ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARIE-ANTOINETTE TONNELAT

Les fréquences en relativité générale : définitions théoriques et vérifications expérimentales

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, n° 1 (1964), p. 79-115
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_1_79_0>

Ann. Inst. Henri-Poincaré,
Vol. I, N° 1, 1964, p. 79-115.

Section A :
Physique théorique.

Les fréquences en Relativité générale

Définitions théoriques et Vérifications expérimentales

par

Marie-Antoinette TONNELAT
Institut Henri-Poincaré.

RÉSUMÉ. — Le décalage des fréquences est un test classique de la relativité générale. Le but de ce travail est d'établir, par l'intermédiaire de cette théorie, un lien entre grandeurs *effectivement mesurables* : nombres de pulsations d'une part, potentiels de gravitation d'autre part. Les diverses définitions de la notion de fréquence qui sert d'intermédiaire de calcul sont examinées. Le cas statique fait l'objet d'un traitement rigoureux. Les approximations nécessaires dans le cas stationnaire sont explicitées.

On examine quelques applications (satellites).

Le caractère probant de ces expériences — en tant que test de la Relativité générale ou du Principe d'équivalence — est très brièvement discuté.

SUMMARY. — The displacement of spectral lines is a classical test of general Relativity. The purpose of this work is to link, by means of this theory, the effectively measurable quantities: numbers of pulsations on the one hand, gravitational potentials on the other hand. The different definitions of the notion of frequency, which is used as an intermediary in calculations, are examined. The static case is rigorously developed. The necessary approximations in the stationary case are made explicit.

We examine some applications (satellites).

The proving character of these experiments—as tests of general Relativity or of the Principle of equivalence—is very briefly discussed.

A. — CAS STATIQUE : SOURCE ET OBSERVATEUR EN REPOS RELATIF

Toute mesure qui se propose de déterminer les caractéristiques d'une source vibrante consiste à comparer le comportement de cette source à celui d'une autre source étalon, en coïncidence avec l'observateur.

Cette comparaison peut s'exercer sur des longueurs d'ondes : on utilise alors des procédés qui ressortent de la géométrie.

Elle peut s'effectuer, au contraire, en observant en un même point des coïncidences entre les vibrations émises par une source éloignée, puis enregistrées par un récepteur local et les pulsations concomitantes d'une source locale supposée identique à la première. Les procédés ainsi mis en jeu s'apparentent alors à une chronométrie.

La géométrie et la chronométrie introduites par une propagation des signaux ne se recouvrent pas de façon évidente en Relativité générale. La plupart des expériences effectuées consistent à comparer des longueurs d'ondes. Toutefois, la comparaison des intervalles entre les pulsations des sources donne lieu à une analyse plus immédiate. Selon J. L. Synge (1), elle permet de réduire plus aisément la Relativité générale à une théorie de type opérationnel au sens de Bridgman. On pourrait donc penser que les procédés de ce genre — procédés qui avaient été à la base de la Relativité restreinte — se prolongent plus aisément, en Relativité générale, par des méthodes chronométriques.

Notre but est de chercher les correspondances entre définitions théoriques (fréquences) et quantités *effectivement* mesurables (potentiels de gravitation, nombres de signaux). S'il est possible de déduire ensuite d'une théorie donnée (Relativité générale par exemple) des relations entre les grandeurs théoriques précédemment définies, ces relations s'appliquent alors *ipso facto* à des quantités déterminées par l'expérience. On peut ainsi tester — jusqu'à un certain point, il est vrai — la théorie qui a prévu ces conséquences.

Toute fréquence est définie, théoriquement, en fonction d'un intervalle de temps entièrement arbitraire. Personne n'a donc jamais « mesuré » une fréquence. Par contre, le rapport de deux fréquences est mesurable si chacune de ces fréquences peut s'exprimer en fonction d'*un même* arbitraire. Le rapport des fréquences est alors celui de deux nombres de pulsations.

---

(1) J. L. Synge, *Relativity. The general Theory*, p. 105.

Toute théorie significative consiste ainsi à exprimer le rapport de ces fréquences en fonction de grandeurs mesurables, susceptibles de le modifier : potentiels de gravitation, vitesses relatives. La donnée de ces grandeurs d'une part, la mesure du rapport des fréquences d'autre part, intervient alors dans des relations qui constituent ainsi — au sens usuel — un test de la Relativité générale.

I. — DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. Temps propre. Période, longueur d'onde et fréquence propres. — *a.* TEMPS PROPRE. — Une source étalon constitue une horloge. Elle émet des vibrations périodiques et nous supposerons que la *succession de ces vibrations définit toujours le temps propre de l'observateur qui lui est associé.*

Dans le système propre local lié à la source, les définitions utilisées en Relativité restreinte sont, bien entendu, toujours applicables.

b. PÉRIODE PROPRE. — L'unité locale de temps propre est, par définition, l'intervalle $\Delta\tau_{i1}^{(a)}$ qui, sur une ligne d'univers C_i, sépare deux battements de l'horloge. Cette unité reste, bien entendu, totalement arbitraire. Nous l'appellerons *période propre* de la radiation considérée.

Dans la notation $\Delta\tau_{i1}^{(a)}$, l'indice i se rapporte à la ligne d'univers C_i, l'indice 1 à l'intervalle unité limité par deux pulsations successives, l'indice (a) au type d'horloge atomique choisie (cadmium, etc.) par l'observateur P_i sur C_i (2).

Nous supposerons que les atomes ou que les molécules vibrantes constituent de véritables sources étalons, c'est-à-dire définissent, entre deux battements consécutifs sur une même ligne d'univers, des intervalles de temps propres égaux. Ces sources seront donc, par définition, des « horloges » (3).

N_i vibrations émises sur C_i par une source S_i définissent alors un temps propre

$$\Delta\tau_i^{(a)} = N_i\,\Delta\tau_{i1}^{(a)}. \tag{1}$$

(2) Nous regrettons la multiplication des indices, mais elle nous semble un moindre mal, préférable aux obscurités qui résultent souvent de leur omission.

(3) Nous désignerons par N le nombre d'intervalles ou de crêtes d'ondes entre N + 1 vibrations des sources ou bien encore entre N vibrations, la première étant étiquetée zéro.

c. LONGUEUR D'ONDE. — Deux battements consécutifs d'une horloge locale, c'est-à-dire l'émission d'une crête d'onde permet de définir l'intervalle d'espace-temps

$$\lambda_i^{(a)} = \Delta s_{i1}^{(a)} = c\, \Delta\tau_{i1}^{(a)}, \tag{2}$$

c étant la vitesse de la lumière dans le vide. $\Delta s_{i1}^{(a)}$ est une *longueur* définie sur la ligne d'univers C_i : elle représente la *longueur d'onde* $\lambda_i^{(a)}$ de la pulsation c'est-à-dire la portion de ligne d'univers correspondant, sur C_i, à l'émission d'une crête d'onde monochromatique et, par conséquent, à une période propre.

d. FRÉQUENCE PROPRE. — Nous appellerons fréquence propre le nombre de pulsations de la source locale émis pendant une unité de temps propre. Si une pulsation est émise sur C_i pendant la période propre $\Delta\tau_{i1}^{(a)}$, la fréquence est alors

$$\bar{\nu}_i^{(a)} = \frac{1}{\Delta\tau_{i1}^{(a)}} = \frac{N_i}{\Delta\tau_i^{(a)}}. \tag{3}$$

Nous conviendrons de surmonter d'une barre toutes les fréquences définies en fonction du temps propre.

Entre période, longueur d'onde et fréquence propres existent, d'après les définitions (2) et (3), les relations

$$\bar{\nu}_i^{(a)} = \frac{c}{\lambda_i^{(a)}}. \tag{4}$$

2. **Horloges identiques.** — Au point P_i d'une ligne d'univers C_i [4], on peut aisément vérifier l'identité de deux sources. Deux sources sont dites identiques si elles émettent des vibrations synchrones. Si $N_i^{(S)}$ vibrations de la source coïncident avec $N_i^{(a)}$ vibrations de l'horloge *(a)*

$$\frac{\bar{\nu}_i^{(S)}}{\bar{\nu}_i^{(a)}} = \frac{\Delta\tau_{i1}^{(a)}}{\Delta\tau_{i1}^{(S)}} = \frac{\lambda_i^{(a)}}{\lambda_i^{(S)}} = \frac{N_i^{(S)}}{N_i^{(a)}}. \tag{5}$$

Deux sources seront identiques si $N_i^{(S)} = N_i^{(S')}$ vibrations coïncident avec un même nombre $N_i^{(a)}$ de pulsations de l'horloge locale.

Supposons maintenant que les sources à comparer décrivent des lignes d'univers distinctes $C_i, \ldots, C_j$. Leurs caractéristiques peuvent — au moins

---

[4] Bien entendu, C_i est une ligne d'univers du genre temps orientée dans le temps.

en principe — être mesurées par des observateurs munis d'horloges en coïncidence avec chacune de ces sources. De telles mesures sont effectivement réalisables s'il est possible d'utiliser un matériel terrestre, par exemple s'il s'agit d'effet Mössbauer. On doit effectuer alors un ensemble de mesures locales et, pour chacune des sources, l'observateur P_i comptera le nombre N_i des vibrations émises, en coïncidence avec $N_i^{(a)}$ vibrations de l'horloge locale.

Or, pour une même source, le rapport $\frac{N}{N^{(a)}}$ sera constant aux divers points $P_i, \ldots, P_j$ *si les observateurs utilisent des horloges identiques entre elles.* Ainsi, *pour une même* source placée successivement en P_i et en P_j, la condition

$$n = \frac{N_i}{N_i^{(a)}} = \frac{N_j}{N_j^{(a)}} = \text{Cte} \tag{6}$$

définit des horloges identiques (horloges standard au sens de C. Møller).

L'identité de ces horloges est théoriquement vérifiable en supposant une comparaison préalable, en un même lieu, avant de les répartir aux divers points de l'espace-temps. Une telle comparaison est, bien entendu, impraticable dès qu'il ne s'agit plus de matériel spécifiquement terrestre. L'émission de signaux ne peut être alors un procédé de synchronisation des sources, mais s'effectue entre des sources supposées *a priori* identiques. C'est en raison de cette identité *postulée* qu'il est possible d'établir une loi de modification des fréquences.

Il existe donc, en toute rigueur, une pétition de principe dans la définition d'horloges identiques s'il s'agit de sources éloignées. Ces horloges ne peuvent, en effet, être étalonnées au moyen d'autres sources et tout décalage qui est censé traduire l'influence d'un champ de gravitation pourrait être aussi attribué à une modification de la nature de l'atome. Néanmoins, on admettra que les spectres atomiques sont suffisamment caractéristiques pour conclure, dans de nombreux cas, à la présence d'horloges locales identiques ([5]). On choisira, par exemple, un même atome vibrant pour une même raie. L'atome de cadmium vibrant pour la raie D est le type classique d'horloge étalon.

L'hypothèse (6) est nommée par J. L. Synge « Hypothèse de compatibilité » ([6]). Elle permet de considérer comme équivalent l'emploi de n'importe

([5]) Des horloges identiques distribuées en chaque point d'un référentiel constitué forment un ensemble d'horloges « standard » selon la terminologie de C. Møller. Nous donnerons, au contraire, à l'adjectif standard un sens différent (*cf.* p. 98) comme C. Cattaneo et conserverons ici la notion d'horloges identiques.

([6]) J. L. SYNGE, *Relativity : the general theory*, p. 106.

quel type d'horloge. En effet, si nous substituons aux horloges primitives (*a*) d'autres étalons (*b*) identiques entre eux, ils accomplissent pendant N_i et N_j vibrations de la source des nombres $N_i^{(b)}$ et $N_j^{(b)}$ de pulsations tels que

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{N_i^{(a)}}{N_j^{(a)}} = \frac{N_i^{(b)}}{N_j^{(b)}}. \tag{7}$$

Si, par exemple

$$N_i^{(a)} = N_j^{(a)} = 1 \qquad (\text{pour } N_i = N_j = n), \tag{8}$$

il viendra

$$N_i^{(b)} = N_j^{(b)} = N. \tag{9}$$

Tout revient à substituer à un battement des premières horloges, N battements des nouvelles, c'est-à-dire à changer seulement l'échelle de temps. Au contraire, le rejet de (6) reviendrait à postuler l'existence d'une classe d'horloges privilégiée.

On postule, en général (*cf.* G. C. MACVITTIE, *General Relativity and Cosmology*, p. 96) que des sources identiques doivent satisfaire la condition

$$\Delta s_i = \Delta s_j \qquad \text{pour} \quad N_i = N_j \tag{10}$$

indépendante du système de coordonnées adopté.

Il vient en particulier, pour un battement

$$\Delta\tau_{i1} = \Delta\tau_{j1}. \tag{11}$$

Il est évident que cette condition est plus restrictive que (6) et entraîne cette dernière.

Désormais, nous supposerons — sauf indication contraire explicite — que les sources et horloges utilisées sont identiques. Aussi, pour alléger les notations, nous supprimerons, en général, l'indice (*a*) qui caractérise un certain type d'horloges.

3. **Repère physique. Système de coordonnées. Espace-temps stationnaire.** — La donnée d'une ligne d'univers C_i orientée suffit à déterminer un repère physique. On peut imaginer la constitution de ce repère comme un ensemble de particules liées sans rigidité et formant un fluide de référence. La définition d'un repère physique a un sens intrinsèque, tout à fait indépendant du mode de description qu'on en peut donner.

Pour décrire les phénomènes liés aux divers points d'un repère physique, il est nécessaire de rapporter celui-ci à un système de coordonnées. Ces coordonnées y^μ seront dites adaptées si elles sont formées par une congruence de lignes orientées du genre temps (coordonnée temporelle y^0) complétées par une triple congruence de lignes orientées du genre espace. La donnée de y^0 et du vecteur vitesse unitaire tangent à y^0 suffit à déterminer le repère physique. Par contre, à un repère physique donné, correspond une infinité de systèmes de coordonnées adaptées.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que la coordonnée y^0 peut toujours représenter les lignes de temps et les sections $y^0 = \text{Cte}$, l'espace correspondant. L'espace-temps est alors dit *stationnaire*. On peut toujours, dans un tel espace, choisir un système de coordonnées adaptées telles que les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique soient indépendantes du temps.

Si l'on choisit une ligne de temps y_j^0 colinéaire à la ligne d'univers C_j — ce qui est toujours possible dans un espace-temps stationnaire (7) — on aura alors sur C_j

$$\Delta s_j^2 = (g_{00})_j (\Delta y_j^0)^2, \qquad \text{avec} \quad \Delta y_j^p = 0 \tag{12}$$

et

$$\Delta s_j = \sqrt{(g_{00})_j}\, \Delta y_j^0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta \tau_j = \sqrt{(g_{00})_j}\, \Delta t_j. \tag{13}$$

II. — COMPARAISON DES FRÉQUENCES (CAS STATIQUE)

4. **Temps propre et temps coordonnée.** — J. L. Synge a souligné l'importance peut-être excessive que toute théorie des fréquences accorde au cas statique. En fait, c'est dans ce cas seulement qu'une théorie peut être développée de façon complète et rigoureuse. C'est dans ce cas aussi que nous étudierons la signification de la notion théorique de fréquence et son lien avec des grandeurs mesurables.

Supposons que des sources vibrantes, atomiques ou moléculaires, soient *en repos relatif* dans un espace-temps stationnaire. Il est alors possible de faire coïncider les lignes de temps ct_0, ct_i, ct_j avec des lignes d'univers, c'est-à-dire avec la congruence de courbes parallèles C_0, C_i, C_j. Nous supposerons, en outre, qu'au voisinage de C_0, le champ de gravitation est pratiquement nul, l'espace étant asymptotiquement minkowskien.

---

(7) *Cf.*, par exemple, A. LICHNEROWICZ, *Les théories relativistes de la gravitation*, p. 110.

L'espace-temps est dit statique si, en outre, la variable y^0 n'intervient que par le terme $(dy^0)^2$.

La coïncidence des lignes d'univers et des lignes de temps n'est pas sans donner lieu à confusion. En particulier, le lien entre « grandeurs propres » et « grandeurs coordonnées », l'assimilation des unes ou des autres aux quantités mesurables ne va pas sans ambiguïté.

Pour la dissiper par des voies semi-populaires, introduisons la transposition suivante :

Des véhicules identiques parcourent des routes de difficultés croissantes C_0, C_i, C_j, la première étant une route idéale qui présente le maximum de facilité de parcours. Ces véhicules peuvent être munis d'une horloge et aussi d'un compteur-tours qui enregistre le nombre des tours de roues du véhicule.

Le compteur-tours mesure des longueurs qui ont un sens intrinsèque indépendant des caractéristiques de la route et du véhicule. L'horloge détermine des temps mais, selon l'usage courant, ces derniers peuvent être utilisés aussi comme repérage des distances parcourues. Bien entendu, ce repérage est arbitraire. Il dépend de l'état de la route (champ de gravitation local) et, finalement, de la vitesse du véhicule.

Pour étalonner les horloges, on synchronisera les horloges de C_i, C_j en choisissant l'horloge de C_0 comme étalon. Des signaux électromagnétiques se propagent de P_0 à P_i et à P_j, suivant une géodésique de longueur nulle. En utilisant de tels signaux, on choisira ou l'on réglera les horloges de P_j, P_i pour qu'elles effectuent des nombres

$$N_j^{(0j)} = N_i^{(0i)} = N_0$$

de pulsations en coïncidence *avec le même nombre* de pulsations N_0 reçues de l'horloge C_0 [8]. Des horloges ainsi construites ne sont plus identiques s'il existe un champ de gravitation. Elles seront dites *horloges coordonnées* et indiquent en P_j le temps t_{0j} correspondant aux vibrations transmises.

L'expression (13) s'écrit alors

$$\Delta\tau_j = \sqrt{(g_{00})_j}\,\Delta t_{0j}. \tag{14}$$

a. Il est évident qu'à des distances égales,

$$\Delta s_j = \Delta s_i = \Delta s_0 \tag{15}$$

correspondront des temps de parcours décroissants

$$[\Delta t_{0j} > \Delta t_{0i} > \Delta t_0]_{\Delta s = \mathrm{Cte}}. \tag{16}$$

---

(8) La notation $N_i^{(0i)}$, N_j^{0j} indique qu'il s'agit d'horloges locales de type différent $(a) = (0i)$, $(a) = (0j)$, horloges étalonnées pour que leurs battements soient en synchronisme avec les N_0 signaux transmis de P_0 ($N_0 = N_i^{(0i)} = N_j^{(0j)}$).

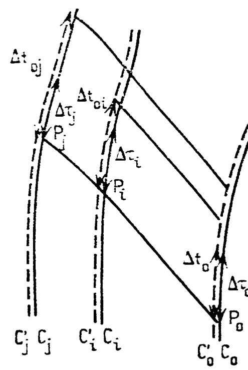

Fig. 1. — Correspondance entre horloges coordonnées (réglées par signaux) (traits pointillés) pour un même nombre de pulsations des horloges locales identiques (traits pleins) (cas statique).

b. Au contraire, à des temps de parcours égaux,

(17) $$\Delta t_{0j} = \Delta t_{0i} = \Delta t_0$$

correspondront des distances croissantes

(18) $$[\Delta s_j < \Delta s_i < \Delta s_0]_{\Delta t_{0a} = \mathrm{Cte}},$$

d'après l'ordre de difficulté des parcours.

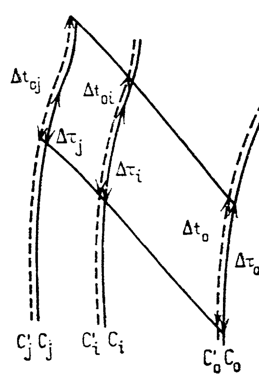

Fig. 2. — Cas statique. Correspondance entre horloges locales identiques (traits pleins) pour un même nombre de signaux transmis (traits pointillés).

Le compteur-tours et l'horloge constituent ici des indicateurs indépendants. On peut néanmoins les relier arbitrairement en choisissant un étalonnage tel que, sur le chemin C_0, l'unité de longueur soit parcourue pendant l'unité de temps :

$$\Delta\tau_{01} = \frac{\Delta s_{01}}{c} = \Delta t_{0i}. \tag{19}$$

5. **Horloges identiques. Horloges coordonnées.** — *Notations.* — Nous désignerons par des lettres minuscules n_{0i}, n_{0j}, n_{ij} le nombre de pulsations reçues en P_i, P_j à partir de sources identiques S_0, S_i; nous représenterons par des lettres majuscules N_0, N_i, N_j les nombres de pulsations effectuées par des sources locales identiques décrivant les lignes d'univers C_0 C_i, C_j.

Un observateur P_j peut ainsi qualifier d' « horloge » :

a. soit un étalon local, arbitraire, *identique* à d'autres horloges disposées en P_i, ..., P_0. Un même nombre de pulsations $N_j = N_i = N_0$ de ces horloges identiques définit alors un même intervalle $(\Delta\tau_j = \Delta\tau_i = \Delta\tau_0)$ sur les lignes d'univers C_j, C_i, C_0 [9].

Les fréquences propres de ces horloges identiques sont égales quel que soit le champ de gravitation au point où elles sont placées

$$\bar{\nu}_j = \frac{N_j}{\Delta\tau_j} = \frac{N_i}{\Delta\tau_i} = \bar{\nu}_i = \bar{\nu}_0. \tag{20}$$

Cette fréquence propre est, par définition, l'inverse de l'unité de temps propre

$$\bar{\nu} = \frac{N}{\Delta\tau} = \frac{N}{N\,\Delta\tau_1} = \frac{1}{\Delta\tau_1}\,; \tag{21}$$

b. soit un oscillateur choisi ou étalonné par comparaison avec un étalon disposé en un point différent. Si $N_0 = n_{0i} = n_{0j}$ pulsations sont reçues en P_i, puis en P_j à partir de P_0, elles déterminent sur les lignes de temps C'_0, C'_i, C'_j parallèles aux lignes d'univers des segments égaux ($\Delta t_0 = \Delta t_{0i} = \Delta t_{0j}$). Des horloges « coordonnées » seront des oscillateurs locaux —

(9) Au contraire, des horloges coordonnées par P_0 accompliraient en P_j et en P_i pendant l'émission de $N_j = N_i$ signaux émis par les horloges locales identiques des nombres $n_{0j} \neq n_{0i} \neq n_0$ pulsations. Ces nombres représentent la retranscription — pour un temps propre constant — du temps coordonnée de C_0 dans celui de C_i ou de C_j (*fig. 1*).

évidemment non identiques — qui accompliront, pendant la transmission de N_0 pulsations, un nombre de vibrations égal lui-même à N_0 [10]

$$N_j^{(0j)} = N_i^{(0i)} = N_0 = n_{0i} = n_{0j}. \tag{22}$$

S'il s'agit de la transmission de $N_i = n_{ij}$ vibrations de P_i en P_j

$$N_j^{(ij)} = N_i = n_{ij}. \tag{23}$$

Les *fréquences coordonnées* de telles horloges, c'est-à-dire les fréquences synchronisées des signaux transmis à partir d'une même source sont *égales quel que soit le champ de gravitation aux points ou sont placées ces horloges* [11]

$$\nu_{0j} = \frac{N_0}{\Delta t_{0j}} = \frac{N_0}{\Delta t_{0i}} = \nu_{0i} \qquad (\Delta t_{0j} = \Delta t_{0i}). \tag{24}$$

De même,

$$\nu_{ij} = \frac{n_{ij}}{\Delta t_{ij}} = \frac{N_i}{\Delta t_i} = \nu_i. \tag{25}$$

La fréquence coordonnée est, par définition, l'inverse de l'unité de temps coordonnée

$$\nu_{ij} = \frac{n_{ij}}{\Delta t_{ij}} = \frac{N_i}{N_i \Delta t_{ij,1}} = \frac{1}{\Delta t_{ij,1}}. \tag{26}$$

---

[10] Au contraire, des horloges locales identiques accompliraient, pendant la réception de $N_0 = n_{0i} = n_{0j}$ (ou de $N_i = n_{ij}$) signaux des nombres différents de pulsations. Ces nombres $N_j \neq N_i \neq N_0$ correspondent aux pulsations effectuées par des horloges *identiques* pendant la réception de n_0 (ou de n_i) signaux. Ils représentent la retranscription, à temps coordonnée constant, du temps propre de C_0 (ou de C_i) dans le temps propre de C_j et de C_i.

[11] Les fréquences propres d'horloges coordonnées sont, par contre, différentes (ces horloges étant elles-mêmes différentes)

$$\bar{\nu}_j^{(0j)} = \frac{n_{0j}}{\Delta\tau_{0j}} = \frac{n_{0j}}{\sqrt{(g_{00})_j}\Delta t_{0j}} = \frac{N_0}{\sqrt{(g_{00})_j}\Delta t_0} = \frac{\nu_0}{\sqrt{(g_{00})_j}},$$

d'où :

$$\bar{\nu}_j^{(0j)}\sqrt{(g_{00})_j} = \bar{\nu}_i^{(0i)}\sqrt{(g_{00})_i} = \nu_0.$$

D'une manière analogue, les fréquences coordonnées d'horloges identiques sont différentes. Si $N_j \neq N_i \neq N_0$ pulsations de ces horloges s'effectuent pendant la réception de $n_{0j} = n_{0i} = N_0$ signaux issus de P_0 leurs fréquences coordonnées sont

$$\nu_{0j} = \frac{N_j}{\Delta t_{0j}} = \frac{N_j}{\Delta\tau_j}\sqrt{(g_{00})_j} = \bar{\nu}_j\sqrt{(g_{00})_j}, \qquad \ldots$$

et

$$\frac{\nu_{0j}}{\sqrt{(g_{00})_j}} = \frac{\nu_{0i}}{\sqrt{(g_{00})_i}} = \ \ldots\ = \bar{\nu}_0.$$

Cette unité de temps coordonnée est évidemment la même pour toutes les horloges (horloges non identiques) coordonnées.

6. **Réalisation de mesures au moyen d'horloges locales identiques.** — Les observateurs P_j, P_i peuvent utiliser leurs horloges locales identiques :

a. soit pour déterminer les fréquences propres relatives de sources locales ;

b. soit pour comparer les potentiels de gravitation aux points P_i et P_j en utilisant les signaux issus d'une source P_i supposée, à l'avance, identique à celle de P_j.

a. DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES PROPRES RELATIVES (FRÉQUENCES A L'ÉMISSION). — En comparant le nombre de battements correspondants $N_j^{(S)}$ et N_j d'une source locale S_j et d'une horloge étalon H_j située au même point, l'observateur P_j peut définir la fréquence propre relative de la source S_j

$$(27) \qquad \bar{\nu}_j^{(S)} = \frac{N_j^{(S)}}{\Delta\tau_j} = \frac{N_j^{(S)}}{N_j \Delta\tau_{j1}} = \frac{N_j^{(S)}}{N_j} \bar{\nu}_j \qquad \left(\bar{\nu}_j = \frac{N_j}{\Delta\tau_j} = \frac{1}{\Delta\tau_1}\right).$$

Si les horloges locales sont identiques, on peut choisir arbitrairement

$$(28) \qquad \bar{\nu}_j = \bar{\nu}_i = 1, \qquad \Delta\tau_{j1} = \Delta\tau_{i1} = 1$$

et définir les fréquences propres relatives par le rapport du nombre de pulsations

$$(29) \qquad \bar{\nu}_j^{(S)} = \left(\frac{N_j^{(S)}}{N_j}\right)_{\bar{\nu}_j = 1}, \qquad \bar{\nu}_i^{(S')} = \left(\frac{N_i^{(S')}}{N_i}\right)_{\bar{\nu}_i = 1}.$$

Si les sources sont elles-mêmes identiques

$$(30) \qquad \bar{\nu}_j^{(S)} = \bar{\nu}_i^{(S)}.$$

Les fréquences propres à l'émission de deux sources identiques sont égales si on les mesure, sur C_j et sur C_i, à l'aide d'horloges identiques.

b. COMPARAISON EXPÉRIMENTALE DES POTENTIELS DE GRAVITATION. — Les observateurs P_j, P_i, P_0 sont munis d'horloges supposées *a priori* identiques. Deux battements consécutifs de ces horloges déterminent sur les lignes d'univers correspondantes C_j, C_i, C_0 des segments, par définition, égaux (*cf. fig. 1*)

$$(31) \qquad \Delta\tau_{j1} = \Delta\tau_{i1} = \Delta\tau_{01} = \Delta\tau_1.$$

Supposons que $N_i = n_i$ battements issus de l'horloge de P_i soient transmis à P_j. Ils coïncident avec

$$N_{ij} = N_j(N_i) \neq N_i$$

pulsations de son horloge identique en P_j. L'observateur P_j détermine donc, pour la radiation qui lui est transmise, une *fréquence propre à l'absorption*

$$\bar{\nu}_{ij} = \frac{n_i}{\Delta\tau_{ij}} = \frac{n_i}{N_{ij}\Delta\tau_1} = \frac{n_i}{N_{ij}}\bar{\nu}_j. \tag{32}$$

Le rapport $\frac{N_{ij}}{n_i} = \frac{N_{ij}}{N_i}$ est égal au rapport $\frac{N_{0i}}{N_{0j}}$ des vibrations qu'effectueraient les horloges locales identiques de P_i et de P_j pendant $N_0 = n_0$ vibrations qui leur seraient transmises de P_0. En effet, si $N_i(N_0) = N_{0i}$ pulsations de l'horloge locale de P_i correspondent à $N_j(N_0) = N_{0j}$ pulsations effectuées par l'horloge locale de P_j, $N_i = n_i$ pulsations de l'horloge locale de P_i transmises en P_j correspondront à

$$N_{ij} = N_j(N_i) = \frac{N_{0j} \times n_i}{N_{0i}} \tag{33}$$

pulsations de l'horloge locale identique de P_j.

La fréquence propre $\bar{\nu}_{ij}$ à l'absorption d'une source placée en P_i et mesurée par une horloge identique de P_j a donc pour mesure, d'après (32) et (33),

$$\frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{N_{0i}}{N_{0j}}. \tag{34}$$

Les nombres N_{0i} et N_{0j} représentent les pulsations effectuées par les horloges identiques de P_i et de P_j mises en correspondance par N_0 vibrations issues d'une horloge identique en P_0. Ces N_0 vibrations déterminent sur les lignes de temps parallèles C'_j, C'_i, C'_0 des segments égaux

$$\Delta t_{0j} = \Delta t_{0i} = \Delta t_{00} = \Delta\tau_0. \tag{35}$$

Dans un espace-temps statique ces conditions, d'après (13), sont équivalentes à

$$\left[\frac{\Delta\tau_{0j}}{\sqrt{(g_{00})_j}} = \frac{\Delta\tau_{0i}}{\sqrt{(g_{00})_i}} = \Delta\tau_0\right]_{\Delta t_{0a}=\text{Cte}} \tag{36}$$

Or $\Delta\tau_{0j}$, $\Delta\tau_{0i}$ et $\Delta\tau_0$ sont proportionnels au nombre N_{0j}, N_{0i} et N_0 de battements des horloges locales identiques pendant N_0 vibrations transmises. Il vient donc

$$\frac{\Delta\tau_{0i}}{\Delta\tau_{0j}} = \frac{N_{0i}}{N_{0j}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}. \tag{37}$$

D'où, en portant dans (34)

$$\boxed{\frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_i} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}} \tag{38}$$

La relation

$$\boxed{\frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}} \tag{39}$$

est expérimentalement vérifiable. Connaissant les champs de gravitation en P_i et en P_j on peut aisément tester cette formule en comparant les nombres correspondants de battements de deux sources qu'on sait *a priori* être identiques.

7. **Réalisation de mesures au moyen d'horloges différentes synchronisées (horloges coordonnées).** — Les observateurs P_j, P_i peuvent utiliser des horloges différentes, mais synchronisées :

a. soit pour déterminer les fréquences coordonnées de signaux qui leur sont transmis;

b. soit pour comparer les potentiels de gravitation aux points P_i et P_j en utilisant en P_j une source identique à l'horloge de P_i.

a. DÉTERMINATION DE FRÉQUENCES COORDONNÉES A L'ABSORPTION. — Supposons que l'observateur P_j reçoive $n_{aj}^{(S)}$ pulsations d'une source vibrante située en P_a pendant que $N_j^{(hj)}$ vibrations sont effectuées par son horloge coordonnée (celle-ci, synchronisée sur une horloge arbitraire H, constitue une horloge du type (hj)). Il définit pour cette source une fréquence coordonnée à l'absorption

$$\nu_{aj}^{(S)} = \frac{n_{aj}^{(S)}}{\Delta t_j^{(hj)}} = \frac{n_{aj}^{(S)}}{N_j^{(hj)}\Delta t_{hj,1}} = \frac{n_{aj}^{(S)}}{N_j^{(hj)}}\nu_{hj}. \tag{40}$$

En choisissant arbitrairement

$$\nu_{hj} = \nu_{hi} = 1, \qquad \Delta t_{hj,1} = \Delta t_{hi,1} = 1, \tag{41}$$

on peut donc définir expérimentalement la fréquence coordonnée d'une source par un rapport de nombres de pulsations

$$\nu_{aj}^{(S)} = \left(\frac{n_{aj}^{(S)}}{N_j^{(hj)}}\right)_{\nu_{hj}=1}, \qquad \nu_{ai}^{(S')} = \left(\frac{n_{ai}^{(S')}}{N_i^{(hi)}}\right)_{\nu_{hi}=1}. \tag{42}$$

Si les sources sont elles-mêmes identiques, les nombres des vibrations reçues pendant un même temps coordonné (déterminé par $n_h = N_i^{(hi)} = N_j^{(hj)}$ vibrations transmises d'une horloge arbitraire) sont égaux ($n_{aj}^{(S)} = n_{ai}^{(S')}$). Une même source a donc même fréquence coordonnée à l'absorption

$$\boxed{\nu_{aj}^{(S)} = \nu_{ai}^{(S)}} \tag{43}$$

quelle que soit la valeur du potentiel de gravitation au lieu où se fait l'observation :

Une fréquence coordonnée se transmet sans changement dans un espace-temps statique [*cf.* G C. MACVITTIE, *General Relativity and Cosmology*, p. 95, éq. (*5*.403)].

b. COMPARAISON EFFECTIVE DES POTENTIELS DE GRAVITATION. — Supposons que les observateurs P_j et P_i disposent de sources locales identiques. Si N_j pulsations de la source S_j coïncident avec $n_{ij} = n_i(N_j)$ pulsations reçues d'une horloge identique en P_i, c'est-à-dire avec $N_j^{(ij)} = n_{ij}$ pulsations d'une horloge coordonnée [horloge du type (ij)] située en P_j, cet observateur attribuera à la source S_j une fréquence à l'émission

$$\nu_j = \frac{N_j}{\Delta t_j^{(ij)}} = \frac{N_j}{n_{ij}\Delta t_{ij,1}} = \frac{N_j}{n_{ij}}\nu_{ij}. \tag{44}$$

La situation est analogue à celle que nous avons examinée au paragraphe *5 b*, à ceci près que l'horloge locale de $P_j(N_{ij} = N_j(N_i))$ joue maintenant le rôle de source (N_j) et que la source de $N_i = n_i$ vibrations transmises a ici le rôle d'horloge ($n_{ij} = n_i(N_j)$). D'après (33), on a donc encore

$$\frac{N_{ij}}{n_i} = \frac{N_j}{n_{ij}} = \frac{N_{0j}}{N_{0i}}. \tag{45}$$

En substituant dans (44), il vient donc

$$\frac{\nu_j}{\nu_{ij}} = \frac{N_j}{n_{ij}} = \frac{N_{0j}}{N_{0i}}. \tag{46}$$

Le rapport $\dfrac{N_{0j}}{N_{0i}}$ est celui du nombre de pulsations d'horloges identiques situées en P_i et en P_j en correspondance avec un même nombre de pulsations N_0 issues de P_0. Ce rapport s'évalue donc à Δt_{0a} constant [12]

$$(47)\qquad \frac{N_{0j}}{N_{0i}} = \left(\frac{\Delta\tau_{0j}}{\Delta\tau_{0i}}\right)_{\Delta t_{0a}=\mathrm{Cte}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_j}}{\sqrt{(g_{00})_i}}.$$

En portant dans (46)

$$(48)\qquad \boxed{\frac{\nu_{ij}}{\nu_j} = \frac{n_{ij}}{N_j} = \left(\frac{N_{0i}}{N_{0j}}\right)_{n_{0a}=\mathrm{Cte}} = \left(\frac{n_{0j}}{n_{0i}}\right)_{N_a=\mathrm{Cte}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}}$$

Rappelons que le rapport des fréquences propres s'écrivait d'une manière identique [*cf.* (38)]

$$(49)\qquad \boxed{\frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_i} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \left(\frac{N_{0i}}{N_{0j}}\right)_{n_{0a}=\mathrm{Cte}} = \left(\frac{n_{0j}}{n_{0i}}\right)_{N_a=\mathrm{Cte}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}}$$

Vérifications. — Les comparaisons expérimentales, c'est-à-dire entre nombres de pulsations et potentiels de gravitation connus sont indépen-

---

[12] Le rapport $\frac{\nu_{ij}}{\nu_j}$ des fréquences coordonnées ou bien le rapport $\frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_j}$ des fréquences propres s'évalue souvent en fonction des pulsations n_{0j} et n_{0i} *transmises à partir de* C_0, c'est-à-dire en fonction de $\frac{\Delta t_{0i}}{\Delta t_{0j}}$ *calculé à* $\Delta\tau_a = \mathrm{Cte}$. Les relations entre fréquences et nombres de pulsations sont alors inverses de (46) ou de (34), mais les conclusions sont, bien entendu, identiques.

En effet, si N_0, N_{0i}, N_{0j} pulsations d'horloges locales identiques sont les nombres correspondants à $N_0 = n_0$ pulsations transmises, des nombres égaux $N_0 = N_i = N_j$ de pulsations d'horloges locales identiques correspondraient à des nombres différents n_0, n_{0i}, n_{0j} de pulsations transmises. Ces nombres sont tels que

$$(1)\qquad n_{0i} = \frac{N_0 \times N_i}{N_{0i}}, \qquad n_{0j} = \frac{N_0 \times N_j}{N_{0j}}.$$

Aussi

$$(2)\qquad \left(\frac{N_{0j}}{N_{0i}}\right)_{n_{0a}=\mathrm{Cte}} = \left(\frac{n_{0i}}{n_{0j}}\right)_{N_a=\mathrm{Cte}} \qquad (a = i, j, \ldots).$$

On obtient donc

$$(3)\qquad \left(\frac{N_{0j}}{N_{0i}}\right)_{n_{0a}=\mathrm{Cte}} = \left(\frac{\Delta\tau_{0j}}{\Delta\tau_{0i}}\right)_{\Delta t_{0a}=\mathrm{Cte}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_j}}{\sqrt{(g_{00})_i}}$$

et

$$(4)\qquad \left(\frac{n_{0i}}{n_{0j}}\right)_{N_a=\mathrm{Cte}} = \left(\frac{\Delta t_{0i}}{\Delta t_{0j}}\right)_{\Delta\tau_{0a}=\mathrm{Cte}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_j}}{\sqrt{(g_{00})_i}}$$

car

$$(5)\qquad \Delta\tau_{0a} = \sqrt{(g_{00})_a}\,\Delta t_{0a} \qquad (a = 0, i, j, \ldots).$$

dantes du fait que l'on choisit comme intermédiaire les fréquences propres ou les fréquences coordonnées. De même, la détermination expérimentale des potentiels de gravitation $(g_{00})_j$ [$(g_{00})_i$ et les nombres de pulsations étant connus] ne dépendent pas de la définition en temps propre ou coordonnée de la fréquence : celle-ci est un pur intermédiaire de calcul.

Le décalage des fréquences

$$(50) \qquad \frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}} = \frac{\bar{\nu}_j - \bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_j} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_j - \nu_{ij}}{\nu_j}$$

se définit donc expérimentalement par

$$(51) \qquad \frac{N_{ij} - n_i}{N_{ij}} \quad \text{ou} \quad \frac{N_j - n_{ij}}{N_j}.$$

D'après la Relativité Générale, il a aussi pour mesure

$$(52) \qquad \frac{\sqrt{(g_{00})_j} - \sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}.$$

Si le champ de gravitations est créé par une seule masse statique et sphérique, les potentiels de gravitation sont définis en P_i et en P_j par

$$(53) \qquad (g_{00})_i = 1 - \frac{2U_i}{c^2}, \qquad (g_{00})_j = 1 - \frac{2U_j}{c^2},$$

en adoptant un système de Schwarzschild.

U est le potentiel newtonien

$$U = \frac{Gm}{r}.$$

Si $U_i > U_j$,

$$(54) \qquad (g_{00})_i < (g_{00})_j \quad \text{entraîne} \quad \frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}} = \frac{\Delta\nu}{\nu} > 0,$$

c'est-à-dire

$$(55) \qquad \bar{\nu}_j = \bar{\nu}_i > \bar{\nu}_{ij}, \qquad \nu_j > \nu_{ij} = \nu_{ii}.$$

Il existe une diminution de la fréquence propre transmise par rapport aux fréquences propres locales de sources identiques. D'une manière analogue, on doit constater dans le même cas une diminution de la fréquence coordonnée transmise par rapport à la fréquence coordonnée d'une source identique liée à l'observateur. Ce « décalage vers le rouge » se traduit expérimentalement par des mesures de pulsations qui doivent être telles que

$$(56) \qquad N_{ij} > n_i \quad \text{ou} \quad N_i > n_{ij}$$

si les relations prévues sont vérifiées.

Ces conclusions sont évidemment inversées si $U_i < U_j$.

B. — DÉCALAGE DES FRÉQUENCES DANS LE CAS OÙ LA SOURCE ET L'OBSERVATEUR SONT EN MOUVEMENT RELATIF

Une théorie rigoureuse du décalage des fréquences dans un champ de gravitation n'a été réalisée, jusqu'ici, que dans certains particuliers : le cas statique, sans doute le plus important et le plus étudié.

Si les sources sont en mouvement relatif dans un champ de gravitation, le problème du décalage est plus compliqué. Pour essayer de le résoudre, on calcule souvent un décalage Doppler du premier ordre (décalage qualifié souvent de « non relativiste ») par des considérations classiques appliquées à un espace euclidien. On superpose ensuite un effet du second ordre (ralentissement des horloges en β^2, décalage gravitationnel en $\frac{U}{c^2}$ par des voies assez heuristiques). J. L. Synge a proposé une solution plus systématique valable dans le cas des champs faibles. Enfin, la méthode utilisée par G. C. MacVittie, méthode que nous reprendrons partiellement ici, consiste à utiliser des développements de Taylor dans le cas particulier d'un espace-temps de Schwarzschild. Elle constitue, elle aussi, une approximation.

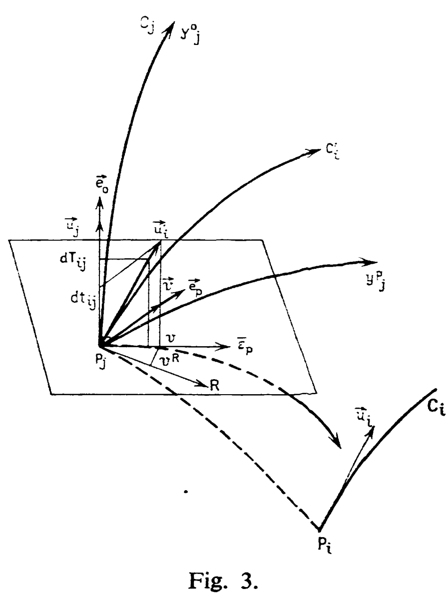

Fig. 3.

I. — DÉFINITIONS ET NOTATIONS

8. **Temps standard.** — Considérons une source P'_i qui décrit la ligne d'univers C'_i. Rapportons C'_i à un système de coordonnées y_j^μ tel que les y_j^0 forment une congruence de lignes de temps. Les y_j^p sont arbitraires.

On obtient ainsi

$$ds_i^2 = (g_{pq})_i dy_{ij}^p dy_{ij}^q + 2(g_{p0})_i dy_{ij}^p dy_{ij}^0 + (g_{00})_i (dy_{ij}^0)^2. \tag{57}$$

Les vecteurs unités $\vec{e}_p$, $\vec{e}_0$ tangents en P'_i aux courbes y_j^p, y_j^0 déterminent l'espace euclidien tangent. On peut, dans cet espace, substituer aux vecteurs $\vec{e}_p$, les vecteurs $\vec{\varepsilon}_p$ orthogonaux à y_j^0. L'intervalle ds_i^2 peut alors s'exprimer suivant une décomposition orthogonale en dy^0 tangent à $\vec{e}_0$ et en $d\sigma$ tangent au 3-plan $\vec{\varepsilon}_p$ et orthogonal à $\vec{e}_0$. Cette décomposition en espace et temps « associés » ne peut avoir, bien entendu, qu'un *sens local.* Autrement dit, si y_k^0, $d\sigma_k$ est la décomposition analogue réalisée en un autre point P'_k, le changement de coordonnées $y_i^\mu \rightarrow y_k^\mu$ ne peut conduire, en général, à la transformation $d\sigma_i \rightarrow d\sigma_k$.

Localement, l'expression (57) a la forme suivante :

$$ds_i^2 = c^2\, d\tau_i^2 = -\, d\sigma_{ij}^2 + (dy_{ij}^0)^2 \left[\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v_{ij}^p}{c}\right]^2, \tag{58}$$

avec

$$\gamma_\mu = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 0} g_{\nu 0}}{g_{00}}. \tag{59}$$

On a posé

$$d\sigma_{ij}^2 = -\, (\gamma_{pq})_i dy_{ij}^p dy_{ij}^q, \tag{60}$$

$$v_{ij}^p = \left(\frac{dy^p}{dt}\right)_{ij}. \tag{61}$$

Les courbes coordonnées y_j^μ sont tangentes en P_j au repère naturel $(\vec{e}_\mu)_j$ tel que

$$(\vec{e}_\mu . \vec{e}_\nu)_j = (g_{\mu\nu})_{P'_i \rightarrow P_j}. \tag{62}$$

Définissons aussi les vecteurs $(\vec{\varepsilon}_\mu)_j$ tels que

$$(\vec{\varepsilon}_\mu . \vec{\varepsilon}_\nu)_j = -\, (\gamma_{\mu\nu})_j, \qquad \text{d'où} \qquad (\vec{\varepsilon}_\mu . \vec{\varepsilon}_0)_j = 0, \qquad (\vec{\varepsilon}_0)_j^2 = 0. \tag{63}$$

D'après la définition (59) des $\gamma_{\mu\nu}$, $(\vec{\varepsilon_0})_j$ est donc nul et les $\bar{\varepsilon}(\vec{\varepsilon_p})$ définissent localement l'hyperplan orthogonal en P_j à y_j^0 : c'est l' « espace physique » de P_j.

La projection de $\vec{v}\left(v^\mu = \dfrac{dy^\mu}{dt}\right)$ sur ce plan normal à y_j^0 est donc ([13])

$$(64) \qquad \bar{v}_{ij} = (\vec{\varepsilon_\mu})_j v_{ij}^\mu = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{ij},$$

avec

(65)

$$\bar{v}_{ij}^2 = (\vec{\varepsilon_\mu}\cdot\vec{\varepsilon_\nu})_j\left(\frac{dy^\mu}{dt}\right)_{ij}\left(\frac{dy^\nu}{dt}\right)_{ij} = -\lim_{P_i\to P_j}\left[(\gamma_{\mu\nu})_i\left(\frac{dy^\mu}{dt}\right)_{ij}\left(\frac{dy^\nu}{dt}\right)_{ij}\right] = \lim\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{ij}^2.$$

A partir de (58) et de (63) on obtient encore l'expression de $d\tau = \dfrac{ds}{c}$, soit en fonction du temps coordonnée dt.

$$(66) \qquad d\tau_i = dt_{ij}\left\{-\frac{\bar{v}_{ij}^2}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i^* \frac{v_{ij}^p}{c}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

soit en fonction du « temps standard »

$$(67) \qquad dT_{ij} = \left[\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v_{ij}^p}{c}\right] dt_{ij}.$$

On obtient alors

$$(68) \qquad d\tau_i = \left(1 - \frac{\bar{V}_{ij}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dT_{ij}$$

([13]) Si $\vec{U}_i$ et $\vec{U}_j$ sont les vecteurs vitesses unitaires tangents en P_i et en P_j aux lignes d'univers C_i et C_j, le transport parallèle de P_i en P_j le long de P_iP_j permet de définir $\vec{U}'_{ij}$. La projection de $\vec{U}'_{ij}$ sur le plan orthogonal à C_j définit, d'après J. L. Synge, la vitesse relative de P_i par rapport à P_j

$$\bar{U}'_{ij} = (\bar{\varepsilon}_\mu)_j U'^\mu_{ij} \qquad (\vec{\varepsilon_p}\cdot\vec{\varepsilon_q} = -\gamma_{pq}, \ \vec{\varepsilon_0} = 0).$$

D'après C. Cattaneo, la vitesse relative est définie par

$$\bar{V}_{ij} = (\bar{\varepsilon}_\mu)_j V_{ij}^\mu, \qquad \text{avec} \quad V_{ij}^\mu = \left(\frac{dy^\mu}{dT}\right)_{ij},$$

dT étant l'intervalle de « temps standard » et non l'intervalle d'univers. On constate aisément [*cf.* (66)] que

$$\bar{U}' = \frac{\bar{V}}{c\sqrt{1 - \dfrac{\bar{V}^2}{c^2}}}.$$

Cf. J. L. SYNGE, *Relativity. The general theory*, p. 120; C. CATTANEO, *Formulation relative des lois physiques en Relativité générale*, Cours professé au Collège de *France*, 1961-1962, p. 64.

en posant

$$(69) \qquad \overline{V}_{ij} = \bar{v}_{ij}\left(\frac{dt}{dT}\right)_{ij} = \left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{ij} = (\vec{\varepsilon}_\mu)_j\left(\frac{dy^\mu}{dT}\right)_{ij},$$

T_{ij} et V_{ij} sont appelés temps et vitesse standards par C. Cattaneo. On obtient des relations formellement identiques à celles de la Relativité restreinte. Bien entendu, ces expressions présentent un caractère *purement local.* Si $\bar{v}_{ij} = \overline{V}_{ij} = 0$, on a

$$d\tau_i = dT_{ij} = \sqrt{(g_{00})}dt_{ij}.$$

La durée de N pulsations d'horloges locales identiques est telle que

$$(70) \qquad d\tau_0 = d\tau_i = d\tau_j.$$

D'après (66) et (67) temps propre, temps coordonnée et temps standard de P_i sont donc entre eux, pour un observateur P_j dont la ligne d'univers $C_j = y_j^0$, dans le rapport suivant

$$(71) \quad d\tau_i = dt_{ij}\left\{-\frac{\bar{v}_{ij}^2}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i\frac{v_{ij}^p}{c}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} = dT_{ij}\left[1 - \frac{\overline{V}_{ij}^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le temps propre est indépendant du repérage adopté. Au contraire, le temps standard et le temps coordonnée sont essentiellement relatifs au système de coordonnée utilisé. Nous avons explicité — en dernière position — l'indice qui se rapporte au système de référence (ici j), alors que cet indice ne figure pas habituellement dans les expressions reliant les temps ou les fréquences. Cette omission nous a paru l'origine de certaines difficultés et de nombreuses confusions.

9. **Fréquence émise. Fréquence absorbée.** — La définition d'une fréquence — définition purement théorique — peut se rapporter, soit au temps propre de l'observateur, soit à son temps coordonnée, soit encore à son temps standard. Ces diverses entités s'élimineront dans le rapport des nombres effectivement mesurés. Elles servent néanmoins d'intermédiaire théorique pour lier le rapport des fréquences à d'autres grandeurs mesurables (potentiels de gravitation, vitesse relative) et aboutir ainsi à une loi physique significative.

a. FRÉQUENCE ÉMISE. — Pendant les temps correspondants $d\tau$, dt_{ij}, dT_{ij} des sources identiques placées en P_i émettent, par définition, le même nombre N_i de pulsations.

Nous appellerons *fréquence à l'émission* d'une source S_i pour un observateur P_j qui coïncide localement avec P_i mais possède éventuellement une vitesse différente, le nombre N_i de pulsations émises par S_i pendant les temps d'émission $d\tau_j$, dt_{ij} ou pendant le temps standard dT_{ij}

$$\bar{\nu}_j^{(e)} = \frac{N_i}{d\tau_j^e}, \qquad \nu_{ij}^e = \frac{N_i}{dt_{ij}^e}, \qquad \hat{\nu}_{ij}^e = \frac{N_i}{dT_{ij}^e}. \tag{72}$$

$\bar{\nu}_j^e$ est la fréquence propre, ν_{ij}^e la fréquence coordonnée, $\tilde{\nu}_{ij}$ la fréquence standard.

b. Fréquence absorbée. — La définition (72) se rapporte au nombre de pulsations émises par une source S_i, en coïncidence avec l'observateur à un instant donné.

Si P_i ne coïncide pas avec P_j, les N_i pulsations émises par P_i sont transmises à P_j suivant des géodésiques de longueur nulle $P_iP_j \ldots P_i'P_j'$. Elles déterminent sur C_j un intervalle de temps dt_{ij}^a qui correspond à l'absorption de ces pulsations.

Les fréquences à l'absorption sont alors

$$\bar{\nu}_{ij}^{(a)} = \frac{N_i}{d\tau_{ij}^{(a)}}, \qquad \nu_{ij}^{(a)} = \frac{N_i}{dt_{ij}^{(a)}}, \qquad \tilde{\nu}_{ij}^{(a)} = \frac{N_i}{dT_{ij}^{(a)}}. \tag{73}$$

Il s'agit encore, soit de fréquences propres (déterminées en fonction du temps propre), soit de fréquences coordonnées ou standard.

II. — COMPARAISON DES FRÉQUENCES

10. **Comparaison des potentiels de gravitation (calculs effectués par l'intermédiaire de la notion de fréquence propre).** — Si $N_i = n_i$ pulsations émises par P_i sont absorbées par P_j pendant l'émission de $N_{ij} = N_j(N_i)$ pulsations de son horloge locale identique, la fréquence attribuée par P_j à la source S_i est

$$\nu_{ij}^{(a)} = \frac{n_i}{d\tau_{ij}^{(a)}} = \frac{n_i}{N_{ij}d\tau_1} = \frac{n_i}{N_{ij}}\bar{\nu}_j. \tag{74}$$

Supposons qu'une source minkowskienne S_0 émette N_0 pulsations qui, absorbées par P_i et par P_j coïncident avec N_{0i} et N_{0j} vibrations de leurs sources locales identiques. On a encore, comme dans le cas statique,

$$N_{ij} = \frac{N_{0j} \times n_i}{N_{0i}}. \tag{75}$$

et, par conséquent

$$\bar{\nu}_{ij}^{(a)} = \frac{N_{0i}}{N_{0j}}\bar{\nu}_j. \tag{76}$$

Traçons maintenant en P_i et en P_j des lignes de temps y_i^0 et y_j^0 tangentes aux vecteurs $\vec{\eta}_{0i}$ et $\vec{\eta}_{0j}$ déduits de la vitesse unitaire en S_0 par transport parallèle le long de la géodésique de longueur nulle P_0, P_i, P_j.

Les N_{0i} et N_{0j} pulsations des horloges locales déterminent en P_i et en P_i des intervalles $d\tau_{0i}$ et $d\tau_{0j}$ sur les lignes d'univers correspondantes C_i et C_j, intervalles proportionnels à N_{0i} et à N_{0j}

(77) $$d\tau_{0i} = N_{0i} d\tau_1, \qquad d\tau_{0j} = N_{0j} d\tau_1.$$

De (74), (75) et de (77), résulte alors

(78) $$\frac{\bar{\nu}_{ij}^{(a)}}{\bar{\nu}_j} = \frac{N_{0i}}{N_{0j}} = \frac{d\tau_{0i}}{d\tau_{0j}}.$$

Or, en P_i et en P_j, la décomposition de $d\tau_{0i}$ et de $d\tau_{0j}$ suivant les lignes de temps y_i^0 et y_j^0 et suivant les espaces physiques locaux orthogonaux à y_i^0 et à y_j^0 peut s'écrire

(79) $$d\tau_{0i} = dt_{0i} \left\{ -\frac{\bar{v}_{i0}^2}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v_{i0}^p}{c}\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = dT_{0i} \left[1 - \frac{\bar{V}_{i0}^2}{c}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et

(80) $$d\tau_{0j} = dt_{0j} \left\{ -\frac{\bar{v}_{j0}^2}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_j} + (\gamma_p)_j \frac{v_{j0}^p}{c}\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = dT_{0j} \left[1 - \frac{\bar{V}_{j0}^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si P_j et P_i étaient immobiles par rapport à P_0 (cas statique) dt_{0i} et dt_{0j} qui correspondent au temps d'absorption de N_0 pulsations issues de P_0 seraient identiques.

1° Supposons, au contraire, que P_j soit pratiquement immobile par rapport à P_0. On peut choisir comme lignes de temps la congruence formée par les lignes d'univers C_0, C_j. Le transport parallèle de P_i en P_j de la vitesse d'univers $\vec{U}_i$ tangente à C_i permet de définir en P_j, $\vec{U}'_{ij}$ dont les projections sur C_j et sur l'hyperplan orthogonal associé sont

$$U'^0_{ij} = \left(\frac{dT}{d\tau}\right)_{ij} = \left(1 - \frac{\bar{V}_{ij}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \bar{U}'_{ij} = \vec{\varepsilon}_p \;\; U'^p_{ij} = \frac{\bar{V}_{ij}}{c}\left(1 - \frac{\bar{V}_{ij}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Les conditions

(81) $$\vec{v}_{j0} = 0, \qquad \vec{v}_{i0} = \vec{v}_{ij}$$

permettent d'écrire les relations (79) et (80) sous la forme suivante

(82) $$d\tau_{0i} = dt_{0i} \left\{ -\frac{\bar{v}_{ij}^2}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v_{ij}^p}{c}\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = dT_{0i} \left[1 - \frac{\bar{V}_{ij}^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

(83) $$d\tau_{0j} = dt_{0j} \sqrt{(g_{00})_j} = dT_{0j}.$$

Les temps dt_{0i} et dt_{0j} correspondent à N_{0i} et à N_{0j} pulsations d'horloges locales identiques en P_i et en P_j pendant que les observateurs P_i et P^j comptent un même nombre N_0 de signaux issus de P_0. Si N_i et $N_{ij} = N_j(N_i)$ représentent le nombre de pulsations des horloges locales liées par la transmission de N_i signaux issus de P_i et si $dt_{i,j}$ et $dt_{ij,j}$ sont les temps correspondants évalués par P_i et par P_j (C_j étant maintenant une ligne de temps), il vient

$$(84) \qquad \frac{N_{0i}}{N_{0j}} = \frac{N_i}{N_{ij}} \qquad \text{et} \qquad \frac{dt_{0i}}{dt_{0j}} = \frac{dt_{i,j}}{dt_{ij,j}} = \frac{dt^e_{ij}}{dt^a_{ij}}$$

$dt_{i,j}$ et $dt_{ij,j}$ peuvent être qualifiés de « temps d'émission » et de « temps d'absorption » de N_i pulsations émises par P_i, absorbées par P_j, temps évalués en choisissant C_j comme ligne de temps.

La détermination du rapport $\dfrac{dt^e_{ij}}{dt^a_{ij}}$ ne peut être réalisée aisément qu'en utilisant une méthode approximative ([14]).

La transmission du premier signal issu de P_i s'effectue suivant la géodésique de longueur nulle P_iP_j. Transportons le long de cette géodésique, l'élément de C_i correspondant à l'émission de N_i crêtes d'ondes, c'est-à-dire au temps dt^e_{ij}. Le carré de la longueur d'un élément de géodésique P_iP_j rapporté au système de référence d'origine P_j a pour valeur

$$(85) \qquad \Delta S^2_{ij} = (g_{pq})_i \Delta y^p_{ij} \Delta y^q_{ij} + 2(g_{p0})_i \Delta y^p_{ij} \Delta y^0_{ij} + (g_{00})_i (\Delta y^0_{ij})^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(86) \qquad \Delta S^2_{ij} = -\Delta\Sigma^2_{ij} + \left[\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v^p_{ij}}{c}\right]^2 (\Delta y^0_{ij})^2 = 0,$$

avec

$$(87) \qquad \Delta\Sigma^2_{ij} = -(\gamma_{pq})_i \Delta y^p_{ij} \Delta y^q_{ij}$$

et

$$(88) \qquad \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 0} g_{\nu 0}}{g_{00}}, \qquad \gamma_p = \frac{g_{p0}}{\sqrt{g_{00}}}.$$

([14]) G. C. McVittie effectue un calcul de ce type dans le cas d'un champ de Schwarzschild ; *cf. General Relativity and Cosmology*, p. 95.

J. L. Synge détermine, par un calcul approché, la fonction d'univers

$$\Omega(P_iP_j) = \frac{1}{2}(u^1 - u^0) \int_{u_0}^{u_1} g_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{du} \frac{dy^\nu}{du} du.$$

dans le cas de champs faibles (*Relativity : The general theory*, p. 302).

Posons

(89) $\quad (\gamma_{\mu\nu})_{i\to j} = -(\vec{\varepsilon}_\mu . \vec{\varepsilon}_\nu)_j, \quad$ d'où $\quad (\vec{\varepsilon}_\mu . \vec{\varepsilon}_0)_j = 0, \quad \vec{\varepsilon}_0^{\,2} = 0.$

On obtient comme en (64)

(90)
$$\Delta\vec{\Sigma}_{ij} = \vec{\varepsilon}_p \Delta y^p_{ij}$$

$\Delta\vec{\Sigma}_{ij}$ est donc la projection tridimensionnelle de l'élément de géodésique P_iP_j sur le plan orthogonal à C_j en P_j, plan défini par les $\vec{\varepsilon}_p$. Or cette projection est aussi dans le 2-plan formé, au voisinage de P_j, par C_j et par P_iP_j. Si $\vec{\varepsilon}_R$ est, dans ce 2-plan, le vecteur unité normal à C_j, il vient donc aussi

(91) $\quad \Delta\vec{\Sigma}_{ij} = \vec{\varepsilon}_R \Delta\Sigma_{ij} \quad$ d'où $\quad \Delta\Sigma_{ij} = \vec{\varepsilon}_R\vec{\varepsilon}_p \Delta y^p_{ij}.$

On déduit de (86)

(92)
$$\Delta t_{ij} = \pm \frac{1}{c} \frac{\Delta\Sigma_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ij}}{c}}.$$

En intégrant sur P_iP_j il vient alors, l'origine étant sur C_j

(93)
$$\int_{t_{i,j}}^{t_{j,j}} \Delta t_{ij} = -\frac{1}{c}\int_{y^p_{i,j}}^{y^p_{j,j}=0} \frac{\Delta\Sigma_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ij}}{c}} = t_{j,j} - t_{i,j}.$$

L'espace-temps, est bien entendu, supposé stationnaire et les $g_{\mu\nu}$ ne dépendent pas du temps.

Si l'horloge de P_i émet N_i battements correspondant à l'intervalle

$$P_i(t_{i,j}, y^p_{i,j})\, P'_i(t_{i,j} + dt_{i,j}, y^p_{i,j} + dy^p_{i,j}) \quad \text{sur } C_i,$$

ces N_i pulsations se propagent suivant les géodésiques de longueur nulle et déterminent sur C_j l'intervalle de temps

$$P_j(t_{j,j}, y^p_{j,j} = 0)\, P'_j(t_{j,j} + dt_{j,j}\; (y^p_{j,j} + dy^p_{j,j}) = 0).$$

En intégrant sur la géodésique de longueur nulle $P'_iP'_j$ correspondant à la dernière pulsation transmise, on obtient alors

(94)
$$\int_{t_{i,j}+dt_{i,j}}^{t_{j,j}+dt_{j,j}} \Delta t_{ij} = -\frac{1}{c}\int_{y^p_{i,j}+dy^p_{i,j}}^{(y^p_{j,j}+dy^p_{j,j})=0} \frac{\Delta\Sigma_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ij}}{c}} = t_{j,j}+dt_{j,j}-(t_{i,j}+dt_{i,j}).$$

En retranchant (93) de (94), il vient donc

$$(95)\qquad dt_{j,j} - dt_{i,j} = -\frac{1}{c}\int_{y^p_{i,j}+dy^p_{i,j}}^{y^p_{i,j}} \frac{\vec{\varepsilon}_R\,\vec{\varepsilon}_p \Delta y^p_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ij}}{c}}.$$

En se bornant au premier terme du développement de Taylor,

$$(96)\qquad F(y^p_{i,j} + dy^p_{i,j}) = F(y^p_{i,j}) + dy^p_{i,j}F'(y^p_{i,j}) + O(dy^p_{i,j})^2,$$

on obtient ainsi

$$(97)\qquad dt_{j,j} - dt_{i,j} = \frac{1}{c}\,\frac{\vec{\varepsilon}_R\,\vec{\varepsilon}_p\, dy^p_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ij}}{c}},$$

c'est-à-dire

$$(98)\qquad dt_{j,j} = \left[1 + \frac{1}{c}\,\frac{\vec{\varepsilon}_R\,\vec{\varepsilon}_p v^p_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ij}}{c}}\right] dt_{i,j} = \left[1 + \frac{\bar{v}^R_{ij}}{c}\,\frac{1}{\sqrt{(g_{00})_i} + \gamma_p \dfrac{v^p_{ij}}{c}}\right] dt_{i,j}.$$

On a posé

$$(99)\qquad dy^p_{i,j} = v^p_{ij} dt_{i,j} \qquad (\bar{v}^R_{ij} = \vec{\varepsilon}_R \bar{v}_{ij} = \vec{\varepsilon}_R\,\vec{\varepsilon}_p v^p_{ij}).$$

$\bar{v}^R_{ij}$ représente la « vitesse radiale » située, comme Σ_{ij}, dans le 2-plan défini par C_j et par P_iP_j. Elle est, en général, différente de la « vitesse relative » tridimensionnelle

$$(100)\qquad \bar{v}_{ij} = \vec{\varepsilon}_p v^p_{ij}$$

projection de v_{ij} sur le plan orthogonal à C_j en P_j. $\bar{v}^R_{ij}$ est la projection de $\bar{v}_{ij}$ sur le 2-plan C_j, P_iP_j

$$(101)\qquad \bar{v}^R_{ij} = \vec{\varepsilon}_R \cdot \bar{v}_{ij}.$$

$\bar{v}^R_{ij}$ est, au sens de Synge ([15]), la vitesse de récession de P_i par rapport à P_j. Elle est positive si la source P_i s'éloigne de P_j.

En se reportant à (84), on obtient ainsi, compte tenu de (98)

$$(102)\qquad \frac{dt_{0i}}{dt_{0j}} = \frac{dt_{i,j}}{dt_{j,j}} = \frac{dt^e_{ij}}{dt^a_{ij}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\bar{v}^R_{ij}}{c}\,\dfrac{1}{\sqrt{(g_{00})_i} + \gamma_p \dfrac{v^p_{ij}}{c}}}.$$

([15]) J. L. Synge, *Relativity : The general Theory*, p. 120.

Or, d'après (78), (82), (83) et (84)

$$\frac{\bar{\nu}^a_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \left\{ \frac{-\frac{\bar{v}^2_{ij}}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_i} + \gamma_p \frac{v^p_{ij}}{c}\right]^2}{(g_{00})_j} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{dt^e_{ij}}{dt^a_{ij}}. \tag{103}$$

En substituant (102), il vient donc

(104)

$$\boxed{\frac{\bar{\nu}^{(a)}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{\left\{ -\frac{\bar{v}^2_{ij}}{c^2} + [\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i v^p_{ij}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(g_{00})_j}} \frac{1}{1 + \frac{\bar{v}^R_{ij}}{c} \frac{1}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v^p_{ij}}{c}}}}$$

Remarque. — Si l'on avait utilisé les définitions (69) et (67) de la vitesse et du temps standard, on aurait obtenu

$$V^p = \frac{dy^p}{dT} = \frac{1}{\sqrt{(g_{00})} + \gamma_q \frac{v^q}{c}} \frac{dy^p}{dt} = \frac{v^p}{\sqrt{(g_{00})} + \gamma_q \frac{v^q}{c}}. \tag{105}$$

D'où

$$\gamma_p V^p \sqrt{g_{00}} = \gamma_p v^p \left(1 - \gamma_q \frac{V^q}{c}\right) \tag{106}$$

et l'inverse de (105)

$$v^p = \frac{V^p \sqrt{(g_{00})}}{1 - \gamma_q \frac{V^q}{c}}. \tag{107}$$

Il vient alors, pour les vitesses standard relatives,

$$\bar{V} = \bar{\varepsilon}_p V^p = \frac{\bar{v}}{\sqrt{(g_{00})} + \gamma_q \frac{v^q}{c}} \quad \text{et} \quad \bar{v} = \bar{\varepsilon}_p v^p = \frac{\bar{V}\sqrt{g_{00}}}{1 - \gamma_q \frac{V^q}{c}} \tag{108}$$

et les relations (103) entre fréquences s'écrivent encore

$$\frac{\bar{\nu}^{(a)}_{ij}}{\bar{\nu}_i} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}} \left(\frac{1 - \frac{\bar{V}^2_{ij}}{c^2}}{1 - (\gamma_q)_i \frac{V^q_{ij}}{c}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + \frac{V^R_{ij}}{c}}. \tag{109}$$

Si la « vitesse relative » standard $\overline{V}_{ij}$ coïncide avec la « vitesse radiale » standard V^R_{ij}

$$(110) \qquad \frac{\overline{\nu}^{(a)}_{ij}}{\overline{\nu}_j} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}} \left(\frac{1 - \frac{V^R_{ij}}{c}}{1 + \frac{V^R_{ij}}{c}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - (\gamma_q)_i \frac{V^q_{ij}}{c}}.$$

C'est la généralisation (approchée) des formules qui, en Relativité restreinte, décrivent l'effet Doppler longitudinal.

2° Supposons, au contraire, que la source S_i soit pratiquement fixe par rapport à une source minkowskienne, l'observateur P_j possédant une vitesse relative $\vec{v}_{ji}$ par rapport à cette source. On doit poser

$$(111) \qquad \vec{v}_{i0} = 0, \qquad \vec{v}_{j0} = \vec{v}_{ji}$$

et les relations (82) et (83) s'écrivent alors

$$(82') \qquad d\tau_{0i} = dt_{0i}\sqrt{(g_{00})_i} = dT_{0i},$$

$$(83') \quad d\tau_{0j} = dt_{0j} \left\{ - \frac{\overline{v}^2_{ji}}{c^2} + [\sqrt{(g_{00})_j} + (\gamma_p)_j v^p_{ji}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = dT_{0j} \left[1 - \frac{\overline{V}^2_{ji}}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

et il vient encore, comme en (84),

$$(84') \qquad \frac{dt_{0i}}{dt_{0j}} = \frac{dt_{i,i}}{dt_{j,i}} = \frac{dt^e_{ij}}{dt^a_{ij}}$$

la notation, i indiquant que les lignes de temps coïncident avec la congruence comprenant C_i.

En intégrant (92) le long de la géodésique P_iP_j on obtient l'expression

$$(93') \qquad \int_{t_{i,i}}^{t_{j,i}} \Delta t_{ij} = \frac{1}{c} \int_{y^p_{i,i}=0}^{y^p_{j,i}} \frac{\Delta\Sigma_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v^p_{ji}}{c}} = t_{j,i} - t_{i,i}.$$

D'autre part, l'intégration le long de la géodésique $P'_iP'_j$ s'effectue entre les limites

$$P'_i(y_{i,i} + dy_{i,i} = 0) \qquad P'_j(y_{j,i}, y_{j,i} + dy_{j,i}),$$

car les lignes de temps adoptées forment une congruence qui comprend C_i. On obtient donc

(94')

$$\int_{t_{i,i}+dt_{i,i}}^{t_{j,i}+dt_{j,i}} \Delta t_{ij} = \frac{1}{c} \int_{(y^p_{i,i}+dy^p_{i,i}=0)}^{y^p_{j,i}+dy^p_{j,i}} \frac{\Delta\Sigma_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \frac{v^p_{ji}}{c}} = t_{j,i} + dt_{j,i} - (t_{i,i} + dt_{i,i}).$$

En retranchant (93′) de (94′) et en se bornant au premier terme du développement de Taylor, il vient ainsi :

$$(95') \quad dt_{j,i} - dt_{i,i} = \frac{1}{c}\int_{y^p_{i,i}+dy^p_{i,i}}^{y^p_{i,i}} \frac{\vec{\varepsilon}_R\vec{\varepsilon}_p \Delta y^p_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ji}}{c}}$$

$$+ \frac{1}{c}\int_{y^p_{j,i}}^{y^p_{j,i}+dy^p_{j,i}} \frac{\vec{\varepsilon}_R\vec{\varepsilon}_p \Delta y^p_{ij}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ji}}{c}} = \frac{1}{c}\,\frac{\vec{\varepsilon}_R\vec{\varepsilon}_p \Delta y^p_{j,i}}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ji}}{c}},$$

d'où

$$(98') \quad dt_{i,i} = \left[1 - \frac{v^R_{ji}}{c}\,\frac{1}{\sqrt{(g_{00})_i} + (\gamma_p)_i \dfrac{v^p_{ji}}{c}}\right] dt_{j,i}$$

en posant

$$(99') \quad dy^p_{j,i} = v^p_{ji} dt_{j,i} \qquad \left(\vec{\varepsilon}_R\vec{\varepsilon}_p v^p_{ji} = \vec{\varepsilon}_R \bar{v}_{ji} = \bar{v}^R_{ji}\right).$$

La comparaison des fréquences qui s'expriment encore par

$$(78) \quad \frac{\bar{\nu}^{(a)}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{d\tau_{0i}}{d\tau_{0j}}$$

se traduit encore, d'après (82′), (83′) et (84), par

$$(103') \quad \frac{\bar{\nu}^{(a)}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{d\tau_{0i}}{d\tau_{0j}} = \left\{\frac{(g_{00})_i}{-\dfrac{v^2_{ji}}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_j} + (\gamma_p)_j \dfrac{v^p_{ji}}{c}\right]^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{dt^e_{ij}}{dt^a_{ij}},$$

c'est-à-dire, compte tenu de (98′),

(104′)

$$\frac{\bar{\nu}^{(a)}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \left\{\frac{(g_{00})_i}{-\dfrac{v^2_{ji}}{c^2} + \left[\sqrt{(g_{00})_j} + (\gamma_p)_j \dfrac{v^p_{ji}}{c}\right]^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{v^R_{ji}}{c}\,\frac{1}{\sqrt{(g_{00})_i} + \gamma_p \dfrac{v^p_{ji}}{c}}\right].$$

Remarque. — En utilisant les temps et vitesse standards, on obtiendrait encore les relations (107) et (108) ; en substituant alors dans (104′), il viendrait

$$(109') \quad \frac{\bar{\nu}^{(a)}_{ij}}{\bar{\nu}_j} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}\,\frac{1 - \gamma_q \dfrac{V^q_{ji}}{c}}{\left(1 - \dfrac{V^2_{ji}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{V^R_{ji}}{c}\right)$$

et, si la vitesse relative coïncide avec la vitesse radiale,

$$(110') \qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}^{(a)}}{\bar{\nu}_j} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}} \left(\frac{1 - \frac{V_{ji}^{R}}{c}}{1 + \frac{V_{ji}^{R}}{c}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \gamma_q \frac{V_{ji}^{q}}{c}\right).$$

Le passage de (104) à (104′) et de (109) à (109′) suppose une dissymétrie dans la situation source-observateur (observateur C_j immobile par rapport à S_0 dans (104), source C_i immobile par rapport à S_0 dans (104′)). Tout revient à déduire d'un même système de référence S_0 (qui joue en quelque sorte le rôle d'espace absolu) soit le repère propre de l'observateur soit celui de la source. L'énoncé formel des conclusions de l'observateur sera donc différent dans l'un ou l'autre cas. Au contraire, en Relativité Restreinte, ces relations se déduiraient entièrement de (104), l'indice j se rapportant toujours à l'observateur et l'indice i toujours à la source en mouvement par rapport à l'observateur.

III. — APPLICATIONS

Les vérifications expérimentales basées sur la comparaison des fréquences consistent à évaluer :

— d'une part, le rapport n_i/N_{ij} du nombre n_i de vibrations reçues d'une source S_i et du nombre $N_{ij} = N_i(N_j)$ de pulsations concomitantes d'une source locale identique ;

— d'autre part, le champ de gravitation en P_i, en P_j et la vitesse relative source-observateur.

Toute vérification expérimentale de la Relativité générale consiste donc à comparer ces deux groupes d'observables, la notion purement abstraite de fréquence servant simplement d'intermédiaire pour aboutir à cette comparaison.

11. **Absence de champ de gravitation.** — Supposons qu'en l'absence de champ de gravitation on choisisse un système de coordonnées galiléennes. Il vient alors

$$(112) \qquad (g_{00})_i = (g_{00})_j = 1, \qquad \gamma_i = 0, \qquad V_{ij} = v_{ij}.$$

On obtient alors, à partir de (104),

$$(113) \qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}^{(a)}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\bar{v}_{ij}^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_{ij}^{R}}{c}} = \frac{\sqrt{1 - \beta_{ij}^2}}{1 + \beta_{ij} \cos \alpha} \qquad \left(\beta_{ij} = \frac{\bar{v}_{ij}}{c}\right)$$

en désignant par α l'angle de la vitesse relative $\vec{v}_{ij}$ et de la direction radiale joignant P_j à P_i.

Ces formules dans lesquelles (i) se rapporte toujours à la source et (j) toujours à l'observateur (et non à des points donnés de l'espace-temps) traduisent l'identité formelle des conclusions des observateurs.

D'après (104') on aurait, dans le cas d'un observateur P_j en mouvement,

$$\text{(114)} \qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}^{(a)}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{1 - \frac{v_{ji}^{R}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\bar{v}_{ji}^2}{c^2}}} = \frac{1 - \beta_{ji} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta_{ji}^2}}.$$

12. **Cas statique.** — Si la source est en repos relatif par rapport à l'observateur,

$$\text{(115)} \qquad v_{ij} = 0.$$

On retrouve immédiatement à partir de (104) ou de (104') les formules établies dans le cas statique

$$\text{(116)} \qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}^{(a)}}{\bar{\nu}_j} = \frac{n_i}{N_{ij}} = \frac{\sqrt{(g_{00})_i}}{\sqrt{(g_{00})_j}}.$$

13. Satellites géocentriques. Champ de gravitation à symétrie sphérique.

a. Mesures effectuées par un observateur terrestre. — Supposons que le champ de gravitation à la surface de la Terre P_j et sur le satellite P_i se réduise pratiquement au champ de gravitation terrestre. Admettons qu'en dépit de l'aplatissement de la Terre, ce champ soit pratiquement un champ de Schwarzschild. Dans ce cas, en choisissant un système de Schwarzschild centré sur la Terre

$$\text{(117)} \qquad g_{0p} = 0, \qquad \gamma_p = 0, \qquad g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2}.$$

Il vient alors, d'après (104),

$$\text{(118)} \qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}^{(a)}}{\bar{\nu}_j} = \left[\frac{(g_{00})_i - \frac{\bar{v}_{ij}^2}{c^2}}{(g_{00})_j}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + \frac{v_{ij}^{R}}{c} \frac{1}{\sqrt{(g_{00})_i}}} = \frac{n}{N_{ij}}.$$

Posons

$$\text{(119)} \qquad \beta_{ij} = \frac{v_{ij}}{c}, \qquad v_{ij}^{R} = v_{ij} \cos \alpha.$$

L'expression (118) s'écrit encore

$$(120)\qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}^{(a)}}{\bar{\nu}_i} = \left(\frac{1-\frac{2U_i}{c^2}-\beta_{ij}^2}{1-\frac{2U_j}{c^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-\frac{2U_i}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{2U_i}{c^2}}+\beta_{ij}\cos\alpha}.$$

Négligeons les termes d'ordre supérieur à $\frac{1}{c^2}$. Il vient alors

$$(121)\qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_j} \sim \left(1-\frac{U_i}{c^2}-\frac{\beta_{ij}^2}{2}\right)\left(1+\frac{U_j}{c^2}\right)\left(1-\frac{U_i}{c^2}\right)\left(1+\frac{U_i}{c^2}-\beta_{ij}\cos\alpha+\beta_{ij}^2\cos^2\alpha\right)$$
$$\sim 1+\frac{U_j-U_i}{c^2}-\frac{\beta_{ij}^2}{2}-\beta_{ij}\cos\alpha+\beta_{ij}^2\cos^2\alpha.$$

S'il s'agit, par exemple, d'un satellite dont l'orbite est approximativement circulaire [1],

$$(122)\qquad \alpha=\frac{\pi}{2},\qquad \gamma=\frac{GM}{r^2}=\frac{v^2}{r},\qquad \text{d'où}\qquad v^2=\frac{GM}{r}=U,$$

il vient alors

$$(123)\qquad \frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\nu}_j}=\frac{n_i}{N_{ij}}=1+\frac{U_j-U_i}{c^2}-\frac{U_i}{2c^2}$$

et

$$(124)\qquad \frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}}=\frac{\bar{\nu}_{ij}-\bar{\nu}_j}{\bar{\nu}_j}=\frac{n_i-N_{ij}}{N_{ij}}=\frac{1}{c^2}\left(U_j-\frac{3U_i}{2}\right).$$

Si R est le rayon de la Terre et H la hauteur de révolution du satellite

$$(125)\qquad U_j=\frac{GM}{R},\qquad U_i=\frac{GM}{R+H}$$

et

$$(126)\qquad \frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}}=\frac{n_i-N_{ij}}{N_{ij}}=\frac{GM}{c^2R}\left(1-\frac{3R}{2(R+H)}\right).$$

On retrouve les résultats connus par la superposition des effets de relativité restreinte (dans un espace minkowskien) et de Relativité générale dans un espace de Riemann.

Pour les satellites lointains ($H \gg R$) :

$$(127)\qquad \frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}}=\frac{GM}{c^2R}\left(1-\frac{3R}{2H}\right)>0\,;$$

---

[1] Ces conclusions négligent la rotation terrestre. Cette rotation entraîne évidemment $v_{ij} \neq v$ (v : vitesse par rapport au centre de la terre) et modifie les hypothèses (117) par une correction du type Lense-Thirring ($g_{0p} \neq 0$).

Pour les satellites proches ($H \ll R$) :

$$\frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}} = -\frac{GM}{2c^2R}\left(1 - \frac{3H}{R}\right) < 0. \tag{128}$$

Une horloge terrestre enregistre donc un décalage vers le violet ($\bar{\nu}_{ij} - \bar{\nu}_j > 0$) pour les fréquences transmises d'un satellite lointain, un décalage vers le rouge ($\bar{\nu}_{ij} - \bar{\nu}_j < 0$) pour les fréquences émises par un satellite proche. La distance théorique d'inversion d'un décalage vers le rouge et vers le violet, c'est-à-dire

$$\frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad n_i = N_{ij} \tag{129}$$

correspond alors à

$$H = \frac{R}{2}. \tag{130}$$

b. MESURES EFFECTUÉES A BORD D'UN SATELLITE. — Si l'observateur est à bord d'un satellite (observateur noté alors $P_{j'}$) et muni d'une horloge identique et s'il reçoit $n_{i'}$ vibrations d'une source terrestre $S_{i'}$, pendant $N_{i'j'}$ vibrations de sa propre horloge, l'application des formules inverses (104') conduit à

$$\frac{\bar{\nu}^{(a)}_{i'j'}}{\bar{\nu}_{j'}} = \frac{n_{i'}}{N_{i'j'}} = \left(\frac{(g_{00})_{i'}}{(g_{00})_{j'} - \dfrac{v^2_{j'i'}}{c^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{v^R_{j'i'}}{c\sqrt{(g_{00})_{i'}}}\right) \tag{118'}$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\bar{\nu}^{(a)}_{i'j'}}{\bar{\nu}_{j'}} = \frac{n_{i'}}{N_{i'j'}} = \left(\frac{1 - \dfrac{2U_{i'}}{c^2}}{1 - \dfrac{2U_{j'}}{c^2} - \beta^2_{j'i'}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\beta_{j'i'}\cos\alpha}{\left[1 - \dfrac{2U_{i'}}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{120'}$$

En effet, dans le système de Schwarzschild lié, cette fois, à la source immobile $P_{i'}$, c'est-à-dire à la Terre

$$\gamma_p = 0, \qquad g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} \qquad \left(U = \frac{GM}{r}\right).$$

On aura donc

(121')

$$\frac{\bar{\nu}^{(a)}_{i'j'}}{\bar{\nu}_{j'}} = \frac{n_{i'}}{N_{i'j'}} = \left(1 - \frac{U_{i'}}{c^2}\right)\left(1 + \frac{U_{j'}}{c^2} + \frac{\beta^2_{j'i'}}{2}\right)\left(1 - \frac{U_{i'}}{c^2} - \beta_{j'i'}\cos\alpha\right)\left(1 + \frac{U_{i'}}{c^2}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{U_{j'} - U_{i'}}{c^2} + \frac{\beta^2_{j'i'}}{2} - \beta_{j'i'}\cos\alpha\right).$$

Or, si l'on inverse par rapport à l'expérience *a*) les positions de la source et de l'observateur ($S_{i'} = R_j$, $R_{j'} = S_i$, les indices i et j se rapportant alors aux positions du satellite et de la terre, quels que soient les rôles de source ou d'observateur qu'on y attache)

$$U_{j'} = U_i, \qquad U_{i'} = U_j. \tag{131}$$

Un observateur situé sur un satellite qui décrit une trajectoire autour de la Terre enregistrera donc un décalage

$$\frac{\Delta'\bar{\nu}}{\nu} = \frac{\bar{\nu}_{i'j'}}{\bar{\nu}_{j'}} - 1 = \frac{\nu_{ji}}{\nu_i} - 1 = -\left(\frac{U_j - U_i}{c^2}\right) + \frac{\beta_{ij}^2}{2} - \beta_{ij}\cos\alpha. \tag{132}$$

En comparant avec (121)

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{terre}} - \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{satellite}} = \frac{2}{c^2}(U_j - U_i) - \beta_{ij}^2 \sin^2\alpha.$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire

$$v_{ij}^2 = \frac{GM}{r_i} = U_i = U_{j'}. \tag{133}$$

D'où

$$\left(\frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}}\right)_{\text{satell.}} = -\frac{1}{c^2}(U_j - U_i) + \frac{U_i}{2c^2} = -\frac{1}{c^2}\left(U_j - \frac{3U_i}{2}\right) = -\left(\frac{\Delta\bar{\nu}}{\bar{\nu}}\right)_{\text{Terre}} \tag{124'}$$

Un maser emporté par un satellite permettrait donc d'enregistrer à bord de ce satellite des décalages identiques mais de signe contraire à ceux que donnerait un maser terrestre à l'observateur qui lui serait attaché : décalage vers le rouge

$$(\Delta\bar{\nu}' = \bar{\nu}_{i'j'} - \bar{\nu}_{j'} = \bar{\nu}_{ji} - \bar{\nu}_i < 0)$$

dans le cas d'un satellite lointain; décalage vers le violet

$$(\Delta\bar{\nu}' = \bar{\nu}_{i'j'} - \bar{\nu}_{j'} = \bar{\nu}_{ji} - \bar{\nu}_i > 0)$$

dans le cas d'un satellite proche.

Les conclusions correspondantes sont ainsi

$$\bar{\nu}_{ij} > \bar{\nu}_j \quad \text{et} \quad \bar{\nu}_{ji} < \bar{\nu}_i \quad \text{(satellite lointain)}, \tag{134}$$

$$\bar{\nu}_{ij} < \bar{\nu} \quad \text{et} \quad \bar{\nu}_{ji} > \bar{\nu}_i \quad \text{(satellite proche)}. \tag{135}$$

Or $\bar{\nu}_i = \bar{\nu}_j$. Il vient donc

$$\bar{\nu}_{ji} < \bar{\nu} = \bar{\nu}_i < \bar{\nu}_{ij} \quad \text{pour un satellite lointain}, \tag{136}$$

$$\bar{\nu}_{ij} < \bar{\nu}_i = \bar{\nu}_j < \bar{\nu}_{ji} \quad \text{pour un satellite proche}. \tag{137}$$

P_i et P_j correspondant respectivement aux observateurs du satellite et de la Terre.

c. ORBITES ELLIPTIQUES. — On peut faire des prévisions analogues (c'est-à-dire limitées aux termes en β^2) en comparant les décalages réalisés à l'apogée et au périgée pour des satellites de forte excentricité.

Au périgée :

$$U_j = \frac{GM}{R}, \qquad U_i^{(p)} = \frac{GM}{R + H_p} \tag{138}$$

d'où

$$\left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_p = \frac{GM}{c^2R}\left(1 - \frac{3R}{2(R + H_p)}\right). \tag{139}$$

A l'apogée :

$$U_j = \frac{GM}{R}, \qquad U_i^{(a)} = \frac{GM}{R + H_a}, \tag{140}$$

$$\left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_a = \frac{GM}{c^2R}\left(1 - \frac{3R}{2(R + H_a)}\right). \tag{141}$$

On constatera donc le passage d'un décalage vers le rouge $\left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}} < 0\right)$ quand le satellite sera au périgée à un décalage vers le violet $\left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}} > 0\right)$ lors de son passage à l'apogée, si

$$H_p < \frac{R}{2} < H_a. \tag{142}$$

D'autre part,

$$\left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_a - \left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_p = \frac{3GM}{2c^2}\frac{(H_a - H_p)}{(R + H_p)(R + H_a)}. \tag{143}$$

Or

$$H_a = a(1 + e) - R, \qquad H_p = a(1 - e) - R, \tag{144}$$

d'où

$$\left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_a - \left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_p = \frac{3GMe}{ac^2(1 - e^2)} = \frac{3GM}{h^2}\frac{GM}{c^2}e = \varepsilon e, \tag{145}$$

h étant la constante des aires et $2\pi\varepsilon$ l'avance du périgée par révolution. D'après la 3e loi de Képler

$$\left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_a - \left(\frac{\overline{\Delta\nu}}{\bar{\nu}}\right)_p = \frac{12\pi^2}{c^2}\left(\frac{a}{T}\right)^2\frac{e}{(1 - e^2)}.$$

Pour un satellite tel que $a = 10.000$ km $= 10^9$ cm, il viendrait

$$(146) \qquad \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_a - \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_p \sim \frac{e}{(1-e^2)}\,\frac{10^{-9}}{0{,}3} \sim 10^{-9} \text{ pour } e \sim 0{,}3.$$

14. **Valeur probante des expériences de décalage des fréquences en tant que test de la Relativité générale.** — On affirme souvent que la vérification des lois sur le décalage des fréquences (comparaison entre le rapport de deux nombres de vibrations et le rapport des potentiels de gravitation correspondants) prouve la validité du principe d'équivalence mais non pas de la Relativité générale en tant que théorie non euclidienne du champ de gravitation.

Cette affirmation a des racines historiques évidentes ; on sait qu'Einstein, bien avant l'édification de la Relativité générale, avait postulé un décalage gravitationnel en assimilant le potentiel de gravitation au carré de la vitesse instantanée qui intervient dans l'expression du ralentissement des horloges.

Le principe d'équivalence intervient ainsi pour réduire les effets de gravitation aux effets d'inertie. Toutefois, si nous exigeons, en outre, l'intervention d'un principe de Relativité généralisée, c'est-à-dire l'énoncé d'une équivalence entre les diverses descriptions euclidiennes locales, chacune d'elles correspondant à une vitesse instantanée, nous ne pourrons éviter d'introduire une description non euclidienne globale. Celle-ci permet le raccordement des différentes cartes euclidiennes locales.

C'est donc le principe d'équivalence qui entraîne les phénomènes de gravitation vers le non-euclidien et ceci par l'intermédiaire d'une Relativité généralisée appliquée aux effets d'inertie. Il est parfaitement concevable de décrire les phénomènes de gravitation dans un espace euclidien, mais il faut alors les dissocier d'une « équivalence » en tant que principe. Les effets de gravitation se manifestent alors par une modification de la structure des atomes vibrants, mais non pas comme un effet Doppler généralisé, c'est-à-dire comme un effet lié à la comparaison des systèmes de référence de la source et de l'observateur.

Ces conclusions ne signifient pas qu'une vérification des formules de décalage « prouvent » la validité de la Relativité générale. On pourrait imaginer, par exemple, une interprétation euclidienne concurrente. Par contre, si l'on admet le principe d'équivalence, il est bien difficile de ne pas interpréter le test du décalage comme une vérification de la Relativité générale (ou de toute théorie similaire) en tant que théorie non euclidienne du champ de gravitation.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. Avez, *Ondes monochromatiques et Effet Doppler en Relativité générale* (*Séminaire Janet*, 1961).

[*2*] Basov, *Possibilité de l'étude des effets relativistes avec étalons de fréquence atomique et moléculaire* (*Soviet Phys. Uspechi*, t. 4, n° 5, 1962, p. 1642, 113 références).

[*3*] A. Borodsky, *Doppler Effect in a static gravitation field* (*Acad. Sc. U. S. S. R.*, Poulkovo Observat. Circul., n° 28, 1939, p. 52).

[*4*] C. Cattaneo, *Moto di un fotone libero in campo gravitazionale* (*Rend. Accad. Naz. Lincei*, Cl. Fis. Mat., t. 27, 1959, p. 54).

[*5*] C. Cattaneo, *Formulation relative des lois physiques en Relativité générale* (Cours professé au Collège de France, 1962).

[*6*] J. Chazy, *Sur la formule de Doppler-Fizeau dans l'univers de de Sitter* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 1093).

[*7*] A. Einstein, *Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf die Ambertung des lichtes* (*Ann. Physik*, t. 35, 1911, p. 898).

[*8*] E. Finlay-Freundlich, *On the red shift of spectral lines* (*Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, Kl. II, n° 7, 1935, p. 95).

[*9*] E. Finlay-Freunlich, *Red shifts in the spectra of celestial bodies* (*Phil. Mag.*, t. 45, 1954, p. 303; *Proc. Phys. Soc. London*, A, t. 67, 1954, p. 192).

[*10*] V. L. Ginzburg, *On the use of artificial satellite to check the general theory of Relativity* (*Z. Eksper. Teor. Fiz.*, t. 30, n° 1, 1956, p. 213).

[*11*] V. L. Ginzburg, *Verwendung künstlichen Erdsatelliten zur Prufüng der allgemeinen Relativitätstheorie* (*Usp. Fiz. Nauk*, t. 63, 1957, p. 119; *Sonderband der Fortschr. Phys.*, 1957, p. 132).

[*12*] A. Lichnerowicz, *Theories Relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955 (*Espaces-temps stationnaires*, p. 109; *Décomposition du* ds^2 *et espace quotient*, p. 111).

[*13*] E. Reichenbacher, *Das Doppler Effekt in allgemeinen feld* (*Z. Astrophys.*, t. 22, 1943, p. 230).

[*14*] L. I. Schiff, *On Experimental Tests of the general Theory of Relativity* (*Amer. J. Phys.*, t. 28, 1960, p. 340).

[*15*] A. Schild, *The Principle of Equivalence* (*The Monist*, t. 47, 1962, p. 20).

[*16*] J. L. Synge, *The proportionality of energy and frequency for a photon in general Relativity* (*Quart. J. Math.*, Oxford Ser., t. 6, 1935, p. 199).

[*17*] J. L. Synge, *Optical observations in general Relativity* (*Rend. Sem. Mat. fis. Milano*, t. 30, 1960).

[*18*] J. L. Synge, *Relativity : The general Theory* (chap. III, p. 119; chap. VII, p. 298), North Holland Pub. Comp., 1960.

[*19*] G. C. MacVittie, *General Relativity and Cosmology*, J. Wiley, New York, 1956.

(Manuscrit reçu le 21 janvier 1964).