

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD DIU

## **Remarques sur la distinction entre particules élémentaires et particules composées**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 1, n° 2 (1964), p. 147-232

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1964\\_\\_1\\_2\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_2_147_0)

© Gauthier-Villars, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Remarques sur la distinction entre particules élémentaires et particules composées

par

**Bernard DIU**

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies,  
Faculté des Sciences, Orsay (S.-et-O.).

---

**SOMMAIRE.** — Le but de ce travail est d'étudier certains des problèmes posés par la définition même des particules élémentaires et des particules composées et d'examiner dans cette perspective les deux principales directions dans lesquelles se développe actuellement la recherche en Physique Théorique des Hautes Énergies. Le chapitre premier énonce et discute une définition générale possible de la notion de particule élémentaire et met en évidence certaines des difficultés auxquelles peut se heurter son application en étudiant de ce point de vue le modèle de Lee. Le chapitre II est consacré aux tentatives visant à dégager une symétrie des interactions fortes plus large que celle de l'isospin, car une telle découverte aurait des conséquences importantes sur le problème qui est étudié ici; à partir d'hypothèses plausibles quoique encore mal comprises, il est possible de démontrer, pour les trois groupes de Lie simples de rang 2, des relations de masses entre les différentes particules classées dans un même supermultiplet; ces relations de masses permettent alors d'écarter  $C_2$  et  $G_2$  et de ne conserver que  $SU_3$  comme groupe de symétrie approchée possible des interactions fortes. Le sujet du chapitre III est la théorie dite du « bootstrap »; cette théorie considère qu'il n'existe pas de particules élémentaires, mais seulement des particules composées; une des méthodes pratiques de calcul qui ont été proposées pour mettre en œuvre le « bootstrap » est appliquée aux amplitudes de diffusion mésoniques  $\pi + \pi$ ,  $\pi + K$  et  $K + K$ ; les résultats sont quantitativement peu satisfaisants, mais les prédictions qualitatives semblent pour le moment correctes.

**ABSTRACT.** — The purpose of this work is to study some of the problems related to the very definition of elementary and composite particles and in this respect examine the two main directions in which Theoretical High Energy Physics research is being developed. Chapter I states and discusses a possible general definition of an elementary particle and underlines some of the difficulties that may arise while applying it, by studying the Lee model from this point of view. Chapter II is concerned with the attempts to bring out a symmetry of strong interactions wider than that of isospin, because such a discovery would have important implications upon the problem which is being studied here; starting from plausible though yet badly understood hypotheses, it is possible, for the three simple Lie groups of rank 2, to prove mass relations between the different particles entering the same supermultiplet; these mass relations are then sufficient to discard  $C_2$  and  $G_2$  and keep only  $SU_3$  as a possible approximate symmetry group for strong interactions. Chapter III deals with the so-called « bootstrap » theory; this theory states that there exist no elementary particles, but only composite ones; one of the practical methods of calculation which have been proposed to work out « bootstrap » is applied to the mesonic scattering amplitudes  $\pi + \pi$ ,  $\pi + K$  and  $K + K$ ; the results are quantitatively poor, but the qualitative predictions seem up to now correct.

---

## INTRODUCTION

Les récents développements de la Physique expérimentale de haute énergie ont considérablement aggravé la situation déjà confuse qui régnait il y a quelques années : de nouvelles particules ont été découvertes et tout porte à croire que la liste n'en est pas encore close.

Corrélativement, une question se pose, de plus en plus aiguë : est-il possible de considérer, d'une manière ou d'une autre, certaines de ces particules comme plus fondamentales que les autres ? Plus précisément, il s'agit de savoir si l'on peut trouver un critère permettant de définir sans ambiguïté le sens des qualificatifs « élémentaire » et « composé » et de réserver le premier pour un petit nombre seulement des particules connues.

Bien entendu, cette question primordiale ne peut pas être étudiée isolément. Elle est intimement liée à l'ensemble des problèmes théoriques posés par la Physique des Hautes Énergies et ne pourra trouver de réponse satisfaisante que dans le cadre d'une théorie satisfaisante des interactions entre

particules. Comme une telle théorie n'existe pas pour le moment, chaque tentative faite pour la construire implique un point de vue bien déterminé sur la question des particules élémentaires.

Le but de ce travail est d'examiner sous cet angle deux des principales directions de recherche qui se sont fait jour ces derniers temps et d'en préciser certains aspects pour essayer d'évaluer les chances des positions correspondantes sur le problème qui nous occupe.

Le chapitre premier énonce et discute une définition générale possible de la notion de particule élémentaire et illustre quelques-uns des problèmes posés par cette définition en étudiant de ce point de vue le modèle de Lee. Le chapitre II est consacré aux tentatives visant à dégager une symétrie des interactions fortes plus profonde que la conservation du spin isotopique et le chapitre III étudie le point de vue que l'on désigne habituellement sous le nom de « bootstrap ».

## CHAPITRE PREMIER

### POSITION DU PROBLÈME

Le concept de « particule élémentaire » existait en Physique bien avant le développement de ce que l'on appelle aujourd'hui la « Physique des Particules Élémentaires », ou « Physique des Hautes Énergies ». On peut donc essayer de dégager, des théories physiques antérieures, une définition générale de l'adjectif « élémentaire ». C'est ce que nous allons tenter de faire dans ce chapitre : le paragraphe I-A contiendra des considérations générales qui seront illustrées en partie, sur l'exemple simple du modèle de Lee, au paragraphe I-B.

#### I-A. — Essai de définition d'une « particule élémentaire ».

Il faut d'abord se hâter de dire qu'il n'est pas du tout évident que la notion de particule élémentaire qui ressort du développement général de la Physique soit applicable au domaine des Hautes Énergies. Par exemple, l'instabilité de la grande majorité des particules connues, ou les énergies de liaison énormes, comparables aux énergies de masse, que devront comporter les particules composées, laissent prévoir de façon quasi certaine que les concepts théoriques, même ceux utilisés en Physique Atomique ou en Électrodyna-

mique Quantique, devront être pour la plupart sérieusement révisés. Autrement dit, la façon précise de poser la question soulevée dans l'introduction dépendra, presque autant que la réponse à cette question, de la théorie future des interactions entre particules.

Il est cependant légitime et nécessaire de partir de l'acquis accumulé dans les autres branches de la Physique pour essayer de comprendre un domaine nouveau. Or, quelle différence faisait-on, avant la Physique des Hautes Énergies, entre particules élémentaires et particules composées ? La réponse est évidente : les particules élémentaires sont celles dont l'existence et les propriétés principales doivent être postulées au départ pour pouvoir en déduire l'existence et les propriétés de tout le reste, considéré par conséquent comme composé.

Il n'y a pour le moment aucune raison de penser que la définition, sous cette forme générale, ne s'applique pas au domaine des Hautes Énergies. Par exemple, il n'est pas encore exclu que les particules soient décrites par une théorie partant d'un Lagrangien; si tel s'avérait être le cas, il serait en principe facile de distinguer entre particules élémentaires et particules composées : celles qui se verraient attribuer *a priori* un champ figurant dans le Lagrangien initial seraient élémentaires, celles que prédirait le calcul à partir de ce Lagrangien seraient évidemment composées.

Cependant, le problème n'est pas forcément aussi simple qu'il pourrait le paraître à première vue et il est nécessaire de formuler les remarques suivantes :

1. On peut en fait englober, dans une même « particule élémentaire », tout un groupe de particules. Ceci est devenu tout à fait plausible depuis l'introduction du spin isotopique : *le* méson  $\pi$  comporte en réalité trois particules distinctes, *le* nucléon deux, etc. Il est possible qu'on puisse aller plus loin dans cette voie et grouper les particules connues en « supermultiplets ». Il est clair qu'alors ce seront ces supermultiplets qui pourront éventuellement constituer les particules élémentaires de la future théorie.

2. Même si l'on pense que la définition générale indiquée plus haut doit être valable dans la Physique des Hautes Énergies, on ne peut pas exclure *a priori* la possibilité que toutes les particules se rangent dans une seule des deux catégories. Une proposition extrêmement intéressante a été faite récemment à partir de ce point de vue (voir par exemple la référence [19]), selon laquelle il n'existe pas de particule élémentaire au sens de la définition précédente.

3. Dans le cas où il existerait des particules élémentaires, il n'est pas absolument nécessaire qu'elles correspondent à des particules réelles. On

peut très bien envisager que la théorie parte de particules fictives, dont les particules observées seraient composées.

4. La distinction entre particules élémentaires et composées, si on peut la définir pour les particules réelles, n'est pas forcément physique. Plus précisément, deux cas peuvent se produire, suivant qu'il est possible ou non de trouver une différence observable entre particules élémentaires et composées. Si une telle différence existe, la classification peut être considérée comme absolue, c'est-à-dire que le caractère élémentaire ou composé est une propriété intrinsèque des particules : il est possible de déterminer expérimentalement si telle particule est élémentaire ou non. Si au contraire le critère de distinction est purement théorique, il doit être possible de bâtir plusieurs théories équivalentes, donnant les mêmes résultats physiques mais partant d'ensembles différents de particules élémentaires; dans ce cas, les qualificatifs « élémentaire » et « composé » n'ont qu'un sens relatif, puisque leur attribution aux différentes particules est en partie une question de choix.

Les deux premières remarques seront examinées plus en détail dans les chapitres II et III respectivement. Pour illustrer les deux dernières et plus généralement la complexité du problème, nous allons considérer le modèle de Lee, qui permet une discussion simple tout en n'étant pas complètement trivial.

### I-B. — Exemple du modèle de Lee.

1. **Équations de départ.** — Sous sa forme originelle, le modèle de Lee [48] [47] comprend deux fermions lourds, N et V et un boson léger  $\theta$ , interagissant par les processus suivants :  $V \leftrightarrow N + \theta$ .

On peut le compliquer en introduisant  $p$  bosons  $\theta_\lambda$  [51] et  $n_0$  fermions  $V_i$  [68]. Nous considérerons ici seulement le cas  $p = 1$ , car les résultats qui nous intéressent peuvent être aisément généralisés si  $p$  est supérieur à 1 (Cf. référence [68]).

On part donc du hamiltonien non renormalisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} H = H_0 + H_1 \\ H_0 = m\psi_N^+\psi_N + \sum_{j=1}^{n_0} m_j^0\psi_j^+\psi_j + \int d\vec{k} \omega a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\ H_1 = - \sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k} \frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}} [\psi_i^+\psi_N a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})\psi_N^+\psi_i] \end{array} \right. \quad (I-1)$$

Les particules N et  $V_j$  ( $j = 1, \dots, n_0$ ) sont considérées comme infiniment lourdes et  $\omega = \sqrt{\mu^2 + k^2}$  est l'énergie d'une particule  $\theta$  de moment  $\vec{k}$ ,  $\mu$  étant sa masse et  $a(\vec{k})$  l'opérateur d'annihilation correspondant;  $m$  est la masse et  $\psi_N$  l'opérateur d'annihilation de la particule N;  $m_j^0$  est la masse nue et  $\psi_j$  l'opérateur d'annihilation de la particule  $V_j$ . Les  $g_i$  ( $i = 1, \dots, n_0$ ) sont les constantes de couplage non renormalisées de la théorie <sup>(1)</sup> et  $f(\omega)$  est une fonction de coupure qui doit tendre vers zéro à l'infini assez rapidement pour faire converger les intégrales dont nous aurons besoin, mais qui doit avoir un comportement suffisamment régulier pour ne pas apporter d'ennuis.

Un calcul simple (Voir par exemple l'Appendice de la référence [28]) permet d'obtenir la matrice S décrivant la diffusion de  $\theta$  par N :

$$S(\omega) = \exp [2i\delta(\omega)] = \frac{D(\omega - i\varepsilon)}{D(\omega + i\varepsilon)}, \quad (\text{I-2})$$

avec :

$$D(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{m + z - m_i^0} \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - z}. \quad (\text{I-3})$$

Dans le plan complexe de la variable  $z$ , cette fonction a une coupure le long de l'axe réel de  $\mu$  à  $+\infty$  et des pôles correspondant aux particules élémentaires nues. De plus, les états liés stables du système N -  $\theta$  sont donnés par :

$$\left. \begin{array}{l} D(\omega) = 0 \\ \omega < \mu. \end{array} \right\} \quad (\text{I-4})$$

Quant aux particules instables ayant les mêmes nombres quantiques que le système N +  $\theta$ , on doit les chercher comme des pôles de la matrice S situés sur le deuxième feuillet de Riemann [51].

Si  $n$  est le nombre d'états liés stables, il est facile de montrer [68] que le déphasage  $\delta(\omega)$  satisfait la relation

$$\delta(\mu) - \delta(+\infty) = (n - n_0)\pi \quad (\text{I-5})$$

qui est une généralisation du théorème de Levinson [50] [46]. Il est important de remarquer que des relations analogues peuvent être prouvées dans le cas de plusieurs bosons  $\theta_\lambda$ , à condition de diagonaliser la matrice des déphasages [68]; le théorème de Levinson est donc vrai dans le modèle de Lee même si les déphasages sont complexes.

<sup>(1)</sup> Comme nous ne nous préoccupons pas des problèmes de renormalisation de charge, nous garderons constamment, dans les calculs, les constantes de couplage non renormalisées.

## 2. Distinction entre particules élémentaires et composées. —

La formule I-5 montre que, si on connaît le nombre  $n$  d'états liés stables, on peut déterminer « expérimentalement » le nombre  $n_0$  de champs élémentaires qu'on doit inclure dans le hamiltonien pour pouvoir décrire la diffusion de  $\theta$  par  $N$ , non compris bien sûr les champs associés à  $\theta$  et  $N$  eux-mêmes.

Il est évident que, dans certains cas, ceci sera suffisant pour introduire dans le modèle de Lee une distinction absolue entre particules élémentaires et particules composées. Par exemple, on peut décrire le modèle original de Lee, comportant une seule particule  $V$ , soit par un hamiltonien de la forme I-1, dans lequel la particule  $V$  est considérée comme élémentaire ( $n_0 = 1$ ), soit par un hamiltonien différent, où la particule  $V$  n'apparaît pas ( $n_0 = 0$ ) et dans lequel  $N$  et  $\theta$  interagissent par un potentiel séparable [68]. La formule I-5 fournit alors un critère pour choisir l'un de ces deux hamiltoniens, que la particule  $V$  soit stable ou instable. Voilà un cas typique où l'étude « expérimentale » de  $\delta(\omega)$  permet de déterminer si  $V$  est élémentaire ou pas.

Mais cela n'est possible, en fait, que parce que, dans ce cas particulièrement simple, il existe une seule particule ayant les mêmes nombres quantiques que le système  $N + \theta$ . Nous allons voir quelles conclusions on peut tirer quand  $n_0$  est supérieur à 1.

On peut d'abord montrer que, dans certains cas, le nombre de particules « physiques », stables ou instables, liées à la voie  $N - \theta$  est précisément  $n_0$ . Considérons par exemple la limite des couplages faibles :

$$\frac{g_i^2}{4\pi} \ll 1 \text{ quel que soit } i \quad (\text{I-6})$$

et soit

$$h(z) = D(z) \left[ \sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{z - \omega_i^0} \right]^{-1}, \quad (\text{I-7})$$

où

$$\omega_i^0 = m_i^0 - m. \quad (\text{I-8})$$

Les particules « physiques » stables apparaissent à des énergies  $m + u_j$ , avec  $u_j < \mu$  ( $j = 1, \dots, n$ ), qui sont solutions de l'équation

$$h(u_j) = 0 \quad (\text{I-9})$$

alors que les masses  $m + v_k$  et les inverses  $\gamma_k$  des durées de vie des particules instables sont donnés par [51]

$$H(v_k - i\gamma_k) = 0, \quad (\text{I-10})$$



où :

$$H(z) = h(z) + 2i\Gamma(z), \quad (\text{I-11})$$

$\Gamma(z)$  étant le saut de  $h(z)$  à travers sa coupure :

$$\Gamma(z) = f^2(z) \sqrt{z^2 - \mu^2}. \quad (\text{I-12})$$

Si toutes les constantes de couplage sont faibles, on s'attend à ce que les renormalisations de masse  $u_j - \omega_j^0$  (ou  $v_k - \omega_k^0$ ) et les inverses  $\gamma_k$  des durées de vie soient faibles et plus précisément du premier ordre en  $g^2/4\pi$ . L'équation I-9 s'écrit explicitement :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - u_j}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - u_j}. \quad (\text{I-13})$$

Si les  $\omega_i^0$  sont suffisamment espacés et éloignés de  $\mu$ , tous les termes de la somme figurant au premier membre de I-13 sont du premier ordre en  $g^2/4\pi$ , sauf  $\frac{g_j^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_j^0 - u_j}$ . I-13 donne donc, au premier ordre en  $g^2/4\pi$  :

$$u_j = \omega_j^0 - \frac{g_j^2}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega_j^0} \quad \text{si } \omega_j^0 < \mu. \quad (\text{I-14})$$

Quant à l'équation I-10, elle s'écrit :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - v_k + i\gamma_k}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - v_k + i\gamma_k} + 2i\Gamma(v_k - i\gamma_k). \quad (\text{I-15})$$

Le terme d'ordre zéro du deuxième membre est :

$$\frac{P}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - v_k} - if^2(v_k) \sqrt{v_k^2 - \mu^2} + 2i\Gamma(v_k) \quad (\text{I-16})$$

(où le symbole P signifie qu'on prend la partie principale de l'intégrale), expression qui est égale, à des termes du premier ordre près, à la suivante :

$$\frac{P}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega_k^0} + if^2(\omega_k^0) \sqrt{\omega_k^{02} - \mu^2}. \quad (\text{I-17})$$

En traitant le premier membre de I-15 comme plus haut celui de I-13, on obtient finalement :

$$v_k = \omega_k^0 - \frac{g_k^2}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega_k^0} \quad \text{si } \omega_k^0 > \mu, \quad (\text{I-18})$$

et :

$$\gamma_k = \frac{g_k^2}{4\pi} f^2(\omega_k^0) \sqrt{\omega_k^{02} - \mu^2}. \quad (\text{I-19})$$

On a ainsi fait correspondre une particule « physique » à chaque champ  $V_i$  figurant dans le hamiltonien I-1, c'est-à-dire qu'on a renormalisé les particules nues correspondantes. Il reste à montrer maintenant qu'il n'existe pas d'autres particules « physiques » que les  $n_0$  précédentes, c'est-à-dire qu'il faut chercher des solutions de I-13 et I-15 pour des  $u_j$  et  $v_k$  non infiniment voisins des  $\omega_i^0$ . Les  $\gamma_k$  étant toujours des infiniment petits de l'ordre de  $g^2/4\pi$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - v_k + i\gamma_k}} &\simeq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - v_k} \left[ 1 - i \frac{\gamma_k}{\omega_i^0 - v_k} \right]} \\ &\simeq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - v_k} - i\gamma_k \sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{(\omega_i^0 - v_k)^2}} \quad (\text{I-20}) \\ &\simeq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - v_k}} \left[ 1 + i\gamma_k \frac{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{(\omega_i^0 - v_k)^2}}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - v_k}} \right] \end{aligned}$$

L'expression I-16 représente encore le terme dominant du deuxième membre de I-15 et on obtient finalement :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - v_k}} = \frac{P}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - v_k} \quad (\text{I-21})$$

et :

$$\gamma_k = \frac{\left[ \sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{v_k - \omega_i^0} \right]^2}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{(v_k - \omega_i^0)^2}} f^2(v_k) \sqrt{v_k^2 - \mu^2}. \quad (\text{I-22})$$

On voit alors qu'il suffit de chercher la masse des particules instables, puisque I-22 donne  $\gamma_k$  quand  $v_k$  est connu. Or l'équation I-21 est identique

à I-13, sauf que, dans cette dernière, il n'est pas besoin de prendre la partie principale de l'intégrale puisque  $\mu_j$  est inférieur à  $\mu$ . Il faut donc résoudre l'équation en  $x$  :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi \omega_i^0 - x}} = \frac{P}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - x}. \quad (\text{I-23})$$

La courbe représentative du deuxième membre  $y_2$  en fonction de  $x$  s'obtient facilement :

- quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $y_2 \rightarrow 0$  avec le signe opposé à celui de  $x$ ;
- quand  $x$  varie entre  $-\infty$  et  $\mu$ ,  $y_2$  est toujours positif, ainsi que sa dérivée;
- quand  $x \rightarrow \mu_-$ ,  $y_2$  tend vers une valeur finie, à cause du facteur  $\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}$ , mais sa dérivée tend vers  $+\infty$ ;
- quand  $x$  est supérieure à  $\mu$ , on a :

$$y_2 = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\mu}^{x-\varepsilon} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - x} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - x} \right]. \quad (\text{I-24})$$

La première intégrale est négative, la deuxième positive. Quand  $x$  croît, la première intégrale devient de plus en plus grande en valeur absolue, la deuxième de plus en plus petite.  $y_2$  s'annule donc entre  $\mu$  et  $+\infty$ .

L'allure de la courbe représentant, en fonction de  $x$ , le deuxième membre  $y_2$  de l'équation I-13 est indiquée dans la figure 1.

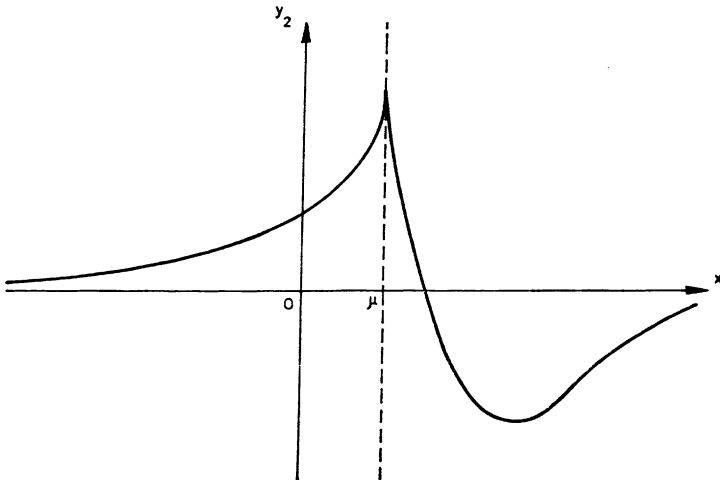


FIG. 1.

Quant au premier membre  $y_1$ , il a  $n_0$  zéros ( $x = \omega_i^0$ ). La courbe :

$$\frac{1}{y_1} = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{1}{\omega_i^0 - x}, \quad (I-25)$$

ayant  $n_0$  asymptotes simples et pas d'extremum, a  $(n_0 - 1)$  zéros. Donc la courbe représentative de  $y_1$  admet  $(n_0 - 1)$  asymptotes verticales, une dans chaque intervalle  $(\omega_i^0, \omega_{i+1}^0)$ , si les  $\omega_i^0$  sont classés par ordre de grandeur croissante. De plus, quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $y_1 \rightarrow \infty$  avec le signe opposé; l'asymptote correspondant à cette nouvelle branche infinie est presque verticale, puisqu'elle a pour pente  $-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i^2}{4\pi}}$ . La figure 2 représente  $y_1$  en fonction de  $x$

dans le cas où  $n_0 = 2$ . Pour que la figure soit plus claire, on a pris des valeurs

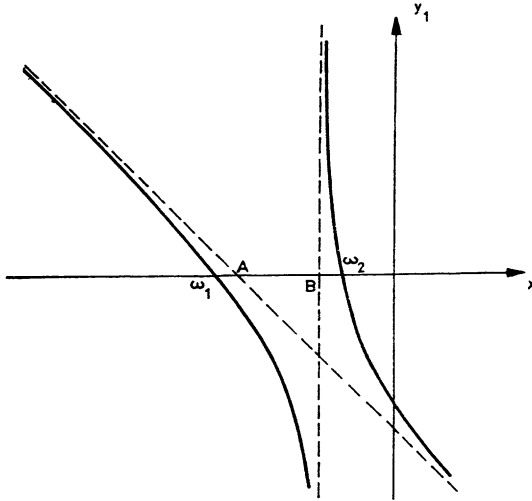


FIG. 2. — L'hyperbole représentant  $y_1$  en fonction de  $x$  pour  $n_0 = 2$ .

Les points A et B divisent le segment  $[\omega_1, \omega_2]$  dans le rapport  $-\frac{g_2^2/4\pi}{g_1^2/4\pi}$  et  $-\frac{g_1^2/4\pi}{g_2^2/4\pi}$  respectivement.

L'équation de l'asymptote oblique est :

$$y = -\frac{x}{\frac{g_1^2}{4\pi} + \frac{g_2^2}{4\pi}} + \frac{\frac{g_1^2}{4\pi} \omega_1 + \frac{g_2^2}{4\pi} \omega_2}{\left[\frac{g_1^2}{4\pi} + \frac{g_2^2}{4\pi}\right]^2}.$$

finies pour  $\frac{g_1^2}{4\pi}$  et  $\frac{g_2^2}{4\pi}$ ; si ces deux quantités deviennent de plus en plus petites, leur rapport restant constant, il suffit de faire tourner l'asymptote oblique autour du point où elle coupe l'axe des  $x$ .

Cette résolution graphique indique donc qu'en général, dans la limite des couplages faibles, l'équation I-23 n'a pas d'autre solution que les  $n_0$  trouvées précédemment (équations I-14 et I-18).

La discussion précédente montre que même un modèle simple comme celui de Lee ne donne pas de réponse totalement claire à la question de savoir s'il existe une différence observable entre particules élémentaires et particules composées. On ne peut en effet pas utiliser ici le critère I-5, puisque chaque particule « physique » correspond à une particule nue figurant dans le hamiltonien I-1; le modèle ne contient dans ce cas que des particules élémentaires et pas de particule composée.

On peut alors chercher s'il existe des circonstances où le modèle de Lee comporte plus de particules « physiques » que de particules élémentaires, pour voir si la distinction entre particules élémentaires et composées est alors absolue ou relative, dans le sens indiqué au paragraphe I-A-4.

Il est facile de montrer (Cf. références [28] et [30]) qu'une telle situation se rencontre même dans le modèle de Lee originel, qui contient, dans certains cas, à la fois un état lié stable et une particule instable dans la voie  $N - \theta$ .

Supposons donc qu'il existe deux particules,  $V_1$  de masse  $m + u$  et  $V_2$  de masse  $m + v$ , ayant les mêmes nombres quantiques que le système  $N + \theta$ ; la première  $V_1$  est stable ( $n = 1$ ) et la seconde  $V_2$  instable avec une durée de vie de  $\frac{1}{\gamma}$ . Supposons de plus qu'une détermination « expérimentale » de  $n_0$  (par exemple au moyen de la relation I-5) a donné  $n_0 = 1$ . Ceci signifie qu'il existe  $\omega_0 = m_0 - m$  tel que :

$$h(u) \equiv \left[ \frac{g^2}{4\pi} \right]^{-1} (u - \omega_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - u} = 0 \quad (\text{I-26})$$

et :

$$H(v - i\gamma) \equiv \left[ \frac{g^2}{4\pi} \right]^{-1} (v - \omega_0 - i\gamma) + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\omega'}{\omega' - v + i\gamma} + 2i\Gamma(v - i\gamma) = 0. \quad (\text{I-27})$$

Or, le hamiltonien et par conséquent la matrice  $S$  dépendent seulement de  $\omega_0$ , quand  $g$ ,  $m$ ,  $\mu$  et  $f(\omega)$  sont fixés.

Si  $V_1$  est considérée comme élémentaire, cela signifie qu'on se donne sa masse  $m_1 = m + u$  et qu'on considère le champ figurant dans le hamiltonien comme représentant la particule nue correspondante. Autrement dit :  $m_1 = m_0 + \delta m_1$ , où  $\delta m_1$  est la renormalisation de masse de la particule  $V_1$ . On remplacera donc partout  $\omega_0$  par  $u - \delta m_1$  et on déterminera  $\delta m_1$  par l'équation I-26. Ensuite, I-27 indiquera la présence d'une particule instable composée  $V_2$  et donnera sa masse  $m + v$  et sa durée de vie  $\frac{1}{\gamma}$ .

Si au contraire on choisit  $V_2$  comme particule élémentaire, ce sera  $v$  qui sera donné et  $\omega_0$  deviendra  $v - \delta m_2$ . On utilisera I-27 pour trouver la renormalisation de masse  $\delta m_2$  et la durée de vie  $\frac{1}{\gamma}$  de  $V_2$ . Ensuite, I-26 permettra de prédire un état composé stable du système  $N + \theta$  à l'énergie  $m + u$ .

Comme la valeur numérique de  $\omega_0$  reste la même dans les deux cas, bien que son interprétation soit différente, les caractéristiques de la diffusion de  $\theta$  par  $N$  seront inchangées. On ne peut pas dire que l'une des deux particules  $V_1$  et  $V_2$  est intrinsèquement plus élémentaire que l'autre. La distinction dépend d'un choix de hamiltonien, elle est donc relative. La seule restriction apportée par « l'expérience » est que le nombre de champs élémentaires nécessaire pour décrire la diffusion  $N - \theta$  est  $n_0 = 1$  (mis à part les champs associés aux particules  $N$  et  $\theta$  elles-mêmes).

Mais on peut aussi adopter un point de vue où  $V_1$  et  $V_2$  jouent des rôles symétriques. Il suffit de considérer que le champ figurant dans le hamiltonien ne doit être associé à aucune particule « physique ». Dans ce cas,  $V_1$  et  $V_2$  sont toutes deux composées et la particule élémentaire à partir de laquelle on les construit n'est pas observable. Ce sont évidemment toujours les équations I-26 et I-27 qui permettent de trouver, à partir de  $\omega_0$  qui est ici une donnée, les masses  $m + u$  et  $m + v$  et la durée de vie  $\frac{1}{\gamma}$ .

Cette discussion du modèle de Lee a montré qu'il est très difficile de prévoir comment la future théorie qui rendra compte des phénomènes de haute énergie tranchera la question des particules élémentaires. Même dans ce modèle simple, on peut en effet, en variant un peu les conditions, obtenir des situations très différentes : dans certains cas, toutes les particules sont élémentaires; dans d'autres, il est possible de déterminer « expérimentalement » le caractère élémentaire ou composé des particules; dans d'autres enfin, la distinction entre les deux catégories de particules est purement théorique et ne repose sur aucune propriété observable.

Il semble donc que la définition générale d'une particule élémentaire

donnée au paragraphe I-A puisse être encore valable dans la Physique des Hautes Énergies. Mais les remarques faites au paragraphe I-A et les résultats du paragraphe I-B montrent que cette définition peut s'accommoder de situations très différentes. Elle constitue par conséquent une sorte de cadre logique pour l'étude des théories que l'on essaie de développer à l'heure actuelle.

## CHAPITRE II

### RECHERCHE D'UNE SYMÉTRIE APPROCHÉE DES INTERACTIONS FORTES

Depuis l'introduction du spin isotopique et la démonstration expérimentale du fait que les interactions fortes le conservent, plusieurs tentatives ont été faites pour essayer de dégager une symétrie plus large, quoique seulement approchée. Après l'échec des symétries globale [38] [66] et restreinte [57], on a récemment proposé d'utiliser les groupes de Lie simples (un exposé accessible des propriétés générales des groupes de Lie simples peut être trouvé dans la référence [58]) et un grand nombre de travaux ont été consacrés à cette question (Références [9, 10, 16, 25, 29, 34, 39, 41, 49, 54, 55, 56, 59, 64]).

Quelle attitude ces travaux impliquent-ils en face du problème qui nous occupe ? Il convient tout d'abord de remarquer qu'en fait, il ne s'agit pas ici de tenter de bâtir une théorie complète des interactions fortes. Les ambitions sont limitées à la recherche d'une symétrie approchée qui, si elle existe, devra figurer parmi les postulats fondamentaux de cette théorie, ou tout au moins en être une conséquence directe. Autrement dit, on ne considère pas le problème dans son ensemble, mais seulement un de ses aspects importants.

Il n'est pas étonnant que ceci ait pour corollaire une position peu tranchée sur le problème des particules élémentaires. En effet, on ne se demande pas encore quelles particules sont élémentaires et lesquelles sont composées, ni même si la question a un sens. On se contente d'essayer de montrer que les particules connues se groupent approximativement en supermultiplets et que par conséquent les entités physiques à considérer sont ces supermultiplets. On ne tente donc pas de trancher la question au fond, mais de trouver les véritables candidats aux fonctions de particules élémentaires.

Néanmoins, la découverte de telles symétries aurait des conséquences

extrêmement importantes sur le sujet des particules élémentaires. C'est pourquoi ce chapitre sera consacré à la question de savoir s'il existe un groupe de Lie simple qui soit approximativement conservé par les interactions fortes.

La première remarque qui a été faite quand l'idée est apparue de considérer les groupes de Lie simples est la suivante : ce sont les groupes de rang 2 qui sont *a priori* les plus intéressants, puisque, mis à part le nombre baryonique qui donne lieu à une règle de supersélection, on a deux quantités à diagonaliser simultanément, la troisième composante du spin isotopique et l'étrangeté (ou l'hypercharge). Nous nous limiterons donc ici aux groupes de Lie simples de rang 2, qui sont au nombre de trois :  $SU_3$ ,  $C_2$  (ou  $B_2$ ) et  $G_2$ . La figure 3 représente les diagrammes des racines de ces trois groupes.

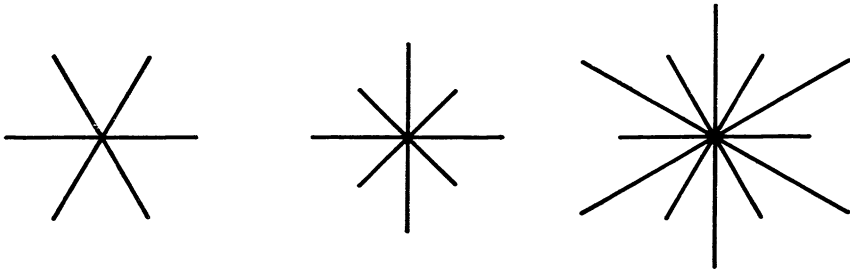


FIG. 3.

Diagramme des racines  
de  $SU_3$ Diagramme des racines  
de  $C_2$ Diagramme des racines  
de  $G_2$ 

Pour choisir entre  $SU_3$ ,  $C_2$  et  $G_2$ , nous allons faire appel à ce que l'on désigne sous le nom de « formules de masses » et nous allons montrer qu'elles donnent des raisons valables pour écarter  $C_2$  et  $G_2$ .

Les hypothèses de base sont les suivantes :

1) Le lagrangien des interactions fortes peut être divisé en deux parties,  $I_0$  et  $I_1$ , dont la première  $I_0$  est invariante dans les transformations d'un groupe  $G$  (ici, l'un des trois groupes de Lie simples de rang 2), alors que la deuxième  $I_1$  commute seulement avec le spin isotopique et l'étrangeté, mais est « petite » devant  $I_0$ .

2)  $I_1$  est un des éléments d'un ensemble d'opérateurs  $M_\sigma$  qui se transforment entre eux selon la représentation régulière de  $G$ . Ceci peut être exprimé avec plus de précision comme suit : si

$$[X_\rho, X_\sigma] = C_{\rho\sigma}^\tau X_\tau \quad (\text{II-1})$$



sont les relations de commutation fondamentales entre les générateurs infinitésimaux  $X_\sigma$  de  $G$ , alors :

$$[X_\rho, M_\sigma] = C_{\rho\sigma}^\tau M_\tau \quad (2). \quad (\text{II-2})$$

L'une des raisons pour lesquelles nous choisissons cette deuxième hypothèse vient d'une analogie avec l'électromagnétisme : l'interaction électromagnétique minimale n'est pas invariante par rapport au groupe de spin isotopique, mais la relation  $Q = T_3 + \frac{N + S}{2}$  indique que la partie non invariante se transforme comme la troisième composante du spin isotopique, c'est-à-dire comme une composante d'un opérateur vectoriel. En fait, les propriétés de transformation de  $I_1$  pourraient être quelconques, mais il paraît plausible de postuler que  $I_1$  a « quelque chose à voir » avec  $G$ . Le choix de la représentation régulière apparaîtra aussi plus tard comme naturel (voir le paragraphe qui suit la formule II-21). Il convient d'indiquer que l'hypothèse 2 est exactement celle proposée initialement par Gell-Mann [39] et utilisée par Okubo [56] pour démontrer les relations de masse dans  $SU_3$ .

L'hypothèse 1 permet de classer les particules, à l'ordre zéro en  $I_1$ , dans les représentations irréductibles de  $G$ . Les différences de masse entre membres d'un même « supermultiplet » sont données, au premier ordre en  $I_1$ , par les éléments de matrice diagonaux de  $I_1$  à l'intérieur de la représentation irréductible correspondante.

Nous sommes donc amenés à considérer des éléments de matrice de la forme  $\langle \psi | M_\sigma | \psi \rangle$ , où les  $M_\sigma$  constituent un ensemble d'opérateurs se transformant suivant la représentation régulière de  $G$  et  $|\psi\rangle$  est un vecteur dans l'espace sur lequel agit une représentation irréductible de  $G$ . Bien que nous nous limitons ici aux relations de masse, on peut remarquer que de tels éléments de matrice apparaissent aussi dans d'autres calculs, par exemple celui des moments magnétiques des particules; les formules que nous allons obtenir peuvent être appliquées à ces calculs.

Les propriétés de transformation des  $M_\sigma$  vont nous permettre d'écrire  $\langle \psi | M_\sigma | \psi \rangle$  sous la forme :

$$\langle \psi | M_\sigma | \psi \rangle = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \langle \psi | M_\sigma^{(i)} | \psi \rangle, \quad (\text{II-3})$$

---

(\*) Dans le groupe des rotations, qui est un groupe de Lie simple de rang 1, les  $M_\sigma$  seraient les trois composantes d'un opérateur vectoriel.

où les  $M_{\sigma}^{(i)}$  sont des ensembles d'opérateurs particuliers se transformant comme les  $M_{\sigma}$  et les  $\lambda_i$  sont des coefficients qui dépendent de la nature de  $M_{\sigma}$  et de la représentation irréductible à laquelle  $|\psi\rangle$  appartient.

Nous allons d'abord démontrer, dans le paragraphe II-A, les propriétés tensorielles des groupes de rang 2 qui nous seront nécessaires pour trouver le nombre de termes indépendants dans la formule II-3, ce qui sera fait dans le paragraphe II-B. Le paragraphe II-C sera consacré à la construction explicite des  $M_{\sigma}^{(i)}$  dans  $SU_3$  et  $C_2$ , car il apparaîtra rapidement qu'un tel calcul n'est pas nécessaire pour  $G_2$ . Enfin, le paragraphe II-D tirera les conclusions de cette étude et indiquera rapidement le point actuel des recherches dans ce domaine.

## II-A. — Forme tensorielle des représentations irréductibles des groupes de rang 2.

**1. Le tableau d'Young correspondant à une représentation irréductible.** — Une représentation irréductible d'un groupe de Lie simple de rang  $l$  est caractérisée, à une équivalence près, par son poids le plus élevé  $L$ , qui peut s'écrire sous la forme :

$$L = \sum_{i=1}^l K_i L^i, \quad (\text{II-4})$$

où les  $K_i$  sont des entiers positifs ou nuls et les  $L^i$  sont les  $l$  poids dominants fondamentaux (Cf. référence [58]). Donc, si l'on désigne par  $g^i$  la représentation irréductible dont le poids le plus élevé est  $L^i$ , la représentation caractérisée par  $L$  peut être obtenue en réduisant le produit tensoriel :

$$\underbrace{g^1 \otimes g^1 \otimes \dots \otimes g^1}_{K_1 \text{ facteurs}} \otimes \underbrace{g^2 \otimes \dots \otimes g^2}_{K_2 \text{ facteurs}} \otimes \dots \otimes \underbrace{g^l \otimes \dots \otimes g^l}_{K_l \text{ facteurs}}. \quad (\text{II-5})$$

Les deux représentations irréductibles fondamentales des groupes de rang 2 sont [9] :

a) Pour  $SU_3$ , les deux représentations contragrédientes  $D^{(3)}(1,0)$  et  $D^{(3)}(0,1)$  <sup>(\*)</sup>. Si  $\psi_a$ , où  $a$  peut prendre les valeurs 1, 2 et 3, est une base dans l'espace de représentation de  $D^{(3)}(1,0)$ , alors  $\psi^a$  ou  $\psi_a'$  est une base pour

<sup>(\*)</sup> Les notations sont celles de la référence [9] : une représentation irréductible de dimension  $N$  caractérisée par les entiers  $K_1$  et  $K_2$  est indiquée par :  $D^{(N)}(K_1, K_2)$ .

$D^{(3)}(0,1)$  ( $\psi_{a'}$  désigne la partie antisymétrique du tenseur du deuxième ordre construit sur  $\psi_a$ ).

b) Pour  $C_2$ , dont deux représentations contragrédientes sont équivalentes à cause de la conservation de la métrique antisymétrique  $h^{ab}$ ,  $D^{(4)}(1,0)$  et  $D^{(5)}(0,1)$ . Si  $\psi_a$ ,  $a$  variant de 1 à 4, est une base pour  $D^{(4)}(1,0)$ ,  $\psi_{a'}$  est une base pour  $D^{(5)}(0,1)$ , à condition que :

$$h^{aa'} \psi_{a'} = 0. \tag{II-6}$$

c) Pour  $G_2$ , qui conserve la métrique symétrique  $g^{ab}$  de  $O_7$  (ceci implique que deux représentations contragrédientes sont équivalentes), ainsi que les quantités totalement antisymétriques  $\Gamma^{abc}$  (Cf. référence [9]),  $D^{(7)}(1,0)$  et  $D^{(4)}(0,1)$ , dont les bases seront respectivement  $\psi_a$  ( $a$  entier compris entre 1 et 7) et  $\psi_{a'}$ , avec :

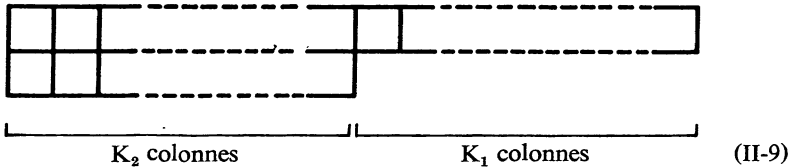
$$\Gamma^{baa'} \psi_{a'} = 0. \tag{II-7}$$

La représentation irréductible de poids le plus élevé  $L$  est naturellement « la plus élevée » obtenue dans la réduction du produit tensoriel II-5, c'est-à-dire celle qui contient le vecteur de poids le plus élevé. Pour les groupes de rang 2, la base de cette représentation sera écrite sous la forme tensorielle suivante :

$$\psi_{a_1 \dots a_{K_2} a_{K_2+1} \dots a_{K_1+K_2}} \tag{II-8}$$

$$a'_{1'} \dots a'_{K_1}$$

Cette notation signifie que, à la représentation irréductible  $D(K_1, K_2)$ , on peut faire correspondre le tableau d'Young :



En effet, tout produit d'un nombre quelconque de composantes  $\psi_a$  est vecteur propre des deux opérateurs du groupe qui commutent,  $H_1$  et  $H_2$ , avec pour valeur propre la somme des valeurs propres correspondant à chacun des indices; cette propriété reste vraie si on symétrise ou antisymétrise. On obtient donc le tenseur de poids le plus élevé d'une représentation donnée par son cadre d'Young en mettant dans ce cadre autant de fois que possible l'indice correspondant au poids le plus élevé, puis le suivant, etc. Comme les tenseurs sont antisymétriques par rapport à deux indices figu-

rant dans la même colonne (Cf. le paragraphe II-A-2), il faut former, à partir de  $K_1$  tableaux à une seule case et de  $K_2$  tableaux à deux lignes et une colonne, un tableau ayant le moins de lignes possible (ici deux) et le plus de cases possible dans la première ligne. La solution est bien sûr celle qui est indiquée en II-9.

**2. Propriétés de symétrie des tenseurs correspondants.** — Pour construire les tenseurs II-8 correspondant au tableau II-9, il faut d'abord symétriser par rapport aux indices figurant dans une même ligne et ensuite antisymétriser par rapport aux indices figurant dans une même colonne. On peut alors déduire de cette construction les propriétés de symétrie suivantes dont nous aurons besoin :

a) Les tenseurs II-8 sont antisymétriques par rapport à l'échange de deux indices de la même colonne. Cette propriété est évidente, puisque l'antisymétrisation intervient en dernier.

b) Ils sont symétriques par rapport à deux quelconques des derniers  $K_1$  indices de droite. En effet, ces indices ne sont pas affectés par les antisymétrisations, puisqu'ils sont seuls dans leur colonne.

c) Ils sont invariants dans l'échange de deux des  $K_2$  premières colonnes de gauche. En effet, on commence par symétriser par rapport aux  $(K_1 + K_2)$  indices de la première ligne, puis par rapport aux  $K_2$  indices de la deuxième ligne. Les opérations d'antisymétrisation dans les colonnes commutent, puisqu'elles n'intéressent pas les mêmes indices. Supposons donc qu'on ait déjà antisymétrisé par rapport à toutes les colonnes, sauf les deux que nous considérons. Si ces deux colonnes sont  $\begin{smallmatrix} a \\ a' \end{smallmatrix}$  et  $\begin{smallmatrix} b \\ b' \end{smallmatrix}$ , on a encore symétrie par rapport à  $a$  et  $b$  et par rapport à  $a'$  et  $b'$ , c'est-à-dire que, pour une configuration fixée des autres indices, on a quatre termes, que nous écrirons symboliquement :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & a \\ b' & a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & a \\ a' & b' \end{pmatrix}. \quad (\text{II-10})$$

Il reste alors à antisymétriser par rapport à  $a$  et  $a'$  et par rapport à  $b$  et  $b'$ , ce qui donne, pour chaque configuration des autres indices :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & a \\ a' & b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & a \\ b' & a' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b \\ a & b' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b \\ b' & a' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & a' \\ b' & a' \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} a & b' \\ a' & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b' & a \\ a' & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b' \\ b & a' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b' & a \\ b & a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b' & a' \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b' & a' \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

On voit alors que l'expression II-11 est invariante dans l'échange simultané de  $a$  et  $b$  et de  $a'$  et  $b'$ .

d) Enfin, les tenseurs II-8 satisfont les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_{a_1 \dots a_i \dots a_k \dots a_{K_2} \dots a_{K_2+K_1}} - \psi_{a_1 \dots a_i \dots a_{k-1} a'_i a_{k+1} \dots a_{K_2} \dots a_{K_2+K_1}} \\ a'_1 \dots a'_i \dots a'_k \dots a'_{K_2} &= \psi_{a_1 \dots a_{i-1} a_k a_{i+1} \dots a_{k-1} a'_i a_{k+1} \dots a_{K_2} \dots a_{K_2+K_1}} \\ &= \psi_{a_1 \dots a'_{i-1} a'_i a'_{i+1} \dots a'_{k-1} a'_k a'_{k+1} \dots a'_{K_2}} \end{aligned} \tag{II-12}$$

$$\begin{aligned} \psi_{a_1 \dots a_i \dots a_{K_2} \dots a_{K_2+k} \dots a_{K_2+K_1}} - \psi_{a_1 \dots a_i \dots a_{K_2} \dots a_{K_2+k-1} a'_i a_{K_2+k+1} \dots a_{K_2+K_1}} \\ a'_1 \dots a'_i \dots a'_{K_2} &= \psi_{a_1 \dots a_{i-1} a_{K_2+k} a_{i+1} \dots a_{K_2+k-1} a'_i a_{K_2+k+1} \dots a_{K_2+K_1}} \\ &= \psi_{a_1 \dots a'_{i-1} a'_{K_2+k} a'_{i+1} \dots a'_{K_2+k-1} a'_i a'_{K_2+k+1} \dots a'_{K_2+K_1}} \end{aligned} \tag{II-13}$$

c'est-à-dire que, si on essaie d'antisymétriser encore par rapport à deux indices, on retrouve la composante où ces deux indices sont dans la même colonne. Les relations II-12 et II-13 se démontrent aussi facilement que la propriété  $c$  précédente : dans l'expression II-11, on voit que l'ensemble des termes affectés du signe  $+$  sont symétriques par rapport à l'échange de  $a$  et  $b$ , par exemple; ils donneront donc zéro si on antisymétrise par rapport à  $a$  et  $b$ ; il suffit alors d'antisymétriser les termes précédés du signe  $-$  pour retrouver la composante  $\psi_{aa'}$ .

3. Conditions supplémentaires sur les tenseurs de base. —

a)  $SU_3$  : Il conserve le tenseur totalement antisymétrique de Levi-Civita  $\varepsilon^{abc}$ . C'est le seul, parmi les groupes de rang 2, pour lequel deux représentations contragrédientes ne sont pas équivalentes. Par suite de ces deux caractéristiques, on peut utiliser l'une ou l'autre des deux possibilités suivantes, qui sont équivalentes (Cf. Appendice I).

— Ou bien on prend la base de  $D(K_1, K_2)$  sous la forme II-8 et alors on doit imposer en plus les conditions supplémentaires :

$$\varepsilon^{aa'c} \psi_{a a_2 \dots a_{K_2} c a_{K_2+2} \dots a_{K_2+K_1}} = 0 \tag{II-14}$$

$$a'_1 a'_2 \dots a'_{K_2}$$

— ou bien on utilise  $\psi^a$  comme base de la deuxième représentation irréductible fondamentale  $D^{(3)}(0,1)$  et on écrit la base de  $D(K_1, K_2)$  :

$$\psi_{a_1 \dots a_{K_1}}^{a'_1 \dots a'_{K_2}} \tag{II-15}$$

ces tenseurs étant symétriques par rapport à tous les indices supérieurs et par rapport à tous les indices inférieurs et ayant toutes leurs traces nulles :

$$\psi_{aa_2 \dots a_{\kappa_2}}^{aa'_2 \dots a'_{\kappa_2}} = 0. \tag{II-16}$$

b)  $C_2$  : La métrique antisymétrique  $h^{ab}$  étant conservée, toutes les traces partielles prises avec cette métrique doivent être nulles. En tenant compte des symétries indiquées au paragraphe II-A-2, ces conditions peuvent être réduites à :

$$h^{aa'} \psi_{a a_2 \dots a_{\kappa_2} \dots a_{\kappa_2 + \kappa_1}} = 0. \tag{II-17}$$

$$a' a'_2 \dots a'_{\kappa_2}$$

En effet,  $h^{ab}$  étant antisymétrique, toute trace prise avec deux des  $\kappa_1$  derniers indices de la première ligne est nulle à cause de la propriété II-A-2-b. En utilisant la propriété II-A-2-d, on ramène tous les autres cas à :

$$h^{aa'} \psi_{\dots a \dots \dots} \tag{II-18}$$

$$\dots a' \dots$$

expression qui est nulle, si II-17 est vérifiée, par suite de la propriété II-A-2-c.

c)  $G_2$  : Comme l'algèbre de Lie de  $G_2$  est une sous-algèbre de celle de  $O_7$ , les traces partielles prises avec la métrique symétrique  $g^{ab}$  doivent être nulles. Pour cela, il suffit que s'annulent les traces prises avec des paires d'indices choisis de façon « régulière », c'est-à-dire :

$$g^{ab} \psi_{a_1 \dots a_{\kappa_2} \dots a_{\kappa_2 + \kappa_1 - 2} ab} = 0$$

$$a'_1 \dots a'_{\kappa_2}$$

$$g^{ab} \psi_{a_1 \dots \dots a_{\kappa_2} \dots \dots a_{\kappa_2 + \kappa_1}} = 0$$

$$a'_1 \dots a'_{\kappa_2 - 2} ab$$

$$g^{ab} \psi_{a_1 \dots \dots a_{\kappa_2} \dots \dots a_{\kappa_2 + \kappa_1 - 1} a} = 0.$$

$$a'_1 \dots a'_{\kappa_2 - 1} b$$
(II-19)

Mais il faut en plus imposer les conditions correspondantes avec les  $\Gamma$  :

$$\Gamma^{aa'b} \psi_{a a_2 \dots a_{\kappa_2} \dots a_{\kappa_2 + \kappa_1}} = 0. \tag{II-20}$$

$$a' a'_2 \dots a'_{\kappa_2}$$

( $\Gamma^{abc}$  étant totalement antisymétrique, on peut répéter ici le raisonnement fait au sujet de l'équation II-17).

L'Appendice II montre comment les bases tensorielles construites dans ce paragraphe peuvent être utilisées pour réduire les produits tensoriels de représentations.

II-B. — Nombre de termes indépendants dans la formule II-3.

Il est maintenant possible de voir immédiatement combien de termes vont comporter la formule de masse et les relations similaires.

On étudie un ensemble d'opérateurs  $M_\sigma$  tels que les éléments de matrice  $\langle \psi | M_\sigma | \psi \rangle$  se transforment selon la représentation régulière, pour un  $|\psi\rangle$  quelconque appartenant à une représentation irréductible quelconque du groupe G.

Si les composantes de  $|\psi\rangle$  sur les bases trouvées au paragraphe II-A sont :

$$\psi_{a_1 \dots a_{k_2} \dots a_{k_2+k_1}},$$

$$a'_1 \dots a'_{k_2}$$

celles de  $\langle \psi |$  seront :

$$a_1 \dots a_{k_2} \dots a_{k_2+k_1}$$

$$\bar{\psi}_{a'_1 \dots a'_{k_2}},$$

pour que la norme  $\langle \psi | \psi \rangle$  soit un scalaire.

Les  $\langle \psi | M_\sigma | \psi \rangle$  ne sont rien d'autre que des combinaisons linéaires des quantités

$$\frac{b_1 \dots b_{k_2} \dots b_{k_2+k_1}}{\bar{\psi}_{a'_1 \dots a'_{k_2}}} \psi_{a_1 \dots a_{k_2} \dots a_{k_2+k_1}} \cdot a'_1 \dots a'_{k_2} \tag{II-21}$$

Cela signifie que nous devons extraire la représentation régulière du produit tensoriel d'une représentation irréductible quelconque par sa contragrédiente, ce qui nous amène à une généralisation du théorème de Wigner-Eckart (Voir par exemple la référence [4I]). Il est bien connu qu'une telle opération est possible au moins d'une manière, plus précisément grâce aux matrices  $A_\sigma$  représentant les générateurs infinitésimaux du groupe : les quantités  $\langle \psi | A_\sigma | \psi \rangle$  se transforment suivant la représentation régulière du groupe. Nous verrons d'ailleurs que, en ce qui concerne  $SU_3$  et  $C_2$ , les représentations régulière et identique (c'est-à-dire le scalaire) sont les seules qui apparaissent dans tous les produits tensoriels d'une représentation et de sa contragrédiente. Ceci est une nouvelle justification *a posteriori* de l'hypothèse faite plus haut sur les propriétés de transformation de  $I_1$ .

Mais quelle est la forme tensorielle de la représentation régulière ?

Pour  $SU_3$ , la représentation régulière est  $D^{(8)}(1,1)$  et on peut lui choisir pour base les  $\psi_b^a$ , avec :  $\sum_{a=1}^3 \psi_a^a = 0$ .

Pour  $C_2$ , c'est  $D^{(10)}(2,0)$ , avec pour base les tenseurs symétriques  $\psi_{ab}$ .  
 Pour  $G_2$ , c'est  $D^{(4)}(0,1)$ , dont la base est formée des  $\psi_a$ , avec :  $\Gamma^{abc}\psi_a = 0$ .

Pour extraire la représentation régulière des produits II-21, il faut donc contracter tous les indices sauf deux. Ceci est possible de deux façons différentes :

$$\bar{\psi}^{a_1 \dots a_{k_2} a a_{k_2+2} \dots a_{k_2+k_1}} \psi_{a_1 \dots a_{k_2} b a_{k_2+2} \dots a_{k_2+k_1}} = T_b^a \quad (\text{II-22})$$

$$\bar{\psi}^{a_1 a'_2 \dots a'_{k_2}} \psi_{b a_2 \dots a_{k_2} \dots a_{k_2+k_1}} = U_b^a \quad (\text{II-23})$$

Ces deux possibilités sont en effet les seules parce que :

1) On ne peut pas laisser les deux indices « libres » sur le même facteur, car la sommation sur les indices correspondants de l'autre facteur donnerait zéro, à cause des conditions supplémentaires du paragraphe II-A-3.

2) Toute autre possibilité différant de II-22 et II-23 par la place des indices libres peut être amenée à l'une des formes II-22 et II-23 si on utilise les propriétés de symétrie du paragraphe II-A-2.

On voit donc que, en général, la représentation régulière peut être extraite deux fois du produit tensoriel de deux représentations irréductibles contragrédientes :

a)  $SU_3$  : On doit soustraire la trace du tenseur obtenu. Si l'on utilise la forme II-15 pour les composantes de  $|\psi\rangle$ , on écrira les deux possibilités :

$$\bar{\psi}^{a_1 a_2 \dots a_{k_1} \psi_{a'_1 \dots a'_{k_2}} - \frac{1}{3} \delta_b^a \langle \psi | \psi \rangle = T_b^a \quad (\text{II-24})$$

$$\bar{\psi}^{a_1 \dots a_{k_1} \psi_{a'_2 \dots a'_{k_2}} - \frac{1}{3} \delta_b^a \langle \psi | \psi \rangle = U_b^a \quad (\text{II-25})$$

b)  $C_2$  : On doit symétriser par rapport aux indices libres, ce qui ne peut pas réduire le nombre de possibilités <sup>(4)</sup> :

$$\frac{1}{2} [h_{ac} T_b^c + h_{bc} T_a^c] \quad (\text{II-26})$$

$$\frac{1}{2} [h_{ac} U_b^c + h_{bc} U_a^c]. \quad (\text{II-27})$$

<sup>(4)</sup> Au contraire, l'antisymétrisation n'est pas toujours possible, à cause de la faible dimension de  $C_2$  : par exemple,  $D^{(5)}(0,1) \otimes D^{(5)}(0,1)$  contient  $D^{(10)}(2,0)$ , mais pas  $D^{(6)}(0,1)$ .



c)  $G_2$  : Il faut antisymétriser par rapport aux indices libres et soustraire les traces prises avec les  $\Gamma$  :

$$\frac{1}{2} [g_{ac} T_b^c - g_{bc} T_a^c] - \frac{1}{6} \Gamma_{kab} \Gamma^{kc} T_c^d \quad (\text{II-28})$$

$$\frac{1}{2} [g_{ac} U_b^c - g_{bc} U_a^c] - \frac{1}{6} \Gamma_{kab} \Gamma^{kc} U_c^d \quad (\text{II-29})$$

Cette opération ne peut pas non plus réduire le nombre de possibilités, car la dimension de  $G_2$  est suffisamment grande.

Nous avons donc vu que la représentation régulière peut au plus être obtenue deux fois dans la réduction du produit tensoriel d'une représentation irréductible par sa contragrédiente. Cela signifie qu'il apparaîtra au plus deux termes indépendants, dans la formule II-3.

Mais la façon dont ce dernier résultat a été obtenu indique clairement que le nombre de termes se réduira à un si l'un des entiers  $K_1$  et  $K_2$  est nul. Si  $|\psi\rangle$  appartient à une représentation de la forme  $D(0, K_2)$  ou  $D(K_1, 0)$ , la formule II-3 ne comprendra qu'un terme; or, nous connaissons déjà un ensemble de  $M_\sigma^{(i)}$ , les matrices  $A_\sigma$  représentant les générateurs infinitésimaux du groupe; par conséquent, pour de telles représentations,  $\langle \psi | M_\sigma | \psi \rangle$  sera proportionnel à  $\langle \psi | A_\sigma | \psi \rangle$ .

### II-C. — Formules explicites pour $SU_3$ et $C_2$ .

A ce point de notre étude, nous pouvons remarquer que la représentation irréductible de plus basse dimension pour laquelle on a effectivement deux termes indépendants dans II-3 est  $D^{(64)}(1,1)$  pour  $G_2$  (Cf. référence [9], table VI). Par conséquent, même si  $G_2$  avait des chances d'être le groupe de symétrie approchée des interactions fortes, on n'utiliserait que ses représentations de plus bas degré, pour lesquelles la formule II-3 prend la forme simple indiquée à la fin du paragraphe précédent. Il n'est donc pas nécessaire d'obtenir la relation de masse sous sa forme générale pour  $G_2$  et nous allons nous limiter dans ce paragraphe à  $SU_3$  et  $C_2$ .

1.  $SU_3$ . — Il s'agit de montrer que la formule d'Okubo [56] peut être obtenue de façon simple par la méthode utilisée ici.

Puisque la représentation régulière a été prise sous forme tensorielle, il nous faut remplacer l'indice  $\sigma$  par deux indices : nous écrivons l'ensemble

d'opérateurs que nous étudions  $M_b^a$  et désignerons par  $X_b^a$  les générateurs infinitésimaux de  $SU_3$ , avec les conditions :

$$\sum_{k=1}^3 M_k^k = 0 \tag{II-30}$$

$$\sum_{k=1}^3 X_k^k = 0. \tag{II-31}$$

Les relations de commutation fondamentales deviennent alors :

$$[X_b^a, X_d^c] = \delta_b^c X_d^a - \delta_d^a X_b^c \tag{II-32}$$

avec :

$$[X_b^a]^+ = X_a^b \tag{II-33}$$

( $[X_b^a]^+$  est le conjugué hermitique de  $X_b^a$ ).

Pour simplifier les calculs, on peut utiliser les générateurs infinitésimaux de  $U_3$ , qui seront désignés par  $X'_b{}^a$ , avec :

$$X_b^a = X'_b{}^a - \frac{1}{3} \delta_b^a \sum_{k=1}^3 X_k^k. \tag{II-34}$$

Comme nous avons mis toutes les représentations irréductibles sous forme tensorielle, nous n'aurons besoin que des matrices  $3 \times 3$   $A_b^a$  qui représentent les  $X_b^a$  dans  $D^{(3)}(1,0)$  (Pour  $D^{(3)}(0,1)$ , la matrice représentant  $X_b^a$  sera alors  $- [A_b^a]^t$ , l'opposée de la matrice transposée de  $A_b^a$  <sup>(5)</sup>). Il est facile de voir, en utilisant II-32 et II-33, que ces matrices ont pour éléments :

$$[A'_b{}^a]_i^j = \delta_i^a \delta_b^j \tag{II-35}$$

$$[A_b^a]_i^j = \delta_i^a \delta_b^j - \frac{1}{3} \delta_b^a \delta_i^j. \tag{II-36}$$

L'action, sur un vecteur  $|\psi\rangle$  appartenant à une représentation irréductible quelconque, de la matrice représentant  $X'_b{}^a$  peut donc s'exprimer sous la forme :

$$(A'_b{}^a \psi)_{a_1 \dots a_{k_1}}^{a'_1 \dots a'_{k_2}} = \sum_{i=1}^{k_1} \delta_{a_i}^a \psi_{a_1 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_{k_1}}^{a'_1 \dots a'_{k_2}} - \sum_{j=1}^{k_2} \delta_b^{a'_j} \psi_{a_1 \dots a_{k_1}}^{a'_1 \dots a'_{j-1} a a'_{j+1} \dots a'_{k_2}}, \tag{II-37}$$

<sup>(5)</sup> Ceci est simplement dû au fait que  $D^{(3)}(0,1)$  est la représentation contra-grédiente de  $D^{(3)}(1,0)$ .

ce qui donne immédiatement :

$$\langle \psi | A_b^a | \psi \rangle = K_1 T_b^a - K_2 U_b^a. \quad (\text{II-38})$$

La façon naturelle de chercher le deuxième ensemble d'opérateurs « vectoriels » est de prendre (Cf. référence [4I], Section 3, Lemme 1) :

$$B_b^a = A_k^a A_b^k - \frac{1}{3} \delta_b^a A_k^j A_j^k. \quad (\text{II-39})$$

En utilisant II-33 et II-37, on trouve facilement, après un court calcul algébrique :

$$\langle \psi | B_b^a | \psi \rangle = K_1(2K_1 + 1)T_b^a + K_2(2K_2 + 1)U_b^a. \quad (\text{II-40})$$

Les expressions II-38 et II-40 seront indépendantes si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} K_1 & -K_2 \\ K_1(2K_1 + 1) & K_2(2K_2 + 1) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{II-41})$$

Le déterminant étant égal à  $2K_1K_2(K_1 + K_2 + 1)$  et  $K_1$  et  $K_2$  étant entiers, on voit que II-38 et II-40 sont indépendants si et seulement si  $K_1$  et  $K_2$  sont différents de zéro. Dans le cas général, on a donc construit explicitement les deux termes indépendants de la formule II-3; quand  $K_1$  ou  $K_2$  est nul, le deuxième terme devient bien proportionnel au premier, comme on s'y attendait après la remarque de la fin du paragraphe II-B.

La formule II-3 s'écrit donc pour  $SU_3$  :

$$\langle \psi | M_b^a | \psi \rangle = \lambda_1 \langle \psi | A_b^a | \psi \rangle + \lambda_2 \langle \psi | A_k^a A_b^k - \frac{1}{3} \delta_b^a A_j^k A_j^k | \psi \rangle. \quad (\text{II-42})$$

Les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dépendent bien sûr de la nature des opérateurs  $M_b^a$ , mais aussi de la représentation irréductible à laquelle appartient  $|\psi\rangle$ .

Pour pouvoir déduire la formule d'Okubo de II-42, il faut savoir avec quel élément de l'ensemble  $\{M_b^a\}$   $I_1$  peut être identifié. Pour cela, il suffit de remarquer que  $I_1$  doit commuter avec l'étrangeté et avec les trois composantes du spin isotopique. Parmi les générateurs infinitésimaux de  $SU_3$ , seul celui qui correspond à l'étrangeté, c'est-à-dire  $X_3^3$ , possède cette propriété. Par conséquent,  $I_1$  se transforme comme  $M_3^3$ .

Il nous faut donc calculer :

$$B_3^3 = A_k^3 A_3^k - \frac{1}{3} A_j^k A_j^k, \quad (\text{II-43})$$

ou, ce qui revient au même puisque les éléments de matrice de  $A_j^k A_k^j$  sont des invariants dans toutes les représentations :

$$B_3^3 = A_k^3 A_3^k. \quad (\text{II-44})$$

Si, pour fixer les idées, nous prenons le modèle de Sakata [61] où la base de la représentation  $D^{(3)}(1,0)$  est identifiée avec le neutron, le proton et la particule  $\Lambda$ , la formule II-35 nous permet d'effectuer la correspondance suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = A'_1 + A'_2 + A'_3 \\ S = -A'_3 \\ I_0 = \frac{1}{2}(A'_2 - A'_1); \quad I_+ = A'_2; \quad I_- = A'_1 \end{array} \right. \quad (\text{II-45})$$

si  $N$  est le nombre baryonique,  $S$  l'étrangeté et  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $I_0$  les composantes du spin isotopique. En inversant ces égalités, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_1 = \frac{1}{2}[N + S - 2I_0] \\ A'_2 = \frac{1}{2}[N + S + 2I_0] \\ A'_3 = -S \\ A'_1 = I_+ \\ A'_2 = I_- \end{array} \right. \quad (\text{II-46})$$

On peut évaluer  $B'_3$  de deux façons différentes. D'une part :

$$B'_3 = A'_1 A'_3 + A'_2 A'_3 + S^2. \quad (\text{II-47})$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} B'_3 &= A'^j_k A'^k_j - A'^1_k A'^k_1 - A'^2_k A'^k_2 \\ &= A'^j_k A'^k_j - A'^1_3 A'^3_1 - A'^2_3 A'^3_2 - [I_+ I_- + I_- I_+] - \frac{1}{2}[(N+S)^2 + 4I_0^2] \end{aligned} \quad (\text{II-48})$$

En faisant la demi-somme des égalités II-47 et II-48, on obtient :

$$B'_3 = \frac{1}{2} A'^j_k A'^k_j + \frac{1}{2} [A'^3_1, A'^1_3] + \frac{1}{2} [A'^3_2, A'^2_3] + \frac{1}{2} S^2 - \frac{1}{4} (N+S)^2 - I(I+1). \quad (\text{II-49})$$

Il suffit alors d'utiliser II-32 pour trouver :

$$B'_3 = \frac{1}{2} A'^j_k A'^k_j + \frac{1}{4} S^2 - I(I+1) - \frac{1}{4} N^2 - \frac{1}{2} NS - \frac{3}{2} S - \frac{1}{2} N. \quad (\text{II-50})$$

On retrouve donc bien la formule d'Okubo [56] à trois paramètres, donnant la masse  $m$  d'une particule en fonction de son étrangeté et de son spin isotopique :

$$m = a + bS + c \left[ \frac{1}{4} S^2 - I(I+1) \right], \quad (\text{II-51})$$

car les termes  $\frac{1}{2}A'_k A'^k_j$ ,  $-\frac{1}{4}N^2$  et  $-\frac{1}{2}N$  entrent dans la constante  $a$  et  $-\frac{1}{2}NS - \frac{3}{2}S$  dans  $bS$ .

2.  $C_2$ . — Ici, les  $M$  et les  $X$  comporteront deux indices symétriques, comme la représentation régulière :  $M_{ab}$  et  $X_{ab}$ .

Comme indiqué dans la référence [9], on peut prendre la métrique anti-symétrique conservée sous la forme :

$$\{h^{ab}\} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & -1 & \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \{h_{ab}\} = \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-52})$$

Comme pour  $SU_3$ , il nous faut ici les matrices  $4 \times 4$  représentant les générateurs infinitésimaux  $X_{ab}$  dans  $D^{(4)}(1,0)$ .

La conservation de  $h^{ab}$  implique la condition suivante sur ces matrices :

$$[\delta_j^i + i\varepsilon^{ab}(A_{ab})^i_j][\delta_l^k + i\varepsilon^{ab}(A_{ab})^k_l]h^{jl} = h^{ik}, \quad (\text{II-53})$$

où les  $\varepsilon^{ab}$  sont des constantes infinitésimales arbitraires. II-53, devant être vérifiée quels que soient les  $\varepsilon^{ab}$ , implique :

$$h^{il}(A_{ab})^k_l + h^{jk}(A_{ab})^i_j = 0, \quad (\text{II-54})$$

ce que l'on peut écrire simplement :

$$(A_{ab})^{ki} = (A_{ab})^{ik}. \quad (\text{II-55})$$

Si on choisit alors :

$$(A_{ab})^{ij} = \delta_a^i \delta_b^j + \delta_b^i \delta_a^j \quad (\text{II-56})$$

expression qui est, comme on le voulait, symétrique en  $i$  et  $j$  et en  $a$  et  $b$ , on obtient pour les matrices  $4 \times 4$  cherchées :

$$\begin{aligned} (A_{ab})^j_i &= h_{ik}(A_{ab})^{kj} \\ &= h_{ia}\delta_b^j + h_{ib}\delta_a^j. \end{aligned} \quad (\text{II-57})$$

On peut d'ailleurs obtenir ces matrices à partir de celles qui représentent les générateurs infinitésimaux  $X'^a_b$  de  $U_4$  et qui s'écrivent, comme pour  $U_3$  :

$$(A'^a_b)^j_i = \delta_i^a \delta_b^j. \quad (\text{II-58})$$

Si on abaisse l'indice supérieur  $a$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (A'^a_b)^j_i &= h_{ac}(A'^c_b)^j_i \\ &= h_{ai}\delta_b^j \end{aligned} \quad (\text{II-59})$$

et on a :

$$(A_{ab})_i^j = - [(A'_{ab})_i^j + (A'_{ba})_i^j]. \quad (\text{II-60})$$

Des relations de commutation fondamentales :

$$[X'^a_b, X'^c_d] = \delta_b^c X'^a_d - \delta_d^a X'^c_b \quad (\text{II-61})$$

on déduit que :

$$[A'_{ab}, A'_{cd}] = h_{cb} A'_{ad} - h_{ad} A'_{cb}. \quad (\text{II-62})$$

De plus, on sait que :

$$[A'^a_b]^+ = A'^b_a. \quad (\text{II-63})$$

Ceci entraîne immédiatement :

$$[A'_{ab}]^+ = - A'^{ab} \quad (\text{II-64})$$

c'est-à-dire, compte tenu de II-60 :

$$[A_{ab}]^+ = - A^{ab}. \quad (\text{II-65})$$

Ces relations posées, on procède comme au paragraphe précédent pour  $SU_3$ , mis à part qu'on doit utiliser la forme II-8 pour les composantes de  $|\psi\rangle$ .

Une autre différence importante est que, pour  $C_2$ , les termes du deuxième ordre dans les générateurs infinitésimaux ne sont pas indépendants de ceux du premier ordre, ce qui est rendu évident par la relation :

$$A_{ac} h^{cd} A_{db} + A_{bc} h^{cd} A_{da} = h^{cd} [A_{ac}, A_{db}] \quad (\text{II-66})$$

due à l'antisymétrie de  $h$  et à la symétrie des  $A$ .

Il faut donc faire appel aux termes du troisième ordre pour trouver le deuxième terme indépendant de la formule II-3. Un calcul analogue à celui qui a été fait pour  $SU_3$ , quoique plus long, montre que les termes du troisième ordre sont indépendants de ceux du premier ordre si et seulement si  $K_1$  et  $K_2$  sont différents de zéro. L'équivalent de II-42 s'écrit donc :

$$\langle \psi | M_{ab} | \psi \rangle = \lambda_1 \langle \psi | A_{ab} | \psi \rangle + \lambda_2 \langle \psi | h_{ai} A^{ij} A_{jk} h^{kl} A_{lb} + h_{bi} A^{ij} A_{jk} h^{kl} A_{la} | \psi \rangle. \quad (\text{II-67})$$

Cette formule ne peut malheureusement pas se mettre sous une forme aussi simple que II-51. Si on veut l'exprimer en fonction des opérateurs

canoniques  $H$  et  $E$ , il faut effectuer l'identification suivante, que l'on trouve facilement en utilisant II-57, II-52 et la page 15 de la référence [9] :

$$\begin{aligned} A^{11} &= -2\sqrt{6}E_1 = A_{44} \\ A^{12} &= 2\sqrt{3}E_2 = -A_{34} \\ A^{22} &= -2\sqrt{6}E_3 = A_{33} \\ A^{24} &= 2\sqrt{3}E_4 = A_{13} \\ A^{14} &= 2\sqrt{3}H_1 = -A_{14} \\ A^{23} &= -2\sqrt{3}H_2 = -A_{23} \\ E_{-\alpha} &= E_{\alpha}^+. \end{aligned} \quad (\text{II-68})$$

Si, par exemple, on choisit  $H_2$  pour représenter l'étrangeté,  $H_1$ ,  $E_1$  et  $E_{-1}$  sont les trois composantes  $I_0$ ,  $I_+$  et  $I_-$  du spin isotopique. Posons :

$$J^2 = -\frac{1}{24} A^{jk} A_{kj} = H_1^2 + H_2^2 + \sum_{\alpha=1}^4 [E_{\alpha} E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_{\alpha}], \quad (\text{II-69})$$

et :

$$I^2 = H_1^2 + E_1 E_{-1} + E_{-1} E_1. \quad (\text{II-70})$$

On a alors, si  $\Delta m$  est l'opérateur dont les éléments de matrice donnent les différences de masse au premier ordre :

$$\langle \psi | \Delta m | \psi \rangle = \alpha' \langle \psi | H_2 | \psi \rangle + \beta' \langle \psi | B | \psi \rangle, \quad (\text{II-71})$$

avec :

$$\begin{aligned} B = & -2H_2[J^2 - I^2] + E_2 H_1 E_{-2} + E_{-2} H_1 E_2 - E_4 H_1 E_{-4} - E_{-4} H_1 E_4 \\ & + \sqrt{2}[E_{-4} E_{-1} E_2 + E_{-2} E_1 E_4 + E_2 E_{-1} E_{-4} + E_4 E_1 E_{-2}]. \end{aligned} \quad (\text{II-72})$$

Une relation analogue peut être obtenue dans le cas des modèles construits sur  $B_2$  (Cf. référence [9], p. 36), où l'étrangeté est représentée par  $\frac{1}{\sqrt{2}}(H_1 + H_2)$ .

#### II-D. — Conclusions.

Le résultat le plus important de l'étude précédente est que la formule de masse, pour les groupes de Lie simples de rang 2, contient au premier ordre au plus trois paramètres. Elle n'en comporte que deux à l'intérieur des représentations irréductibles pour lesquelles l'un des deux entiers caractéristiques  $K_1$  et  $K_2$  est nul, c'est-à-dire que dans ce cas les différences

de masse entre membres d'un tel supermultiplet sont proportionnelles aux différences d'étrangeté. Voyons les conséquences que peut avoir cette propriété sur le choix du groupe de symétrie  $G$ .

Il est évident, d'après les propriétés des représentations contragrédientes, que si une particule est classée dans une représentation donnée du groupe  $G$ , son antiparticule figurera à la place correspondante dans la représentation contragrédiente. Par conséquent, le triplet de mésons  $\pi$ , qui est invariant par conjugaison de charge, ne peut être placé que dans une représentation qui soit équivalente à sa contragrédiente (ceci ne constitue une restriction que pour  $SU_3$ , puisque toutes les représentations de  $C_2$  et  $G_2$  sont équivalentes à leur contragrédiente). De plus, cette propriété des mésons  $\pi$  implique que, si le supermultiplet auquel ils appartiennent contient une particule donnée, il doit aussi contenir l'antiparticule correspondante.

On en déduit alors que, si l'hypothèse sur les propriétés de transformation de  $I_1$  est valable et si les différences de masse sont données correctement par les calculs du premier ordre faits plus haut, les mésons  $\pi$  ne peuvent pas figurer dans une représentation de la forme  $D(K_1, 0)$  ou  $D(0, K_2)$ . En effet, dans une telle représentation, les différences de masse entre les particules sont proportionnelles aux différences d'étrangeté; si le coefficient de proportionnalité était nul, toutes les particules accompagnant le méson  $\pi$  dans ce supermultiplet auraient des masses égales au premier ordre en  $I_1$  et la théorie prédirait des mésons qui n'existent certainement pas; si au contraire le coefficient était différent de zéro, tous les mésons étranges classés avec les mésons  $\pi$  auraient une masse différente de celle de leur antiparticule, ce qui n'est pas plus satisfaisant.

On arrive donc à la conclusion que les mésons  $\pi$  ne peuvent figurer que dans une représentation équivalente à sa contragrédiente et telle que  $K_1$  et  $K_2$  soient différents de zéro. Ceci implique que  $G_2$  ne pourrait être le groupe de symétrie approchée des interactions fortes que s'il existait au moins 64 mésons pseudoscalaires, puisque la dimension de la représentation  $D(1,1)$  est 64 (Cf. référence [9], table VI). De même, le nombre minimum de mésons pseudoscalaires compatibles avec  $C_2$  est 16 (Cf. référence [9], table V). On peut donc éliminer  $C_2$  et  $G_2$ , à moins que l'une des hypothèses sur lesquelles est basé le raisonnement ci-dessus ne soit pas vérifiée.

Au contraire,  $SU_3$  doit être retenu, car ses représentations sont équivalentes à leur contragrédiente quand  $K_1 = K_2$  et  $D^{(8)}(1,1)$  peut très bien contenir les mésons pseudoscalaires.

C'est effectivement  $SU_3$  que l'on considère généralement comme pouvant être le groupe de symétrie approchée des interactions fortes. On classe les



huit baryons ( $N$ ,  $\Sigma$ ,  $\Lambda$  et  $\Xi$ ) <sup>(6)</sup>, de même que les huit mésons pseudoscalaires ( $K$ ,  $\pi$ ,  $\eta$  et  $\bar{K}$ ) dans un octet, c'est-à-dire dans la représentation  $D^{(8)}(1,1)$ . La formule II-51 est remarquablement bien vérifiée pour ces deux groupes de huit particules <sup>(7)</sup>. Assez paradoxalement, ceci pose d'ailleurs un problème de fond qui prend deux aspects principaux. En premier lieu, on est obligé de considérer que la symétrie unitaire, si elle existe, est assez fortement violée <sup>(8)</sup>, au moins aux énergies qui sont actuellement accessibles; on est donc surpris de constater que la formule II-51, basée sur le premier ordre de perturbation, donne des résultats aussi satisfaisants. Ensuite, on ne comprend pas bien encore comment les différentes composantes d'un supermultiplet, qui doivent toutes être confondues en un même pôle de la matrice  $S$  lorsque l'interaction est complètement symétrique, se séparent lorsque la partie non invariante de l'interaction croît (Cf. références [55] et [60]).

L'existence de neuf mésons vectoriels et le fait que ni le  $\omega$  ni le  $\varphi$  [27] ne vérifient la relation de masse, si on les adjoint au  $\rho$  et au  $K^*$  pour former un nouvel octet, obligent à postuler qu'il se produit une interférence entre le  $\varphi$  et le  $\omega$  (Cf. références [63] et [42]) : c'est une combinaison linéaire de ces deux états qui apparaîtrait dans l'octet des mésons vectoriels, la combinaison orthogonale formant alors un singulet. A l'aide de cette même hypothèse, on arrive à rendre compte du fait expérimental que  $\varphi$  ne se désintègre qu'avec une probabilité très faible en plusieurs mésons  $\pi$ . Il faut cependant remarquer que ce « mélange du  $\varphi$  et du  $\omega$  » n'a pas jusqu'à présent reçu de confirmation expérimentale, en particulier parce que l'« angle de mélange » n'est pas directement mesurable.

Bien que le moment angulaire intrinsèque et la parité des résonances  $Y_1^*$  (1 385 MeV) [52] [26] et  $\Xi_{1/2}^*$  (1 530 MeV) [65] ne soient pas encore connus de façon certaine, on groupe ces états, avec le  $N_{3/2}^*$  (1 238 MeV), dans un décuplet correspondant à  $D^{(10)}(3,0)$ , ce qui amène à prédire un nouveau baryon, de moment angulaire  $3/2$ , de spin isotopique 0 et d'étrangeté  $-3$ , que l'on désigne par  $\Omega^-$  ou  $Z^-$  [40] [44]. Si on applique à ce décuplet la formule II-51 <sup>(9)</sup>, on trouve que le  $\Omega^-$  devrait avoir une masse voisine de

<sup>(6)</sup> Il convient de noter que ceci suppose que les huit baryons ont les mêmes propriétés spatiales, ce qui n'est pas entièrement démontré; en particulier, le moment angulaire intrinsèque du  $\Xi$  n'a pas encore été mesuré.

<sup>(7)</sup> Pour les mésons, on applique II-51 aux carrés des masses. Ceci est plausible, puisque, par exemple, la masse des mésons intervient au carré dans le Lagrangien.

<sup>(8)</sup> Il suffit, pour s'en convaincre, de constater par exemple que les différences de masse entre membres d'un même supermultiplet sont considérables.

<sup>(9)</sup> Comme ici  $K_2 = 0$ , la formule de masse comporte seulement deux paramètres, c'est-à-dire que les différences de masse sont proportionnelles aux différences d'étrangeté.

1 675 MeV. Comme le seuil de l'état  $\bar{K} + \Xi$  est environ 1 820 MeV,  $\Omega^-$  ne peut se désintégrer par une interaction conservant l'étrangeté; on s'attend donc à ce qu'il soit métastable et à ce qu'il donne des états  $\bar{K} + \Lambda$ ,  $\bar{K} + \Sigma$  ou  $\pi + \Xi$ , auxquels il serait lié par les interactions faibles.

La considération des résonances baryoniques  $3/2^-$  conduit aussi à une prédiction. A  $N_{1/2}^*$  (1 512 MeV) et  $Y_0^*$  (1 520 MeV) [35], dont les nombres quantiques semblent bien établis, on adjoint  $Y_1^*$  (1 660 MeV) pour lequel on n'a que des résultats préliminaires [3] [8]. Pour que l'octet soit complet, il faudrait qu'il existe un baryon d'étrangeté  $-2$ , c'est-à-dire une résonance  $\Xi^*$  de spin isotopique  $1/2$  mais de parité opposée à celle du  $\Xi_{1/2}^*$  (1 530 MeV). La relation II-51 indique que la masse de ce nouveau  $\Xi^*$  devrait avoisiner 1 600 MeV [43].

Peut-être convient-il cependant de remarquer que, bien que l'existence de ces deux baryons lourds soit généralement considérée comme nécessaire si les interactions fortes admettent  $SU_3$  comme groupe de symétrie approchée, on retrouve ici le même genre de problèmes que ceux qui ont été soulevés plus haut à propos de la relation de masse dans les octets de baryons et de mésons pseudoscalaires (Cf. par exemple référence [37]).

C'est bien sûr à l'expérience qu'il faut s'adresser pour trancher la question au sujet des deux particules prédites. On ne possède pour le moment que des résultats préliminaires [11] obtenus dans des collisions  $K^- - N$ . Ceux-ci sont entièrement négatifs en ce qui concerne le  $\Omega^-$ , mais le maximum ainsi obtenu pour la section efficace de production dans les conditions de l'expérience n'est pas assez faible pour qu'on puisse vraiment conclure à la non-existence du  $\Omega^-$  : des sections efficaces de cet ordre de grandeur sont enregistrées dans la production d'autres isobares lorsque l'énergie est, comme ici, peu supérieure au seuil de la réaction <sup>(10)</sup>. Pour ce qui est du  $\Xi^*$ , les mêmes expériences indiquent la présence d'une telle résonance dans les voies de spin isotopique  $1/2$  avec une signification statistique assez considérable; cependant, les nombres quantiques spatiaux n'ont pas pu être mesurés jusqu'ici et de plus le pic se produit plus d'une centaine de MeV au-dessous de la valeur prédite de 1 600 MeV. Il est donc impossible, à l'heure actuelle, de se prononcer définitivement sur l'existence des deux baryons lourds prédits à partir de la symétrie unitaire.

Les questions qui viennent d'être évoquées ne sont en fait pas les seules

<sup>(10)</sup> Après que ce travail ait été terminé, le laboratoire de Brookhaven a obtenu la preuve de l'existence d'un baryon d'étrangeté  $-3$ , et de charge négative; ses propriétés spatiales n'ont pas encore pu être mesurées, mais sa masse est très voisine de la valeur prédite pour celle du  $\Omega^-$ .

que pose l'hypothèse de la « quasi-conservation » de  $SU_3$ . En particulier, on connaît d'autres résonances baryoniques que celles qui ont pu être classées dans ce schéma (A ce sujet, voir par exemple la référence [43]) et il faut aussi interpréter la présence de particules comme le  $K_{1/2}^*$  (725 MeV) [53].

La symétrie unitaire des interactions fortes est donc loin d'être prouvée à l'heure actuelle ; même si elle l'était, il resterait à comprendre le mécanisme de sa violation partielle. Toutefois, cette hypothèse a déjà connu des succès assez remarquables, en liaison avec les formules de masse. Pour ce qui nous concerne ici, la question reste donc posée : est-ce que les éventuelles particules élémentaires doivent être cherchées parmi les supermultiplets unitaires ?

### CHAPITRE III

#### LE MÉCANISME DU « BOOTSTRAP »

Le mot de « bootstrap » a été employé pour la première fois par Chew et Mandelstam [23]. A l'heure actuelle, il recouvre deux notions, liées certes, mais qu'il convient quand même de distinguer : la première est l'idée théorique générale de Chew (Cf. par exemple références [19] [21] et [22]), la deuxième désigne les tentatives qui ont été faites pour l'appliquer effectivement. Comme, dans ces tentatives pratiques, on est obligé de recourir à des approximations grossières, leur échec éventuel ne signifie pas forcément que la théorie sur laquelle elles sont basées doit être rejetée en bloc ; inversement, même si on obtient des succès relatifs dans des calculs particuliers, cela ne démontre pas la validité de l'idée dans son ensemble.

Il convient d'abord de rappeler rapidement les idées théoriques sur lesquelles est basé ce type de recherche, car elles sont extrêmement importantes pour le problème des particules élémentaires. Les tenants de cette théorie considèrent que l'entité fondamentale est la matrice  $S$ , et que c'est d'elle, et non de champs représentant les particules, qu'il faut partir. On postule certaines propriétés générales de cette matrice  $S$  et cela doit permettre de déduire tout le reste, en particulier l'existence et la masse des différentes particules à interactions fortes et même les symétries de ces interactions fortes. Malheureusement, si certains postulats, tels ceux d'invariance relativiste et d'unitarité de la matrice  $S$ , sont bien définis, les plus importants n'ont pas encore pu être formulés de façon claire : ce sont les fameux

principes d' « analyticité maximum » et de « force maximum ». Ce dernier avait été énoncé sans ambiguïté dans le cadre de la théorie des pôles de Regge [22] : il impliquait que la condition de Froissart sur les trajectoires de Regge [36] était en fait « saturée », c'est-à-dire qu'on postulait l'existence d'une trajectoire passant par la valeur 1 du moment angulaire pour  $s = 0$ . Évidemment, cette formulation du principe de « force maximum » va se ressentir des difficultés qui se font jour actuellement dans la théorie des pôles de Regge, comme d'ailleurs l'ensemble de cette « théorie de la matrice  $S$  », car elle s'appuyait résolument, dans sa dernière forme [21], sur l'hypothèse de l'existence de pôles dans le plan complexe du moment angulaire.

Mais ce qui nous intéresse au premier chef ici, c'est que cette ébauche de théorie des interactions fortes traite toutes les particules sur un pied d'égalité : elle considère chaque particule comme étant composée de l'ensemble des autres, le processus se « refermant » de manière autoconsistante. Plus précisément, cette idée pousse jusqu'à leurs ultimes conséquences logiques deux faits qui, jusqu'à présent, n'ont pas été mis en doute : le premier est que les amplitudes de diffusion présentent des pôles, dans le plan complexe de la variable  $s$ , chaque fois qu'il existe une particule, stable ou instable, qui a les mêmes nombres quantiques que les voies considérées ; le deuxième indique que les singularités « non physiques », ou « de gauche », d'une amplitude de diffusion sont dues aux états intermédiaires possibles dans les voies croisées de cette amplitude. Comme on sait que l'amplitude de diffusion est déterminée, à l'ambiguïté de Castillejo, Dalitz et Dyson [18] près, par son comportement à l'infini, le saut sur les coupures non physiques et la condition d'unitarité, on postule qu'aucun paramètre arbitraire n'intervient en fait dans ce calcul et que par conséquent les pôles correspondant aux particules liées à la voie directe sont créés uniquement par les singularités « de gauche », qui elles-mêmes sont engendrées par les états intermédiaires à une ou plusieurs particules pouvant intervenir dans les voies croisées. L'ensemble des particules s'engendre ainsi lui-même et on fait l'hypothèse que le processus est auto-consistant, c'est-à-dire que seule la liste des particules effectivement présentes dans la nature constitue une solution au problème ainsi posé. Il n'existerait donc pas de particules élémentaires.

Il va sans dire que les techniques actuelles ne permettent pas de s'attaquer au problème général, tel qu'il a été énoncé ci-dessus. On a par conséquent essayé de trouver, dans cet immense ensemble, un domaine limité qui soit, en première approximation, disconnecté du reste et auquel on puisse appliquer la condition d'auto-consistance. On tenterait ensuite d'étendre ce domaine de proche en proche et d'expliquer ainsi peu à peu les autres particules. Évidemment, on est obligé de supposer implicitement que les

processus à quatre particules, les seuls que l'on puisse traiter convenablement à l'heure actuelle, sont suffisants pour donner une idée correcte des phénomènes.

De nombreux calculs ont déjà été entrepris sur ces bases (Références [1, 2, 5, 6, 12, 17, 20, 31, 32, 33, 67, 69, 70]), par des méthodes souvent très différentes. Celle que nous considérerons ici a été proposée par Baker et Zachariassen [4] et appliquée en particulier par Zachariassen et Zemach [70] au problème du  $\rho$ . L'étude de cette méthode semble importante pour deux raisons principales : elle est d'abord parmi les plus simples et parmi celles qui nécessitent le moins de calculs numériques, ce qui permet de circonscrire plus facilement ses aspects importants; de plus, les conclusions de la référence [70] sont assez optimistes en ce qui concerne le  $\rho$  et il est intéressant d'approfondir la question et de voir ce que l'on peut attendre d'une telle méthode. C'est pourquoi ce chapitre sera consacré à l'application de cette méthode aux amplitudes de diffusion mésoniques dont les seuils sont les plus bas, c'est-à-dire les amplitudes de diffusion  $\pi - \pi$ ,  $\pi - K$  et  $K - K$ .

Dans le paragraphe III-A, les trois amplitudes précédentes seront étudiées dans l'approximation de l'unitarité élastique, ou approximation à une voie. On essaiera ensuite, dans le paragraphe III-B, de voir quelles modifications peut apporter la prise en considération d'une deuxième voie liée à la première par la condition d'unitarité. Enfin, le paragraphe III-C dégagera les conclusions générales que l'on peut tirer des deux précédents.

### III-A. — L'approximation à une voie.

**1. Description de la méthode.** — Les approximations utilisées dans le calcul de l'amplitude de diffusion sont de trois ordres :

*a)* La condition d'unitarité de la matrice  $S$  n'est pas remplie exactement : dans l'approximation à une voie, on écrit cette condition sous la forme dite « élastique », c'est-à-dire qu'on néglige les amplitudes de réaction devant l'amplitude de diffusion étudiée. L'unitarité élastique est correcte à basse énergie, jusqu'au seuil d'ouverture de la première voie inélastique; comme les résonances qu'on cherche à expliquer se produisent pour des énergies assez faibles, on peut espérer qu'elles sont surtout sensibles aux caractéristiques de la voie correspondante de plus basse énergie.

*b)* On approxime les singularités non physiques par celles que crée l'échange d'états à une seule particule dans les voies croisées. Cette façon de procéder peut être justifiée en invoquant les deux raisons suivantes : d'une part, l'analogie formelle entre les relations de dispersion et la loi de Coulomb

permet de penser que ce sont les singularités les plus proches de la région physique qui vont dominer le comportement de l'amplitude, d'autant plus que l'unitarité empêche les charges équivalentes de croître démesurément dans les régions éloignées; d'autre part, quand la particule échangée est instable, la résonance qui lui correspond doit donner l'essentiel de la contribution de l'amplitude croisée. Cette approximation est essentielle, dans ce genre de calcul, parce que c'est elle qui permet d'engendrer les états à une particule de la voie directe à partir des mêmes états de la voie croisée. Autrement dit, on suppose que le schéma du « bootstrap », qui sous sa forme générale fait intervenir tous les états intermédiaires à un nombre quelconque de particules, est approximativement valable pour les états à une seule particule.

c) On calcule l'amplitude de diffusion dans la voie directe par la méthode  $N/D$ , mais on ne la résout pas exactement. Plus précisément, on procède de la manière suivante.

On commence par calculer les diagrammes d'échange d'une particule dans les voies croisées. On projette le résultat sur l'état de spin isotopique et de moment angulaire qu'on veut étudier dans la voie directe. On obtient ainsi une fonction  $t_L$ , qui présente des coupures en dehors de la région physique de la voie directe.

On écrit ensuite l'amplitude de diffusion  $t$  cherchée sous la forme :

$$t(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{III-1})$$

où  $D(s)$  n'a que la coupure physique et  $N(s)$  les coupures de gauche, c'est-à-dire celles de  $t_L$ .

Sur la coupure de droite,  $N$  est réelle et :

$$\text{Im } D(s) = N(s) \text{Im } t^{-1}(s). \quad (\text{III-2})$$

Sur la coupure de gauche,  $D$  est réelle et :

$$\text{Im } N(s) = D(s) \text{Im } t(s) \quad (11). \quad (\text{III-3})$$

Le saut de  $t(s)$  sur la coupure de gauche est précisément celui de  $t_L$ . III-3 s'écrit donc :

$$\text{Im } N(s) = D(s) \text{Im } t_L(s), \quad (\text{III-4})$$

où  $t_L(s)$  a déjà été calculé.

---

(11) Si certaines coupures non physiques sont en dehors de l'axe réel, comme cela se produit dans le cas de masses inégales (Cf. par exemple le problème  $\pi - K$ ), l'équation III-3 relie les sauts de  $N$  et  $t$ , qui ne sont plus simplement leurs parties imaginaires.

D'autre part, la condition d'unitarité s'exprime par :

$$\text{Im } t^{-1}(s) = - \rho(s) \quad \text{sur la coupure physique} \quad (\text{III-5})$$

$\rho(s)$  étant une fonction connue. III-2 devient alors :

$$\text{Im } D(s) = - \rho(s) N(s). \quad (\text{III-6})$$

Nous verrons plus loin qu'il est nécessaire d'effectuer une soustraction pour que l'intégrale de dispersion donnant  $D(s)$  converge. Mais ceci n'introduit pas de constante arbitraire, puisque, dans l'équation III-1, on a remplacé une fonction  $t(s)$  par le rapport de deux fonctions  $N$  et  $D$ . On peut donc normaliser  $D$  à 1 en un point  $s_0$  sans restreindre la généralité du problème :

$$D(s) = 1 - \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \rho(s') \frac{N(s') ds'}{(s' - s)(s' - s_0)} \quad (\text{III-7})$$

( $s_1$  est le seuil de la diffusion dans la voie directe).

Jusqu'à présent, les relations écrites ne contiennent que les approximations *a*) et *b*) indiquées plus haut. III-4 et III-7 donnent un système d'équations intégrales couplées pour les fonctions  $N(s)$  et  $D(s)$ . L'approximation *c*) consiste à ne garder que la première itération comme solution approchée de ces équations intégrales. Il est évident que, si on arrête le processus d'itération, il faut le faire à un moment où l'équation III-7 est vérifiée entre les solutions approchées pour  $N$  et  $D$ , puisque c'est cette équation qui garantit la condition d'unitarité.

On porte donc la première approximation à l'équation III-7, c'est-à-dire  $D(s) = 1$ , dans la relation III-4 :

$$\text{Im } N(s) = \text{Im } t_L(s). \quad (\text{III-8})$$

Si  $\text{Im } t_L(s)$  tend vers zéro quand  $s \rightarrow -\infty$  sur la coupure de gauche, III-8 entraîne :

$$N(s) = t_L(s), \quad (\text{III-9})$$

puisque l'on peut alors écrire la même relation de dispersion non soustraite, avec la même fonction spectrale, pour  $N$  et pour  $t_L$ . En fait, on verra plus loin que, comme les particules considérées seront des mésons vectoriels,  $\text{Im } t_L(s)$  tendra vers une constante à l'infini. Ceci obligerait à effectuer une soustraction dans la relation de dispersion pour  $N$  et donc à introduire une constante arbitraire dans le problème. Mais, pour les moments angulaires supérieurs ou égaux à 1, il suffit d'utiliser la méthode  $N/D$  pour  $\frac{t}{q^{2l}}$  au lieu de  $t$  ( $q$  étant l'impulsion dans le système du centre de masse de la

voie directe) pour ne pas avoir besoin de cette constante arbitraire (Cf. référence [33]). Ceci n'est bien sûr pas possible pour l'onde S, aussi ne considérerons-nous que les moments angulaires supérieurs à zéro. Cependant, la formule obtenue en appliquant brutalement l'équation III-9 est formellement correcte :

$$t(s) = \frac{t_L(s)}{1 - \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \rho(s') \frac{t_L(s')}{(s' - s)(s' - s_0)} ds'} \quad (\text{III-10})$$

Il reste bien sûr à déterminer la position du point de soustraction  $s_0$ . Il est d'abord bien évident que, puisqu'on pose  $D = 1$  en ce point, il faut que  $D$  y soit régulière :  $s_0$  ne doit pas être choisi sur la coupure physique. Mais ce n'est pas tout : III-10 indique que  $t(s_0) = t_L(s_0)$ . Or, comme  $t_L$  est en fait l'amplitude de diffusion dans les voies croisées,  $t(s)$  devrait être égale à  $t_L(s)$  sur toute la coupure de gauche. Autrement dit, cette solution approchée de la méthode N/D ne possède pas la symétrie de croisement. Il est donc indiqué de choisir  $s_0$  de manière à satisfaire approximativement cette symétrie de croisement. Ceci conduit à placer  $s_0$  au début de la coupure de gauche (pour une discussion détaillée de ce point, voir l'appendice de la référence [32]).

On a maintenant tous les éléments pour rechercher la résonance dans la voie directe. La masse  $m$  de cette résonance sera obtenue par l'équation :

$$\text{Re } D(m^2) = 1 - \frac{m^2 - s_0}{\pi} \text{P} \int_{s_1}^{\infty} \rho(s') \frac{t_L(s') ds'}{(s' - m^2)(s' - s_0)} = 0 \quad (\text{III-11})$$

On identifie ensuite III-10 à la formule de Breit-Wigner. Au voisinage de  $s = m^2$ , on écrit :

$$\text{Re } D(s) \simeq (s - m^2) [\text{Re } D(s)]'_{s=m^2} \quad (\text{III-12})$$

où  $[\text{Re } D(s)]'$  désigne la dérivée de  $\text{Re } D(s)$  par rapport à  $s$ . Si  $\Gamma$  est la largeur de la particule cherchée, le dénominateur de la formule de Breit-Wigner est :

$$s - m^2 + i\Gamma m. \quad (\text{III-13})$$

L'identification donne donc :

$$\Gamma = \frac{1}{m} \frac{\text{Im } D(m^2)}{[\text{Re } D(s)]'_{s=m^2}} \quad (\text{III-14})$$

d'où l'on peut tirer si nécessaire la constante de couplage ou « largeur réduite » de la résonance.

L'intégrale figurant dans  $\text{Re } D(s)$ , ainsi que sa dérivée par rapport à  $s$ , peuvent être évaluées numériquement (c'est une IBM 7090 qui a été utilisée pour effectuer ces calculs).



2. **Étude de l'amplitude de diffusion  $\pi - \pi$ .** — Comme l'ont déjà fait remarquer Chew et Mandelstam [23], c'est certainement l'amplitude  $\pi - \pi$  qui a le plus de chances de fournir ce petit domaine approximativement autoconsistant dont nous avons parlé plus haut, puisque les deux voies croisées sont identiques à la voie directe. Effectivement, la référence [70] laisse espérer que le  $\rho$  s'engendre lui-même en première approximation. Nous allons d'abord étudier ce problème plus en détail et nous regarderons ensuite les conséquences que cette autogénération du  $\rho$  peut avoir dans les autres voies de spin isotopique et de moment angulaire.

L'amplitude de diffusion T est définie à partir de la matrice S par :

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle + 4i \frac{T}{q^2 + 1} \delta^4(P_i - P_f), \quad (\text{III-15})$$

$P_i$  et  $P_f$  sont les quadri-impulsions totales des états initial  $i$  et final  $f$ ,  $q$  est l'impulsion dans le système du centre de masse de la voie directe, et la masse du méson  $\pi$  a été prise comme unité <sup>(12)</sup>.

Dans ces conditions, si on désigne par  $t$  l'amplitude de diffusion dans un état donné de spin isotopique et de moment angulaire, la condition d'unitarité élastique s'écrit :

$$Jm t^{-1} = - \frac{q}{\sqrt{s}} \quad (\text{III-16})$$

avec :

$$s = 4(q^2 + 1). \quad (\text{III-17})$$

1) *L'état I = J = 1. Autogénération du  $\rho$ .* — On commence par calculer le diagramme d'échange d'un  $\rho$  dans la voie croisée (fig. 4). La normalisation de la constante de couplage étant définie par le hamiltonien phénoménologique :

$$H = f_{\pi\rho\mu} \vec{\pi} \times \partial_{\mu} \vec{\pi}, \quad (\text{III-18})$$

on obtient, dans le système du centre de masse de la voie directe :

$$T = \frac{1}{16} \frac{f_{\pi}^2}{(2\pi)^2} \varepsilon_{\alpha\gamma i} \varepsilon_{\beta\delta i} \frac{2q^2(1 + \cos \theta) + s}{2q^2(1 - \cos \theta) + m_{\rho}^2} \quad (\text{III-19})$$

où  $\theta$  est l'angle de diffusion.

(12) Le facteur habituel  $\frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}}$ , où les  $\omega$  sont les énergies des quatre mésons  $\pi$ , se réduit ici à  $\frac{1}{q^2 + 1}$  car tous les  $\omega$  sont égaux à  $\sqrt{q^2 + 1}$ . On a de plus remplacé  $2i$  par  $4i$  à cause de l'identité des particules diffusées.

Il s'agit ensuite de projeter III-19 sur l'état  $I = J = 1$  de la voie directe. Le facteur de spin isotopique se calcule facilement :

$$\langle I = 1 \mid \varepsilon_{\alpha\gamma i} \varepsilon_{\beta\delta i} \mid I = 1 \rangle = 1. \quad (\text{III-20})$$

Pour effectuer la projection sur les différentes ondes partielles, on peut utiliser la formule :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(u) \frac{a+u}{b-u} du = 2aQ_l^1(b) + \frac{2(l+1)}{2l+1} Q_{l+1}(b) + \frac{2l}{2l+1} Q_{l-1}(b) \quad (\text{III-21})$$

où les  $Q_l$  sont les fonctions de Legendre de deuxième espèce.

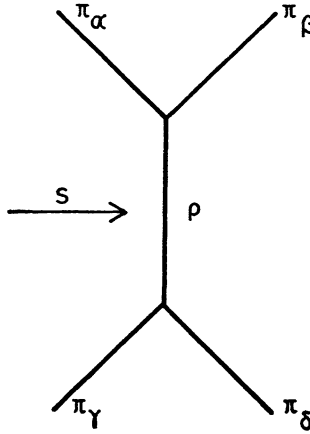


FIG. 4.

On pose alors :

$$\begin{aligned} a &= 1 + s/2q^2 \\ b &= 1 + m_\rho^2/2q^2 \end{aligned} \quad (\text{III-22})$$

et, en multipliant par 2 pour tenir compte des deux voies croisées identiques, on obtient :

$$t_1(s, m_\rho^2) = \frac{f_\pi^2}{4\pi} F_1(s, m_\rho^2)$$

avec :

$$F_1(s, m_\rho^2) = \frac{1}{4} (a + b) \left[ b \operatorname{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| - 2 \right]. \quad (\text{III-23})$$

Posons :

$$\begin{aligned} I_1(s, m_\rho^2, s_0) &= \frac{s-s_0}{\pi} P \int_4^\infty \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{s'}} \frac{F_1(s', m_\rho^2)}{(s'-s)(s'-s_0)} ds'. \\ I_1'(s, m_\rho^2) &= \frac{\partial}{\partial s} I_1(s, m_\rho^2, s_0). \end{aligned} \quad (\text{III-24})$$

Si on veut que la résonance dans la voie directe soit précisément la même particule que celle qui a produit la force, on obtient le système suivant d'équations d'autoconsistance :

$$\frac{f_{\pi}^2}{4\pi} = 1/I_1(m_p^2, m_p^2, s_0) \quad (\text{III-25-a})$$

$$\frac{f_{\pi}^2}{4\pi} = \frac{3}{2} \frac{F_1(m_p^2, m_p^2)}{\left(\frac{m_p^2}{4} - 1\right) I_1'(m_p^2, m_p^2)}. \quad (\text{III-25-b})$$

Quand  $s$  est inférieur au seuil, le symbole de valeur principale peut être supprimé dans la définition de  $I_1$ .  $I_1$  et  $I_1'$  sont toutes deux continues pour  $s = 4$ , car  $F_1(s, m_p^2)$  s'annule comme  $q^2 = \frac{s}{4} - 1$  quand  $s$  tend vers 4.

III-25 doit être considéré comme un système de deux équations pour les deux inconnues  $\frac{f_{\pi}^2}{4\pi}$  et  $m_p^2$ . Nous allons essayer de résoudre graphiquement ce système dans le plan  $\left(m_p^2, \frac{f_{\pi}^2}{4\pi}\right)$ .

Il est facile de voir que III-25-b est indépendante du point de soustraction  $s_0$ . Le deuxième membre a une valeur finie pour  $m_p^2 = 4$ , à cause de la propriété de  $F_1$  rappelée ci-dessus. Mais  $F_1(s, m_p^2)$  a un point de branchement logarithmique, correspondant à la coupure de gauche, pour  $b = -1$ , c'est-à-dire :  $s = -m_p^2 + 4$ . Par conséquent  $F_1(m_p^2, m_p^2)$  devient infinie pour  $m_p^2 = 2$ . Dans la figure 5, la courbe numérotée 1 représente  $\frac{f_{\pi}^2}{4\pi}$  comme fonction de  $m_p^2$  donnée par l'équation III-25-b.

Au contraire, III-25-a dépend de  $s_0$ . Les considérations esquissées au paragraphe III-A-1 amènent à placer le point de soustraction entre  $s_1' = 4 - m_p^2$  et  $s_2' = 4 - 4m_p^2$ . On écrira :

$$s_0 = 4 - \alpha m_p^2, \quad (\text{III-26})$$

$\alpha$  est un paramètre qu'on prendra successivement égal à 1 (c'est-à-dire  $s_0 = s_1'$ ), 2, 3 et 4 (c'est-à-dire  $s_0 = s_2'$ ). Dans la figure 5, on a désigné par 2- $\alpha$  la courbe représentant III-25-a pour une de ces valeurs de  $\alpha$ .

III-24 montre que  $I_1(s, m_p^2, s_0)$  s'annule pour  $s = s_0$ . Par conséquent, la valeur de  $f_{\pi}^2/4\pi$  donnée par l'équation III-25-a tend vers l'infini quand  $m_p^2$  tend vers  $s_0$ , c'est-à-dire que, compte tenu de III-26, la courbe 2- $\alpha$  aura une asymptote pour  $m_p^2 = \frac{4}{1 + \alpha}$ .

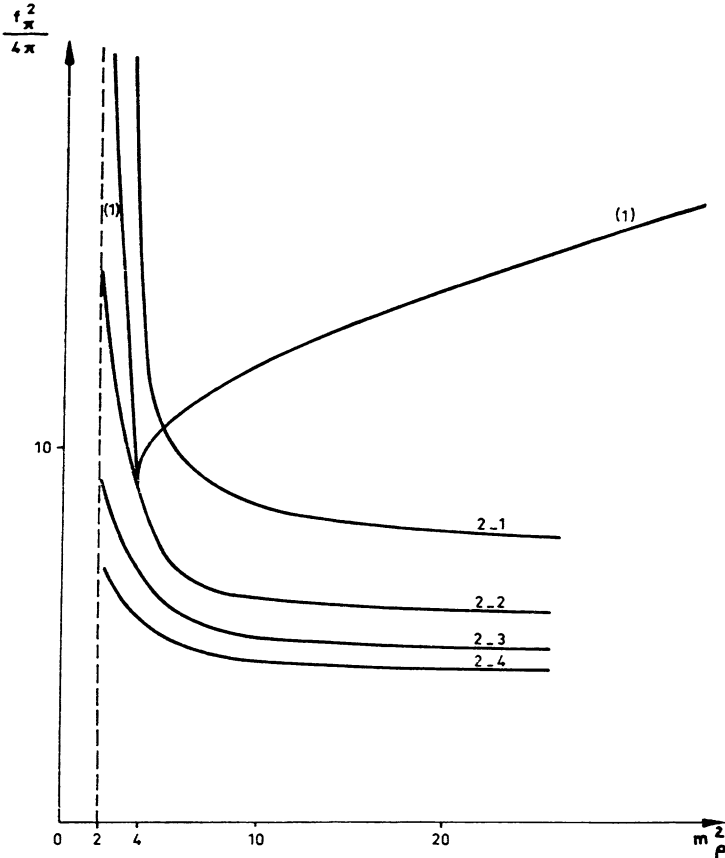


FIG. 5.

Le cas  $\alpha = 1$  correspond exactement au choix de  $s_0$  fait par Zachariasen et Zemach [70] et on obtient bien la même solution qu'eux <sup>(13)</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_\rho \simeq 320 \text{ MeV (valeur expérimentale : 750 MeV).} \\ f_\pi^2/4\pi \simeq 10 \quad ( \gg \quad \gg \quad : 2 \text{ à } 2,5). \\ \Gamma \simeq 50 \text{ MeV ( } \gg \quad \gg \quad : 100 \text{ MeV).} \end{array} \right. \quad (\text{III-27})$$

Cependant, la figure 5 montre clairement que l'existence d'une solution auto-consistante dépend de façon cruciale de la position de  $s_0$ . Ceci est dû au fait que la courbe 1 a un point de rebroussement pour  $m_\rho^2 = 4$ . Si

<sup>(13)</sup> En fait, la référence [70] contient une erreur d'un facteur 4 dans les constantes de couplage (Lettre personnelle de Zachariasen à Capps [17]).

$s_0$  est pris trop loin sur la coupure de gauche (mais cependant dans la région « permise »  $s'_2 \leq s_0 \leq s'_1$ ), le système III-25 n'a pas de solution; c'est le cas pour  $\alpha = 3$  et 4. Au contraire, si  $s_0$  est choisi au début de la coupure de gauche, on obtient des solutions; on en trouve même deux, sauf pour  $\alpha = 1$  : l'une correspond à une résonance de paramètres proches des valeurs III-27, l'autre se trouve au-dessous du seuil et devrait donner un état lié.

Ces résultats appellent les remarques suivantes :

En premier lieu, la solution III-27 est assez éloignée des paramètres expérimentaux du  $\rho$ . En fait, ceci ne devrait pas être considéré comme un défaut rédhibitoire, car, étant donné les approximations faites, on ne pouvait pas s'attendre à un accord quantitatif tant soit peu convenable avec l'expérience.

Ce qui est plus grave, c'est que l'existence même des solutions dépend de la position du point de soustraction. D'une part, ce fait en lui-même jette un doute sur la validité de la solution approchée des équations N/D, puisque la solution exacte ne doit pas dépendre de  $s_0$  (on peut normaliser D à 1 en n'importe quel point où cette fonction est réelle sans changer l'amplitude de diffusion  $t(s)$ , comme cela a déjà été remarqué au paragraphe III-A-1). D'autre part, il est difficile d'affirmer, sur la base des calculs qui précèdent, que le  $\rho$  s'engendre lui-même, en première approximation, puisque les solutions auto-consistantes disparaissent pour des positions de  $s_0$  que la méthode considère comme permises.

Il faut cependant constater que, qualitativement, les résultats précédents sont corrects : la force due à l'échange d'un  $\rho$  entre deux mésons  $\pi$  est attractive dans l'état  $I = J = 1$  et les calculs effectués dans ce paragraphe n'infirment pas l'hypothèse selon laquelle c'est principalement cette force qui est responsable de l'existence du  $\rho$ . Par exemple, rien ne s'oppose *a priori* à ce que la région permise au point de soustraction soit beaucoup plus limitée qu'on ne le pensait : la première itération n'est peut-être une bonne approximation de la solution exacte de la méthode N/D que pour  $s_0 = s'_1$ .

En tout état de cause, les considérations développées dans ce paragraphe ne permettent pas de trancher de façon définitive le problème de l'auto-génération du  $\rho$ .

2) *Les autres états de spin isotopique et de moment angulaire.* — Essayons donc de mettre à nouveau cette hypothèse à l'épreuve en cherchant ses conséquences en ce qui concerne les autres voies de la diffusion  $\pi - \pi$ . On postule donc que le  $\rho$  est effectivement une particule auto-consistante, par le mécanisme étudié au paragraphe précédent. Ceci suppose que la force due au  $\rho$ , c'est-à-dire le diagramme de la figure 4, domine aussi dans

les autres voies directes. En effet, dans le cas contraire, ces autres voies auraient dû être prises en considération dans le calcul de l'amplitude  $I = J = 1$ . Quelles sont donc les conséquences de l'échange d'un  $\rho$  sur les autres états de spin isotopique et de moment angulaire ?

Cette question est posée dans l'esprit des considérations générales développées plus haut : si nous avons réussi à expliquer l'existence du  $\rho$ , il nous faut maintenant poursuivre, et tenter d'expliquer aussi les autres résonances  $\pi - \pi$ . Il est bien évident que, du point de vue quantitatif, une solution aussi mauvaise que III-27 ne pourra pas donner de bien meilleurs résultats dans les autres voies. Mais il est intéressant de « jouer le jeu », pour essayer de voir si des techniques telles que celles que nous étudions sont sur la bonne route.

La première remarque est d'ordre qualitatif et a déjà été faite par Chew [21] : la force due au  $\rho$  est répulsive dans la voie directe  $I = J = 2$ , car :

$$\langle I = 2 | \varepsilon_{\alpha\gamma i} \varepsilon_{\beta\delta i} | I = 2 \rangle = -1. \quad (\text{III-28})$$

En d'autres termes, la partie principale de l'intégrale du dénominateur de III-10 est négative et  $\text{Re } D$  ne peut pas s'annuler. Expérimentalement, on n'a pas vu de résonance  $\pi - \pi$  de spin isotopique 2.

Pour les états  $I = 0, J = 2$  et  $I = 1, J = 3$  <sup>(14)</sup>, on procède de façon analogue à ce qui a été fait au paragraphe précédent, sauf que maintenant  $m_\rho^2$  et  $f_\pi^2/4\pi$  sont considérés comme des données. Les  $t_L$  nécessaires peuvent facilement être obtenus à partir de III-19, III-21, III-28 et de la formule :

$$\langle I = 0 | \varepsilon_{\alpha\gamma i} \varepsilon_{\beta\delta i} | I = 0 \rangle = 2. \quad (\text{III-29})$$

On trouve :

— pour  $I = 0, J = 2$  :

$$t_L = \frac{f_\pi^2}{4\pi} \frac{1}{4} (a + b) \left[ (3b^2 - 1) \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| - 6b \right]; \quad (\text{III-30})$$

— pour  $I = 1, J = 3$  :

$$t_L = \frac{f_\pi^2}{4\pi} \frac{1}{4} (a + b) \left[ \frac{1}{2} (5b^3 - 3b) \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| - 5b^2 + \frac{4}{3} \right]. \quad (\text{III-31})$$

Un calcul numérique facile donne les résultats suivants. Dans la voie  $I = 0, J = 2$ , une résonance est prédite aux environs de 420 MeV, avec une largeur de 70 MeV. Comme on pouvait s'y attendre, la masse est beaucoup trop faible si on identifie cette résonance au  $f^0$  [15]; par contre, la largeur

<sup>(14)</sup> Pour les raisons indiquées plus haut, on n'applique pas la méthode au cas  $J = 0$ .

est du bon ordre de grandeur <sup>(15)</sup>. Dans l'amplitude  $I = 1, J = 3$ , un calcul similaire donne  $m \simeq 900$  MeV et  $\Gamma \simeq 600$  MeV. Si la remarque précédente sur la largeur est correcte, on peut considérer qu'on ne trouve pas de résonance dans cette amplitude, puisque l'énormité de sa largeur rendrait impossible sa détection. De toute façon, la méthode utilisée n'est valable que pour  $\Gamma \ll m$  et un résultat comme le précédent est sûrement illogique <sup>(16)</sup>.

On constate donc que les résultats de ce modèle simple de prédominance du  $\rho$  dans la voie croisée, bien qu'ils soient quantitativement peu satisfaisants (et, comme cela a déjà été indiqué plus haut, il aurait été étonnant qu'il en fût autrement), rendent cependant compte de façon qualitative correcte du comportement de l'amplitude de diffusion  $\pi - \pi$  : on ne prédit de résonance que dans les états  $I = J = 1$  et  $I = 0, J = 2$ , où existent effectivement le  $\rho$  et le  $f^0$ .

Il est par conséquent intéressant d'essayer d'étendre ce genre de considérations aux autres amplitudes mésoniques.

**3. La diffusion  $\pi - K$  et le  $K^*$ .** — Il est nécessaire de préciser tout d'abord que nous allons nous occuper ici de la résonance  $\pi - K$  à 885 MeV, de largeur voisine de 50 MeV, de spin 1 et de spin isotopique 1/2 [24]. Il nous est impossible, pour la raison indiquée au paragraphe III-A-1, d'étudier la résonance de spin isotopique 1/2 qui apparaît vers 725 MeV et qui semble avoir un moment angulaire intrinsèque nul (Cf. par exemple référence [53]).

Nous considérerons donc l'amplitude de diffusion  $\pi - K$  dans la voie  $I = 1/2, J = 1$ . Les voies croisées sont d'une part  $\pi + K \rightarrow \pi + K$ , qui admet le  $K^*$  lui-même comme état intermédiaire à une particule et d'autre part  $\pi + \pi \rightarrow K + \bar{K}$ , où le  $\rho$  peut intervenir. Les diagrammes utilisés pour calculer les forces sont donc ceux de la figure 6, et les constantes de couplage sont définies dans le hamiltonien phénoménologique :

$$H = \left[ f_{\pi\pi} \vec{\pi} \times \partial_{\mu} \vec{\pi} + i f_K \left( (\partial_{\mu} K^+) \frac{\vec{\tau}}{2} K - K^+ \frac{\vec{\tau}}{2} \partial_{\mu} K \right) \right] \cdot \vec{\rho}_{\mu} + \gamma_{K^*} [i K_{\mu}^{*+} \vec{\tau} \cdot (K \partial_{\mu} \vec{\pi} - \vec{\pi} \partial_{\mu} K) + \text{c. h.}] \quad (\text{III-32})$$

(où c. h. signifie « conjugué hermitique »).

<sup>(15)</sup> Il convient quand même de remarquer que, si la masse est trop faible, le facteur d'espace de phase sera beaucoup trop petit, ce qui implique une constante de couplage beaucoup trop grande.

<sup>(16)</sup> Il est intéressant de signaler qu'on obtient des conclusions tout à fait analogues si on recommence le calcul avec la masse expérimentale du  $\rho$ .

Le calcul est légèrement plus compliqué que dans le cas de la diffusion  $\pi - \pi$ , à cause de l'inégalité des masses du  $\pi$  et du K.

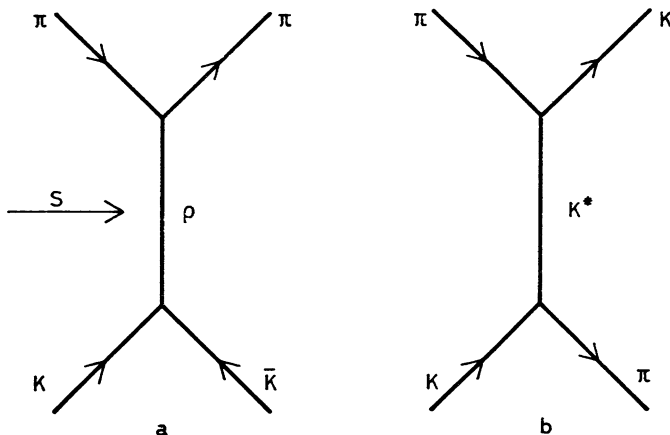


FIG. 6.

On trouve, après projection sur l'état  $I = \frac{1}{2}, J = 1$  :

$$t_L = -\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} F(\beta_{K^*}, \alpha_{K^*}) - \frac{f_\pi f_K}{4\pi} F(\beta_\rho, \alpha_\rho) \tag{III-33}$$

avec :

$$F(b, a) = \frac{1}{4} (a + b) \left[ b \operatorname{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| - 2 \right]. \tag{III-34}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} \omega_\pi &= \sqrt{p^2 + m_\pi^2} \\ \omega_K &= \sqrt{p^2 + m_K^2} \end{aligned} \tag{III-35}$$

où  $p$  est l'impulsion dans le système du centre de masse de la voie directe, les  $\alpha$  et  $\beta$  sont donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{K^*} &= 1 + \frac{s}{2p^2} - \frac{(m_K^2 - m_\pi^2)^2}{2p^2 m_{K^*}^2} \\ \beta_{K^*} &= 1 + \frac{m_{K^*}^2}{2p^2} - \frac{(\omega_K - \omega_\pi)^2}{2p^2} \\ \alpha_\rho &= 1 + \frac{2\omega_K \omega_\pi}{p^2} \\ \beta_\rho &= 1 + \frac{m_\rho^2}{2p^2} \end{aligned} \right. \tag{III-36}$$



L'impulsion  $p$  est liée à la variable  $s$  par la relation :

$$p^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_K + m_\pi)^2][s - (m_K - m_\pi)^2]. \quad (\text{III-37})$$

Ce problème se distingue de celui du  $\rho$  (§ III-A-2) de façon essentielle : la force due au  $K^*$  (premier terme de III-33) est répulsive dans l'état  $I = 1/2$ ,  $J = 1$ , c'est-à-dire que le  $K^*$  ne peut de toute façon pas s'engendrer lui-même; la présence du  $\rho$  est donc cruciale si on veut expliquer le  $K^*$  par l'échange d'états à une particule; mais d'autre part, cette présence introduit dans les calculs un paramètre,  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$ , ce qui interdit une véritable solution autoconsistante du problème.

Il faut d'ailleurs remarquer que le signe de la force due à l'échange d'un  $\rho$  (deuxième terme de III-33) n'est pas connu, car il dépend de la phase relative de  $f_\pi$  et  $f_K$ , qui n'a pas été déterminée expérimentalement. Avec les conventions définies par la formule III-32, il est nécessaire que le produit  $f_\pi f_K$  soit négatif si l'on veut pouvoir engendrer le  $K^*$  par les diagrammes d'échange à une seule particule. Il est intéressant de noter que la théorie de Sakurai [62] sur le couplage universel du  $\rho$  prédit effectivement :

$$f_K = -f_\pi.$$

En supposant que  $f_\pi f_K$  soit effectivement négatif, on doit encore postuler que la force créée par le  $\rho$  est plus importante que celle due au  $K^*$  lui-même. Ceci est d'ailleurs confirmé par le fait que le signe des forces est opposé dans la voie  $I = 3/2$ ,  $J = 1$  : la force due au  $K^*$  est attractive, celle due au  $\rho$  répulsive si  $f_\pi f_K$  est négatif. Il faut donc ici aussi que la deuxième l'emporte, puisqu'aucune résonance n'a été trouvée dans l'état de spin isotopique  $3/2$ .

On peut donc étendre à l'amplitude  $\pi - K$  le modèle de « prédominance du  $\rho$  » utilisé dans la diffusion  $\pi - \pi$ , c'est-à-dire négliger en première approximation le diagramme d'échange d'un  $K^*$  (fig. 6b). Mais il est facile d'inclure aussi ce dernier diagramme et il est intéressant de comparer les résultats obtenus dans les deux cas.

Comme indiqué plus haut, on a trois inconnues (la masse du  $K^*$   $m_{K^*}$ , sa largeur  $\Gamma$  et  $\frac{f_\pi f_K}{\pi}$ ) pour seulement deux équations. On obtient donc une famille de solutions. Le plus commode est de chercher les valeurs de  $\Gamma$  et de  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  qui correspondent à une position donnée de la résonance. C'est pour-

quoï la figure 7 représente la relation trouvée entre  $\Gamma$  et  $m_{k^*}^2$  : la courbe 1 correspond au cas où on ne tient compte que de l'échange du  $\rho$ , la courbe 2

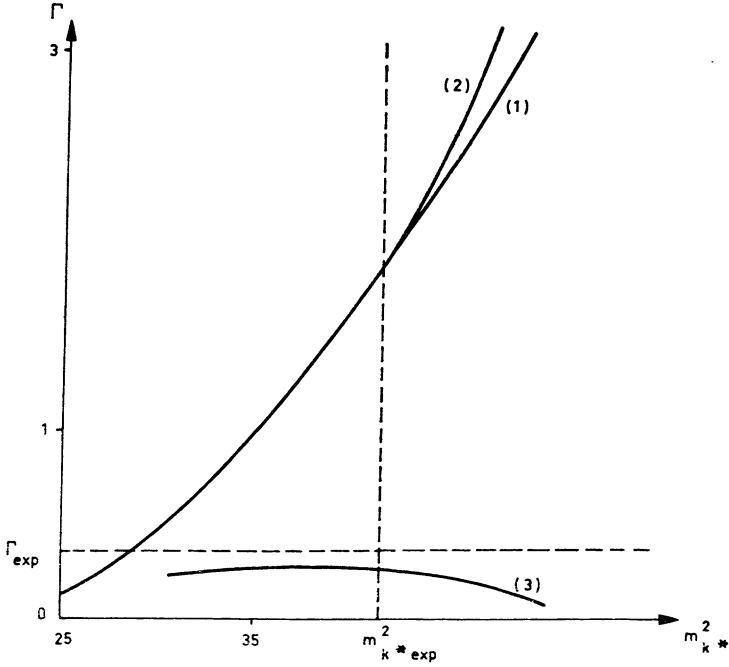


FIG. 7.

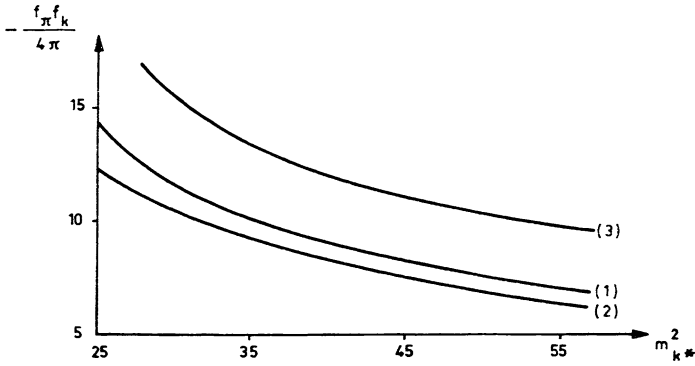


FIG. 8.

au cas où on garde les deux termes dans III-33. Il convient de remarquer que cette relation largeur-masse, qui vient de l'équation III-14, est indépendante de la position du point de soustraction. De même, la figure 8

indique les différentes valeurs de  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  en fonction de  $m_{K^*}^2$ . Ces valeurs, étant tirées de l'équation III-11, dépendent du point de soustraction. C'est pourquoi les courbes 1 et 2 de la figure 8 correspondent au modèle où l'échange du  $K^*$  est négligé, mais avec des positions différentes de  $s_0$ , à  $-8m_\pi^2$  et  $-15m_\pi^2$  respectivement; la courbe 3 tient compte des deux forces, avec un point de soustraction au début de la coupure de gauche due au  $K^*$  (17).

L'interprétation de ces résultats est rendue plus délicate par la présence d'un paramètre supplémentaire, mais on peut quand même faire les remarques suivantes.

En premier lieu, l'accord qualitatif avec l'expérience demeure, à condition de supposer que  $f_\pi f_K$  est négatif et que la force due au  $\rho$  prédomine sur celle qui vient de l'échange du  $K^*$  : on prévoit alors une résonance dans l'état  $I = 1/2, J = 1$ , que l'on peut identifier avec le  $K^*$  lui-même, et un comportement non résonnant dans la voie de spin isotopique  $3/2$ .

L'adjonction de la force due à l'échange du  $K^*$  ne modifie que légèrement les conclusions du modèle à « prédominance du  $\rho$  ». Il ne faut cependant pas se leurrer sur l'origine de ce fait : on force  $\text{Re } D$  à s'annuler pour des valeurs raisonnables de  $m_{K^*}^2$  et cela seul suffit à assurer la prépondérance de la force attractive (voir plus bas la remarque sur les valeurs de  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$ ).

Pour essayer d'avoir une idée de la valeur quantitative des résultats obtenus, on peut considérer les valeurs numériques suivantes : si on porte, dans la figure 7, la masse expérimentale de 885 MeV ( $m_{K^*}^2 \simeq 41 m_\pi^2$ ), on trouve une largeur environ quatre fois trop grande; si au contraire, on choisit la valeur expérimentale de  $\Gamma$  ( $\Gamma \simeq 0,36 m_\pi$ ), on trouve une masse d'environ 750 MeV.

Par contre, les valeurs de  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  nécessaires pour produire la résonance sont certainement beaucoup trop grandes en valeur absolue. Évidemment,  $f_K$  n'est pas connu expérimentalement, mais on ne s'attend pas à ce qu'il soit assez grand pour que  $\left| \frac{f_\pi f_K}{4\pi} \right|$  soit de l'ordre de 10, alors que  $\frac{f_\pi^2}{4\pi}$  vaut entre 2 et 2,5. On retrouve ici la même caractéristique que dans le problème  $\pi - \pi$  (Cf. formule III-27), et avec apparemment le même facteur 4 entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience.

---

(17) Pour une discussion détaillée de la position du point de soustraction dans le problème  $\pi - K$ , voir référence [32].

Enfin, on constate, comme dans le cas de l'amplitude  $\pi - \pi$ , que les résultats donnés par l'équation III-11 sont trop sensibles à la position du point de soustraction. Le rôle de  $s_0$  est bien sûr moins crucial dans le cas présent mais c'est que les caractéristiques du problème sont totalement différentes.

**4. Considérations qualitatives sur l'amplitude de diffusion  $K - K$ .** — Comme la diffusion  $K - K$  va être étudiée expérimentalement dans un proche avenir <sup>(18)</sup>, il est intéressant de chercher quelles sont les prédictions de la méthode du « bootstrap » quant à d'éventuelles résonances mésoniques d'étrangeté 2. Mais les paragraphes précédents montrent qu'on peut au plus attendre des résultats qualitativement corrects. Nous nous contenterons donc de calculer les forces et de chercher leur signe dans les différentes voies de spin isotopique et de moment angulaire.

Nous considérons donc le processus suivant :



où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des indices de spin isotopique pouvant prendre les valeurs 1 et 2 (1 pour  $K^+$ , 2 pour  $K^0$ ). Les deux voies croisées sont identiques entre elles et comportent la diffusion élastique de  $K$  et  $\bar{K}$ . Elles admettent le  $\rho$  et le  $\omega$  comme états intermédiaires à une particule. Nous calculons donc les forces intervenant dans le problème III-38 en utilisant les diagrammes de la figure 9 et le hamiltonien phénoménologique :

$$\begin{aligned} H = & if_\kappa \left[ (\partial_\mu K^+) \frac{\vec{\tau}}{2} K - K^+ \frac{\vec{\tau}}{2} \partial_\mu K \right] \cdot \vec{\rho}_\mu \\ & + if_\omega [(\partial_\mu K^+) K - K^+ \partial_\mu K] \omega_\mu. \end{aligned} \quad (\text{III-39})$$

En conservant la même définition III-15 de l'amplitude de diffusion que dans le cas  $\pi - \pi$ , on obtient facilement, dans le système du centre de masse de la voie directe :

$$T = - \frac{1}{16} \frac{f_\kappa^2}{(2\pi)^2} \frac{\vec{\tau}_{\gamma\alpha} \cdot \vec{\tau}_{\delta\beta}}{4} \frac{2q^2(1 + \cos \theta) + s}{2q^2(1 - \cos \theta) + m_\rho^2} \quad (\text{III-40})$$

---

<sup>(18)</sup> La mise au point de faisceaux suffisamment énergiques de mésons  $K$  permettra d'effectuer des réactions de la forme  $K + N \rightarrow \Lambda + K + K$  et de rechercher les résonances possibles dans le système des deux  $K$ .

pour le diagramme de la figure 9-a et :

$$T = -\frac{1}{16} \frac{f_{\omega}^2}{(2\pi)^2} \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\delta\beta} \frac{2q^2(1 + \cos \theta) + s}{2q^2(1 - \cos \theta) + m_{\omega}^2} \quad (\text{III-41})$$

pour celui de la figure 9-b :

$\theta$  est l'angle de diffusion et la relation III-17 est remplacée par :

$$s = 4(q^2 + m_{\kappa}^2). \quad (\text{III-42})$$

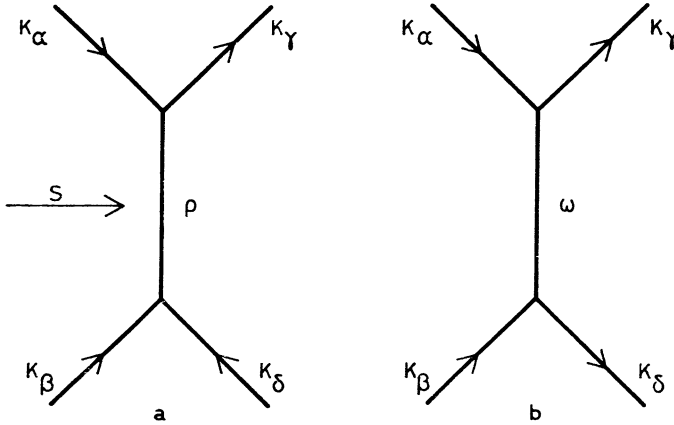


FIG. 9.

Pour évaluer les  $t_L$  correspondants, il faut tenir compte de l'identité des deux voies croisées et des facteurs de spin isotopique suivants :

$$\begin{aligned} \langle I = 1 | \frac{\vec{\tau}_{\gamma\alpha} \cdot \vec{\tau}_{\delta\beta}}{4} | I = 1 \rangle &= \frac{1}{4} \\ \langle I = 0 | \frac{\vec{\tau}_{\gamma\alpha} \cdot \vec{\tau}_{\delta\beta}}{4} | I = 0 \rangle &= -\frac{3}{4} \\ \langle I = 1 | \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\delta\beta} | I = 1 \rangle &= 1 \\ \langle I = 0 | \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\delta\beta} | I = 0 \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (\text{III-43})$$

On voit alors que le  $\rho$  et le  $\omega$  donnent tous deux des forces répulsives dans l'état  $I = 1, J = 0$ . Mais, comme indiqué plus haut, un modèle comme celui-ci ne peut pas traiter de façon cohérente les ondes S.

La situation est cependant la même dans la voie  $I = 1, J = 2$ . En effet, les  $t_L$  s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} t_L^\rho = -\frac{1}{32} \frac{f_K^2}{4\pi} (a+b) \left[ (3b^2 - 1) \operatorname{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| - 6b \right] \\ t_L^\omega = -\frac{1}{8} \frac{f_\omega^2}{4\pi} (a+c) \left[ (3c^2 - 1) \operatorname{Log} \left| \frac{c+1}{c-1} \right| - 6c \right] \end{cases} \quad (\text{III-44})$$

avec :

$$\begin{cases} a = 1 + \frac{s}{2q^2} \\ b = 1 + \frac{m_\rho^2}{2q^2} \\ c = 1 + \frac{m_\omega^2}{2q^2} \end{cases} \quad (\text{III-45})$$

$t_L^\rho$  et  $t_L^\omega$  sont négatifs au-dessus du seuil physique  $4m_K^2$ . Au moins pour des valeurs raisonnables de  $s$ , les intégrales de la forme :

$$I = \frac{s - s_0}{\pi} P \int_{4m_K^2}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_K^2}{s'}} \frac{t_L(s')}{(s' - s)(s' - s_0)} ds' \quad (\text{III-46})$$

sont du même signe que  $t_L$ . Cela signifie que la partie réelle du dénominateur (Cf. équation III-10) ne peut pas s'annuler et que par conséquent, le modèle prédit un comportement non résonnant pour l'amplitude  $I = 1, J = 2$ .

Les choses ne sont malheureusement pas aussi claires dans le cas  $I = 0, J = 1$ , car les  $t^?$  sont alors :

$$\begin{cases} t_L^\rho = \frac{3}{16} \frac{f_K^2}{4\pi} (a+b) \left[ b \operatorname{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| - 2 \right] \\ t_L^\omega = -\frac{1}{4} \frac{f_\omega^2}{4\pi} (a+c) \left[ c \operatorname{Log} \left| \frac{c+1}{c-1} \right| - 2 \right] \end{cases} \quad (\text{III-47})$$

La force créée par le  $\rho$  est donc attractive, alors que celle due au  $\omega$  est répulsive. Comme les masses du  $\rho$  et du  $\omega$  sont presque égales, le signe de la force résultante dépendra seulement des grandeurs relatives de  $\frac{f_K^2}{4\pi}$  et  $\frac{f_\omega^2}{4\pi}$ .

Naturellement ces constantes de couplage ne sont pas connues et il est difficile dans ces conditions de formuler une prédiction. Évidemment, si le modèle de « prédominance du  $\rho$  » est étendu à ce cas, il permet de prévoir une résonance dans l'état  $I = 0, J = 1$ .

Par conséquent, l'étude expérimentale des résonances mésoniques d'étrangeté 2 permettra de mettre encore une fois à l'épreuve les prédictions qualitatives de l'hypothèse du « bootstrap » sous sa forme simplifiée (c'est-à-dire celle où l'on considère que les forces prédominantes sont dues à l'échange d'états à une seule particule) : on ne devrait pas trouver de particule avec  $I = 1$ ,  $J = 2$  et  $S = 2$ , alors que la présence d'une résonance est possible dans l'état  $I = 0$ ,  $J = 1$ ,  $S = 2$ .

### III-B. — Tentatives pour améliorer les résultats par l'adjonction d'une deuxième voie.

Parmi les trois sortes d'approximations indiquées au paragraphe III-A-1, celle qui est décrite au sous-paragraphe *b*) est essentielle pour ces calculs de « bootstrap », mais on peut envisager d'améliorer les deux autres. D'abord, la résolution approchée des équations N/D pourrait évidemment être remplacée par une solution numérique exacte. Cependant, la méthode y perdrait un de ses avantages les plus précieux, la simplicité : ce ne seraient plus seulement quelques intégrales qu'il faudrait faire effectuer à la calculatrice électronique et le temps de calcul serait certainement multiplié par un facteur supérieur à 10; de plus, il ne semble pas que l'accord quantitatif avec l'expérience pourrait être ainsi obtenu (Cf. par exemple la référence [2]). Par contre, il peut être intéressant d'améliorer le traitement de la condition d'unitarité, car celle-ci a un contenu physique évident et la modification correspondante des résultats peut permettre de dégager des conclusions concernant la nature physique du problème étudié.

On peut donc essayer de tenir compte des voies inélastiques liées à l'amplitude de diffusion élastique par la condition d'unitarité. On est bien sûr aussitôt limité par des questions techniques : d'une part, on ne sait traiter correctement que les états à deux particules (la découverte de résonances est de ce point de vue assez favorable, puisqu'elle permet assez souvent d'approximer des états à plusieurs particules en distribuant ces dernières en deux groupes résonnants); d'autre part, il est difficile de manipuler plus de deux états à la fois. Par conséquent, on adjoindra une deuxième voie à deux particules à celle dont le seuil est le plus bas.

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de caractériser les changements produits par cette adjonction. Pour cela, nous décrirons d'abord la méthode N/D matricielle, puis nous l'appliquerons au problème du  $K^*$  et enfin à celui du  $\rho$ .

1. **La méthode N/D matricielle** [13]. — Désignons par  $s_1$  et  $s_2$  les seuils respectifs des deux voies et par  $q_1$  et  $q_2$  les impulsions correspondantes dans le système du centre de masse. Plus généralement, les indices 1 et 2 différencieront les deux états, avec la convention que  $s_1$  est inférieur à  $s_2$ .

Il est d'abord évident que la deuxième voie va modifier le système de coupures de l'amplitude. Sans insister outre mesure sur ce point technique, on peut en signaler les conséquences suivantes :

a) La position du point de soustraction  $s_0$  sera affectée. Ce point est discuté en détail pour le problème  $\pi K - \eta K$  dans l'appendice de la référence [32].

b) La région dans laquelle on peut chercher la résonance sera en général réduite : si la partie réelle du dénominateur s'annule en un point où  $t_L$  n'est pas régulier, la solution approchée analogue à III-10 donne des constantes de couplage imaginaires; il faut donc exclure *a priori* les régions où apparaissent des singularités non physiques. Ce fait n'apportait pas de restriction dans le cas d'une seule voie, mais il doit être pris en considération dans les problèmes couplés (Cf. références [70] [32] et [33]).

c) L'impulsion  $q_2$  devient imaginaire pure entre les seuils  $s_1$  et  $s_2$ , où elle intervient à cause du couplage entre les deux voies. Ceci peut introduire ce que l'on appelle des « singularités cinématiques », qu'il convient d'enlever par une définition adéquate de l'amplitude de diffusion (Cf. référence [33], note 19).

On a donc à calculer une amplitude  $t$ , qui est cette fois une matrice  $2 \times 2$ , connaissant la matrice  $t_L$  que l'on tire des diagrammes d'échange d'une particule dans les voies croisées des trois réactions couplées : État 1  $\rightarrow$  État 1; État 1  $\leftrightarrow$  État 2; État 2  $\rightarrow$  État 2. On écrit la relation matricielle :

$$t(s) = N(s) D^{-1}(s). \quad (\text{III-48})$$

Les formules III-2 et III-4 deviennent :

$$\begin{aligned} \text{Im } D(s) &= [\text{Im } t^{-1}(s)] N(s) \quad \text{sur la coupure de droite;} \\ \text{Im } N(s) &= [\text{Im } t_L(s)] D(s) \quad \text{sur la coupure de gauche.} \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

La condition d'unitarité fait intervenir une matrice  $\rho$  diagonale :

$$\text{Im } t_{ij}^{-1}(s) = -\delta_{ij} \rho_i(s) \theta(s - s_i). \quad (\text{III-50})$$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe III-A-1-c permet d'écrire les équations approchées :

$$N_{ij}(s) = [t_L]_{ij}(s). \quad (\text{III-51})$$

$$D_{ij}(s) = \delta_{ij} - \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \rho_i(s') \frac{[t_L]_{ij}(s') ds'}{(s' - s)(s' - s_0)}. \quad (\text{III-52})$$



Il faut ensuite identifier la matrice  $t$  ainsi trouvée à l'amplitude de diffusion résonnante :

$$T_{ij} = \frac{R_{ij}}{s - m^2 + i\Gamma m} \quad (\text{III-53})$$

que l'on peut facilement obtenir en calculant les diagrammes où la résonance que l'on cherche intervient comme état intermédiaire dans la voie directe.

Comme la formule III-48 contient  $D^{-1}$ , le dénominateur de  $t$  est constitué par le déterminant de  $D$  et la condition qui exprime l'existence de la résonance s'écrit :

$$\text{Re} [\text{dét } D(m^2)] = 0, \quad (\text{III-54})$$

équation que l'on remplace par la suivante, étant donné que la partie imaginaire de  $D$  est petite devant sa partie réelle :

$$\text{dét} [\text{Re } D(m^2)] = 0. \quad (\text{III-55})$$

Il s'agit maintenant d'égaliser les deux matrices-résidus de  $t$  et de  $T$ . Or, il est facile de voir que  $R$  est symétrique et que son déterminant est nul. Par conséquent, sur les quatre éléments de  $R$ , deux seulement sont indépendants. Si donc on écrit  $t$  sous la forme :

$$t_{ij} = \frac{r_{ij}}{\text{dét } D} \quad (\text{III-56})$$

il faut ajouter à III-55 les deux équations suivantes :

$$R_{11}(m^2) = \frac{r_{11}(m^2)}{[\text{dét} [\text{Re } D]]'_{s=m^2}} \quad (\text{III-57-a})$$

$$R_{22}(m^2) = \frac{r_{22}(m^2)}{[\text{dét} [\text{Re } D]]'_{s=m^2}} \quad (\text{III-57-b})$$

où  $[\text{dét} [\text{Re } D]]'$  désigne la dérivée par rapport à  $s$  de  $\text{dét} [\text{Re } D]$ .

On a donc un système de trois équations (III-55, III-57-a et III-57-b) à la place du système formé par III-11 et III-14.

Une dernière remarque s'impose cependant. Comme indiqué plus haut, la matrice  $R$  est symétrique et son déterminant est nul. Il est facile de voir (Cf. référence [70]) que le déterminant de  $t$  est aussi nul. Par contre, la solution approchée construite à partir de III-51 et III-52 n'est pas *a priori* symétrique, comme le serait la solution exacte [14]. Il convient donc de calculer également un paramètre d'asymétrie de la matrice  $r$ , que l'on peut définir comme :

$$Q = \left| \frac{r_{12}}{\sqrt{r_{11}r_{22}}} \right| \quad (\text{III-58})$$

et de voir si ce paramètre est voisin de 1. Cela permet en plus d'évaluer grossièrement la valeur de la solution approchée que l'on considère, puisque la solution exacte aurait  $Q = 1$  <sup>(19)</sup>. En utilisant les propriétés de la matrice  $R$  et les équations III-57, on montre facilement que :

$$Q = \left| \frac{r_{12}}{R_{12}} \right|. \quad (\text{III-59})$$

2. **Application au problème du  $K^*$ .** — Outre la question générale des modifications apportées par l'adjonction d'une deuxième voie, il est particulièrement intéressant de voir ce que va devenir le paramètre  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  : nous verrons plus loin que le deuxième état que nous allons considérer va apporter une force attractive dans le problème; est-ce que cela va être suffisant pour diminuer les valeurs de  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  qui étaient nécessaires pour produire le  $K^*$  et même est-ce que le signe de  $f_\pi f_K$  va être ici différent de celui qu'on a trouvé plus haut ?

Après  $\pi + K$ , les états de plus basse masse qui peuvent être liés au  $K^*$  sont  $K^* + \pi$  et  $\eta + K$  (comme indiqué plus haut, on cherche seulement les états à deux particules). Si l'on prend la masse expérimentale du  $K^*$ , les seuils correspondant à ces deux états sont très voisins <sup>(20)</sup>. Mais, si l'on voulait associer  $\pi + K$  et  $K^* + \pi$ , une troisième voie,  $K + 2\pi$ , apparaîtrait automatiquement, à cause de l'instabilité du  $K^*$ , qu'il faut traiter de manière cohérente. C'est pourquoi nous considérerons le problème à deux voies suivant :

$$\begin{aligned} \pi + K &\rightarrow \pi + K \\ \pi + K &\leftrightarrow \eta + K \\ \eta + K &\rightarrow \eta + K. \end{aligned}$$

Le spin de toutes les particules externes étant nul, on peut définir l'amplitude de diffusion  $t$  pour une onde partielle donnée à partir de la matrice  $S$  correspondante par l'équation :

$$S_{ij} = \delta_{ij} + 2i(q_i q_j)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{s}} t_{ij}, \quad (\text{III-60})$$

<sup>(19)</sup> Il faut cependant remarquer que  $Q \simeq 1$  est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que l'approximation soit valable.

<sup>(20)</sup> On peut remarquer que, comme  $m_K + m_\pi$  est voisin de 635 MeV et que  $m_{K^*} + m_\pi$  et  $m_\eta + m_K$  sont supérieures à 1 GeV, la voie  $\pi + K$  est relativement isolée ; autrement dit, le calcul à une voie du paragraphe III-A-3 a de bonnes chances de donner correctement les traits importants du problème.

où  $q_k$  est l'impulsion dans le système du centre de masse de l'état  $k$  <sup>(21)</sup>.

La condition d'unitarité s'écrit alors :

$$\text{Im } t_{ij}^{-1}(s) = -\frac{q_i^3}{\sqrt{s}} \delta_{ij} \theta(s - s_i). \quad (\text{III-61})$$

Les diagrammes donnant les forces sont ceux des figures 6 et 10. En effet, dans  $\pi + K \rightarrow \eta + K$  et  $\eta + K \rightarrow \eta + K$ , seule la voie croisée identique à la voie directe peut comporter un état intermédiaire à une particule, le  $K^*$  lui-même.

On reprend le hamiltonien phénoménologique III-32, en lui ajoutant le terme :

$$\gamma_\eta [iK_\mu^* + (K\partial_\mu \eta - \eta\partial_\mu K) + \text{c. h.}], \quad (\text{III-62})$$

on calcule les diagrammes de la figure 10 et on projette le résultat sur l'état  $I = 1/2, J = 1$  de la voie directe. On obtient ainsi les éléments de matrice de  $t_L$  ( $[t_L]_{11}$  est bien sûr identique au  $t_L$  du paragraphe III-A-3, à part la normalisation) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [t_L]_{11} = -\frac{1}{q_1^2} \left[ \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} F(\beta_{K^*}, \alpha_{K^*}) + \frac{f_\pi f_K}{4\pi} F(\beta_\rho, \alpha_\rho) \right] \\ [t_L]_{12} = [t_L]_{21} = +\frac{\sqrt{3}}{q_1 q_2} \frac{\gamma_{K^*} \gamma_\eta}{4\pi} F(\beta_{12}, \alpha_{12}) \\ [t_L]_{22} = +\frac{1}{q_2^2} \frac{\gamma_\eta^2}{4\pi} F(\beta_{22}, \alpha_{22}), \end{array} \right. \quad (\text{III-63})$$

où  $F$  est définie par l'équation III-34.

Si on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_K = \sqrt{q_1^2 + m_K^2} \\ \omega_\pi = \sqrt{q_1^2 + m_\pi^2} \\ \omega'_K = \sqrt{q_2^2 + m_K^2} \\ \omega'_\pi = \sqrt{q_2^2 + m_\pi^2}, \end{array} \right. \quad (\text{III-64})$$

on obtient les expressions suivantes pour les  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\alpha_{K^*} = 1 + \frac{s}{2q_1^2} - \frac{(m_K^2 - m_\pi^2)^2}{2q_1^2 m_{K^*}^2}$$

<sup>(21)</sup> Dans III-60, la normalisation de  $t$  a été choisie de façon à supprimer les singularités cinématiques signalées au paragraphe III-B-1.

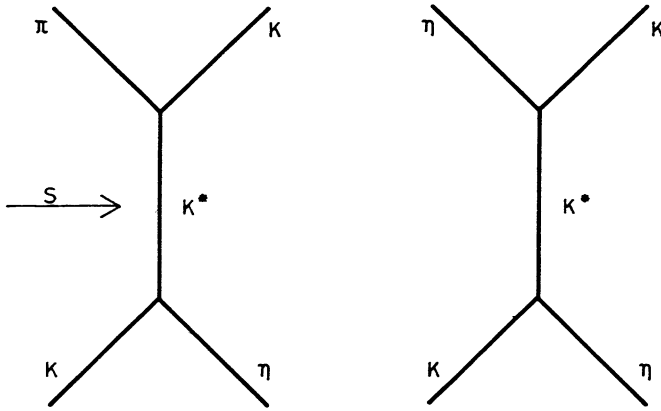


FIG. 10.

$$\beta_{K^*} = 1 + \frac{m_{K^*}^2}{2q_1^2} - \frac{(\omega_K - \omega_\pi)^2}{2q_1^2}$$

$$\alpha_p = 1 + \frac{2\omega_K\omega_\pi}{q_1^2}$$

$$\beta_p = 1 + \frac{m_p^2}{2q_1^2}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2q_1q_2} \left[ q_1^2 + q_2^2 + (\omega'_K + \omega_\pi)(\omega_K + \omega'_\eta) - \frac{(m_K^2 - m_\pi^2)(m_K^2 - m_\eta^2)}{m_{K^*}^2} \right]$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2q_1q_2} [q_1^2 + q_2^2 + m_{K^*}^2 - (\omega'_K - \omega_\pi)^2]$$

$$\alpha_{22} = 1 + \frac{1}{2q_2^2} \left[ s - \frac{(m_K^2 - m_\eta^2)^2}{m_{K^*}^2} \right]$$

$$\beta_{22} = 1 + \frac{1}{2q_2^2} [m_{K^*}^2 - (\omega'_\eta - \omega'_K)^2]. \quad (\text{III-65})$$

Les impulsions  $q_1$  et  $q_2$  sont liées à  $s$  par les formules :

$$q_1^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_K + m_\pi)^2][s - (m_K - m_\pi)^2]$$

$$q_2^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_\eta + m_K)^2][s - (m_\eta - m_K)^2] \quad (\text{III-66})$$

L'équation III-52 s'écrit explicitement :

$$D_{ij} = \delta_{ij} - \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \frac{q_i^2(s')}{\sqrt{s'}} \frac{[t_L]_{ij}(s') ds'}{(s' - s)(s' - s_0)}. \quad (\text{III-67})$$

Le point de soustraction  $s_0$  est pris au début de la coupure de gauche due au  $K^*$  dans  $\pi + K \rightarrow \pi + K$  (Cf. appendice de la référence [32]) et les valeurs numériques des seuils sont, si la masse du  $\pi$  est prise comme unité :

$$\begin{cases} s_1 \simeq 21,3 \\ s_2 \simeq 57,5. \end{cases} \quad (\text{III-68})$$

Posons :

$$I_{ij} = \frac{s - s_0}{\pi} P \int_{s_i}^{\infty} \frac{q_i^2(s')}{q_j(s')} \frac{1}{\sqrt{s'}} \frac{F(\beta_{ij}(s'), \alpha_{ij}(s'))}{(s' - s)(s' - s_0)} ds' \quad (\text{III-69})$$

(un indice supérieur  $K^*$  ou  $\rho$  différenciera les deux intégrales  $I_{11}$ ).

Les éléments de matrice de  $ReD$  s'écrivent alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} ReD_{11} &= 1 + \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} I_{11}^{K^*} + \frac{f_{\pi} f_K}{4\pi} I_{11}^{\rho} \\ ReD_{12} &= -\sqrt{3} \frac{\gamma_{K^*} \gamma_{\eta}}{4\pi} I_{12} \\ ReD_{21} &= -\sqrt{3} \frac{\gamma_{K^*} \gamma_{\eta}}{4\pi} I_{21} \\ ReD_{22} &= 1 - \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} I_{22}. \end{aligned} \right. \quad (\text{III-70})$$

Il nous faut enfin calculer  $T$  à partir des diagrammes de la figure 11 :

$$T = \frac{1}{s - m_{K^*}^2 + i\Gamma m_{K^*}} \begin{pmatrix} -2 \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_{K^*} \gamma_{\eta}}{4\pi} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_{K^*} \gamma_{\eta}}{4\pi} & -\frac{2}{3} \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} \end{pmatrix} \quad (\text{III-71})$$

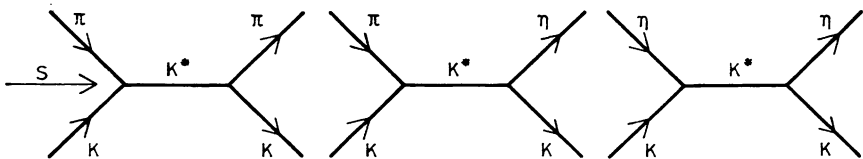


FIG. 11.

Comme indiqué au paragraphe III-B-1, la région dans laquelle on peut chercher la résonance est plus limitée que dans le problème à une voie : il faut que  $m_{\kappa^*}^2$  soit supérieur à 29 pour que la méthode d'approximation ait un sens (Cf. référence [32]).

Les équations III-55 et III-57 donnent le système suivant :

$$\left[1 + \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} I_{11}^{\kappa^*} + \frac{f_{\pi} f_{\kappa}}{4\pi} I_{11}^{\rho}\right] \left[1 - \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} I_{22}\right] - 3 \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} I_{12} I_{21} = 0. \quad (\text{III-72-a})$$

$$\begin{aligned} -2 \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} q_1^2 [\det(\text{Re } D)]' &= 3 \frac{q_1}{q_2} \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} F(\beta_{12}, \alpha_{12}) I_{21} \\ &- \left[1 - \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} I_{22}\right] \left[\frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} F(\beta_{\kappa^*}, \alpha_{\kappa^*}) + \frac{f_{\pi} f_{\kappa}}{4\pi} F(\beta_{\rho}, \alpha_{\rho})\right] \end{aligned} \quad (\text{III-72-b})$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} q_2^2 [\det(\text{Re } D)]' &= 3 \frac{q_2}{q_1} \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} F(\beta_{12}, \alpha_{12}) I_{12} \\ &+ \frac{\gamma_{\eta}^2}{4\pi} F(\beta_{22}, \alpha_{22}) \left[1 + \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} I_{11}^{\kappa^*} + \frac{f_{\pi} f_{\kappa}}{4\pi} I_{11}^{\rho}\right]. \end{aligned} \quad (\text{III-72-c})$$

Comme au paragraphe III-A-3, on a une inconnue de trop. On trouvera donc ici aussi une famille de solutions : pour une valeur fixée de  $m_{\kappa^*}^2$ , on résout le système III-72 pour obtenir  $\gamma_{\kappa^*}^2/4\pi$ ,  $\gamma_{\eta}^2/4\pi$  et  $f_{\pi} f_{\kappa}/4\pi$ . Les résultats sont groupés dans le tableau I, où on a aussi indiqué les valeurs correspondantes du paramètre d'asymétrie Q (équation III-59). La courbe 3 de la figure 7 décrit la relation largeur-masse obtenue, la largeur  $\Gamma$  étant calculée par la formule :

$$\Gamma = \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \frac{2q_1^3}{m_{\kappa^*}^2}. \quad (\text{III-73})$$

On peut rappeler que les seuls paramètres connus expérimentalement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\kappa^*}^2 \simeq 41 \\ \Gamma \simeq 0,36 \\ \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \simeq 0,9. \end{array} \right. \quad (\text{III-74})$$

Les solutions résumées par le tableau I (p. 80) et la courbe 3 de la figure 7 suggèrent les remarques suivantes :

a) La condition d'autoconsistance semble très restrictive, puisqu'on trouve au plus une solution pour chaque masse considérée. Aucune de ces solutions n'est « pathologique » : les carrés des constantes de couplage sont simulta-

nément positifs. Il convient d'insister sur le fait que la complexité du système III-72 ne permettait pas de prévoir ces caractéristiques de façon évidente.

b) La largeur  $\Gamma$  a considérablement diminué par rapport au calcul à une voie (courbes 1 et 2 de la figure 7). On devait s'y attendre, car, selon une remarque de Capps [17], le  $K^*$  aurait une largeur nulle si la voie  $K_\eta$  était la seule à considérer; il est donc normal que l'adjonction de cette voie rende la résonance plus étroite.

TABLEAU I

$n_{K^*}^2$	31	34	37	40	43	46	49	52
$\gamma_{K^*}^2/4\pi$	1,4	1	0,8	0,65	0,5	0,4	0,2	Pas de solution
$\gamma_\eta^2/4\pi$	37	26	22	19	17	15	14	
$f_\pi f_K/4\pi$	- 23	- 21	- 20	- 17	- 16	- 15	- 13	
$\Gamma_{K^*}$	0,24	0,24	0,25	0,25	0,23	0,21	0,12	
Q	3	2	1,5	1,5	1,3	1,1	1,2	

c) Le signe de  $f_\pi f_K$  est toujours négatif. Dans le calcul à deux voies, ce n'était pas nécessaire *a priori*, puisque la force due au  $K^*$  dans la deuxième voie est attractive.

d) Les valeurs trouvées pour  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  sont encore beaucoup trop grandes.

La situation a encore empiré par rapport au calcul à une voie, puisque  $\frac{\gamma_\eta^2}{4\pi}$  est aussi énorme. Évidemment, la valeur de ces paramètres n'est pas connue expérimentalement, mais on ne s'attend pas à ce qu'elle soit de l'ordre de 10 ou 20.

Les solutions trouvées dans ce paragraphe présentent donc en gros les mêmes caractéristiques que celles du paragraphe III-A-3. Or l'adjonction de la deuxième voie a suffisamment compliqué le problème du point de vue mathématique pour qu'on ait pu attendre des modifications assez radicales des paramètres calculés, et même peut-être des solutions physiquement inacceptables. Le fait qu'il n'en soit rien est par conséquent important à noter.

3. **Le problème du  $\rho$ . Quelques caractéristiques générales des calculs à deux voies.** — Deux états de masses voisines,  $\pi\omega$  et  $K\bar{K}$ , peuvent être associés à  $\pi\pi$  pour le calcul des paramètres du  $\rho$ . Nous allons voir que l'allure des solutions est totalement différente dans les deux cas. En fait, l'étude de ces deux cas permet de tirer facilement certaines conclusions générales sur les calculs à deux voies.

Le point important est le comportement du système formé par les équations III-55 et III-57. Quand le couplage à la deuxième voie s'annule, III-55 et III-57-*a* redonnent les équations à une voie III-11 et III-14. Quant à III-57-*b*, elle devient une identité. C'est dans la façon dont ceci se produit que réside la différence essentielle entre  $\pi\pi - K\bar{K}$  et  $\pi\pi - \pi\omega$  et on peut ainsi distinguer deux classes totalement distinctes de problèmes à deux voies.

On conserve la définition III-60 de l'amplitude de diffusion  $t$  dans une onde partielle et un état de spin isotopique donnés. Mais l'identité des particules dans la voie 1 ( $\pi - \pi$ ) amène à définir une nouvelle matrice  $t'$  telle que :

$$t' = \begin{pmatrix} \frac{t_{11}}{2} & \frac{t_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{t_{21}}{\sqrt{2}} & t_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III-75})$$

C'est alors  $t'$  qui vérifie la condition d'unitarité sous la forme III-61.

Considérons d'abord le problème couplé  $\pi\pi - \pi\omega$ . La figure 12 représente les diagrammes qui permettent de calculer  $t'_L$ , la figure 13 ceux qui donnent  $T'$  (Cf. équation III-53).

Par simple inspection de la figure 12, on peut écrire la dépendance des

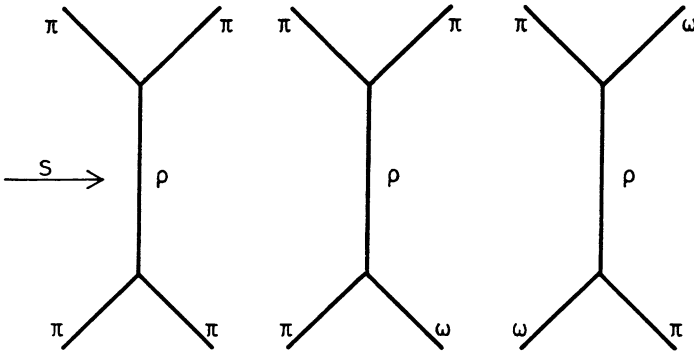


FIG. 12.



éléments de matrice de N et D par rapport aux constantes de couplage (Voir les équations III-51 et III-52) :

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} F_{11} \\
 N_{12} &= N_{21} = \frac{f_{\rho\pi\pi} f_{\rho\pi\omega}}{4\pi} F_{12} \\
 N_{22} &= \frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi} F_{22} \\
 \text{Re } D_{11} &= 1 - \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} I_{11} \\
 \text{Re } D_{12} &= -\frac{f_{\rho\pi\pi} f_{\rho\pi\omega}}{4\pi} I_{12} \\
 \text{Re } D_{21} &= -\frac{f_{\rho\pi\pi} f_{\rho\pi\omega}}{4\pi} I_{21} \\
 \text{Re } D_{22} &= 1 - \frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi} I_{22}.
 \end{aligned} \tag{III-76}$$

De même, la figure 13 indique que :

$$R_{22} = \frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi} C \tag{III-77}$$

où C est une constante.

L'équation III-57-b prend alors la forme :

$$R_{22} = \left\{ \frac{1}{[\text{dét}(\text{Re } D)]'} [N_{22} \text{Re } D_{11} - N_{21} \text{Re } D_{12}] \right\}_{s=m_p^2}, \tag{III-78}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi} \left\{ \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} C I'_{11} \left[ 1 - \frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi} I_{22} \right] + \frac{f_{\pi\rho\omega}}{4\pi} C I'_{22} \left[ 1 - \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} I_{11} \right] \right. \\
 \left. + \frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi} \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} C (I_{12} I_{21})' + \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} F_{12} I_{12} + F_{22} \left[ 1 - \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} I_{11} \right] \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{III-79}$$

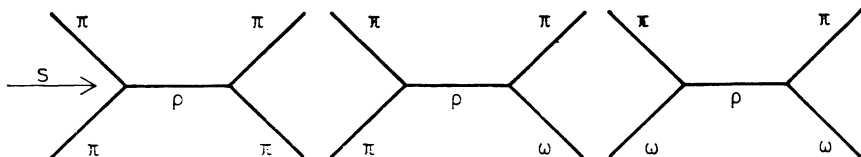


FIG. 13.

III-79 devient bien une identité pour  $\frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi} = 0$ , comme on s'y attendait, c'est-à-dire que le système formé par III-55 et III-57 se réduit bien au système trouvé dans le calcul à une voie. Mais, si  $\frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi}$  est différent de zéro, on peut simplifier III-79 et on obtient ainsi une équation qui ne tend pas vers une identité quand  $\frac{f_{\rho\pi\omega}^2}{4\pi}$  tend vers zéro. Autrement dit, il apparaît une discontinuité dans le système d'équations pour la valeur zéro de  $f_{\rho\pi\omega}^2/4\pi$ . Il n'est donc pas étonnant que la solution du problème à deux voies [70] soit très différente de celle obtenue au paragraphe III-A-2.

Il est important de remarquer que cette caractéristique du système d'équations disparaîtrait si on tenait compte de la voie croisée  $\pi + \pi \rightarrow \omega + \omega$  de la diffusion élastique  $\pi + \omega \rightarrow \pi + \omega$ . En effet, un terme supplémentaire, proportionnel à des constantes de couplage différentes, interviendrait alors additivement dans  $N_{22}$ , ce qui rendrait impossible la mise en facteur de  $f_{\rho\pi\omega}^2/4\pi$  dans III-79. Or la raison invoquée pour négliger la voie  $\pi + \pi \rightarrow \omega + \omega$  est qu'elle n'admet pas d'état intermédiaire à une seule particule.

Passons ensuite au cas où c'est la voie  $K\bar{K}$  qui est liée au  $\rho$ . Les figures 14 et 15 indiquent respectivement les diagrammes d'échange et les diagrammes directs qu'on va considérer.

Nous allons discuter ce problème un peu plus en détail, parce que le diagramme direct  $\pi + \pi \rightarrow K + \bar{K}$  est proportionnel à  $\frac{f_{\rho\pi\pi}f_{\rho K\bar{K}}}{4\pi}$  et il est intéressant de voir si ce calcul donne le même signe que celui qui était nécessaire pour engendrer le  $K^*$  (Cf. § III-A-3 et § III-B-2).

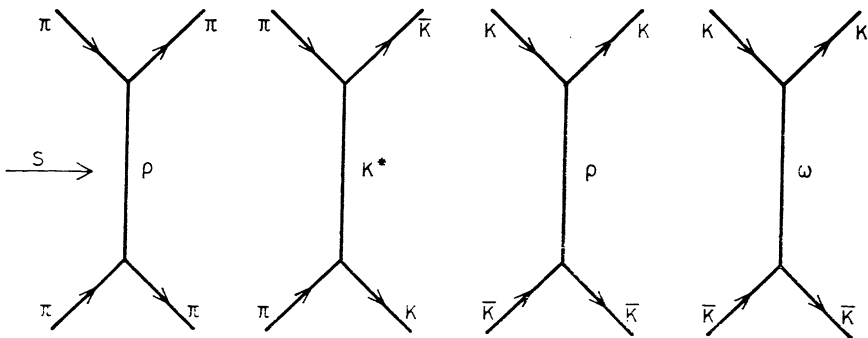


FIG. 14.

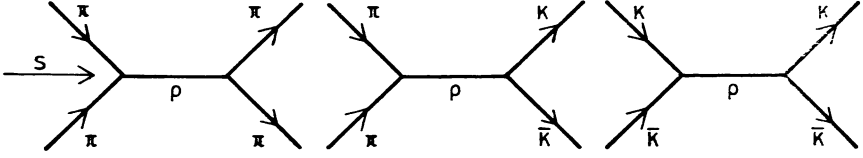


FIG. 15.

En partant du hamiltonien effectif suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} = & \left[ f_{\pi} \vec{\pi} \times \partial_{\mu} \vec{\pi} + i f_{\kappa} \left( (\partial_{\mu} \mathbf{K}^+) \frac{\vec{\tau}}{2} \mathbf{K} - \mathbf{K}^+ \frac{\vec{\tau}}{2} \partial_{\mu} \mathbf{K} \right) \right] \cdot \vec{\rho}_{\mu} \\
 & + i f_{\omega} \omega_{\mu} [(\partial_{\mu} \mathbf{K}^+) \mathbf{K} - \mathbf{K}^+ \partial_{\mu} \mathbf{K}] + \gamma_{\kappa^*} \left[ i \mathbf{K}_{\mu}^{*+} \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot (\mathbf{K} \partial_{\mu} \vec{\pi} - \vec{\pi} \partial_{\mu} \mathbf{K}) + \text{c. h.} \right]
 \end{aligned}
 \tag{III-80}$$

on calcule facilement les diagrammes de la figure 14, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 [t'_{11}]_{11} &= \frac{f_{\pi}^2}{4\pi} \frac{1}{4q_1^2} (a + b) \left[ b \operatorname{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| - 2 \right] \\
 [t'_{12}]_{12} &= [t'_{21}]_{21} = -\frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{q_1 q_2} (c + d) \left[ d \operatorname{Log} \left| \frac{d+1}{d-1} \right| - 2 \right] \\
 [t'_{12}]_{22} &= -\frac{f_{\kappa}^2}{4\pi} \frac{1}{16q_2^2} (e + f) \left[ f \operatorname{Log} \left| \frac{f+1}{f-1} \right| - 2 \right] \\
 &+ \frac{f_{\omega}^2}{4\pi} \frac{1}{4q_2^2} (e + g) \left[ g \operatorname{Log} \left| \frac{g+1}{g-1} \right| - 2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{III-81}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a &= 1 + \frac{s}{2q_1^2} \\
 b &= 1 + \frac{m_{\rho}^2}{2q_1^2} \\
 c &= \frac{1}{2q_1 q_2} \left[ \frac{3s}{2} - m_{\kappa}^2 - m_{\pi}^2 + \frac{(m_{\kappa}^2 - m_{\pi}^2)^2}{m_{\kappa^*}^2} \right] \\
 d &= \frac{1}{2q_1 q_2} \left[ m_{\kappa^*}^2 - m_{\kappa}^2 - m_{\pi}^2 + \frac{s}{2} \right] \\
 e &= 1 + \frac{s}{2q_2^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f &= 1 + \frac{m_\rho^2}{2q_2^2} \\
 g &= 1 + \frac{m_\omega^2}{2q_2^2}.
 \end{aligned}
 \tag{III-82}$$

De même, à partir des diagrammes de la figure 15, on obtient :

$$T' = \frac{1}{s - m_\rho^2 + im_\rho\Gamma} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \frac{f_\pi^2}{4\pi} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{f_\pi f_K}{4\pi} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{f_\pi f_K}{4\pi} & -\frac{1}{3} \frac{f_K^2}{4\pi} \end{pmatrix}
 \tag{III-83}$$

Il apparaît clairement, dans l'expression III-81, que la présence des termes dus au  $K^*$  et au  $\omega$  empêchera la mise en facteur de  $f_K^2/4\pi$  dans l'équation III-57-b. On se trouve donc dans une situation radicalement différente de celle du problème  $\pi\pi - \pi\omega$ .

Mais, en même temps, le  $K^*$  et le  $\omega$  introduisent deux paramètres supplémentaires,  $\gamma_{K^*}^2/4\pi$  et  $f_\omega^2/4\pi$ . Comme il est difficile de tirer des renseignements clairs quand on a trop de paramètres, nous allons simplifier encore le modèle en négligeant  $[t'_L]_{22}$  : on peut en effet espérer que, comme le  $\rho$  et le  $\omega$  ont des masses voisines, les deux contributions de signe contraire qu'ils donnent dans  $[t'_L]_{22}$  se compenseront approximativement.

Dans ce problème simplifié, on écrit les équations III-81 sous la forme :

$$\begin{aligned}
 [t'_L]_{11} &= \frac{f_\pi^2}{4\pi} \frac{1}{q_1^2} F_{11}(s, m_\rho^2) \\
 [t'_L]_{12} &= [t'_L]_{21} = -\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}q_1q_2} F_{12}(s) \\
 [t'_L]_{22} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{III-84}$$

et on pose :

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= \frac{s - s_0}{\pi} P \int_{s_i}^{\infty} \frac{q_i^2(s')}{q_j(s') \sqrt{s'}} \frac{F_{ij}(s') ds'}{(s' - s)(s' - s_0)} \\
 I'_{ij} &= \frac{\partial}{\partial s} I_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{III-85}$$

On a donc le système d'équations suivant :

$$\left[ 1 - \frac{f_\pi^2}{4\pi} I_{11} - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 I_{12} I_{21} \right]_{s=m_\rho^2} = 0.
 \tag{III-86-a}$$

$$\frac{2}{3} \frac{f_{\pi}^2}{4\pi} \left[ \frac{f_{\pi}^2}{4\pi} I'_{11} + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 (I_{12} I_{21})' \right]_{s=m_p^2} = \left[ \frac{f_{\pi}^2}{4\pi} \frac{F_{11}}{q_1^2} + \frac{1}{2q_1 q_2} \left( \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 F_{12} I_{21} \right]_{s=m_p^2}. \quad (\text{III-86-b})$$

$$\frac{1}{3} \frac{f_K^2}{4\pi} \left[ \frac{f_{\pi}^2}{4\pi} I'_{11} + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 (I_{12} I_{21})' \right]_{s=m_p^2} = \left[ \frac{1}{2q_1 q_2} \left( \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 F_{12} I_{12} \right]_{s=m_p^2}. \quad (\text{III-86-c})$$

Si l'on introduit la notation :

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 \quad (\text{III-87})$$

et qu'on se rappelle que toutes les fonctions doivent être évaluées pour  $s = m_p^2$ , on transforme aisément III-86 en :

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} I_{12} I_{21} \left[ \frac{I'_{11}}{I_{11}} I_{12} I_{21} - (I_{12} I_{21})' \right] z^2 \\ & + \left[ \frac{4}{3} \frac{I'_{11}}{I_{11}} I_{12} I_{21} - \frac{2}{3} (I_{12} I_{21})' + \frac{1}{q_1 q_2} F_{12} I_{11} I_{21} - \frac{1}{q_1^2} F_{11} I_{12} I_{21} \right] z \\ & + \frac{F_{11}}{q_1^2} - \frac{2}{3} \frac{I'_{11}}{I_{11}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-88-a})$$

$$\frac{f_{\pi}^2}{4\pi} = \frac{1}{I_{11}} [1 - z I_{12} I_{21}]. \quad (\text{III-88-b})$$

$$\frac{f_K^2}{4\pi} = \frac{z}{q_1 q_2} \frac{f_{\pi}^2}{4\pi} F_{12} I_{12} \left[ \frac{f_{\pi}^2}{4\pi} \frac{F_{11}}{2q_1^2} + \frac{z}{2q_1 q_2} F_{12} I_{21} \right]^{-1}. \quad (\text{III-88-c})$$

Il convient de remarquer que, pour  $s < 4m_K^2$ ,  $q^2$  est imaginaire pur et  $F_{12}$  devient :

$$F_{12} = \frac{i}{2} |c + d| \left[ 1 - |d| \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{|d|} \right] \quad (\text{III-89})$$

de telle sorte que  $\frac{F_{12}}{q_2}$  est toujours réel et positif. Il en est de même de toutes les fonctions  $F$ ,  $I$  et  $I'$ , ce qui facilite la discussion.

Pour résoudre le système III-88, on peut employer la méthode très simple suivante : pour une valeur donnée de  $m_p^2$ , III-88-a est une équation du deuxième degré en  $z$ ; une fois qu'on connaît ses racines, III-88-b donne immédiatement la valeur correspondante de  $f_{\pi}^2/4\pi$ , puis III-88-c celle de  $f_K^2/4\pi$ . Naturellement, il faut que ces trois quantités soient positives pour que la solution soit physiquement acceptable.

Mais on peut obtenir davantage : le signe de  $f_{\pi} f_K$  est donné par les élé-

ments non diagonaux de la matrice  $t'$ . En fait, comme expliqué plus haut, cette matrice ne peut être qu'approximativement symétrique, alors que  $T'$  l'est rigoureusement. Le signe de  $\frac{f_\pi f_\kappa}{4\pi}$  sera donc donné par :

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{f_\pi f_\kappa}{4\pi} \left[ \frac{f_\pi^2}{4\pi} I'_{11} + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{\pi} \right)^2 (I_{12} I_{21})' \right] \\ \simeq - \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \frac{F_{12}}{\sqrt{2q_1 q_2}} \left[ 1 - \frac{f_\pi^2}{4\pi} I_{11} \right] - \frac{f_\pi^2}{4\pi} \frac{\gamma_{\kappa^*}^2}{4\pi} \frac{F_{11}}{q_1^2} \frac{I_{12}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{III-90})$$

Supposons que nous connaissions la solution du problème à une voie, c'est-à-dire que la valeur de  $m_p^2$  pour laquelle :

$$\frac{f_\pi^2}{4\pi} = \frac{1}{I_{11}} = \frac{3}{2} \frac{F_{11}}{q_1^2} \frac{1}{I'_{11}} \quad (\text{III-91})$$

ait été calculée. Pour cette valeur de  $m_p^2$ ,  $z = 0$  est racine de III-88-a, III-88-b est vérifiée et III-88-c donne :  $\frac{f_\kappa^2}{4\pi} = 0$ .

Choisissons maintenant  $m_p^2$  infiniment voisin de la valeur précédente, de telle sorte que III-88-a admette une racine infinitésimale positive  $z$  (cette racine est obtenue en divisant  $\frac{2}{3} \frac{I'_{11}}{I_{11}} - \frac{F_{11}}{q_1^2}$  par le coefficient de  $z$  dans III-88-a; comme ce coefficient est différent de zéro pour la solution du problème à une voie, il est toujours possible de choisir  $m_p^2$  de façon que la racine infinitésimale soit positive). III-88-b montre que  $f_\pi^2/4\pi$  change de façon infinitésimale. Quant à III-88-c, elle donne :

$$\frac{f_\kappa^2}{4\pi} \simeq z \frac{2q_1}{q_2} \frac{F_{12}}{F_{11}} I_{12}. \quad (\text{III-92})$$

On vérifie bien que, contrairement à ce qui se passait dans le cas  $\pi\pi - \pi\omega$ , les équations III-88 admettent des solutions infiniment voisines de celles du problème à une voie <sup>(22)</sup>.

Si on examine alors la relation III-90, le premier terme du deuxième membre est petit devant le deuxième. Comme les  $I$ ,  $I'$  et  $F$  sont toutes positives, on obtient une valeur négative pour  $\frac{f_\pi f_\kappa}{4\pi}$ . Ceci peut être considéré

<sup>(22)</sup> En fait, un calcul numérique montre que III-88 n'a de solutions physiquement acceptables que près de celle du problème à une voie.

comme un indice de la cohérence interne du modèle. Il convient cependant de rappeler les trois points suivants : d'abord, on a simplifié le problème  $\pi\pi - \overline{K}K$ , dans ce paragraphe, en négligeant les forces dues à la voie croisée  $K + \overline{K} \rightarrow K + \overline{K}$ ; deuxièmement, on n'a pas vérifié explicitement que l'amplitude de diffusion matricielle calculée était approximativement symétrique; enfin, la valeur trouvée pour  $\frac{f_{\pi}f_K}{4\pi}$  est ici très petite, alors que ce produit doit être de l'ordre de 10 ou plus pour qu'on puisse engendrer le  $K^*$  à partir du  $\rho$ .

L'étude du problème du  $\rho$  nous a donc permis de remarquer que deux situations radicalement différentes peuvent se rencontrer dans ces calculs à deux voies, suivant le comportement, pour des valeurs faibles du couplage entre les deux voies, de l'équation III-57-b. Cette différence a son origine dans l'approximation qui consiste à ne retenir que les états intermédiaires à une particule et se manifeste par le fait que la constante de couplage entre les deux voies peut ou ne peut pas être mise en facteur dans III-57-b. Quand cette mise en facteur est possible, le système d'équations comporte une discontinuité entre le problème à une voie et le problème à deux voies; on doit donc s'attendre à ce que les solutions soient différentes dans les deux cas. C'est ce qui explique que, dans la référence [70], l'adjonction de la voie  $\pi\omega$  fasse passer la masse autoconsistante de 350 MeV à 659 MeV. Au contraire, lorsqu'il n'y a pas de mise en facteur dans l'équation III-57-b, le système à résoudre tend continûment vers celui du problème à une voie quand le couplage entre les deux voies tend vers zéro; on prévoit donc que la deuxième voie apportera peu de changements dans les solutions. Il convient de remarquer que le problème couplé  $\pi K - \eta K$ , que nous avons étudié au paragraphe III-B-2, se classe dans la première catégorie, c'est-à-dire qu'une simplification par  $\gamma_{\eta}^2/4\pi$  intervient dans l'équation III-57-b, par suite de l'absence d'état intermédiaire à une particule dans les voies  $\eta + \eta \rightarrow K + \overline{K}$  et  $\pi + \eta \rightarrow K + \overline{K}$ .

### III-C. — Discussion des résultats.

Les principales caractéristiques des résultats obtenus dans ce chapitre sont les suivantes :

a) Il est clair que ces résultats ne peuvent pas prétendre à un accord quantitatif convenable avec l'expérience. Les masses trouvées pour les résonances sont nettement trop faibles : ceci est particulièrement frappant pour l'amplitude  $\pi - \pi$ , au paragraphe III-A-2; la situation peut sembler

plus favorable dans le cas du  $K^*$  (§ III-A-3), mais il est nécessaire de rappeler qu'on a, dans ce problème, un paramètre de trop. Ce qui est sans doute plus grave, c'est que les constantes de couplage qui sont nécessaires dans les diagrammes d'échange sont beaucoup trop grandes. La raison immédiate de ce fait est simple : elle réside dans la valeur des parties principales des intégrales que l'on a à calculer et qui sont toujours de l'ordre de 0,1. En effet, si nous prenons par exemple le cas du  $K^*$  quand on tient compte seulement du  $\rho$  dans la voie croisée, la condition  $\text{Re } D = 0$  amène à évaluer à 1 le produit de  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  par une de ces intégrales en partie principale; il est donc compréhensible que  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  doive être voisin de 10 pour satisfaire cette condition. On peut donc penser que les forces considérées ne sont pas suffisantes pour engendrer les résonances. Mais s'il faut faire intervenir les états intermédiaires à plusieurs particules, la possibilité d'effectuer des calculs de « bootstrap » simples est totalement remise en question.

b) La position du point de soustraction que l'on introduit dans la relation de dispersion pour la fonction  $D$  joue un rôle beaucoup trop important. Ceci est lié certainement à l'approximation faite dans la résolution de la méthode  $N/D$ ; mais des considérations d'ordre physique interviennent aussi, puisque le point de soustraction  $s_0$  est choisi de façon à satisfaire approximativement la symétrie de croisement que les autres approximations ont brisée. L'exemple le plus caractéristique est bien sûr le calcul d'auto-génération du  $\rho$  dans lequel une variation du point de soustraction va jusqu'à faire disparaître toute solution.

c) Quand on essaye d'améliorer le traitement de la condition d'unitarité en tenant compte d'une deuxième voie à deux particules, on peut rencontrer deux situations totalement différentes suivant la façon dont le système d'équations obtenu se réduit à celui du problème à une voie quand on annule le couplage entre les deux voies. Évidemment, on peut à première vue s'estimer satisfait de ce que la nature de la deuxième voie joue un rôle si important dans le comportement des solutions. Mais il semble bien que par exemple la différence entre  $\pi\omega$  et  $K\bar{K}$  indiquée au paragraphe III-B-3 soit un pur artéfact mathématique. Certes, cette différence vient de ce que la voie croisée  $\pi + \pi \rightarrow \omega + \omega$  n'admet pas d'état intermédiaire à une particule, alors qu'en particulier le  $K^*$  intervient dans  $\pi + K \rightarrow \pi + K$ . Il est possible que ceci reflète un trait physique profond du problème. Il semble cependant plus raisonnable de ne pas accorder cette importance primordiale à l'approximation selon laquelle les forces sont données principalement par l'échange d'états à une particule, et de conclure que la voie  $\pi + \pi \rightarrow \omega + \omega$  aurait dû



être prise en considération, puisque le fait de la négliger défigure à ce point les équations. On en revient alors à la remarque faite plus haut : l'introduction des états intermédiaires à plusieurs particules signifie l'abandon de la méthode du « bootstrap » sous sa forme simple.

d) Malgré ces difficultés, dont certaines apparaissent comme mettant en cause les principes mêmes de la méthode, les prédictions sont pour le moment qualitativement correctes. En effet, tant dans le cas de l'amplitude  $\pi - K$  que dans celui de la diffusion  $\pi - \pi$ , les résonances apparaissent dans les états où on les observe effectivement et on prévoit un comportement non résonnant des voies où aucune particule n'a été trouvée. Il est à ce sujet assez remarquable de constater que les problèmes à deux voies, même lorsque se produit dans l'équation III-57-b la simplification dont on a parlé ci-dessus, donnent des solutions physiquement acceptables. Pour apprécier ce fait, il faut noter que d'une part les systèmes d'équations sont compliqués et que d'autre part, ils admettent peu de solutions (Cf. par exemple le cas du  $K^*$ , § III-B-2) <sup>(23)</sup>.

Il est bien sûr nécessaire d'attendre de nouveaux résultats expérimentaux pour savoir si cet accord qualitatif se maintient ou s'il est dû au hasard. Deux points paraissent à ce sujet importants, quoique pour des raisons différentes. Le premier concerne l'amplitude  $K - K$  : les calculs du paragraphe III-A-4 permettent d'exclure la possibilité d'une résonance dans la voie  $I = 1, J = 2$ , mais pas dans l'état  $I = 0, J = 1$ ; l'expérience aura sans doute tranché la question dans un avenir proche. Le deuxième point est plus crucial, mais beaucoup plus difficile à étudier expérimentalement, puisqu'il s'agit du signe relatif des constantes de couplage  $f_{\rho\pi\pi}$  et  $f_{\rho K\bar{K}}$  : on a vu plus haut (§ III-A-3, III-B-2 et III-B-3) que les calculs prédisent un signe relatif négatif, moyennant les conventions utilisées pour la définition des constantes de couplage, comme la théorie du couplage universel du  $\rho$  [62], qui signifie l'égalité de  $f_{\rho\pi\pi}$  et  $-f_{\rho K\bar{K}}$ ; en fait, ce signe négatif apparaît comme nécessaire pour que le  $K^*$  puisse être engendré par l'échange d'états à une particule, et un résultat expérimental opposé signifierait l'échec de la méthode; malheureusement, on voit mal pour le moment comment cette phase relative pourrait être mesurée, bien que cela soit possible en principe.

---

<sup>(23)</sup> Quoique cela ne constitue pas un argument, peut-être n'est-il pas sans intérêt d'indiquer que, au cours des calculs sur le  $K^*$ , il s'était tout d'abord glissé dans les équations une erreur sur un facteur de spin isotopique et que cela avait suffi pour faire disparaître toutes les solutions « raisonnables ».

Quelles conclusions peut-on tirer de ces résultats en ce qui concerne l'hypothèse et la méthode du « bootstrap » ?

Il apparaît d'abord que l'idée générale du « bootstrap » repose sur deux hypothèses principales. La première concerne l'existence même d'un système d'équations exprimant les conditions d'auto-consistance. Le fait qu'une amplitude de diffusion donnée est déterminée par le saut sur les coupures de gauche et la condition d'unitarité sur la coupure physique n'implique pas forcément que, si on traite le problème dans son ensemble et sans approximation, la symétrie de croisement va fournir un système d'équations dont le nombre sera égal à celui des inconnues. Il est tout à fait possible que certaines de ces équations soient en fait des identités, c'est-à-dire qu'elles soient vérifiées pour des valeurs quelconques des masses et des constantes de couplage. On peut évidemment avancer ici l'argument selon lequel les calculs pratiques que l'on a effectués jusqu'à présent ont toujours donné des équations véritables. Mais ceci peut être simplement dû aux approximations que l'on est obligé de faire. Par exemple, la méthode qui a été décrite et utilisée dans ce chapitre ne satisfait que de façon approchée à la symétrie de croisement et c'est précisément cette symétrie qui peut transformer les équations en identités. La première hypothèse est donc qu'il existe un système d'équations fondamentales que l'on pourrait en principe écrire si on savait traiter exactement les états à plusieurs particules. On formule ensuite la deuxième hypothèse en disant que ce système d'équations possède une seule solution, constituée par les particules existant effectivement dans la nature. C'est grâce à ces deux hypothèses que l'on espère pouvoir non seulement calculer les masses et les constantes de couplage des particules, mais encore prédire l'existence du spin isotopique et des nombres quantiques additifs tels que l'étrangeté et le nombre baryonique.

Il est bien évident qu'il n'est pas question, pour le moment du moins, de mettre en œuvre ce programme dans son ensemble. On est donc obligé de faire appel à des approximations et par conséquent de s'appuyer sur de nouvelles hypothèses. En effet, les méthodes que l'on met en œuvre en pratique sont en fait si éloignées de l'idée générale que le terme même d'« approximations » est impossible à justifier. Nous avons déjà remarqué, à propos des hypothèses fondamentales, qu'il n'était pas exclu que ces « approximations » puissent aller jusqu'à remplacer des identités par des équations. Mais, même si le système d'équations fondamental existe, il est impossible d'affirmer que les calculs que l'on peut effectuer à l'heure actuelle consistent à résoudre ce système de façon approchée. En effet, considérons par exemple les amplitudes  $\pi - \pi$  et  $\pi - K$ . On a vu dans ce chapitre que l'existence du  $\rho$  était essentielle pour pouvoir expliquer le  $K^*$ .

Comme ce dernier intervient à son tour comme force dans le problème couplé  $\pi\pi - K\bar{K}$  que l'on peut utiliser pour calculer les paramètres du  $\rho$ , on devrait obtenir une meilleure approximation des équations générales en traitant simultanément le  $\rho$  et le  $K^*$ . Mais il suffit de considérer par exemple les résultats des paragraphes III-A-3 et III-B-3 en ce qui concerne  $\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$  pour voir qu'il sera impossible d'obtenir à la fois le  $\rho$  et le  $K^*$ . Bien sûr, ceci peut très bien venir de l'insuffisance des approximations qu'on a été obligé de faire. Mais, précisément, cela montre que ces approximations ne permettent pas de démontrer l'existence du système d'équations générales. D'ailleurs, la façon même dont sont formulées les deux hypothèses fondamentales permet de douter de la possibilité de résoudre le problème de façon approchée : si celui-ci admet une seule solution formée des particules réelles, on risque de perdre cette condition d'unicité en se restreignant à un petit nombre seulement de particules.

C'est pour ces raisons que, dans l'introduction de ce chapitre, a été énoncée la remarque selon laquelle les succès et les échecs éventuels des calculs pratiques basés sur l'hypothèse du « bootstrap » ne mettent qu'indirectement en cause cette hypothèse.

Il n'en demeure pas moins que les résultats de ces calculs sont relativement satisfaisants et qu'ils ne présentent en tout cas pas d'incohérence flagrante. On peut alors s'appuyer sur ce fait pour retourner l'argument précédent : il faut que l'idée de base soit fondamentalement exacte pour que les prédictions s'avèrent qualitativement correctes malgré l'importance des approximations.

Ici aussi, la question reste donc posée de savoir si toutes les particules sont en fait composées les unes des autres d'une manière auto-consistante.

## CONCLUSION

La question des particules élémentaires figure donc parmi les plus importantes, mais aussi les plus difficiles et les plus controversées de la Physique Théorique actuelle.

Cette complexité est apparue dès le chapitre premier, où l'on a essayé de définir la notion de particule élémentaire et de l'appliquer à l'exemple simple du modèle de Lee pour illustrer certaines des difficultés auxquelles on peut s'attendre. Le chapitre II a été consacré à la recherche, parmi les groupes de Lie simples, d'une symétrie approchée des interactions fortes

plus large que celle liée à la conservation du spin isotopique; moyennant deux hypothèses qui semblent plausibles quoique encore mal comprises, il a été possible de démontrer des relations de masse entre les différentes particules classées dans un même supermultiplet; ces relations permettent d'exclure les groupes  $C_2$  et  $G_2$  et de ne conserver que  $SU_3$  comme groupe de symétrie approchée possible; on ne peut cependant pas encore dire de façon définitive si les particules élémentaires de la théorie future seront constituées par des supermultiplets unitaires. Enfin, le chapitre III contient une étude de l'hypothèse du « bootstrap », appliquée aux amplitudes de diffusion mésoniques; cette étude a permis de préciser les problèmes qui se posent à propos du « bootstrap », de même que les succès relatifs de la méthode; elle a montré qu'il n'était pas possible, ici non plus, de prouver ou de rejeter le postulat selon lequel toutes les particules sont en fait composées les unes des autres.

La question posée dans l'introduction ne peut donc pas être résolue à l'heure actuelle; elle ne pourra l'être que dans le cadre d'une théorie correcte de la Physique des Hautes Énergies.

---

APPENDICE I

Il s'agit de montrer l'équivalence entre les deux formes sous lesquelles on peut écrire les tenseurs de base pour  $SU_3$  (II-8 et II-15, avec les conditions supplémentaires II-14 et II-16 respectivement), c'est-à-dire plus simplement, à cause de la propriété II-A-2-c, l'équivalence entre un ensemble de deux indices inférieurs antisymétriques et un indice supérieur.

1. LE TENSEUR DE LEVI-CIVITA  $\varepsilon_{abc}$  EST CONSERVÉ PAR  $SU_3$ . — Dans la représentation fondamentale  $D^{(3)}(1,0)$ ,  $SU_3$  est l'ensemble des matrices  $3 \times 3$  unitaires unimodulaires (c'est-à-dire de déterminant unité). Sur les générateurs infinitésimaux  $A_b^a$ , cette dernière condition s'écrit :

$$\text{Tr} [A_b^a] = 0. \tag{A_1-1}$$

Or la conservation du tenseur  $\varepsilon_{abc}$  implique :

$$[\delta_i^l + i\eta_a^b(A_b^a)^l_i][\delta_j^m + i\eta_a^b(A_b^a)^m_j][\delta_k^n + i\eta_a^b(A_b^a)^n_k]\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \tag{A_1-2}$$

où les  $\eta_a^b$  sont des constantes infinitésimales arbitraires. Chacun des générateurs infinitésimaux  $A_b^a$  doit donc vérifier la relation :

$$(A_b^a)^l_{ijk} + (A_b^a)^m_{imk} + (A_b^a)^n_{ijn} = 0. \tag{A_1-3}$$

Quand deux des indices  $i, j, k$  sont égaux, A<sub>1</sub>-3 se réduit à une identité. Quand les trois indices sont différents, elle devient :

$$(A_b^a)^1_1 + (A_b^a)^2_2 + (A_b^a)^3_3 = 0, \tag{A_1-4}$$

qui n'est autre que A<sub>1</sub>-1.

Le tenseur de Levi-Civita est donc conservé par  $SU_3$ , mais pas par  $U_3$ .

2. ÉQUIVALENCE ENTRE DEUX INDICES INFÉRIEURS ANTISYMÉTRIQUES ET UN INDICE SUPÉRIEUR. — La conservation de  $\varepsilon_{abc}$  suffit pour que les combinaisons linéaires :

$$\psi^a = \varepsilon^{abc}\psi_b \tag{A_1-5}$$

des  $\psi_b$  soient la base d'une représentation équivalente à celle des  $\psi_a$ . Mais il faut vérifier que, quand on prend la forme II-36 de  $A_b^a$  pour transformer les indices inférieurs, c'est  $-[A_b^a]^T$  qu'il faut utiliser pour les indices supérieurs.

a) Transformation de deux indices inférieurs antisymétriques. — II-35 permet d'écrire :

$$[A_b^a \psi]_{i'} = \delta_i^a \psi_b + \delta_{i'}^a \psi_b \tag{A_1-6}$$

c'est-à-dire que, compte tenu de II-34 :

$$\psi'_{i'} = [A_b^a \psi]_{i'} = \delta_i^a \psi_b + \delta_{i'}^a \psi_b - \frac{2}{3} \delta_b^a \psi_{i'}. \tag{A_1-7}$$

b) *Transformation d'un indice supérieur.* — On veut maintenant transformer les quantités :

$$\psi^j = \varepsilon^{jii'} \psi_{i'} \quad (\text{A}_1-8)$$

en utilisant —  $[A_b^a]^T$ . On a donc :

$$[A_b^a \psi]^j = -\delta_b^j \psi^a = -\delta_b^j \varepsilon^{aii'} \psi_{i'} \quad (\text{A}_1-9)$$

et

$$\psi'^j = [A_b^a \psi]^j = -\delta_b^j \varepsilon^{aii'} \psi_{i'} + \frac{1}{3} \delta_b^a \varepsilon^{jii'} \psi_{i'}. \quad (\text{A}_1-10)$$

c) *Identité des résultats.* — Il s'agit enfin de montrer que :

$$\psi'^j = \varepsilon^{jii'} \psi'_{i'}. \quad (\text{A}_1-11)$$

D'après A<sub>1</sub>-7 et compte tenu de l'antisymétrie de  $\varepsilon^{ijk}$  et  $\psi_{i'}$  :

$$\psi'^j = \varepsilon^{jii'} \psi'_{i'} = 2 \left[ \varepsilon^{jak} \psi_k - \frac{1}{3} \delta_b^a \varepsilon^{jii'} \psi_{i'} \right]. \quad (\text{A}_1-12)$$

Le fait que les indices ne varient que de 1 à 3 permet de transformer le premier terme :

$$2\varepsilon^{jak} \psi_k = -\delta_b^j \varepsilon^{aik} \psi_i + \delta_b^a \varepsilon^{jkl} \psi_k. \quad (\text{A}_1-13)$$

On voit alors que l'expression A<sub>1</sub>-12 devient identique à A<sub>1</sub>-10.

APPENDICE II

La réduction des produits tensoriels de représentations irréductibles des groupes de rang 2 peut s'obtenir facilement à l'aide des tableaux d'Young à deux lignes (Cf. II-9). Cette méthode permet non seulement de trouver les différentes représentations irréductibles intervenant dans un tel produit, mais encore de construire explicitement les tenseurs appartenant à ces représentations. Nous allons donner ici les règles générales à appliquer et quelques exemples pour chacun des trois groupes de rang 2.

1. RÉDUCTION DES PRODUITS TENSORIELS DE REPRÉSENTATIONS DE  $SU_3$ . — La représentation irréductible  $D(K_1, K_2)$ , correspondant au tableau d'Young II-9, a pour dimension :

$$N = \frac{1}{2}(K_1 + 1)(K_2 + 1)(K_1 + K_2 + 2). \tag{A_2-1}$$

1) Les deux représentations étant données par les tableaux d'Young correspondants, on commence par compléter l'un de ces tableaux avec l'autre de toutes les façons « régulières » possibles (Voir par exemple référence [45], p. 251), mais en ne gardant que les tableaux à deux lignes.

2) On prend ensuite la trace, avec  $\varepsilon^{abc}$ , de deux indices antisymétriques d'un tableau et d'un indice de l'autre, choisi de façon régulière et on recommence l'opération précédente avec les résidus.

*Exemples.* — Il est très facile de reconstituer ainsi la table IV de la référence [9]. Montrons-le sur quelques exemples.

a)  $D^{(8)}(1,1) \otimes D^{(3)}(1,0)$  sera donné par :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \tag{A_2-2}$$

L'opération 1 ci-dessus aboutit à :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{A_2-3}$$

On prend ensuite la trace, avec  $\varepsilon^{abc}$ , des deux indices antisymétriques du premier tableau de  $A_2-2$  et de l'indice du deuxième tableau, ce qui laisse :

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \tag{A_2-4}$$

On a donc :

$$D^{(8)}(1,1) \otimes D^{(3)}(1,0) = D^{(15)}(2,1) \oplus D^{(6)}(0,2) \oplus D^{(3)}(1,0). \tag{A_2-5}$$

b)  $D^{(8)}(1,1) \otimes D^{(6)}(2,0)$  :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \tag{A_2-6}$$

Les deux premiers tableaux du deuxième membre sont obtenus à l'aide de l'opération 1. Quand on prend la trace des deux indices antisymétriques du premier tableau du membre de gauche avec l'un des indices du deuxième (ils sont symétriques), il reste deux cases, que l'on peut disposer soit en ligne soit en colonne, ce qui donne les deux derniers tableaux de  $A_2-6$ . Donc :

$$D^{(8)}(1,1) \otimes D^{(6)}(2,0) = D^{(24)}(3,1) \oplus D^{(15)}(1,2) \oplus D^{(6)}(2,0) \oplus D^{(3)}(0,1). \quad (A_2-7)$$

c)  $D^{(8)}(1,1) \otimes D^{(8)}(1,1) :$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \otimes & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \\
 (I) & & (II) & & (III) & & (IV) & & (V) & & \\
 & & & & \oplus & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \times & & \\
 & & & & (VI) & & (VII) & & (VIII) & & (A_2-8)
 \end{array}$$

(où  $\times$  représente le scalaire et où on a numéroté les tableaux pour faciliter la discussion).

Les tableaux III et IV proviennent encore de l'opération 1. Avec les deux indices antisymétriques du tableau I, on peut contracter un indice du tableau II qui peut être choisi de deux façons différentes. Si on prend le dernier indice de la première ligne, il reste un tableau à une case et un tableau à une colonne, avec lesquels on ne peut construire que le tableau V. Si au contraire, on contracte l'indice figurant dans la deuxième ligne du tableau II, on a un tableau à une ligne et deux cases et un tableau à une seule case ; on peut alors construire les tableaux VI et VII. Le scalaire est bien sûr obtenu en contractant simultanément les deux indices antisymétriques du tableau I avec le dernier indice de la première ligne du tableau II et *vice versa*. Donc :

$$D^{(8)}(1,1) \otimes D^{(8)}(1,1) = D^{(27)}(2,2) \oplus D^{(10)}(0,3) \oplus D^{(8)}(1,1) \oplus D^{(10)}(3,0) \oplus D^{(8)}(1,1) \oplus D^{(1)}(0,0). \quad (A_2-9)$$

2. RÉDUCTION DES PRODUITS TENSORIELS DE REPRÉSENTATIONS DE  $C_2$ . — La dimension de  $D(K_1, K_2)$  est ici :

$$N = \frac{1}{6} (K_1 + 1)(K_2 + 1)(K_1 + K_2 + 2)(K_1 + 2K_2 + 3). \quad (A_2-10)$$

L'opération 1 du paragraphe précédent s'applique bien sûr aussi à  $C_2$  et l'opération 2 est remplacée par la suivante :

On contracte  $h^{ab}$  avec un indice, choisi de façon régulière, de chacun des deux tableaux et on recommence l'opération 1 avec les résidus.



*Remarque.* — La faible dimension de  $C_2$  amène une exception à ces règles, que nous allons préciser sur un exemple particulier :  $D^{(6)}(0,1) \otimes D^{(6)}(0,1)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (A_2-11)$$

Quand on contracte avec  $h^{ab}$  les deux indices de la deuxième ligne, il reste deux tableaux à une seule case ; mais la partie du tenseur du deuxième ordre ainsi obtenu qui correspondrait à un tableau à deux lignes et une colonne, c'est-à-dire à  $D^{(6)}(0,1)$ , est nulle.

L'isométrie qui projette un tenseur du second ordre sur l'espace antisymétrique orthogonal à  $h_{ij}$  est :

$$(f_{ij})^{ab} = h^{ia}h^{jb} - h^{ja}h^{ib} - \frac{1}{2}h^{ij}h^{ab}. \quad (A_2-12)$$

En effet :

$$h_{ij}(f_{ij})^{ab} = h^{ba} - h^{ab} + \frac{1}{2} \times 4h^{ab} = 0. \quad (A_2-13)$$

Les bases des deux représentations  $D^{(6)}(0,1)$  s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= (f_{ik})^{cd} \varphi_{cd} \\ \psi_j &= (f_{jl})^{mn} \psi_{mn} \end{aligned} \quad (A_2-14)$$

et la partie du produit tensoriel se transformant selon  $D^{(6)}(0,1)$  serait :

$$\begin{aligned} \Psi_j^i &= (f_{ak})^{cd} \varphi_{cd} h^{kl} (f_{ij})^{ab} (f_{bl})^{mn} \psi_{mn} \\ &= \varphi_{cd} C_{ij}^{cdmn} \psi_{mn}. \end{aligned} \quad (A_2-15)$$

Un calcul facile donne :

$$\begin{aligned} C_{ij}^{cdmn} &= h^{ic}[h^{dn}h^{jm} - h^{dm}h^{jn} - h^{mn}h^{jd}] \\ &\quad - h^{jc}[h^{dn}h^{im} - h^{dm}h^{in} - h^{mn}h^{id}] \\ &\quad + h^{id}[h^{nc}h^{jm} - h^{mc}h^{jn}] - h^{jd}[h^{nc}h^{im} - h^{mc}h^{in}] \\ &\quad + h^{cd}[h^{in}h^{jm} - h^{im}h^{jn} + h^{mn}h^{ij}] \\ &\quad - h^{ij}[h^{dn}h^{cm} - h^{dm}h^{cn}]. \end{aligned} \quad (A_2-16)$$

Le tenseur  $C$  est un tenseur du sixième ordre complètement antisymétrique : en effet, l'expression  $A_2-16$  est visiblement antisymétrique par rapport à  $i$  et  $j$ , par rapport à  $c$  et  $d$ , par rapport à  $m$  et  $n$ , par rapport à  $i$  et  $c$  et par rapport à  $i$  et  $m$ .

Comme les indices ne varient que de 1 à 4, le tenseur  $C$  est nul. On voit donc que cette « anomalie » est due à la faible dimension de  $C_2$  et qu'elle se produira dans tous les cas analogues à celui qu'on vient d'étudier, c'est-à-dire chaque fois qu'on contractera avec  $h^{ab}$  deux indices situés sur la deuxième ligne.

*Exemples.* — On peut alors retrouver les résultats de la table V de la référence [9] et en particulier :



L'opération 1 donne les tableaux III, IV et V. Une seule contraction avec  $hab$  conduit à VI et VII puisque, bien évidemment, on n'est pas dans les conditions de la remarque précédente. Enfin, le scalaire est obtenu grâce à une double contraction avec  $hab$ . Donc :

$$D^{(10)}(2,0) \otimes D^{(10)}(2,0) = D^{(35)}(4,0) \oplus D^{(35)}(2,1) \oplus D^{(14)}(0,2) \\ \oplus D^{(10)}(2,0) \oplus D^{(5)}(0,1) \oplus D^{(1)}(0,0). \quad (A_2-22)$$

3. RÉDUCTION DES PRODUITS TENSORIELS DE REPRÉSENTATIONS DE  $G_2$ . — La représentation  $D(K_1, K_2)$  de  $G_2$  a pour dimension :

$$N = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} (K_1+1)(K_2+1)(K_1+K_2+2)(K_1+2K_2+3)(K_1+3K_2+4) \\ \times (2K_1+3K_2+5). \quad (A_2-23)$$

Alors que l'opération 1 reste la même que précédemment, l'opération 2 se complique, parce qu'il faut utiliser non seulement  $gab$  mais les  $\Gamma^{abc}$ . Le maniement de  $gab$  est analogue à celui de  $hab$  pour  $C_2$ , sauf bien sûr que  $gab$  est symétrique. Quant à  $\Gamma^{abc}$ , il est totalement antisymétrique; on contracte deux de ses indices avec un indice de chacun des deux tableaux, ce qui donne trois tableaux à « multiplier » : les résidus des deux tableaux initiaux et un tableau à une seule case provenant du troisième indice de  $\Gamma^{abc}$ . Pour distinguer cette case, on la hachurera dans les exemples qui suivent.

*Exemples.* — Étant donné les propriétés relativement compliquées des  $\Gamma$  (Cf. référence [9]), la méthode est moins simple que pour  $SU_3$  et  $C_2$ . Il est néanmoins facile de l'appliquer aux représentations de bas degré et de retrouver la table VI de la référence [9].

a)  $D^{(\gamma)}(1,0) \otimes D^{(\gamma)}(1,0) :$

$$\square \otimes \square = \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \times \quad (A_2-24)$$

(I)      (II)      (III)      (IV)      (V)      (VI)

Les tableaux V et VI sont obtenus en utilisant respectivement  $\Gamma^{abc}$  et  $gab$ . Donc :

$$D^{(\gamma)}(1,0) \otimes D^{(\gamma)}(1,0) = D^{(2\gamma)}(2,0) \oplus D^{(14)}(0,1) \oplus D^{(\gamma)}(1,0) \oplus D^{(1)}(0,0). \quad (A_2-25)$$

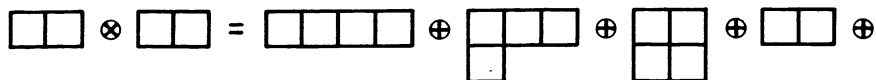
b)  $D^{(2\gamma)}(2,0) \otimes D^{(\gamma)}(1,0) :$

$$\square \square \otimes \square = \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

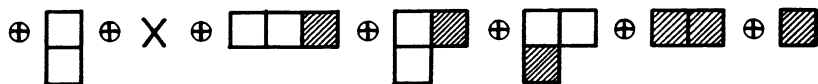
(I)      (II)      (III)      (IV)      (V)      (VI)      (VII)   
 (A<sub>2</sub>-26)

La contraction avec  $gab$  donne le tableau V, celle avec  $\Gamma^{abc}$  les tableaux VI et VII :  $D^{(2\gamma)}(2,0) \otimes D^{(\gamma)}(1,0) = D^{(7\gamma)}(3,0) \oplus D^{(64)}(1,1) \oplus D^{(\gamma)}(1,0) \oplus D^{(2\gamma)}(2,0) \oplus D^{(14)}(0,1).$  (A<sub>2</sub>-27)

c)  $D^{(27)}(2,0) \otimes D^{(27)}(2,0)$  :




(I) (II) (III) (IV) (V) (VI)



(VII) (VIII) (IX) (X) (XI) (XII) (XIII)

(A<sub>2</sub>-28)

Les tableaux VI, VII et VIII proviennent de l'utilisation de  $gab$ , une ou deux fois. De même, IX, X, XI et XII résultent de la contraction avec  $\Gamma^{abc}$ , une ou deux fois (Remarquer à ce sujet que les tenseurs qui correspondraient au tableau  sont nuls).

Enfin, la mise en œuvre simultanée de  $gab$  et  $\Gamma^{cde}$  donne le tableau XIII :

$$\begin{aligned}
 D^{(27)}(2,0) \otimes D^{(27)}(2,0) &= D^{(182)}(4,0) \oplus D^{(189)}(2,1) \\
 &\oplus D^{(77)}(0,2) \oplus D^{(27)}(2,0) \oplus D^{(14)}(0,1) \oplus D^{(1)}(0,0) \\
 &\oplus D^{(77)}(3,0) \oplus D^{(64)}(1,1) \oplus D^{(64)}(1,1) \oplus D^{(27)}(2,0) \oplus D^{(7)}(1,0). \quad (A_2-29)
 \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABERS E., ZACHARIASEN F. et ZEMACH C., 1963. Prétirage.
- [2] ABERS E. et ZEMACH C., *Phys. Rev.*, t. 131, 1963, p. 2305.
- [3] ALVAREZ L. W. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, t. 10, 1963, p. 184.
- [4] BAKER M. et ZACHARIASEN F., *Phys. Rev.*, t. 118, 1960, p. 1659.
- [5] BALAZS L. A. P., *Phys. Rev.*, t. 128, 1962, p. 1939.
- [6] BALL J. S. et WONG D. Y., 1963. Prétirage.
- [7] BALTAY C. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, t. 11, 1963, p. 346.
- [8] BASTIEN P. L. et BERGE J. P., *Phys. Rev. Lett.*, t. 10, 1963, p. 188.
- [9] BEHRENDTS R. E., DREITLEIN J., FRONSDAL C. et LEE W., *Rev. Mod. Phys.*, t. 34, 1962, p. 1.
- [10] BEHRENDTS R. E. et LANDOVITZ L. F., *Phys. Rev. Lett.*, t. 11, 1963, p. 296.
- [11] BELLIERE P. *et al.*, *Phys. Lett.*, t. 6, 1963, p. 316.
- [12] BENDER I. et MÜLLER V. F., 1963. Prétirage.
- [13] BJÖRKEN J. D., *Phys. Rev. Lett.*, t. 4, 1960, p. 473.
- [14] BJÖRKEN J. D. et NAUENBERG M., *Phys. Rev.*, t. 121, 1961, p. 1250.
- [15] BONDAR L. *et al.*, *Phys. Lett.*, t. 5, 1963, p. 153.
- [16] CABIBBO N. et GATTO R., *Nuovo Cim.*, t. 21, 1961, p. 872.
- [17] CAPPS R. H., *Phys. Rev. Lett.*, t. 10, 1963, p. 312.
- [18] CASTILLEJO L., DALITZ R. H. et DYSON F. J., *Phys. Rev.*, t. 101, 1956, p. 453.
- [19] CHEW G. F., *The S-matrix theory of strong interactions*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1961.
- [20] CHEW G. F., *Phys. Rev. Lett.*, t. 9, 1962, p. 233.
- [21] CHEW G. F., *International Conference on High Energy Physics at CERN*, 1962, p. 525.
- [22] CHEW G. F. et FRAUTSCHI S., *Phys. Rev. Lett.*, t. 7, 1961, p. 394; t. 8, 1962, p. 41.
- [23] CHEW G. F. et MANDELSTAM S., *Nuovo Cim.*, t. 19, 1961, p. 752.
- [24] CHINOWSKY W. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, t. 9, 1962, p. 330.
- [25] COLEMAN S. et GLASHOW S. L., *Phys. Rev. Lett.*, t. 6, 1961, p. 423.
- [26] COLLEY D. *et al.*, *International Conference on High Energy Physics at CERN*, 1962, p. 315.
- [27] CONNOLLY P. L. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, t. 10, 1963, p. 371.
- [28] DIU B., *Anomalies de seuil et théorème de Levinson dans le modèle de Lee* (Thèse de 3<sup>e</sup> Cycle), 1960.
- [29] DIU B., *Nuovo Cim.*, t. 28, 1963, p. 466.
- [30] DIU B., *Nuovo Cim.*, t. 28, 1963, p. 834.
- [31] DIU B., GERVAIS J. L. et RUBINSTEIN H. R., *Phys. Lett.*, t. 4, 1963, p. 280.
- [32] DIU B., GERVAIS J. L. et RUBINSTEIN H. R., *Calculation of the K\* parameters from nearby singularities*, 1963. Prétirage.
- [33] DIU B., GERVAIS J. L. et RUBINSTEIN H. R., *Some remarks about bootstrap calculations*, 1963. Prétirage.
- [34] D'ESPAGNAT B. et PRENTKI J., *Nuovo Cim.*, t. 24, 1962, p. 497.
- [35] FERRO-LUZZI M., TRIPP R. D. et WATSON M. B., *Phys. Rev. Lett.*, t. 8, 1962, p. 28.
- [36] FROISSART M., *Phys. Rev.*, t. 123, 1961, p. 1053.
- [37] FROISSART M. et JACOB M., 1963. Prétirage.
- [38] GELL-MANN M., *Phys. Rev.*, t. 106, 1957, p. 1296.

- [39] GELL-MANN M., *The eightfold way*, Cal. Tech. Report 20, 1961 ; *Phys. Rev.*, t. 125, 1962, p. 1067.
- [40] GELL-MANN M., *International Conference on High Energy Physics at CERN* 1962, p. 805.
- [41] GINIBRE J., *J. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 720.
- [42] GLASHOW S. L., *Phys. Rev. Lett.*, t. 11, 1963, p. 48.
- [43] GLASHOW S. L. et ROSENFELD A. H., *Phys. Rev. Lett.*, t. 10, 1963, p. 192.
- [44] GLASHOW S. L. et SAKURAI J. J., *Nuovo Cim.*, t. 25, 1962, p. 337 et t. 26, p. 622.
- [45] HAMERMESH M., *Group Theory and its application to physical problems*, Addison-Wesley, Londres, 1962.
- [46] JAUCH J. M., *Helv. Phys. Acta*, t. 30, 1957, p. 143.
- [47] KALLEN G. et PAULI W., *Dan. Mat. Fys. Medd.*, t. 30, 1955, n° 7.
- [48] LEE T. D., *Phys. Rev.*, t. 95, 1954, p. 1329.
- [49] LEVINSON C. A., LIPKIN H. J. et MEHKOV S., *Nuovo Cim.*, t. 23, 1962, p. 236
- [50] LEVINSON N., *Dan. Mat. Fys. Medd.*, t. 25, 1949, n° 9.
- [51] LEVY M., *Nuovo Cim.*, t. 13, 1959, p. 115 et t. 14, p. 612.
- [52] MURRAY J. J. *et al.*, *Bull. Am. Phys. Soc.*, t. 8, 1963, p. 22.
- [53] NAMBU Y. et SAKURAI J. J., *Phys. Rev. Lett.*, t. 11, 1963, p. 42.
- [54] NE'EMAN Y., *Nucl. Phys.*, t. 30, 1962, p. 347.
- [55] OAKES R. J. et YANG C. N., *Phys. Rev. Lett.*, t. 11, 1963, p. 174.
- [56] OKUBO S., *Progr. Theor. Phys.*, t. 27, 1962, p. 949 et t. 28, p. 24 ; *Phys. Lett.*, t. 4, 1963, p. 14 et t. 5, p. 165.
- [57] PAIS A., *Phys. Rev.*, t. 110, 1958, p. 574 et 1480.
- [58] RACAH G., *Group Theory and spectroscopy*, CERN 61-8, 1961.
- [59] RADICATI L. A. et SPEISER D., *Nuovo Cim.*, t. 24, 1962, p. 385.
- [60] ROSS M., *Phys. Rev. Lett.*, t. 11, 1963, p. 450.
- [61] SAKATA S., *Progr. Theor. Phys.*, t. 16, 1956, p. 686.
- [62] SAKURAI J. J., *Ann. Phys.*, t. 11, 1960, p. 1.
- [63] SAKURAI J. J., *Phys. Rev. Lett.*, t. 9, 1962, p. 472.
- [64] SALAM A. et WARD J. C., *Nuovo Cim.*, t. 20, 1961, p. 419.
- [65] SCHLEIN P. E. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, t. 11, 1963, p. 167.
- [66] SCHWINGER J., *Ann. Phys.*, t. 2, 1957, p. 407.
- [67] SINGH V. et UDGAONKAR B. M., *Phys. Rev.*, t. 130, 1963, p. 1177.
- [68] VAUGHN M. T., AARON R. et AMADO R. D., *Phys. Rev.*, t. 124, 1961, p. 1258
- [69] WONG D. Y., *Phys. Rev.*, t. 126, 1962, p. 1220.
- [70] ZACHARIASEN F. et ZEMACH C., *Phys. Rev.*, t. 128, 1962, p. 849.

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION. . . . .	148
CHAPITRE PREMIER. — Position du problème. . . . .	149
I-A. — Essai de définition d'une « particule élémentaire ». . . . .	149
I-B. — Exemple du modèle de Lee . . . . .	151
1. Équations de départ. . . . .	151
2. Distinction entre particules élémentaires et composées. . . . .	153
CHAPITRE II. — Recherche d'une symétrie approchée des interactions fortes. . . . .	160
II-A. — Forme tensorielle des représentations irréductibles des groupes de rang 2 . . . . .	163
1. Le tableau d'Young correspondant à une représentation irréductible . . . . .	163
2. Propriétés de symétrie des tenseurs correspondants . . . . .	165
3. Conditions supplémentaires sur les tenseurs de base . . . . .	166
II-B. — Nombre de termes indépendants dans la formule II-3. . . . .	168
II-C. — Formules explicites pour $SU_3$ et $C_2$ . . . . .	170
1. $SU_3$ . . . . .	170
2. $C_2$ . . . . .	174
II-D. — Conclusions . . . . .	176
CHAPITRE III. — Le mécanisme du « bootstrap ». . . . .	180
III-A. — L'approximation à une voie. . . . .	182
1. Description de la méthode. . . . .	182
2. Étude de l'amplitude de diffusion $\pi - \pi$ . . . . .	186
1) L'état $I = J = 1$ . Autogénération du $\rho$ . . . . .	186
2) Les autres états de spin isotopique et de moment angulaire . . . . .	190
3. La diffusion $\pi - K$ et le $K^*$ . . . . .	192
4. Considérations qualitatives sur l'amplitude de diffusion $K - K$ . . . . .	197
III-B. — Tentatives pour améliorer les résultats par l'adjonction d'une deuxième voie . . . . .	200
1. La méthode N/D matricielle . . . . .	201
2. Application au problème du $K^*$ . . . . .	203
3. Le problème du $\rho$ . Quelques caractéristiques générales des calculs à deux voies . . . . .	209
III-C. — Discussion des résultats. . . . .	216
CONCLUSION . . . . .	220
APPENDICE I . . . . .	222
APPENDICE II . . . . .	224
BIBLIOGRAPHIE. . . . .	230

*Directeur de la publication* : P. GAUTHIER-VILLARS.