

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-LOUP GERVAIS

**Formalisme relativiste de la polarisation dans une
description à deux composantes des particules de spin 1/2**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, n° 4 (1964), p. 385-402

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_4_385_0

© Gauthier-Villars, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Formalisme relativiste de la polarisation dans une description à deux composantes des particules de spin $1/2$

par

Jean-Loup GERVAIS (*)
Centre de Physique Théorique
de l'École Polytechnique, Paris.

SOMMAIRE. — Cet article est consacré à l'étude d'une description des particules de spin $1/2$ par des spineurs à deux composantes introduite par Brown. L'invariance relativiste de cette théorie, dans laquelle la fonction d'onde est un état propre de la chiralité, c'est-à-dire un vecteur propre de γ^5 , est étudiée en introduisant la représentation à deux composantes du groupe de Poincaré induite par les états libres. Ceci permet de développer le formalisme de la polarisation en utilisant la théorie générale du spin relativiste. On établit, ensuite, les formules permettant d'étudier les effets de polarisation dans les diffusions. Il apparaît que ces formules sont plus simples que celles de la théorie de Dirac, car elles ne comportent pas de projecteurs sur les états d'énergie positive, puisque ceux-ci sont automatiquement séparés dans le formalisme à deux composantes. Enfin la diffusion Compton au second ordre est réétudiée à titre d'exemple.

ABSTRACT. — In this article, the two-component theory of spin $1/2$ particles already proposed by Brown is considered again. The relativistic invariance of that theory, in which the wave function is an eigen-state of the chirality, i. e. an eigen-vector of γ^5 , is studied by introducing the two-component representation of the Poincaré group which describes the transformation laws of the free states. This allows us to formulate the

(*) *En congé de : Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, Faculté des Sciences de Paris, Orsay.*

polarization formalism by using the general theory of relativistic spin; and to derive the formulæ necessary to study the polarization effects in scatterings. It appears that these formulæ are simpler than in the Dirac theory since they do not contain any projector upon the positive-energy states; the positive and negative energy states being automatically separated in the two-component formalism. Finally the second order Compton effect is studied again to show how the formalism may be used practically.

INTRODUCTION

Il paraît naturel, *a priori*, de décrire les particules de spin $1/2$ par des fonctions d'onde à deux composantes puisqu'il existe deux états linéairement indépendants pour une impulsion donnée.

De nombreux auteurs se sont déjà intéressés à une théorie de ce type : Weyl [1], en 1929, puis Serpe [2], en 1951, ont étudié une description des fermions utilisant une fonction d'onde de chiralité déterminée. L'équation d'onde est du premier ordre. Ce formalisme est équivalent à la théorie de Majorana. Cependant, il faut définir l'opération parité comme étant antilinéaire ce qui n'a pas grand sens physique (le signe de l'énergie n'est pas conservé). Dans le cas où la masse est nulle, on retrouve la théorie du neutrino à deux composantes.

Après la découverte de la non-conservation de la parité dans les interactions faibles en 1956 et l'hypothèse du neutrino à deux composantes, plusieurs physiciens ont cherché à formuler une description des fermions par une fonction d'onde de chiralité déterminée qui soit équivalente à celle de Dirac.

Feynman et Gell-Mann [3] ont montré que cela est possible en présence d'un champ électromagnétique à condition d'utiliser une équation d'onde qui soit du second ordre. L'interaction universelle de Fermi s'introduit de façon naturelle dans ce formalisme.

Brown [4] a repris cette idée en la développant. Il a ainsi formulé une théorie à deux composantes, complétée plus tard par Tonin [5] qui est utilisable pratiquement en électrodynamique aussi facilement que celle de Dirac. Il a montré qu'il est souvent plus simple d'effectuer les calculs par cette méthode : en effet, comme la fonction d'onde n'a que deux composantes, il ne s'introduit pas de « projecteurs d'énergie ». Ceci est un grand avantage qui compense le fait que la fonction de vertex est plus compliquée

en théorie à deux composantes, le couplage électromagnétique devenant dérivatif.

Nous avons voulu étudier le formalisme relativiste de la polarisation dans la théorie de Brown à l'aide de la théorie générale du spin.

Pour cela, il nous a fallu d'abord déterminer la représentation du groupe de Lorentz inhomogène induite par l'espace des états de la particule libre. Ceci conduit à définir une représentation à 2 dimensions du groupe de Lorentz. Il est possible de le faire, bien que la chiralité ne soit pas un invariant de Lorentz, à condition que les matrices qui correspondent au spin dans la représentation dépendent explicitement de l'impulsion.

Nous développons ensuite le formalisme de la polarisation en partant de cette représentation. Il apparaît alors que les méthodes proposées antérieurement pour l'étude des effets de spin dans la théorie de Dirac peuvent toutes être utilisées dans la théorie de Brown et que les formules obtenues sont ici aussi beaucoup plus simples.

Enfin, à titre d'exemple, nous appliquons les résultats précédents à la diffusion Compton sur les électrons.

I. — Équations de la particule libre.

Elles ont été établies par Brown [4] à l'aide d'un Lagrangien. Dans cette section, pour être plus bref, nous les déduisons directement de l'équation de Dirac.

Pour cela, il faut utiliser la représentation des matrices γ de Dirac où γ^5 est diagonale.

Nous écrirons (μ comme tous les indices grecs varie de 0 à 3) :

$$(I-1) \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu(-)} \\ \sigma^{\mu(+)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

les matrices 2×2 $\sigma^{\mu(\pm)}$ étant données par :

$$(I-2) \quad \sigma^{0(\pm)} = 1 \quad \sigma^{k(\pm)} = \mp \tau_k$$

où τ_k ($k = 1, 2, 3$) désigne les trois matrices de Pauli ordinaires.

Il résulte de (I-1) et (I-2) que la relation d'anticommutation des γ s'écrit :

$$(I-3) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$g^{\mu\nu}$ étant tel que la signature du produit scalaire soit égale à $+1$ pour la composante de temps ($\mu = 0$) et à -1 pour les composantes d'espace.

A un quadrivecteur \underline{p} quelconque, il est commode d'associer deux matrices 2×2 $p^{(+)}$ et $p^{(-)}$ définies par les relations :

$$p^{(\pm)} = \sigma^{\mu(\pm)} p_{\mu} = p^0 \pm \vec{\tau} \cdot \vec{p}.$$

Ces matrices jouent un rôle analogue à celui de la matrice $\underline{p} = \gamma^{\mu} p_{\mu}$ de la théorie de Dirac. En effet, il est aisé de montrer que pour deux quadri-vecteurs \underline{p} et \underline{q} quelconques, on a les identités :

$$(I-4) \quad p^{(+)}q^{(-)} + q^{(+)}p^{(-)} = p^{(-)}q^{(+)} + q^{(-)}p^{(+)} = 2p^{\mu}q_{\mu} = 2\underline{p} \cdot \underline{q}.$$

Avec nos conventions l'équation de Dirac s'écrit :

$$(I-5) \quad \left[i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m \right] \Psi(x) = 0.$$

Nous décomposons Ψ en deux spineurs à deux composantes en écrivant :

$$(I-6) \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \Omega(x) \\ \Psi(x) \end{pmatrix}$$

ce qui revient, d'après (I-1), à séparer Ψ en deux vecteurs propres de γ^5 c'est-à-dire en deux états de chiralité $+1$ et -1 respectivement. L'équation de Dirac se décompose alors en deux équations couplées :

$$(I-7) \quad i\sigma^{\mu(-)} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Psi(x) = m\Omega(x)$$

$$(I-8) \quad i\sigma^{\mu(+)} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Omega(x) = m\Psi(x)$$

qui sont compatibles si Ψ et Ω satisfont l'équation de Klein-Gordon.

Dans la théorie à deux composantes on choisit $\Psi(x)$ comme fonction d'onde. Ω apparaît alors simplement comme un spineur auxiliaire déduit de Ψ par (I-7). L'équation d'onde que doit satisfaire Ψ est simplement l'équation de Klein-Gordon [6] :

$$(I-9) \quad (\square + m^2)\Psi(x) = 0.$$

Ceci est légitime car il est aisé de montrer que le système des équations (I-7) et (I-9) est équivalent au système (I-7), (I-8).

Dans le formalisme de Brown, $\Psi(\underline{p})e^{-i\underline{p} \cdot \underline{x}}$ représente un état d'impulsion \underline{p} et de masse $\underline{p}^2 = m^2$ quel que soit $\Psi(\underline{p})$. Ceci est évidemment dû au fait que Ψ a autant de composantes qu'il existe d'états linéairement indépendants d'impulsion fixée.

Le spineur $\Omega(\underline{p})$ associé à $\Psi(\underline{p})$ s'écrit alors, d'après (I-7) :

$$(I-10) \quad \Omega(\underline{p}) = \frac{p^{(\sim)}}{m} \Psi(\underline{p}).$$

De la théorie de Dirac, il est facile de déduire que le produit hermitique s'écrit, dans l'espace des impulsions :

$$(I-11) \quad \langle 1 | 2 \rangle = \int_{p^0 \geq 0} \frac{d_3 \vec{p}}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \eta(p^0) \Omega_1^*(\underline{p}) \Psi_2(\underline{p})$$

où $\eta(p^0)$ est égal au signe de p^0 .

On obtient ainsi l'interprétation de $\Omega : \eta \Omega^*(\underline{p})$ est l'adjoint de $\Psi(\underline{p})$ dans le sous-espace des états d'impulsion \underline{p} . Ceci définit la métrique des états libres dans la théorie à deux composantes. L'équation (I-10) joue ici le même rôle que la relation :

$$\Psi^+ = \Psi^* \gamma^0$$

dans le formalisme de Dirac.

Enfin (I-11) devient, dans l'espace des positions :

$$\langle 1 | 2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Sigma} dS^\mu \left[\Omega_1^*(x) i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi_2(x) - \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Omega_1^*(x) \right) \Psi_2(x) \right]$$

ce qui, avec l'équation d'onde (I-9), rapproche cette théorie de celle des particules de spin zéro (Σ est une surface quelconque du genre espace).

II. — Invariance relativiste.

Pour développer le formalisme relativiste de la polarisation, il nous faut d'abord établir les lois de transformation de la fonction d'onde Ψ par les éléments du groupe de Lorentz L. Nous les déduirons de celles des spineurs Ψ de Dirac.

Il est commode d'associer à toute transformation Λ de L deux nombres μ_1 et μ_2 définis modulo 2 tels que [7] :

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = 0 & \text{si } \Lambda \in L^\uparrow \\ \mu_2 = 0 & \text{si } \Lambda \in L_+ \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mu_1 = 1 & \text{si } \Lambda \in L^\downarrow \\ \mu_2 = 1 & \text{si } \Lambda \in L_- \end{array}$$

et une matrice 2×2 $A(\Lambda)$ de déterminant unité définie au signe près en imposant la condition que pour tout quadrivecteur \underline{x} elle vérifie l'identité [8] :

$$(II-1) \quad (x')^{(+)} = (-1)^{\mu_1} A K^{\mu_1} x^{(+)} K^{\mu_1} A^*$$

où

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

et où K^{μ_1} est l'opérateur de conjugaison complexe appliqué μ_1 fois.

Revenons maintenant aux lois de transformation de Ψ . Il faut distinguer deux cas :

$$1^{\circ} \Lambda \in L_{\dagger}^{\uparrow} \text{ ou } \Lambda \in L_{\dagger}^{\downarrow}.$$

Les matrices de la représentation de Dirac commutent avec γ^5 . La chiralité est conservée. En partant de la représentation de Dirac et en passant à deux composantes à l'aide de (I-6), on montre facilement que le transformé Ψ' de Ψ s'écrit, dans l'espace des impulsions [9] :

$$II-2) \quad \Psi'(\underline{p}) = A(\Lambda) K^{\mu_1} \Psi((-1)^{\mu_1} \Lambda^{-1} \underline{p}).$$

$$2^{\circ} \Lambda \in L_{\dagger}^{\downarrow} \text{ ou } \Lambda \in L_{\dagger}^{\uparrow}.$$

Les matrices de Dirac anticommulent avec γ^5 . La chiralité est changée de signe. Ici on obtient, en passant à deux composantes :

$$\Omega'(\underline{p}) = \tau_2 \bar{A}(\Lambda) K^{\mu_1} \Psi((-1)^{\mu_1} \Lambda^{-1} \underline{p}).$$

On en déduit ensuite $\Psi'(\underline{p})$ en utilisant l'identité (I-10). Le résultat est immédiat :

$$(II-3) \quad \Psi'(\underline{p}) = \frac{p^{(+)}}{m} \tau_2 \bar{A}(\Lambda) K^{\mu_1} \Psi((-1)^{\mu_1} \Lambda^{-1} \underline{p}).$$

A une transformation de Lorentz Λ quelconque correspond maintenant un opérateur $u(\Lambda)$ tel que :

$$(u(\Lambda)\Psi)(\underline{p}) = \Psi'(\underline{p}).$$

D'après (II-2) et (II-3), il est défini, dans l'espace des impulsions, par une relation du type :

$$(u(\Lambda)\Psi)(\underline{p}) = Q(\underline{p}, \Lambda) K^{\mu_1} \Psi((-1)^{\mu_1} \Lambda^{-1} \underline{p})$$

où $Q(\underline{p}, \Lambda)$ est une matrice 2×2 .

On reconnaît dans cette égalité la forme générale des représentations

du groupe de Lorentz inhomogène [10]. A l'aide de la condition (II-1) on démontre de plus que l'identité :

$$Q(\underline{p}, \Lambda\Lambda') = \varepsilon(\Lambda, \Lambda')Q(\underline{p}, \Lambda)K^{\mu_1}Q((-1)^{\mu_1}\Lambda^{-1}\underline{p}, \Lambda')K^{\mu_1}$$

est valable quels que soient Λ et Λ' , μ_1 étant associé à Λ comme indiqué plus haut et ε étant égal à ± 1 .

Ceci entraîne pour les opérateurs u la relation :

$$u(\Lambda\Lambda') = \varepsilon(\Lambda, \Lambda')u(\Lambda)u(\Lambda')$$

qui montre que (II-2) et (II-3) définissent une représentation à une phase près du groupe de Lorentz inhomogène.

La matrice $Q(\underline{p}, \Lambda)$ correspond au spin de la particule. Contrairement à ce qui a lieu dans le formalisme de Dirac, elle dépend explicitement de l'impulsion pour certaines transformations de Lorentz.

Cela est indispensable si l'on veut définir une représentation de spin 1/2 à deux composantes. Malgré tout il ne s'introduit, comme nous le verrons, aucune difficulté particulière dans l'étude des phénomènes de polarisation.

Les équations (I-10) et (II-1) montrent enfin que les lois de transformation de Ω peuvent se mettre sous la forme :

$$\Omega'(\underline{p}) = Q(\underline{p}, \Lambda)^{* -1}K^{\mu_1}\Omega((-1)^{\mu_1}\Lambda^{-1}\underline{p}).$$

D'où l'on déduit que, comme on pouvait s'y attendre, u est unitaire si $\Lambda \in L^\uparrow$ et antiunitaire si $\Lambda \in L^\downarrow$ selon la métrique définie par l'égalité (I-11).

A titre d'exemple, nous calculons en appendice les opérateurs $Q(\underline{p}, \Lambda)$ correspondant aux différentes symétries usuelles. Le résultat s'écrit :

Symétrie d'espace :

$$(II-4) \quad Q(\underline{p}, \Lambda_s) = i \frac{p^{(+)}}{m}$$

Renversement du temps :

$$(II-5) \quad Q(\underline{p}, \Lambda_t) = i\tau_2$$

Symétrie par rapport au plan perpendiculaire au vecteur \underline{n} :

$$(II-6) \quad Q(\underline{p}, \Sigma_{\underline{n}}) = -\frac{p^{(+)}}{m} n^{(-)} \quad \text{si } \underline{n}^2 = -1$$

$$(II-7) \quad Q(\underline{p}, \Sigma_{\underline{n}}) = i n^{(+)} \tau_2 \quad \text{si } \underline{n}^2 = +1.$$

III. — Formalisme de la polarisation.

Nous le construirons à l'aide de la théorie générale du spin [11] en utilisant la représentation du groupe de Lorentz définie par (II-2) et (II-3).

Pour cela, il nous faut d'abord introduire les six générateurs infinitésimaux $M_{\mu\nu}$ de transformation du spin. Ils sont définis par la condition que, à une transformation de Lorentz infinitésimale quelconque de la forme :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \alpha^\mu{}_\nu,$$

correspondre une matrice $Q(\underline{p}, \Lambda)$ donnée par :

$$Q(\underline{p}, \Lambda) = 1 - \frac{i}{2} \alpha^{\mu\nu} M_{\mu\nu}.$$

On déduit aisément de la théorie de Dirac l'expression des $M_{\mu\nu}$:

$$(III-1) \quad M_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\sigma_\mu^{(+)} \sigma_\nu^{(-)} - \sigma_\nu^{(+)} \sigma_\mu^{(-)}).$$

Soit maintenant $\mathcal{H}(\underline{p})$ le sous-espace des états libres d'impulsion \underline{p} . Il est à deux dimensions. Ces deux dimensions correspondent aux degrés de liberté interne de la particule c'est-à-dire à son spin. Nous allons donc étudier $\mathcal{H}(\underline{p})$ pour \underline{p} fixé.

Si \underline{n} est un quadrivecteur du genre espace tel que :

$$\underline{n} \cdot \underline{p} = 0 \quad \underline{n}^2 = -1$$

on dira que $\Psi(\underline{p})$ est un état dont le spin est parallèle à \underline{n} s'il est inchangé dans toutes les transformations de Lorentz de L_\perp^\dagger qui laissent \underline{p} et \underline{n} invariants.

Dans $\mathcal{H}(\underline{p})$ nous définissons un opérateur vectoriel $W^\lambda(\underline{p})$ par la relation :

$$W^\lambda(\underline{p}) = \frac{1}{2} \delta^{\lambda\mu\nu\rho} p_\mu M_{\nu\rho}.$$

On montre que dans $\mathcal{H}(\underline{p})$, $W^\lambda(\underline{p}) n_\lambda$ est l'opérateur infinitésimal des transformations de L_\perp^\dagger qui laissent \underline{n} et \underline{p} invariants.

Un état de $\mathcal{H}(\underline{p})$ dont le spin est parallèle à \underline{n} est donc un vecteur propre de cet opérateur.

On obtient facilement l'expression de $W^\lambda(\underline{p}) n_\lambda$ à partir de (III-1) et (I-4) en se rappelant que $\underline{n} \cdot \underline{p} = 0$:

$$(III-2) \quad W^\lambda(\underline{p}) n_\lambda = \frac{1}{2} n^{(+)} p^{(-)}$$

d'où l'on déduit :

$$W^\lambda(\underline{p})W_\lambda(\underline{p}) = -\frac{3}{4}m^2$$

et

$$[W^\lambda(\underline{p})n_\lambda]^2 = \frac{m^2}{4}.$$

On retrouve bien ainsi, pour le cas du spin 1/2, les relations déjà établies pour un spin quelconque (11). En particulier, la deuxième relation montre que l'opérateur :

$$\frac{1}{m} W^\lambda(\underline{p})n_\lambda = \frac{1}{2} n^{(+)} \frac{p^{(-)}}{m}$$

a pour valeurs propres $\pm 1/2$. Il donne donc la projection du spin sur \underline{n} .

Le sous-espace $\mathcal{H}(\underline{p})$ est muni d'une métrique $\mathcal{M}(\underline{p})$ dépendant de \underline{p} définie par (I-10). D'autre part, on déduit de la relation (I-4) que :

$$(III-3) \quad W^\lambda(\underline{p})^* = \frac{p^{(+)}}{m} W^\lambda(\underline{p}) \frac{p^{(-)}}{m}.$$

Par conséquent $W^\lambda(\underline{p})$ est hermitique selon la métrique $\mathcal{M}(\underline{p})$. Deux états de spins opposés sont donc orthogonaux selon cette métrique.

Introduisons l'opérateur :

$$\mathfrak{F}(\underline{p}, \underline{n}) = \frac{1}{2} \left(1 + n^{(+)} \frac{p^{(-)}}{m} \right)$$

c'est un projecteur car $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}$. On a, de plus :

$$\text{Tr}(\mathfrak{F}) = 1.$$

\mathfrak{F} est donc un projecteur de rang un. Il projette donc sur un seul état de $\mathcal{H}(\underline{p})$ qui est celui dont le spin est dirigé suivant \underline{n} . Cet état que nous noterons $\Psi(\underline{p}, \underline{n})$ est défini à une phase près par la condition :

$$(III-4) \quad \frac{1}{2} \left(1 + n^{(+)} \frac{p^{(-)}}{m} \right) \Psi(\underline{p}, \underline{n}) = \Psi(\underline{p}, \underline{n}).$$

Si $\Omega(\underline{p}, \underline{n})$ est le spineur associé à $\Psi(\underline{p}, \underline{n})$ par (I-10), on déduit de (III-4) une autre expression de $\mathfrak{F}(\underline{p}, \underline{n})$:

$$\mathfrak{F}(\underline{p}, \underline{n})^{\alpha\beta} = \Psi^\alpha(\underline{p}, \underline{n}) \bar{\Omega}^\beta(\underline{p}, \underline{n}) [\Omega^*(\underline{p}, \underline{n}) \Psi(\underline{p}, \underline{n})]^{-1}.$$

Nous normaliserons $\Psi(\underline{p}, \underline{n})$ en posant :

$$\Omega^*(\underline{p}, \underline{n}) \Psi(\underline{p}, \underline{n}) = \eta(p^0).$$

On peut donc écrire finalement [12] :

$$(III-5) \quad \Psi(\underline{p}, \underline{n}) \otimes \Omega^*(\underline{p}, \underline{n}) = \frac{\eta(p^0)}{2} \left(1 + n^{(+)} \frac{p^{(-)}}{m} \right)$$

d'où l'on déduit :

$$(III-6) \quad \sum_{\varepsilon = \pm 1} \Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n}) \otimes \Omega^*(\underline{p}, \varepsilon \underline{n}) = \eta(p^0).$$

Pour terminer, il est facile de montrer à partir de (I-4) et (III-5) que, quel que soit \underline{n} perpendiculaire à \underline{p} , on a la relation :

$$\underline{n} = -\frac{2}{m} \eta(p^0) \Omega^*(\underline{p}, \underline{n}) \underline{W} \Psi(\underline{p}, \underline{n}).$$

La polarisation d'un état est donc donnée par la valeur moyenne de l'opérateur $-\frac{2}{m} \underline{W}$ calculée avec la métrique $\mathcal{M}(\underline{p})$.

Suivant une méthode déjà proposée par L. Michel et C. Bouchiat [13], pour le formalisme de Dirac, nous introduisons maintenant des matrices 2×2 de la forme $(\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1)$:

$$\Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n}) \otimes \Omega^*(\underline{p}', \varepsilon' \underline{n}')$$

qui généralisent le projecteur donné par (III-5).

Ces matrices ne sont physiquement définies qu'à une phase près : la phase relative des spineurs $\Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n})$ et $\Psi(\underline{p}', \varepsilon' \underline{n}')$. Nous allons fixer cette phase comme en [13] de façon à rendre la matrice $\Psi \otimes \Omega^*$ aussi simple que possible en déduisant $\Psi(\underline{p}', \varepsilon' \underline{n}')$ de $\Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n})$ par une transformation de Lorentz [14].

Tout d'abord, dans $\mathcal{K}(\underline{p})$, on obtient la formule :

$$(III-7) \quad \Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n}) \otimes \Omega^*(\underline{p}, \varepsilon' \underline{n}') = \frac{\eta(p^0)}{2} \left(\frac{p^{(+)}}{m} \delta_{\varepsilon' \varepsilon} + \sum_i (\tau_i)_{\varepsilon' \varepsilon} n_i^{(+)} \right) \frac{p^{(-)}}{m}$$

en choisissant trois vecteurs \underline{n}_i tels que :

$$\underline{n}_i \cdot \underline{n}_j = -\delta_{ij}, \quad \underline{n}_3 = \underline{n}, \quad \underline{n}_i \cdot \underline{p} = 0, \quad (\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = 1$$

et en passant de $\Psi(\underline{p}, \underline{n})$ à $\Psi(\underline{p}, -\underline{n})$ par une symétrie par rapport au plan perpendiculaire à \underline{n}_1 , c'est-à-dire en posant d'après (II-7) :

$$\Psi(\underline{p}, -\underline{n}) = n_1^{(+)} \frac{p^{(-)}}{m} \Psi(\underline{p}, \underline{n}).$$

La formule (III-7) est valable quels que soient $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$. Cela se démontre de la même façon que la formule analogue de la théorie de Dirac [13]. En particulier, on utilise les identités :

$$(\tau_3)_{\varepsilon'\varepsilon} = \varepsilon\delta_{\varepsilon'\varepsilon} \quad (\tau_2)_{\varepsilon'\varepsilon} = -i\varepsilon'(1 - \delta_{\varepsilon'\varepsilon}) \quad (\tau_1)_{\varepsilon'\varepsilon} = (1 - \delta_{\varepsilon'\varepsilon}).$$

Pour traiter le cas général nous supposons d'abord que p^0 et p'^0 sont positifs. Plusieurs choix de phase sont intéressants en pratique.

1° On peut déduire $\Psi(\underline{p}', \varepsilon n')$ de $\Psi(\underline{p}, \varepsilon n)$ par la transformation de Lorentz $\Lambda(\underline{p}' \leftarrow \underline{p})$ de L_{\uparrow} qui fait passer de \underline{p} à \underline{p}' tout en laissant invariant le plan de ces deux vecteurs. Avec les notations de la formule (II-7), on a :

$$\Lambda(\underline{p}' \leftarrow \underline{p}) = \Sigma_{\underline{p}+\underline{p}'} \cdot \Sigma_{\underline{p}}.$$

On posera donc, d'après (II-7) :

$$\Psi(\underline{p}', \varepsilon n') = \left(\frac{p'^{(+)} + p^{(+)}}{\sqrt{2m + 2\underline{p} \cdot \underline{p}'}} \right) \frac{p^{(-)}}{m} \Psi(\underline{p}, \varepsilon n).$$

Cette relation combinée aux équations (III-7) et (I-10) donne :

$$(III-8) \quad \Psi(\underline{p}, \varepsilon n) \otimes \Omega^*(\underline{p}', \varepsilon' n') = \frac{1}{2} \left(\frac{p^{(+)}}{m} \delta_{\varepsilon'\varepsilon} + \sum_i (\tau_i)_{\varepsilon'\varepsilon} n_i^{(+)} \right) \frac{p^{(-)} + p'^{(-)}}{\sqrt{2m + 2\underline{p} \cdot \underline{p}'}}.$$

Il faut bien remarquer que, étant donné les lois de transformation du spin, on a nécessairement avec ce choix de phase :

$$\underline{n}' = \Lambda(\underline{p}' \leftarrow \underline{p}) \underline{n}.$$

2° On peut, au contraire, déduire $\Psi(\underline{p}, \varepsilon n)$ et $\Psi(\underline{p}', \varepsilon n')$ d'un troisième spineur $\Psi(\underline{q}, \varepsilon r)$ respectivement par $\Lambda(\underline{p} \leftarrow \underline{q})$ et $\Lambda(\underline{p}' \leftarrow \underline{q})$. On écrira alors :

$$\Psi(\underline{p}, \varepsilon n) = \left(\frac{p^{(+)} + q^{(+)}}{\sqrt{2m + 2\underline{p} \cdot \underline{q}}} \right) \frac{q^{(-)}}{m} \Psi(\underline{q}, \varepsilon r)$$

$$\Psi(\underline{p}', \varepsilon n') = \left(\frac{p'^{(+)} + q^{(+)}}{\sqrt{2m + 2\underline{p}' \cdot \underline{q}}} \right) \frac{q^{(-)}}{m} \Psi(\underline{q}, \varepsilon r)$$

et on obtiendra :

$$(III-9) \quad \Psi(\underline{p}, \varepsilon n) \otimes \Omega^*(\underline{p}', \varepsilon' n') = \frac{1}{2} \left(\frac{p^{(+)}}{m} \delta_{\varepsilon'\varepsilon} + \sum_i (\tau_i)_{\varepsilon'\varepsilon} n_i^{(+)} \right) \left(\frac{p^{(-)} + q^{(-)}}{\sqrt{2m + 2\underline{p} \cdot \underline{q}}} \right) \left(\frac{q^{(+)}}{m} \right) \left(\frac{p'^{(-)} + q^{(-)}}{\sqrt{2m + 2\underline{p}' \cdot \underline{q}}} \right).$$

Les polarisations \underline{n} et \underline{n}' étant maintenant déduites de \underline{r} par :

$$\underline{n} = \Lambda(\underline{p} \leftarrow \underline{q})\underline{r} \quad \underline{n}' = \Lambda(\underline{p}' \leftarrow \underline{q})\underline{r}.$$

Le cas où les signes des énergies sont quelconques se traite en remarquant que $\Psi(\underline{p}, \underline{\varepsilon n})$ et $\Psi(-\underline{p}, -\underline{\varepsilon n})$ sont proportionnels d'après la condition (III-4).

On posera :

$$\Psi(\underline{p}, \underline{\varepsilon n}) = \Psi(-\underline{p}, -\underline{\varepsilon n})$$

ce qui permet de généraliser facilement les égalités (III-7-8-9).

En conclusion de ce chapitre, nous avons montré que le formalisme de la polarisation relativiste se construit de façon tout à fait naturelle et cohérente à partir de la représentation du groupe de Lorentz que nous avons définie au chapitre II.

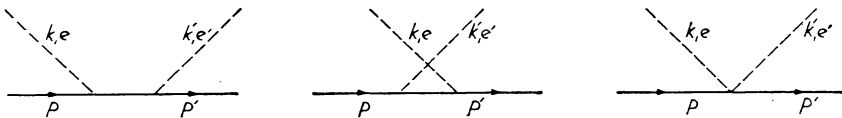
IV. — L'effet Compton au second ordre

Brown [4] et Tonin [5] ont étudié la quantification du champ libre; ils ont également formulé les règles de calcul des diagrammes de Feynman en électrodynamique quantique.

Ce chapitre est consacré à l'étude des effets de polarisation dans la diffusion Compton sur les électrons au second ordre. Les calculs ont déjà été effectués depuis plusieurs années à l'aide du formalisme de Dirac; nous n'obtiendrons donc aucun résultat nouveau. Nous avons voulu simplement montrer sur un exemple comment on peut utiliser pratiquement les formules du chapitre précédent.

Soient \underline{p} et \underline{p}' les impulsions de l'électron initial et de l'électron final. Nous appellerons $\underline{k}, \underline{e}$ l'impulsion et la polarisation du photon initial; et $\underline{k}', \underline{e}'$ l'impulsion et la polarisation du photon final.

Au second ordre, il y a trois diagrammes :



Le troisième diagramme correspond à une interaction à deux photons qui s'introduit parce que le couplage devient dérivatif dans la théorie à deux composantes. En effet, on a le même type de diagramme dans l'électrodynamique des particules de spin zéro.

Nous ferons les calculs dans la jauge, où :

$$\underline{e} \cdot \underline{p} = 0, \quad \underline{e}' \cdot \underline{p} = 0.$$

D'après (5) l'élément de matrice S correspondant aux trois diagrammes précédents s'écrit, après simplification :

$$S = -i \frac{e^2}{4\pi} \delta_4(\underline{p} + \underline{k} - \underline{p}' - \underline{k}') \frac{1}{(8p^0 k^0 p'^0 k'^0)^{1/2}} \Omega^* M \Psi$$

où

$$(IV-1) \quad M = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{1}{k^0} a^{(+)} e^{(-)} e'^{(+)} k^{(-)} + \frac{1}{k^0} a^{(+)} e'^{(-)} e^{(+)} k^{(-)} - 2(\underline{e} \cdot \underline{e}') \right\}.$$

Pour simplifier nous avons introduit un vecteur $\underline{a} = \underline{k}' - \underline{k}$. Les énergies sont calculées dans le système du laboratoire.

Pour étudier les effets de polarisation des électrons il est intéressant de calculer d'abord l'élément de matrice $\Omega^* M \Psi$ avant de prendre le carré de son module. En effet, si on calcule ($\varepsilon = \pm 1, \varepsilon' = \pm 1$) :

$$M_{\varepsilon'\varepsilon} = \Omega^*(\underline{p}', \varepsilon' \underline{n}') M \Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n})$$

on aura rapporté $\mathcal{H}(\underline{p})$ et $\mathcal{H}(\underline{p}')$ respectivement aux bases formées par les spineurs $\Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n})$ et $\bar{\Psi}(\underline{p}', \varepsilon' \underline{n}')$. Il est facile de voir que le formalisme de polarisation des électrons devient identique au formalisme non relativiste. Par exemple dans $\mathcal{H}(\underline{p})$ l'opérateur de projection du spin sur \underline{r} s'écrira, dans la nouvelle base ($\underline{r} \cdot \underline{p} = 0$) :

$$(IV-2) \quad \Omega^*(\underline{p}, \varepsilon \underline{n}) \frac{1}{2} r^{(+)} \frac{p^{(-)}}{m} \Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n}) = \frac{1}{2} \sum_i (\underline{r} \cdot \underline{n}_i) (\tau_i)_{\varepsilon'\varepsilon}.$$

Nous calculerons $M_{\varepsilon'\varepsilon}$ à l'aide de (III-8). En effet, on peut écrire :

$$M_{\varepsilon'\varepsilon} = \text{Tr} [M \Psi(\underline{p}, \varepsilon \underline{n}) \otimes \Omega^*(\underline{p}', \varepsilon' \underline{n}')].$$

La détermination de $M_{\varepsilon'\varepsilon}$ se ramène donc à des calculs de traces du type :

$$\text{Tr} [v_1^{(+)} v_2^{(-)} \dots v_{2p-1}^{(+)} v_{2p}^{(-)}].$$

Il est facile d'évaluer ce type de trace en utilisant les formules qui ont été déjà démontrées dans le formalisme de Dirac. Pour cela, on déduit de la formule (I-1) l'identité ($v_i = \gamma^\mu (v_i)_\mu$):

$$(IV-3) \quad \text{Tr} [v_1^{(+)} v_2^{(-)} \dots v_{2p-1}^{(+)} v_{2p}^{(-)}] = \frac{1}{2} \text{Tr} [(1 + i\gamma^5) v_1 v_2 \dots v_{2p-1} v_{2p}].$$

Il est important de remarquer que le second membre de cette équation est nécessairement la somme d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire. Le terme

pseudo-scalaire doit s'annuler en électrodynamique comme dans toute la théorie où la parité est conservée. Dans (IV-3), il n'y a donc en réalité qu'une seule trace à évaluer. Ainsi, dans le cas de $M_{\varepsilon'\varepsilon}$, le coefficient de $\delta_{\varepsilon'\varepsilon}$ se calcule en ne gardant que le premier terme de (IV-3); tandis que pour le coefficient de $(\tau_i)_{\varepsilon'\varepsilon}$ seul le second terme ne donne pas zéro.

Tous calculs faits, on obtient, dans le système du laboratoire :

$$M(\vec{e}', \vec{e}) = \alpha - i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{K} \left\{ \frac{(\widehat{k}' \cdot \vec{e})(\widehat{k} \cdot \vec{e}')}{m} (k^0 - k'^0) + (\vec{e} \cdot \vec{e}') \frac{(k^0 + k'^0)^2}{k^0 k'^0} \right\}$$

$$\vec{\beta} = \frac{1}{mK} \left\{ \vec{p}' [(\vec{e}' \times \vec{e} \cdot \widehat{k}) + (\vec{e} \times \vec{e}' \cdot \widehat{k}')] + (\vec{e}' \cdot \widehat{k}) \vec{e} \times \vec{p}' \right.$$

$$\left. + (\vec{e} \cdot \widehat{k}') \vec{e}' \times \vec{p} + (\vec{e} \cdot \vec{e}') (k^0 + k'^0) \widehat{k} \times \widehat{k}' \right\}$$

$$K = 2 \left\{ 1 + \frac{k^0 - k'^0}{2m} \right\}^{1/2}, \quad \widehat{k} = \frac{\vec{k}}{k^0}, \quad \widehat{k}' = \frac{\vec{k}'}{k'^0}.$$

Pour étudier les polarisations des photons, on introduit deux bases de polarisations rectilignes :

a) Pour le photon initial,

$$\vec{e}_1 = \frac{\widehat{k} \times \widehat{k}'}{|\widehat{k} \times \widehat{k}'|}, \quad \vec{e}_2 = \widehat{k} \times \vec{e}_1.$$

b) Pour le photon final

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \widehat{k}' \times \vec{e}'_1.$$

De la formule générale (IV-4), on déduit que :

$$(IV-5) \quad \begin{cases} M(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) = \frac{1}{K} \left\{ \frac{(k^0 + k'^0)^2}{k^0 k'^0} - i \left(\frac{k^0 + k'^0}{m} \right) \vec{\tau} \cdot \widehat{k} \times \widehat{k}' \right\} \\ M(\vec{e}'_1, \vec{e}_2) = -i \left(\frac{k^0 - k'^0}{mK} \right) \vec{\tau} \cdot \left[\widehat{k} - \widehat{k}' \left(1 + \frac{2m}{k^0} \right) \right] \\ M(\vec{e}'_2, \vec{e}_1) = -i \left(\frac{k^0 - k'^0}{mK} \right) \vec{\tau} \cdot \left[\widehat{k}' - \widehat{k} \left(1 - \frac{2m}{k'^0} \right) \right] \\ M(\vec{e}'_2, \vec{e}_2) = -Km \left(\frac{k^0 - k'^0}{k^0 k'^0} \right) + M(\vec{e}'_1, \vec{e}_1). \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que ces formules sont les mêmes que celle que l'on trouve en théorie de Dirac [15].

Un état pur quelconque du photon incident a une fonction d'onde de la forme :

$$\vec{e} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2.$$

Il est classique de poser, pour sa matrice densité [16] :

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 a_1^* & a_1 a_2^* \\ a_2 a_1^* & a_2 a_2^* \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} (1 + \vec{\chi} \cdot \vec{\omega})$$

où $\vec{\omega}$ représente les matrices de Pauli :

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

et où $\vec{\chi}$ est le vecteur de polarisation du photon.

Pour étudier les effets de polarisation des photons, on introduit une matrice M_{ij} qui agit dans l'espace de polarisation des photons en posant :

$$M_{ij} = M(\vec{e}'_i, \vec{e}_j).$$

Cette matrice se déduit facilement de (IV-5) :

$$(IV-6) \left\{ \begin{aligned} M &= \frac{2}{K} (\cos \Phi + 1) - i \left(\frac{k^0 + k'^0}{mK} \right) (\hat{k} \times \hat{k}') \cdot \vec{\tau} \\ &+ \frac{K}{2} (1 - \cos \Phi) \omega_1 - \frac{i}{mK} (1 - \cos \Phi) (\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{\tau} \otimes \omega_2 \\ &+ \frac{1}{mK} [\hat{k}'(k^0 - k'^0 \cos \Phi) - \hat{k}(k^0 \cos \Phi - k'^0)] \cdot \vec{\tau} \otimes \omega_3 \end{aligned} \right.$$

Φ est ici l'angle de diffusion du photon dans le laboratoire.

L'état initial sera représenté par une matrice densité de la forme :

$$\rho_i = \frac{1}{4} (1 + \vec{\zeta} \cdot \vec{\tau})(1 + \vec{\chi} \cdot \vec{\omega})$$

$\vec{\zeta}$ étant le vecteur de polarisation de l'électron auquel est associé, d'après ce qui a été dit plus haut un quadrivecteur polarisation :

$$\underline{r} = \sum_i \zeta_i \underline{n}_i.$$

A l'aide de (IV-6), on ramène donc finalement l'étude des effets de polarisation à un calcul de traces de produits de matrices de Pauli. Nous ne donnons pas ici les résultats obtenus car ils sont connus depuis plusieurs années [16].

Une autre méthode consiste à calculer directement $|\Omega_1^* M \Psi_2|^2$. Brown [4] a montré que, en électrodynamique quantique, on peut écrire :

$$|\Omega_1^* M \Psi_2|^2 = \Omega_1^* M \Psi_2 \Omega_2^* M^c \Psi_1$$

où M^c est déduit de M en renversant l'ordre des matrices $\sigma^{(\pm)}$ et en échangeant les (+) et les (-) dans l'expression obtenue. On constate alors que l'on peut, de la même façon que, en théorie à quatre composantes, remplacer le calcul de $|\Omega^* M \Psi|^2$ par un calcul de trace à l'aide du projecteur (III-5).

Il apparaît donc que les sections efficaces de diffusion entre états polarisés se calculent en théorie à deux composantes avec les mêmes méthodes que dans la théorie de Dirac. Dans les deux cas, on se ramène à des traces de produits de matrices de Dirac. En fait, les calculs sont plus simples en théorie à deux composantes car il ne s'introduit pas de projecteurs d'énergie puisque les états d'énergies positives et négatives sont automatiquement séparés.

CONCLUSION

Nous avons montré, finalement, que l'on peut décrire de façon entièrement covariante une particule libre de spin 1/2 par une fonction d'onde à deux composantes.

Ceci conduit à introduire systématiquement des opérateurs dérivatifs :

- dans les lois de transformations de la fonction d'onde,
- dans la métrique de l'espace des états,
- dans les couplages.

Cependant, on obtient ainsi un formalisme dans lequel les états d'énergies positives et négatives sont automatiquement séparés et où, par conséquent, il est plus commode de calculer les sections efficaces que dans le formalisme usuel.

C'est pourquoi nous pensons que la théorie de Brown est intéressante, bien qu'elle ne puisse pas donner de résultats physiques nouveaux puisqu'elle est équivalente à celle de Dirac.

C'est avec grand plaisir que je remercie ici M. le Professeur Louis Michel qui m'a donné l'idée de ce travail et m'a constamment guidé de ses conseils pendant sa réalisation.

APPENDICE

REPRÉSENTATION DES SYMÉTRIES

Nous étudierons d'abord $Q(\underline{p}, \Sigma_{\underline{n}})$. Le symétrique \underline{x}' de \underline{x} par rapport au plan perpendiculaire à un quadrivecteur \underline{n} donné s'écrit ($n^2 \neq 0$) :

$$\underline{x}' = \underline{x} - \frac{(n \cdot x)}{n^2} \underline{n}.$$

Si on calcule $x'^{(+)}$ à l'aide de cette relation, on déduit de (I-4) que :

(A-1)
$$x'^{(+)} = - (n^{(+)} x^{(-)} n^{(+)}) \frac{1}{n^2}.$$

Avant d'aller plus loin, il faut distinguer deux cas :

1° $n^2 = +1$, d'où $\Sigma_{\underline{n}} \in L_{\downarrow}$.

On écrit (A-1) sous la forme :

$$x'^{(+)} = - (in^{(+)}\tau_2)\bar{x}^{(+)}(in^{(+)}\tau_2)^*.$$

Compte tenu de (II-1) et (II-2) on en déduit (ici $\mu_1 = \mu_2 = 1$) :

$$A(\Sigma_{\underline{n}}) = Q(\underline{p}, \Sigma_{\underline{n}}) = in^{(+)}\tau_2.$$

2° $n^2 = -1$, d'où $\Sigma_{\underline{n}} \in L_{\uparrow}$.

(A-1) peut alors s'écrire :

$$x'^{(+)} = (n^{(+)}\tau_2)\bar{x}^{(+)}(n^{(+)}\tau_2)^*$$

et on déduit de (II-1) que (ici $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$) :

$$A(\Sigma_{\underline{n}}) = n^{(+)}\tau_2$$

ce qui donne finalement, d'après (II-3)

$$Q(\underline{p}, \Sigma_{\underline{n}}) = - \frac{p^{(+)}}{m} n^{(-)}.$$

Le renversement du temps s'obtient en considérant $\Sigma_{\underline{n}}$ avec $\underline{n} = (1, \vec{0})$. D'autre part la symétrie d'espace est égale aux produits des symétries par rapport aux trois plans perpendiculaires aux trois axes d'espace. On obtient ainsi, aisément (II-4) et (II-5).

NOTES ET RÉFÉRENCES

- [1] WEYL, *H. Z. Phys.*, t. 56, 1929, p. 330.
- [2] SERPE, Sur la théorie abrégée des particules de spin 1/2, *Physica*, t. XVIII, n° 5, p. 295.
- [3] R. P. FEYNMAN et M. GELL-MANN, *Phys. Rev.*, t. 109, 1958, p. 193.
- [4] L. M. BROWN, Two-component fermion theory, *Phys. Rev.*, t. 111, 1958, p. 957.
- [5] M. TONIN, Quantization of the two-component fermion theory, *Nuo. Cim.*, t. 14, 1959, p. 1108.
- [6] Il est bien clair que Ψ et Ω jouent au départ des rôles symétriques. On pourrait aussi bien choisir Ω comme fonction d'onde et déduire Ψ de Ω par (I-8). Cela conduirait à une théorie tout à fait semblable à celle que nous étudions dans cet article.
- [7] Nous employons les notations classiques :
- $L^\dagger(L)$ représente l'ensemble des transformations de Lorentz qui conservent (changent) le sens du temps.
- $L_+(L_-)$ représente l'ensemble des transformations de Lorentz qui ont un déterminant égal à $+1$ (-1).
- $a \in A$ signifie que a est un élément de l'ensemble A .
- [8] La condition (II-1) permet de définir les éléments des groupes de recouvrement du groupe de Lorentz (voir, par exemple, A. S. WIGHTMAN, Cours de l'École d'été de Physique théorique des Houches : Relations de Dispersion Hermann).
- [9] Pour alléger l'écriture, nous omettons les translations. Il est bien connu qu'elles sont associées à l'opérateur de multiplication par $e^{-ip \cdot a}$.
- [10] Voir, par exemple, l'article indiqué en [8].
- [11] Voir, entre autres, L. MICHEL, *Nuo. Cim. Sup.*, t. 14, p. 95 et la référence [8].
- [12] En général nous désignerons par $\Psi \otimes \Omega^*$ une matrice 2×2 d'éléments :

$$(\Psi \otimes \Omega^*)_{\alpha\beta} = \Psi^\alpha \bar{\Omega}_\beta.$$

- [13] C. BOUCHIAT et L. MICHEL, *Nuc. Phys.*, t. 5, 1958, p. 416.
- L. MICHEL, référence [11] et des notes de cours publiées par le Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique.
- [14] Nous supposons pour simplifier la démonstration que les masses des deux états $\Psi(\underline{p}, \underline{\varepsilon n})$ et $\Psi(\underline{p}', \underline{\varepsilon' n'})$ sont égales. Il est facile d'écrire des formules générales en remarquant que la condition (III-4) ne dépend que de \underline{p}/m . On pourra donc poser :

$$\Psi(\underline{p}, \underline{\varepsilon n}) = \Psi(\underline{q}, \underline{\varepsilon n})$$

lorsque les quadrivecteurs \underline{p} et \underline{q} seront proportionnels.

- [15] Ces formules sont indiquées, en particulier, par R. P. FEYNMAN, *Quantum Electro-dynamics*, Benjamin, p. 99.
- [16] F. W. LIPPS et H. A. TOLHOEK, *Physica*, t. XX, 1954, p. 85 et 395.