar{\varphi}^\gamma \mathcal{V}_\gamma, \mathcal{K}_{(2)})].$$

Le premier terme donnera des interactions inobservables comportant des bosons instables β et les hypérons « étoilés ». Le second fournira les interactions $\bar{\Lambda}\mathrm{K}\Xi$ classiques et des interactions $\bar{\mathrm{V}}\mathrm{K}\tilde{\mathrm{N}}$, $\bar{\Lambda}\mathrm{MN}$ et $\bar{\mathrm{V}}\mathrm{MX}$ inobservables, soit du type $\bar{\Lambda}\mathrm{M}\Xi^*$, $\bar{\mathrm{V}}\mathrm{KX}^*$, etc., avec deux particules instables, soit du type $\bar{\Lambda}\mathrm{K}\tilde{\mathrm{N}}^*$ où figure une particule « doublement » instable dont la formation exigerait une énergie considérable.

Ainsi dans les trois cas présentés par $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ on voit que le formalisme rend compte des résultats qualitatifs de l'expérience : toutes les interactions observées apparaissent dans la théorie et les autres termes peuvent être écartés en considération de l'impossibilité pratique de faire interagir les particules hautement instables qui se trouvent associées. Le seul cas où la réaction n'est pas rigoureusement impossible est celui de la formation d'isobares « étoilés » d'étrangeté non négative et la théorie incite à examiner soigneusement les scatterings correspondants dans le domaine des très hautes énergies.

c) *Les cas de* $\mathcal{D}(3/2, 0)$ *et* $\mathcal{D}(0, 3/2)$.

Ici les produits de fonctions font apparaître d'une part un quadruplet Δ^{++}, Δ^+, Δ^0, Δ^- d'étrangeté nulle, qu'on peut identifier évidemment avec la résonance $\mathrm{N}\pi$ à 1 238 MeV, d'autre part quatre singulets, Ω^{++}, Ω^+, Ω^0, Ω^- d'étrangeté + 3, + 1, — 1, — 3 respectivement, nécessairement très instables, sauf Ω^- d'étrangeté négative qui peut être identifiée à la particule stable — à désintégration faible — récemment observée à Brookhaven [*35*]. Avec les Δ on peut former le tenseur irréductible :

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}^{\cdot\beta}_{1\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} -\ \Delta^+ & \sqrt{2}\Delta^{++} & 0 & 0 \\ -\ \Delta^0 & \Delta^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_{2\alpha}^{\cdot\beta} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} - & \Delta^0 & \Delta^+ & 0 & 0 \\ - & \sqrt{3}\,\Delta^- & \Delta^0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_4 = 0$$

et on aura un hamiltonien :

$$\mathcal{H}_4 = g_{\pi_4}(\bar{\psi}^{\gamma}.A_{\gamma}, \pi)$$

qui représentera la résonance en question.

Il en est de même avec les Ω, un hamiltonien qui se rapportera à des interactions du type $\bar{L}\beta\Omega$, donc inobservables.

CONCLUSION

En conclusion nous voyons que nous avons obtenu dans le cadre de la théorie du rotateur relativiste une représentation complète des interactions sous le groupe G_T et conservant le nombre baryonique. Il est à noter qu'un hamiltonien d'interactions fortes avait été déjà proposé simultanément par Katsumori [*36*] et par l'un de nous (F. H.) [*37*]. La méthode utilisée [*38*] consistait simplement à former avec les fonctions Z des combinaisons tensorielles irréductibles sous le groupe G_T et à les contracter en des invariants. Cette méthode cependant laisse de côté un grand nombre de combinaisons mettant en jeu des états instables, notamment les isobares étudiés dans le présent article, provenant de ce que la théorie relie le nombre baryonique à un groupe de rotations tridimensionnelles. La méthode utilisée ici introduit une idée supplémentaire celle des « particules composées » obtenues par fusion de quatre espèces de particules « fondamentales ». Il en résulte des contraintes supplémentaires qui introduisent nécessairement *tous* les états résultant de la fusion, y compris les multiplets supérieurs du groupe de nombre baryonique. Le résultat diffère ainsi des traitements antérieurs. Il est plus délicat à interpréter. En particulier pour rester dans le cadre de l'expérience — tout au moins qualitativement — on a été amené à abandonner pour la représentation des particules physiques les fonctions propres elles-mêmes au profit de combinaisons linéaires déterminées. Il nous semble que le résultat est amélioré, car il rend compte non seulement de l'apparition des réactions observées, mais encore de l'absence des réactions inobservées : les états auxquels on ne sait faire correspondre aucune particule se présentant comme ne pouvant apparaître qu'à partir d'autres états eux-mêmes inobservés. En d'autres termes les interactions fortes semblent se partager en deux *classes* séparées, les unes réelles qui mettent en jeu uniquement des particules (relativement) stables, les autres virtuelles qui mettent en jeu uniquement des particules très instables.

Il nous paraît utile pour terminer de donner le tableau récapitulatif des isomultiplets prévus par notre modèle. Nous les classerons suivant les représentations $D(1^+1^-)$ en désignant par $D(1^+1^{-*})$ les états « étoilés » liés aux multiplets supérieurs de nombre baryonique. Nous nous limitons aux représentations irréductibles sur les espaces tensoriels d'ordre 1, 2 et 3 et nous distinguons les états de spin J (externe) prévus par la théorie. L'ordre de chaque isomultiplet est, bien entendu, donné par la valeur de 1^+, l'étrangeté est donnée dans la colonne S.

Les points d'interrogation désignent des résonances encore discutables dans l'état expérimental actuel, ou dont l'identification est douteuse (notamment au point de vue du spin). Nous avons attribué deux particules à chaque état de D(00), car nous avons vu apparaître deux représentations indépendantes de formes $\bar{\mathrm{L}}\mathrm{L}$ et $\bar{\mathrm{N}}\mathrm{N}$ respectivement. On retrouve encore les valeurs $T = 0$, $S = 0$ pour les termes centraux β^0, β'^0 des triplets d'étrangeté, que nous avons identifiés aux deux résonances K-K observées. Enfin on est conduit à penser que les états de spin $\frac{1}{2}$ pour $D\left(\frac{3}{2}\,0\right)$ et $D\left(0\,\frac{3}{2}\right)$ sont interdits par une règle de sélection sur le spin (dont la théorie n'est pas encore achevée dans notre modèle). Les indications sur les masses et les spins se réfèrent à l'état expérimental en novembre 1963 [*40*].

On remarquera que, comme nous l'avons signalé, dans chaque supermultiplet $D(1^+1^-)$, seul apparaît dans l'expérience l'état d'étrangeté la plus basse (pour les particules) ou la plus haute (pour les antiparticules). A cet égard, les K sont à considérer comme antiparticules et les $\bar{\mathrm{K}}$ comme particules. De même β^+ est une particule et β^- une antiparticule, l'une et l'autre étant plus instables que β^0.

On peut se demander si ces indications qualitatives sur les effets de la rupture de symétrie par les interactions fortes ne peuvent pas être précisées quantitativement. A cet égard, M. Flato [*41*] a appliqué à la théorie la méthode d'Okubo [*21*] et a établi une formule à trois constantes analogue à celle d'Okubo :

$$\mathrm{M} = a + b.m^- + c\left[1^+(1^+ + \mathrm{I}) - \frac{\mathrm{I}}{6}(m^-)^2\right]$$

valable à l'intérieur de chaque supermultiplet $D(1^+1^-) \oplus D(1^-1^+)$. Un coup d'œil sur le tableau précédent nous montre qu'il n'existe pas de supermulti-

$D(1^+1^-)$	J^P	S	symbole	masse	$D(1^+1^-{*})$	J^P	S	symbole	masse
$D(\frac{1}{2}\ 0)$	$\frac{1}{2}^+$	0	N	939					
$D(0\ \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$	1	V						
	$\frac{1}{2}^+$	-1	Λ	1 115					
$D(0\ 0)$	0^-	0	ω_{ABC}	317					
	0	0	η	548					
$D(0\ 0)$	1^-	0	ω	783					
	1^-	0	η'	922 ?					
$D(1\ 0)$	0^-	0	π	137					
$D(0\ 1)$	0	± 2	$\beta^\pm$						
	0	0	β^0	1 040 ?					
$D(1\ 0)$	1^-	0	ρ	757					
$D(0\ 1)$	1	± 2	$\beta'^\pm$						
	1	0	β'^0	1 019					
$D(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$	0^-	± 1	K, $\bar{K}$	496	$D(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ {*})$	0	± 1	$\mathcal{K}, \bar{\mathcal{K}}$	725
$D(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$	1^-	± 1	$K^*, \bar{K}^*$	890	$D(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ {*})$	1	± 1	$\mathcal{K}^*, \bar{\mathcal{K}}^*$	1 200 ?
$D(\frac{1}{2}\ 1)$	$\frac{1}{2}^+$	2	X		$D(\frac{1}{2}\ 1\ {*})$	$\frac{1}{2}$	2	X^*	
	$\frac{1}{2}^+$	0	$\tilde{N}$			$\frac{1}{2}$	0	$\tilde{N}^*$	
	$\frac{1}{2}^+$	-2	Ξ	1 318		$\frac{1}{2}$	-2	Ξ^*	1 770 ?
$D(1\ \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$	1	Y		$D(1\ \frac{1}{2}\ {*})$	$\frac{1}{2}$	1	Y^*	
	$\frac{1}{2}^+$	-1	Σ	1 193		$\frac{1}{2}$	-1	Σ^*	1 550?
$D(\frac{1}{2}\ 1)$	$\frac{3}{2}^+$	2	X'		$D(\frac{1}{2}\ 1\ {*})$	$\frac{3}{2}$	2	X'^*	
	$\frac{3}{2}^+$	0	$\tilde{N}'$			$\frac{3}{2}$	0	$\tilde{N}'^*$	
	$\frac{3}{2}^+$	-2	Ξ'	1 533		$\frac{3}{2}$	-2	Ξ'^*	
$D(1\ \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}^+$	1	Y'		$D(1\ \frac{1}{2}\ {*})$	$\frac{3}{2}$	1	Y'^*	
	$\frac{3}{2}^+$	-1	Σ'	1 382		$\frac{3}{2}$	-1	Σ'^*	1 660
$D(\frac{3}{2}\ 0)$	$\frac{3}{2}^+$	0	Δ	1 237					
$D(0\ \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	3	Ω^{++}						
	$\frac{3}{2}$	1	Ω^+						
	$\frac{3}{2}$	-1	Ω^0						
	$\frac{3}{2}$	-3	Ω^-	1 700					

plet contenant plus de deux isomultiplets de masse connue. La seule exception est peut-être $D\left(\frac{1}{2} I\right) \oplus D\left(I \frac{1}{2}\right)$ de spin $\frac{1}{2}$, si on identifie $\tilde{N}$ avec la résonance $N\Pi$ de spin $\frac{1}{2}$ à 556 MeV (publiée postérieurement au tableau Matts Roos) [*42*]. Si on introduit les masses de Σ, Ξ et $\tilde{N}$ les trois constantes de la formule de Flato pour ce supermultiplet sont :

$$a = 1\,788, \qquad b = 344, \qquad c = -\,108$$

ce qui donne pour les isomultiplets Y et X non observés :

$$M_Y = 1\,537 \text{ MeV} \qquad M_X = 2\,006 \text{ MeV}.$$

Ces masses correspondent à une possibilité de décroissance forte spontanée (open Channel) pour Y et pour X. Nous avons dit pourquoi la production de ces particules était très improbable.

Nous tenons à remercier MM. J.-M. Souriau et J.-P. Vigier pour leurs suggestions et éclaircissements. Nous remercions ici également M. L. Michel, qui, par ses critiques pertinentes, nous a suggéré d'importantes améliorations de ce travail.

RÉFÉRENCES

[*1*] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, t. 92, 1953, p. 833.
[*2*] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, t. 125, 1962, p. 1067.
[*3*] Y. Néeman, *Nucl. Phys.*, t. 26, 1961, p. 222-230.
[*4*] S. Sakata, *Progr. Theor. Phys.*, t. 16, 1956, p. 686.
[*5*] M. Ikeda, S. Ogawa et Y. Oknuki, *Progr. Theor. Phys.*, suppl. 19, 1961, p. 44.
[*6*] D. Bohm, L. de Broglie, F. Halbwachs, P. Hillion, J.-P. Vigier et T. Takabayasi, *Phys. Rev.*, t. 129, 1963, p. 438-451.
[*7*] Y. Katayama, J.-P. Vigier et H. Yukawa, *Progr. Theor. Phys.*, t. 29, 1963, p. 468.
[*8*] N. Kemmer, *Proc. Cambridge. Phil. Soc.*, t. 34, 1938, p. 354.
[*9*] B. Despagnat et J. Prentki, *Nucl. Phys.*, t. 1, 1950, p. 33.
[*10*] Y. Yamaguchi, *P. R. L.*, t. 9, 1964, p. 281.
[*11*] P. T. Matthews et A. Salam, *Proc. Phys. Soc.*, t. 80, 1962, p. 28.
[*12*] R. Uttyama, *Phys. Rev.*, t. 101, 1956, p. 1597.
[*13*] J. J. Sakurai, *Ann. Phys.*, t. 11, 1960, p. 1.
[*14*] C. L. Yang et R. L. Mills, *Phys. Rev.*, t. 97, 1954, p. 192.
[*15*] C. van Winter, *Thèse Groningen*, 1957.
[*16*] H. B. G. Casimir, *Thèse Leiden*, 1931.
[*17*] G. Lochak, *Thèse Paris*, 1959. *Cahiers de Phys.*, t. 102, 1959, p. 41.
[*18*] R. E. Behrends, W. Lee, J. Dreitlein et C. Fronsdale, *Rev. Mod. Phys.*, t. 34, 1962, p. 2.
[*19*] J. J. de Swart, *Phys. Rev.*, t. 132, 1963, p. 2346.
[*20*] G. F. Chew, M. Gell-Mann et A. R. Rosenfeld, *Scientif. American.*

[21] S. Okubo, *Progr. Theor. Phys.*, t. 27, 1962, p. 949.
[22] Y. Hara, *Phys. Rev.*, t. 134, 1964, B. 701.
[23] S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.*
[24] L. de Broglie, *Introduction à la nouvelle théorie des particules*, Paris. Gauthier-Villars, 1961.
[25] L. de Broglie, D. Bohm, F. Halbwachs, P. Hillion, T. Takabayasi et J.-P. Vigier, *Proc. Intern. Conference on elem. Particle*, Aix-en-Provence, 1961, p. 503.
[26] L. de Broglie et J.-P. Vigier, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 3350-3351.
[27] M. Flato, G. Rideau et J.-P. Vigier, sous presse, in *Nuclear Phys.*, t. 55, 1964.
[28] A. Einstein et M. Mayer, *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse*, 1932, p. 522.
[29] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, Paris, Hermann, 1938.
[30] M. Ferroluzzi, F. T. Solmits et M. L. Stevenson, U. C. R. L., 1962, 10234.
[31] W. Graziano et S. Wojcicki, *Phys. Rev.*, t. 128, 1962, p. 1868.
[32] F. Halbwachs et J. M. Souriau, en cours de publication.
[33] F. Halbwachs et J.-P. Vigier, *Nuov. Cim.*, t. 30, 1963, p. 469.
[34] D. Miller, G. Alexander, O. Dahl, L. Jacobs, G. Kalbfleisch et G. Smith, *P. R. L.*, t. 5, 1963, p. 279.
[35] V. E. Barnes et P. L. Connolly *et al.*, *P. R. L.*
[36] H. Katsumori, *Progr. Theor. Phys.*, t. 29, 1963, p. 794.
[37] F. Halbwachs, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 2547.
[38] L. de Broglie, F. Halbwachs, P. Hillion, T. Takabayasi et J.-P. Vigier, *Phys. Rev.*, t. 129, 1963, p. 451.
[39] H. Weyl, Theory of groups and quantum mechanics (last chapter), voir aussi A. Gamba, *Phys. Rev.*, t. 110, 1958, p. 601.
[40] Matts Roos, *Nuclear Phys.*, t. 52, 1964, p. 1.
[41] M. Flato, *à paraître*.
[42] Roper, *P. R. L.*, t. 12, 1964, p. 340.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1964).