ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

VINCENT COSSART
GUILLERMO MORENO-SOCÍAS

Racines approchées, suites génératrices, suffisance des jets

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 14, nº 3 (2005), p. 353-394

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_3_353_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 3, 2005
pp. 353–394

Racines approchées, suites génératrices, suffisance des jets[(*)]

VINCENT COSSART[(1)], GUILLERMO MORENO-SOCÍAS[(1)]

RÉSUMÉ. — Nous décrivons l'algèbre graduée pour une valuation divisorielle d'un anneau local régulier de dimension 2 (théorème 4.10). Nous en déduisons en 6.2 un critère d'irréductibilité analytique des courbes planes valable en toute caractéristique ainsi qu'une nouvelle démonstration du critère de Abhyankar. À la fin (théorème 7.1), nous donnons une borne effective permettant de tronquer les équations à tester.

ABSTRACT (Approximated Roots, Generating Sequences, Truncation). — We give a full description of the graded algebra relative to a divisorial valuation of a local regular ring of dimension 2 (theorem 4.10). We deduce in 6.2 a criterion of analytic irreducibility of plane curves valid in every characteristic and a new proof of Abhyankar's Criterion. At the end (theorem 7.1), we give an effective bound for suitable truncations of the equations.

Dedicated to Professor S. S. Abhyankar, for his seventieth birthday

1. Introduction

Soit $f(x, y) = 0$ une courbe plane singulière à l'origine. Dans [Abh88], [Abh77], [Abh89], Abhyankar définit les « racines approchées » de f. Certaines de ces racines ont des propriétés merveilleuses ; en particulier, elles permettent de tester si f est analytiquement irréductible à l'origine et si oui,

(*) Reçu le 19 janvier 2004, accepté le 6 juillet 2004.
(1) Laboratoire de Mathématique LAMA, Université de Versailles – Saint Quentin, bât. Fermat, 45 av. des États-Unis, F–78035 Versailles cedex (France). Laboratoire GAGE, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex (France).
E-mail : cossart@math.uvsq.fr, cossart@gage.polytechnique.fr
E-mail : moreno@math.uvsq.fr, moreno@gage.polytechnique.fr

de calculer ses exposants de Puiseux. En fait, de ces « racines approchées », Abhyankar tire les informations de la désingularisation de f sans faire les éclatements théoriquement nécessaires.

Nous avons appliqué la théorie des valuations à ce problème. L'algèbre graduée pour une valuation divisorielle d'un anneau local régulier de dimension 2 est de manière naturelle une sous-algèbre d'un anneau de polynômes à deux variables (théorème 4.10). Nous donnons un algorithme effectif permettant de calculer, dans le cas le plus général possible, une suite $(q_0, q_1, \ldots, q_g)$ d'éléments dont les valeurs engendrent le semi-groupe de la valuation associée à f (algorithme 5.1). Puis, nous donnons deux critères d'irréductibilité analytique (critères 6.2 et 6.3) ; l'un, très proche de celui de Abhyankar (cf. [Abh88] ou [Abh89]) est valable en caractéristique 0 si l'équation testée est en position de Weierstraß ; l'autre n'exige aucune hypothèse, ni sur la caractéristique, ni sur le développement de l'équation testée. En passant, nous montrons (corollaire 4.18) que, en caractéristique 0, si f est irréductible, les racines approchées utilisées par Abhyankar ([Abh88], [Abh77], [Abh89]), sont des curvettes de f (cf. sous-section 3.2). Enfin, dans le dernier paragraphe (théorème 7.1), nous donnons un résultat effectif permettant de tronquer éventuellement des équations à tester : soient $f, g \in \mathbb{k}[[x,y]]$, $\mathbb{k}$ algébriquement clos, tels que $f - g \in \mathfrak{M}^{\tau+2}$ où τ est le nombre de Tjurina de f et $\mathfrak{M} = (x, y)$; alors f et g ont exactement le même arbre de désingularisation (mêmes points proches, etc.).

Nous remercions S. S. Abhyankar, M. Lejeune-Jalabert, M. Spivakovsky, B. Teissier, M. Vaquié pour leurs encouragements et les longues conversations sur les racines approchées ; A. Campillo qui dans [Cam80] développe aussi des techniques pour donner les informations de la désingularisation d'une branche sans faire d'éclatements ; le Fields Institute dont l'atmosphère studieuse permit d'écrire une première version ([CosMor03]) ; F. V. et S. Kuhlman qui nous ont invités à exposer ce travail à l'Université de Saskatoon lors du congrès sur les valuations (août 1999) et enfin tous nos collègues versaillais qui ont dû subir plusieurs exposés de ce travail.

2. Hypothèses et notations

$(R, \mathfrak{M})$ est un anneau local régulier de dimension 2, on suppose que R contient un corps de représentants $\mathbb{k} = R/\mathfrak{M}$ algébriquement clos. Soit (x, y) un système régulier de paramètres de R et $\widehat{R} = \mathbb{k}[[x,y]]$ le complété de R. On note $\mathbb{k}[X,Y] = \mathrm{gr}_{\mathfrak{M}}(R)$; bien sûr, $X = \mathrm{in}_{\mathfrak{M}}(x)$ et $Y = \mathrm{in}_{\mathfrak{M}}(y)$.

Une valuation de R est une application $\nu : R \setminus \{0\} \longrightarrow G_{>0}$ où G est un groupe totalement ordonné et $\forall\, x, y \in R \setminus \{0\}$, $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$,

$\nu(x+y) \geqslant \min\{\nu(x), \nu(y)\}$. On dit que la valuation est **centrée sur** R (ou **centrée en** $\mathfrak{M}$) si $\mathfrak{M} = \{\, x \in R \mid \nu(x) > 0 \,\} \cup \{0\}$.

Dans tout ce papier, ν est une valuation divisorielle centrée sur R (si l'on désigne par R_ν l'anneau de la valuation ν, le degré de transcendance de l'extension $\Bbbk \subset R_\nu/\mathfrak{M}_\nu$ est 1, le groupe est $G = \mathbb{Z}$ muni de la relation d'ordre usuelle). Si u est un entier naturel, on désigne par I_u (resp. I_{u+}) l'idéal des éléments de R de valeurs pour ν supérieures ou égales à u (resp. strictement supérieures).

Dans [Spi90] §3, Spivakovsky prouve que ν se prolonge de manière unique en une valuation divisorielle de $\widehat{R}$, nous confondons ν et son prolongement à $\widehat{R}$.

DÉFINITION 2.1. — *Une **suite de Abhyankar–Moh** est une suite $g_0, g_1, \ldots, g_\ell$ d'éléments de $\Bbbk[[x]][y]$ dans $\widehat{R}$ telle que $1 \leqslant \ell$ et*

$$\begin{aligned} x &= g_0 \\ y &= g_1 \\ g_i &= y^{w_i} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant w_i} \lambda_j(x) y^{w_i - j}, \end{aligned}$$

où $\lambda_j(x) \in \Bbbk[[x]]$, $\lambda_j(0) = 0$ et w_i divise strictement w_{i+1} pour $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$.

3. Rappels, sorites valuatives

3.1. Suite génératrice

Une **suite génératrice** de ν est une suite d'éléments $q_0, q_1, \ldots, q_g, q_{g+1}$ de R tels que, pour tout $u \in \mathbb{N}$, I_u est engendré par

$$\{\, q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_g^{a_g} q_{g+1}^{a_{g+1}} \mid a_0 \nu(q_0) + a_1 \nu(q_1) + \cdots + a_{g+1} \nu(q_{g+1}) \geqslant u \,\}.$$

3.2. Les curvettes

M. Spivakovsky prouve qu'il existe une suite génératrice avec $\nu(q_0) < \nu(q_1) < \cdots < \nu(q_g)$ système de générateurs du semi-groupe de ν et q_{g+1} élément général de l'idéal simple associé à ν (cf. sous-section 3.3 ci-dessous), c'est-à-dire que, si l'on fait une suite d'éclatements centrés en les centres successifs de ν, dans un éclaté où le centre de ν est un diviseur D, le transformé strict de q_{g+1} est régulier et à croisements normaux avec D (cf. sous-section 3.6 plus bas) ([Spi90] prop. 8.11). Une telle suite sera appelée **suite de Monique Lejeune-Jalabert associée à ν** ([Lej73] 1.3) ou, plus simplement, **suite de Monique associée à ν** ; les éléments $q_1, \dots, q_g, q_{g+1}$ sont appelés **curvettes** de la valuation ν. M. Spivakovsky prouve en fait que, si la valuation ν n'est pas associée à une courbe (cf. sous-section 3.6 plus bas), une suite de Monique est *génératrice minimale*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas en extraire une sous-suite génératrice ; en revanche, dans le cas d'une valuation associée à une courbe, la suite $q_1, \dots, q_g$ est génératrice minimale.

3.3. Idéaux complets simples

([Spi90] section 4.) Il y a une bijection naturelle entre les valuations divisorielles de R centrées en $\mathfrak{M}$ et les idéaux complets simples $\mathfrak{M}$-primaires de R : à un idéal $\mathfrak{P}$ complet simple $\mathfrak{M}$-primaire, correspond une suite d'éclatements

$$R = R_0 \longrightarrow R_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_m \longrightarrow R_{m+1} \qquad (S)$$

où R_{i+1} est l'éclatement de R_i en son maximal $\mathfrak{M}_i$, localisé en un point fermé, $0 \leqslant i \leqslant m-1$. De plus, le transformé faible de $\mathfrak{P}$ est $\mathfrak{M}_m$, et la valuation ν associée à $\mathfrak{P}$ est, par définition, la valuation $\mathfrak{M}_m$-adique. Le dernier éclatement est centré en $\mathfrak{M}_m$; le diviseur exceptionnel de cet éclatement est alors le centre de la valuation $\nu := \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_m}$ (ce qui justifie le mot «divisorielle») ; en se localisant au point générique de ce dernier diviseur, on obtient $R_\nu = R_{m+1}$, l'anneau de la valuation ν. Pour toute valuation divisorielle ν centrée, on note $\mathfrak{P}_\nu$ l'idéal complet simple associé ([Lip87] (2.1)).

On remarque également que si ν est la valuation $\mathfrak{M}$-adique, alors $m = 0$. On notera E_i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, le diviseur exceptionnel réduit de $\mathrm{Spec}(R_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$.

3.4. Contact maximal

([Lej73], p. 13 et suivantes, «contact maximal».) La suite (S) permet de déterminer une suite de Monique. On découpe la suite (S) en union de sous-suites disjointes

$$R_{k_i} \longrightarrow R_{k_i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_{k_{i+1}-1} \qquad (S_i)$$

ainsi définies : pour tout $a = 0, \dots, m$, on note $\mathcal{M}_a$ le nombre de composantes du diviseur exceptionnel de $\mathrm{Spec}(R_a) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R_0)$ passant par le point fermé de R_a (donc $\mathcal{M}_0 = 0$) et l'on remarque que $\mathcal{M}_{m+1} = 1$. On découpe la suite (S) en sous-suites (S_i) avec : $\mathcal{M}_{k_i} = 0$ ou 2, $\mathcal{M}_{k_i+1} = 1$ et $(\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_{a+1}) \neq (2,1)$, $\forall a = k_i + 1, \ldots, k_{i+1} - 2$.

On vérifie que la suite (S) est une juxtaposition de telles suites. Soit $(S_1), \ldots, (S_{g+1})$ la liste de ces suites classées par l'ordre croissant des indices k_* de R_{k_*}, premier anneau de chaque suite S_i, $1 \leqslant i \leqslant g+1$; ceci définit l'entier g. Alors, choisissons pour chaque suite (S_i), $1 \leqslant i \leqslant g+1$, un élément q_i de R analytiquement irréductible dont le transformé strict dans R_{k_i} est régulier et tel que

$$\max\{\, a \mid 1 \leqslant a \leqslant m, \text{le transformé strict de } q_i \text{ n'est pas inversible dans } R_a \,\}$$

est le plus grand possible, désignons par q_0 un paramètre de R transverse à q_1. La suite

$$q_0, q_1, \ldots, q_{g+1}$$

est une suite de Monique ([Spi90] Th. 8.6). Dans le cas extrême où $m = 0$, $\nu = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}$, il n'y a qu'une suite (S_0) $R_0 \longrightarrow R_1$, $g = 0$ et la suite des q_i se limite à un système régulier de paramètres $q_0 = x, q_1 = y$ de $\mathfrak{M}$.

L'éclatement commutant au changement de base plat et en particulier à la complétion formelle, la suite (S) correspondant au prolongement de ν à $\widehat{R}$ est la suite

$$\widehat{R} = \widehat{R}_0 \longrightarrow \widehat{R}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widehat{R}_m \qquad (\widehat{S})$$

où $\widehat{R}_i$ désigne un éclaté du complété formel $\widehat{R}_0$ de R_0. On en déduit qu'une suite de Monique construite ci-dessus convient à la fois à (R, ν) et à $(\widehat{R}, \nu)$. Par suite, $I_u = \{\, a \in R \mid \nu(a) \geqslant u \,\} = \widehat{I}_u \cap R$ où $\widehat{I}_u = \{\, b \in \widehat{R} \mid \nu(b) \geqslant u \,\} = I_u\widehat{R}$ et aussi, toute suite de Monique de (R, ν) est une suite de Monique de $(\widehat{R}, \nu)$.

3.5. Colongueur

([Spi90] pp. 134–140.) Soit $q_0, q_1, \ldots, q_{g+1}$ une suite de Monique, alors $\nu(q_0) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P}_\nu)$. De plus, en posant $w_i = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(q_i)$, on a, pour $1 \leqslant i \leqslant g+1$:

$$\frac{\nu(q_0)}{w_i} = \mathrm{pgcd}(\nu(q_0), \ldots, \nu(q_{i-1})) =: e_{i-1}, \tag{3.1}$$

la suite $e_0, \ldots, e_g$ décroît strictement, $e_g = 1$ et l'on a l'**inégalité de Zariski**

$$w_{i+1}\nu(q_i) < w_i\nu(q_{i+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant g. \tag{3.2}$$

On a la formule suivante ([Spi90], th. 7.2) pour tout élément $g \in R$:

$$\nu(g) = \min\{\, \mathrm{col}(f, g) \mid f \in \mathfrak{P}_\nu \,\} \tag{3.3}$$

où col est l'abréviation de **colongueur** ; ce minimum est atteint pour les éléments $f \in \mathfrak{P}_\nu$ *généraux* dont le transformé strict dans R_m n'est tangent à aucune composante du transformé strict de g. Rappelons qu'un élément $f \in \mathfrak{P}_\nu$ est dit **général** s'il est analytiquement irréductible, si son transformé strict passe par le point fermé de $\mathrm{Spec}(R_m)$ et si son transformé strict dans X_{m+1} où $X_{m+1} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R_m)$ centré en le maximal de R_m est transverse au diviseur exceptionnel de X_{m+1}.

D'après la preuve du théorème 7.2 dans [Spi90], $\mathrm{col}(f, g) - \nu(g)$ est la multiplicité d'intersection des transformés stricts de f et g le long du diviseur exceptionnel de l'éclatement $X_{m+1} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R_m)$ centré en le maximal de R_m, ce qui prouve (3.3).

LEMME 3.1. — *Si $f \in \mathfrak{P}_\nu$ est général, alors $\nu(f) = \nu(\mathfrak{P}_\nu)$.*

Démonstration. — En effet, soient f et g deux éléments généraux de $\mathfrak{P}_\nu$; si leurs transformés stricts dans R_m ne sont pas tangents, on a $\nu(f) = \mathrm{col}(f, g) = \nu(g)$; sinon, on prend un élément $\phi \in R$ analytiquement irréductible dont le transformé strict dans R_m est régulier et transverse à ceux de f et g et aux composantes du diviseur exceptionnel de $R \longrightarrow R_m$ ($\Bbbk$ est infini). Alors $\nu(f) = \mathrm{col}(f, \phi) = \nu(\phi) = \mathrm{col}(\phi, g) = \nu(g)$. $\square$

LEMME 3.2. — *Désignons par $f^{(i)}$ le transformé strict de f dans R_{k_i}, $0 \leqslant i \leqslant g$, on a*

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_{k_i}}(f^{(i)}) = e_i. \tag{3.4}$$

Démonstration. — Ce résultat est « bien connu », mais nous n'avons pas trouvé de référence écrite pour la caractéristique positive. Donnons une esquisse de preuve. Pour le cas $i = 1$, désignons par $f^{(1)}, q_i^{(1)}$ les transformés stricts de f, q_i ($2 \leqslant i \leqslant g$) dans R_{k_1}. Soit $\mathrm{div}(uv)$ le diviseur exceptionnel de $R_{k_1 - 1}$, on définit a, b par $q_2 = u^a v^b q_2^{(1)}$. On a $\beta_2 = \nu(q_2) = a\nu(u) + b\nu(v) + \nu(q_2^{(1)})$, de plus $\nu(u) = \mathrm{col}(u, f^{(1)}) = \mathrm{col}(v, f^{(1)}) = \nu(v) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_{k_1 - 1}}(f^{(1)})$; nous laissons au lecteur la preuve de :

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_{k_1}}(f^{(1)}) &= e_1 \\ f &= u^{e_1 a} v^{e_1 b} f^{(1)} \\ q_i &= u^{\frac{e_1}{e_{i-1}} a} v^{\frac{e_1}{e_{i-1}} b} q_i^{(1)} \quad (2 \leqslant i \leqslant g). \end{aligned}$$

On en déduit $\nu(q_i) = \frac{e_1}{e_{i-1}}(a+b)e_1 + \nu(q_i^{(1)})$, $2 \leqslant i \leqslant g$. Bref, en R_{k_1}, la suite des pgcd des générateurs du semi-groupe est devenue $e_1, \dots, e_g$. La fin de la récurrence en découle. □

3.6. Valuation définie par une branche analytique

Soit $f \in R$ un élément analytiquement irréductible (branche analytique), on lui associe une suite (S) et donc une valuation par :

$$R = R_0 \longrightarrow R_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_m \longrightarrow R_{m+1}, \tag{3.5}$$

la suite d'éclatements $R_i \longrightarrow R_{i+1}$ centrés en les points fermés sur les transformés stricts $f_i \in R_i$ de f, et telle que pour le dernier éclatement $R_m \longrightarrow R_{m+1}$, le transformé strict f_{m+1} de f soit régulier à croisements normaux avec le diviseur exceptionnel réduit E_{m+1} de $R \longrightarrow R_{m+1}$ et f_m ne soit pas régulier à croisements normaux avec le diviseur exceptionnel réduit E_m de $R \longrightarrow R_m$ (en fait, si $m \geqslant 1$, f_m est régulière, passe par le point de croisement du diviseur exceptionnel de $R \longrightarrow R_m$ qui a deux composantes et est à croisements normaux avec chaque composante). Si f est régulière, $m = 0$.

La valuation divisorielle **définie par la courbe** f est la valuation $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_m}$, c'est celle associée à la suite (3.5), c'est celle qui a pour centre le diviseur exceptionnel de $R_m \longrightarrow R_{m+1}$. Par définition de cette valuation, f est élément général de l'idéal simple associé à ν.

Une valuation définie par une courbe f est caractérisée par le fait que sa suite (3.5) est de longueur 1 (cas où f est régulier) ou bien que la multiplicité du diviseur exceptionnel dans le dernier anneau local R_m est 2. En effet, si f n'est pas régulier, il est bien connu que $\mathfrak{M}_m = 2$ et que le transformé strict de f dans R_m est régulier, à croisements normaux avec chacune des deux composantes du diviseur exceptionnel de R_m.

Réciproquement, on prend une suite d'éclatements avec $\mathfrak{M}_m = 2$, on choisit dans $\mathrm{Spec}(R_m)$ une branche analytique régulière passant par le point fermé à croisements normaux avec chacune des deux composantes du diviseur exceptionnel de R_m, on prend pour f sa projection sur $\mathrm{Spec}(R_0)$.

Tout ceci prouve que la dernière suite (S_{g+1}) se réduit à R_m.

Remarque 3.3. — Une telle valuation divisorielle est particulière (cf. la sous-section 3.2) : on peut prendre $q_{g+1} = f$ et, pour engendrer I_u ($u \in \mathbb{N}$) on peut se contenter des **monômes**

$$\{\, q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_g^{a_g} \mid a_0\nu(q_0) + a_1\nu(q_1) + \cdots + a_g\nu(q_g) \geqslant u \,\}.$$

Exemple 3.4. — Si $f = y^2 + x^3$, la valuation ν associée à f est définie par $\nu(x) = 2$, $\nu(y) = 3$, on obtient $\nu(y^2 + x^3) = 6$ et $q_0 = x, q_1 = y, q_2 = f$. En revanche (voir [Spi90], exemple 4.9, p. 122), il existe une valuation μ avec $\mu(x) = 2$, $\mu(y) = 3$, $\mu(y^2 + x^3) = 8$, c'est la valuation dont la suite (S) d'éclatements associée est celle de ν prolongée par deux éclatements supplémentaires en restant sur le transformé strict de f ; on a la même suite de Monique, mais, pour ν, q_2 est inutile pour engendrer les I_u, tandis que, pour μ, I_8 n'est pas engendré avec des monômes en x, y de valeurs $\geqslant 8$.

PROPOSITION 3.5. — *Soient deux valuations divisorielles centrées μ et ν telles que, dans un sens évident, la suite d'éclatements associée à ν soit une sous-suite stricte de celle de μ. Alors :*

1. *Si l'on désigne par $q_0, q_1, \ldots, q_{g+1}$ une suite de Monique de ν, on peut compléter $q_0, q_1, \ldots, q_g$ en une suite de Monique de μ ; si $p_0, p_1, \ldots, p_{g'+1}$ est une suite de Monique de μ, alors $g \geqslant g'$ et $p_0, p_1, \ldots, p_{g+1}$ est une suite de Monique de ν.*

2. *Les suites $\nu(q_0), \nu(q_1), \ldots, \nu(q_g)$ et $\mu(q_0), \mu(q_1), \ldots, \mu(q_g)$ sont proportionnelles.*

Démonstration. — Le premier résultat est une conséquence de la sous-section 3.4, prouvons le second. Les transformés stricts des q_j ne passent pas par l'origine de $X_i = \mathrm{Spec}(R_i)$, et μ et ν sont centrées à l'origine de $\mathrm{Spec}(R_i)$. $\square$

PROPOSITION 3.6. — *Soit ν une valuation divisorielle, soit f un élément général de $\mathfrak{P}_\nu$, soit $g \in R$ avec $\nu(g) \geqslant 1 + \nu(f)$; Alors :*

1. *$g \in \mathfrak{P}_\nu$.*

2. *$f + g$ est irréductible et le transformé strict de $f + g$ dans R_m est régulier, f et $f + g$ définissent la même valuation.*

Démonstration. — Il est clair que la seconde affirmation entraîne la première. Effectuons l'éclatement de R_m en son maximal $\mathfrak{M}_m$. Plaçons-nous en un point fermé au-dessus de $\mathfrak{M}_m$. Localement, on a $f = t^{\nu(f)} f'$ où f' est le transformé strict de f et t un générateur de l'idéal du diviseur exceptionnel de l'éclatement de R_m, on définit g' par $g = t^{1+\nu(f)} g'$. Donc $f + g = t^{\nu(f)}(f' + tg')$. Si f' est inversible, le transformé strict de $f + g$ est aussi inversible. Si f' n'est pas inversible, on se trouve en le point fermé par où passe le transformé strict de f, ce transformé strict est transverse à

$\operatorname{div}(t)$ et donc, $f' + tg'$ est régulier, transverse à $\operatorname{div}(t)$; on en déduit que sa projection sur $\operatorname{Spec}(R_m)$ est régulière ; cette projection est le transformé strict de $f+g$ dans R_m. Maintenant, si $f+g$ n'était pas analytiquement irréductible, il aurait une branche analytique $\phi \in R$ dont le transformé strict dans R_m serait celui de $f+g$, donc, en confondant R et $\widehat{R}$, on a $\phi \in \mathfrak{P}_{\nu(f)}$. Ainsi, $\nu(\phi) \geqslant \nu(f) = \nu(f+g)$, donc, $f+g = \phi \cdot$ (inversible), et $f+g$ est analytiquement irréductible. $\square$

4. Suite de Monique et racines approchées

PROPOSITION-DÉFINITION 4.1. — *Soient $f \in \widehat{R}$, et $q_0 = x, q_1, \ldots, q_k$ une suite de Abhyankar–Moh ; on pose $\deg_y(q_i) = w_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Alors f s'écrit d'une manière unique :*

$$f = \sum q_1^{a(1)} \cdots q_k^{a(k)} H_A(x),$$

avec $a(i)w_i < w_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $A = (a(1), \ldots, a(k))$, $H_A \in \Bbbk[[x]]$, $a(i) \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Une telle décomposition sera appelée ***forme réduite de f relativement à la suite*** *q ou* ***développement q-adique de f***. *Un produit $q_A H_A = q_1^{a(1)} \cdots q_k^{a(k)} H_A(x)$ est appelé* ***monôme***. *Si en plus on a $a(i)w_i < w_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, c'est un* ***monôme réduit***.

Si $f \in \Bbbk[[x]][y]$, alors dans le développement q-adique de f les monômes sont de degrés en y inférieurs ou égaux au degré en y de f ; en particulier, il n'y a qu'un nombre fini de monômes.

Remarque 4.2. — Tout entier $d \in \mathbb{N}$ se décompose d'une manière unique

$$d = a(1)w_1 + \ldots + a(k)w_k$$

avec $a(i)w_i < w_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, $a(i) \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Démonstration de la proposition 4.1. — D'après la remarque, les monômes réduits $q_1^{a(1)} \cdots q_k^{a(k)}$ forment une base du $\Bbbk[[x]]$-module $\Bbbk[[x]][y]$. $\square$

Remarque 4.3. — On garde les hypothèses et notations de la proposition 4.1. La forme réduite de $q_k f$ est donnée par l'égalité :

$$q_k f = \sum q_1^{a(1)} \cdots q_k^{a(k)+1} H_A(x).$$

Démonstration. — Preuve laissée au lecteur. □

PROPOSITION–DÉFINITION 4.4. — *Reprenons les hypothèses et notations de la proposition 4.1 et affectons à chaque q_i un poids $\nu_i \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i \leqslant k$, avec la condition $\frac{w_{i+1}}{w_i}\nu_i \leqslant \nu_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Pour tout $f \in R$, on pose :*

$$\widehat{\nu}(f) = \sup\{\inf(b(1)\nu_1 + \cdots + b(k)\nu_k + \mathrm{ord}(K_B)\nu_0)\}$$

où le sup *est pris sur tous les développements formels $f = \sum q_1^{b(1)} \cdots q_k^{b(k)} K_B(x)$, $K_B \in \Bbbk[[x]]$, $b(i) \in \mathbb{N}$, tous les multi-indices B distincts et en posant $\widehat{\nu}(0) = \infty$.*

Alors :

1. $\widehat{\nu}(f) \leqslant \max\{\nu_0, \nu_k\}\,\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f)$;
2. $\widehat{\nu}(fg) \geqslant \widehat{\nu}(f) + \widehat{\nu}(g)$, *et* $\widehat{\nu}(fg) = \widehat{\nu}(f)$ *si g inversible ;*
3. $\widehat{\nu}(f+g) \geqslant \min\{\widehat{\nu}(f), \widehat{\nu}(g)\}$;
4. *si $\widehat{\nu}(f) < \widehat{\nu}(g)$, alors $\widehat{\nu}(f) = \widehat{\nu}(f+g)$.*

Un tel $\widehat{\nu}$ est appelée une ***pseudo-valuation*** *(certains auteurs disent* ***quasi-valuation****).*

Démonstration. — 1, 2, 3 sont laissés au lecteur, prouvons 4. Par 3, comme $\widehat{\nu}(f) < \widehat{\nu}(g)$, on a $\widehat{\nu}(f+g) \geqslant \widehat{\nu}(f)$, on remarque que $f = f + g - g$, on a $\widehat{\nu}(f) \geqslant \min\{\widehat{\nu}(f+g), \widehat{\nu}(g)\}$, donc $\widehat{\nu}(f) = \widehat{\nu}(f+g)$. □

PROPOSITION 4.5. — *Soit $q_0 = x, q_1, \ldots, q_k$ une suite de Abhyankar–Moh affectée de poids $\nu_0, \ldots, \nu_k$ tels que, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$:*

1. $\frac{w_{i+1}}{w_i}\nu_i \leqslant \nu_{i+1}$,
2. *dans le développement réduit de q_{i+1} relativement à $q_0 = x, q_1, \ldots, q_i$, les monômes sont tous de poids $\geqslant \frac{w_{i+1}}{w_i}\nu_i$, le poids de $q_1^{b(1)} \cdots q_k^{b(k)}$ $K_B(x)$ étant par définition $\mathrm{ord}_x(K_B)\nu_0 + b(1)\nu_1 + \cdots b(k)\nu_k$.*

Alors on a, pour tout $f \in R$:

$$\widehat{\nu}(f) = \inf\{\, a(i)\nu_i + \mathrm{ord}_x(H_A(x))\nu_0 \mid H_A \neq 0\,\}, \tag{4.1}$$

où $f = \sum q_1^{a(1)} \cdots q_k^{a(k)} H_A(x)$ est le développement q-adique de b. De plus :

$$\widehat{\nu}(q_i) = \nu_i \quad (0 \leqslant i \leqslant k). \tag{4.2}$$

En particulier, si $q_0 = x, q_1, \ldots, q_k$ est une suite de Monique pour une valuation divisorielle ν, et si l'on prend $\nu_i = \nu(q_i)$, $0 \leqslant i \leqslant k$, alors

$$\nu = \widehat{\nu}$$

et, pour tout $f \in R$, $\nu(f)$ est la plus petite valeur des monômes non nuls du développement q-adique de f.

Démonstration. — Soit

$$f = \sum q_1^{b(1)} \cdots q_k^{b(k)} K_B(x) \tag{4.3}$$

un développement de f *sur lequel on peut lire* $\widehat{\nu}$, c'est-à-dire, où l'infimum des poids des monômes soit égal à $\widehat{\nu}(f)$. Nous allons définir un algorithme récursif qui permet en partant de (4.3) d'obtenir le développement q-adique de f, cet algorithme transforme un monôme M non réduit en somme de monômes réduits de poids pour $\widehat{\nu}$ supérieurs ou égaux à $\widehat{\nu}(M)$.

On fait une récurrence décroissante sur $\sup(d, |B|)$ le sup étant pris sur les monômes de (4.3) qui ne sont pas sous forme réduite et qui sont de poids minimal, d est le degré en y et $|B| = b(1) + \cdots + b(k)$. La proposition est vraie quand $d = 0$.

Prenons un monôme M qui donne le sup : $M = q_1^{b(1)} \cdots q_k^{b(k)} K_B(x)$. Si $b(i)w_i \geqslant w_{i+1}$ pour un i $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, alors on a :

$$\begin{aligned}
q_1^{b(1)} \cdots q_k^{b(k)}\ K_B\ (x) &= q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i) - \frac{w_{i+1}}{w_i}} q_{i+1}^{b(i+1)+1} \cdots q_k^{b(k)} K_B(x) \\
&+\ q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i) - \frac{w_{i+1}}{w_i}} q_{i+1}^{b(i+1)} \cdots q_k^{b(k)} K_B(x) (q_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}} - q_{i+1}) \\
&=\ q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i) - \frac{w_{i+1}}{w_i}} q_{i+1}^{b(i+1)+1} \cdots q_k^{b(k)} K_B(x) + S(x,y) \\
&=:\ q^A K_B(x) + S(x,y).
\end{aligned}$$

L'hypothèse $\frac{w_{i+1}}{w_i} \nu_i \leqslant \nu_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, implique

$$\widehat{\nu}(q^A K_B) \geqslant \widehat{\nu}(q^B K_B) \geqslant \widehat{\nu}(f)$$

et

$$\widehat{\nu}(S(x,y)) \geqslant \min\{\widehat{\nu}(q^A K_B), \widehat{\nu}(q^B K_B)\} \geqslant \widehat{\nu}(f).$$

Si $S(x,y) \neq 0$, alors en multipliant le développement q-adique de $q_{i+1} - q_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}}$ par $q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i) - \frac{w_{i+1}}{w_i}} q_{i+1}^{b(i+1)} \cdots q_k^{b(k)} K_B(x)$, on a un développement formel de S. Par l'hypothèse 2, les monômes obtenus sont de poids supérieurs ou égaux à $\widehat{\nu}(q_1^{b(1)}\cdots q_k^{b(k)}K_B(x))$, et leurs degrés en y sont tous plus petits que d ; quant à

$$q_1^{b(1)}\cdots q_i^{b(i)-\frac{w_{i+1}}{w_i}}q_{i+1}^{b(i+1)+1}\cdots q_k^{b(k)}K_B(x):=q^CK_C,$$

il est de degré d et $|C|<|B|$.

Bref, on fait une réécriture de f comme combinaison linéaire de monômes en $x,q_1,\ldots,q_k$ de poids $\geqslant\widehat{\nu}(b)$, tout en faisant tomber $\sup(d,|B|)$; ce procédé s'arrête quand tous les monômes de poids minimal $\widehat{\nu}(f)$ sont mis sous forme réduite ; bien sûr, il reste toujours de tels monômes, sinon on aurait $\widehat{\nu}(f)>\widehat{\nu}(f)$. Ce qui prouve (4.1) ; (4.2) est une conséquence triviale de (4.1).

Enfin, par définition des suites génératrices, $\widehat{\nu}=\nu$, ce qui est la dernière assertion. $\square$

LEMME 4.6. — *Soit $q_0=x,q_1,\ldots,q_g,q_{g+1}$ une suite de Monique pour une valuation divisorielle ν. Alors les formes initiales $\mathrm{in}_\nu\left(q_0^{a(0)}q_1^{a(1)}\cdots q_g^{a(g)}q_{g+1}^{a(g+1)}\right)$ avec $a(i)w_i<w_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant g$ forment une base du $\Bbbk$-espace vectoriel $\mathrm{gr}_\nu(R)$. De plus, deux monômes $q_0^{a(0)}q_1^{a(1)}\cdots q_g^{a(g)}$ et $q_0^{b(0)}q_1^{b(1)}\cdots q_g^{b(g)}$ avec $a(i)w_i<w_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant g$ et $b(i)w_i<w_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant g$ ont même valeur si et seulement s'ils sont égaux.*

Démonstration. — Le théorème de Spivakovsky nous assure que $\mathrm{gr}_\nu(R)$ est engendré par les monômes $\mathrm{in}_\nu\left(q_0^{a(0)}q_1^{a(1)}\cdots q_g^{a(g)}q_{g+1}^{a(g+1)}\right)$, sans condition sur les exposants, la proposition précédente nous assure qu'on peut se contenter de monômes réduits.

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que deux monômes réduits $q_0^{a(0)}q_1^{a(1)}\cdots q_g^{a(g)}$ et $q_0^{b(0)}q_1^{b(1)}\cdots q_g^{b(g)}$ ont même valeur si et seulement s'ils sont égaux. Raisonnons par l'absurde, supposons donc que deux tels monômes ont même valeur sans être égaux. Soit $j=\sup\{\, i\mid 0\leqslant i\leqslant g, a(i)\neq b(i)\,\}$. On a :

$$a_0\nu(x)+a(1)\nu(q_1)+\cdots a(j)\nu(q_j)=b_0\nu(x)+b(1)\nu(q_1)+\cdots b(j)\nu(q_j),$$

avec par exemple $a(j)>b(j)$. En remplaçant $a(j)$ par $a(j)-b(j)$ et $b(j)$ par 0, on se ramène au cas où $b(j)=0$. On en déduit que $a(j)\nu(q_j)$ est divisible par $e_{j-1}=\mathrm{pgcd}(\nu(x),\nu(q_1),\ldots,\nu(q_{j-1}))$. On a donc, avec des notations évidentes :

$$a(j)\frac{\nu(q_j)}{e_j}=\alpha\frac{e_{j-1}}{e_j},\quad \alpha\in\mathbb{N}.$$

Mais $\frac{e_{j-1}}{e_j}$ est premier avec $\frac{\nu(q_j)}{e_j}$, donc $\frac{e_{j-1}}{e_j}$ divise $a(j)$. D'après (3.1), on a $\frac{e_{j-1}}{e_j} = \frac{w_{j+1}}{w_j}$, donc $\frac{w_{j+1}}{w_j}$ divise $a(j)$, ce qui contredit $a(j)w_j < w_{j+1}$. $\square$

LEMME 4.7. — *Soit $q_0, q_1, \dots, q_{\ell-1}$ une suite de Abhyankar–Moh composée des ℓ premiers termes d'une suite de Monique $q_0, q_1, \dots, q_{\ell-1}, q_\ell, \dots, q_{g+1}$ associée à ν valuation divisorielle centrée. Si $f \in R$ est combinaison linéaire de monômes en $x, q_1, \dots, q_{\ell-1}$ non forcément réduits mais dont l'infimum des poids est égal à $\nu(f)$, alors, quand on met f sous forme réduite relativement à $q_0, q_1, \dots, q_{\ell-1}, q_\ell, \dots, q_{g+1}$, il n'y a qu'un monôme de valeur minimale pour ν, ce sera un monôme en $x, q_1, \dots, q_{\ell-1}$. En particulier, pour tout $m \in \Gamma = \nu(R \setminus \{0\})$, il y a un et un seul monôme réduit $M = q_0^{a(0)} q_1^{a(1)} \cdots q_g^{a(g)}$, avec $a(g) < \frac{w_{g+1}}{w_g}$ et de valeur m.*

Démonstration. — L'algorithme récursif de la preuve de la proposition 4.5 et une récurrence décroissante du même type donnent la première assertion. Pour la seconde, l'unicité de M vient du lemme 4.6. Pour l'existen-ce, comme le semi-groupe Γ est engendré par $\nu(q_0), \nu(q_1), \dots, \nu(q_g)$, il existe un monôme non forcément réduit $M = q_0^{a(0)} q_1^{a(1)} \cdots q_g^{a(g)}$ avec $\nu(M) = m$; en appliquant à $f = M$ la première assertion, on termine la preuve. $\square$

LEMME 4.8. — *Soit (u, v) un système régulier de paramètres de R_m (cf. sous-section 3.3) tel que* $\operatorname{div}(v) \subseteq E_m \subseteq \operatorname{div}(uv)$. *On définit c et d par $q_{g+1} = u^c v^d q'_{g+1} \in R_m$, où q'_{g+1} est un transformé strict de q_{g+1} dans R_m. Soit $f \in R$ tel que $\nu(f) \geqslant a\nu(q_{g+1})$. Alors $u^{ac}v^{ad}$ divise f dans R_m.*

Démonstration. — On a $f = u^{c'} v^{d'} f'$, où f' est un transformé strict de f. On a que c' et d' sont les valeurs de f pour des valuations $\mathfrak{M}_i$-adiques, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, où $\mathfrak{M}_i$ est le maximal de R_i (cf. sous-section 3.3), le résultat découle du lemme suivant. $\square$

LEMME 4.9. — *Si $\nu(f) \geqslant a \cdot \nu(q_{g+1})$, $a \in \mathbb{N}$, alors on a $\operatorname{ord}_{\mathfrak{M}_i}(f) \geqslant a \cdot \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}_i}(q_{g+1})$, $0 \leqslant i \leqslant m$.*

Par le lemme 4.6, il suffit de regarder le cas où $f = M = q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_g^{a_g} q_{g+1}^{a_{g+1}}$ est un monôme réduit. Si $a_{g+1} \geqslant a$, c'est trivial. Sinon, on se ramène à $a_{g+1} = 0$. On a : $a_0\nu(q_0) + a_1\nu(q_1) + \cdots + a_g\nu(q_g) \geqslant a\nu(q_{g+1})$, $\nu(q_j) \leqslant \frac{w_j}{w_g}\nu(q_g)$, $1 \leqslant j \leqslant g$ (cf. (3.2)), $\nu(q_0) = \operatorname{col}(q_0, q_{g+1}) = \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}}(q_{g+1}) < \nu(q_1)$ (les points $(\nu(q_0), 0)$ et $(0, \nu(q_1))$ sont les sommets du polygone de Newton de q_{g+1}). D'où : $a_0 \frac{1}{w_g}\nu(q_g) + a_1 \frac{w_1}{w_g}\nu(q_g) + \cdots + a_g \frac{w_g}{w_g}\nu(q_g) \geqslant a\nu(q_{g+1}) \geqslant a\frac{w_{g+1}}{w_g}\nu(q_g)$; en divisant par $\frac{\nu(q_g)}{w_g}$, on obtient le résultat pour $i = 0$.

Dans R_1, on a $f = t^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f)} f'$ et $q_{g+1} = t^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(q_{g+1})} q'_{g+1}$ où f' et q'_{g+1} sont les transformés stricts de f et q_g, et $(t) = \mathfrak{M}R_1$. On a le résultat par récurrence sur m en remplaçant q_{g+1} par q'_{g+1} et f par $t^{(\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f) - a\cdot \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(q_{g+1}))}$ f'. $\square$

THÉORÈME 4.10 **(Gradué associé à une valuation divisorielle).** *Soit ν une valuation divisorielle de $(R, \mathfrak{M})$, soient $\Gamma = \nu(R \setminus \{0\})$ son semi-groupe et $\varphi \in \Gamma$. Alors, avec les notations du lemme 4.8, on peut choisir u, v et $\beta \in \Bbbk$ tels que*

$$\mathrm{in}_\nu(q_{g+1}) = U^c V^d (U + \beta V)$$

(avec $\beta = 0$ et $c = 0$ si $E_m = \mathrm{div}(v)$), $U = \mathrm{in}_\nu(u)$, $V = \mathrm{in}_\nu(v)$. Soient $\mathrm{gr}_\nu(R)_\varphi := \frac{I_\varphi}{I_{\varphi+}}$,

$$\mathrm{gr}_\nu(R) := \bigoplus \frac{I_\varphi}{I_{\varphi+}} \subseteq \mathrm{gr}_\nu(R_m) = \mathrm{gr}_{\mathfrak{M}_m}(R_m) = \Bbbk[U, V].$$

Alors on a :

$$\mathrm{gr}_\nu(R)_\varphi = \Delta_\varphi \langle U, V\rangle^{\varphi - \deg(\Delta_\varphi)}, \quad \Delta_\varphi | \Delta_{\varphi'}, \quad \varphi \leqslant \varphi' \in \Gamma \tag{4.4}$$

où $\Delta_\varphi = U^{p(\varphi)} V^{q(\varphi)}$, $(p(\varphi), q(\varphi)) \in \mathbb{N}^2$, $p(\varphi) = 0$ si $E_m = \mathrm{div}(v)$, $\langle U, V\rangle^a := \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant a} \Bbbk U^{a-i} V^i$; de plus

$$\begin{aligned} I_\varphi I_{\nu(q_{g+1})} &= I_{\varphi + \nu(q_{g+1})}, \\ \mathrm{gr}_\nu(R)_{\varphi + \nu(q_{g+1})} &= \mathrm{gr}_\nu(R)_\varphi \mathrm{gr}_\nu(R)_{\nu(q_{g+1})}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\mathrm{gr}_\nu(R)_\varphi = \Bbbk \Delta_\varphi \quad si\ \varphi - \nu(q_{g+1}) \notin \Gamma, \tag{4.6}$$

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{gr}_\nu(R)_{i\nu(q_{g+1})} = \Bbbk[\Delta_{\nu(q_{g+1})} U, \Delta_{\nu(q_{g+1})} V]. \tag{4.7}$$

Démonstration. — Soit $q_0, q_1, \cdots q_{g+1}$ une suite de Monique associée à ν, comme q'_{g+1} est lisse et transverse à chaque composante de E_m (cf. sous-section 3.2), on peut construire u, v, β.

D'après le théorème de Zariski ([SamZar60], p. 392 en bas), pour tout $\varphi \in \Gamma$ on a $I_\varphi = \mathcal{P}_0^{\alpha_0} \ldots \mathcal{P}_m^{\alpha_m}$, où $\mathcal{P}_0 = \mathfrak{M}$, $\mathcal{P}_m = I_{\nu(q_{g+1})}$, et pour $0 \leqslant i \leqslant m$, $\mathcal{P}_i$ est un idéal complet simple, son transformé faible dans R_i est le maximal de R_i : $\mathcal{P}_i R_m = u^{a_i} v^{b_i} R_m$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, $\mathcal{P}_m R_m = u^{a_m} v^{b_m}(u, v)$, $(a_i, b_i) \in \mathbb{N}^2$, $a_i = 0$ si $E_m = \mathrm{div}(v)$, $0 \leqslant i \leqslant m$. On en déduit que $I_\varphi R_m = u^{p(\varphi)} v^{q(\varphi)} (u, v)^{\varphi - (p(\varphi) + q(\varphi))}$, $(p(\varphi), q(\varphi)) \in \mathbb{N}^2$,

$p(\varphi) = 0$ si $E_m = \operatorname{div}(v)$. Cela donne (4.4) en posant $\Delta_\varphi = \operatorname{in}_\nu(u^{p(\varphi)} v^{q(\varphi)})$. Nous ne pouvons pas calculer effectivement $(p(\varphi), q(\varphi))$.

Prouvons la première égalité de (4.5) qui entraîne la seconde. Il est clair que $I_\varphi I_{\nu(q_{g+1})} \subset I_{\varphi+\nu(q_{g+1})}$. Pour l'inclusion inverse, soit $M = q_0^{a(0)} \cdots q_g^{a(g)} q_{g+1}^{a(g+1)} \in I_{\varphi+\nu(q_{g+1})}$ un monôme réduit. Si $a(g+1) \neq 0$, alors $M \in I_\varphi I_{\nu(q_{g+1})}$. Si $a(g+1) = 0$, soit $N = q_0^{b(0)} \cdots q_g^{b(g)}$ réduit avec $\nu(N) = \nu(q_{g+1})$ et soit $P = q_0^{c(0)} \cdots q_g^{c(g)}$ réduit avec $\nu(P) = \varphi$ (lemme 4.7), alors en appliquant le lemme 4.6 et la première assertion du lemme 4.7 à $f = NP$, on a $NP = \lambda M \bmod I_{\varphi+1}$, $\lambda \in \Bbbk \setminus \{0\}$, $M \in I_\varphi I_{\nu(q_{g+1})}$.

Prouvons (4.6). Si $\varphi - \nu(q_{g+1}) \notin \Gamma$, les monômes réduits de I_φ sont de la forme $M = q_0^{a(0)} \cdots q_g^{a(g)}$; par le lemme 4.6, le $(g+1)$-uple $a(0) \cdots a(g)$ est unique, donc $\dim_\Bbbk(\operatorname{gr}_\nu(R)_\varphi) = 1$.

Prouvons (4.7). Par (4.5), il suffit de prouver que $\operatorname{gr}_\nu(R)_{\nu(q_{g+1})} = \Delta_{\nu(q_{g+1})}\langle U, V\rangle$. Ce résultat découle de $\mathcal{P}_m = I_{\nu(q_{g+1})}$ et $\mathcal{P}_m R_m = u^{a_m} v^{b_m}(u,v)$, $a_m = 0$ si $E_m = \operatorname{div}(v)$. □

LEMME 4.11. — *Soit ν une valuation divisorielle de $(R, \mathfrak{M})$, alors, tout entier supérieur ou égal à $\nu(q_{g+1})$ est dans le semi-groupe $\Gamma = \nu(R \setminus \{0\})$.*

Démonstration. — Voir [Spi90], Remark 6.2 et Lemma 6.3. □

PROPOSITION 4.12. — *Soit ν une valuation divisorielle de $(R, \mathfrak{M})$, soit $(q_0 = x, q_1, \ldots, q_{g+1})$ une suite de Monique de ν, alors toute suite $(p_0 = x, p_1, \ldots, p_h)$ telle que $\nu(p_i) = \nu(q_i)$, $1 \leqslant i \leqslant h \leqslant g$, peut être complétée en une suite génératrice de ν.*

Démonstration. — Voir [Spi90], lemme 8.10 (p. 145). □

PROPOSITION 4.13. — *Soit ν une valuation divisorielle de $(R, \mathfrak{M})$, soit $(q_0 = x, q_1, \ldots, q_{g+1})$ une suite de Monique de ν, supposons que pour un i $(1 \leqslant i \leqslant g-1)$, $q_0, \ldots, q_i$ est une suite de Abhyankar–Moh et soit p_{i+1} un élément de R avec*

$$p_{i+1} = q_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}} + \sum q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} H_A(x),$$

où $a(k) w_k < w_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant i$, $A = (a(1), \ldots, a(i))$ et $H_A \in \Bbbk[[x]]$; alors $\nu(p_{i+1}) \leqslant \nu(q_{i+1})$ et, si l'on a égalité, $(q_0 = x, q_1, \ldots, p_{i+1}, \ldots, q_{g+1})$ est aussi une suite de Monique.

Démonstration. — D'après la proposition précédente, il suffit de prouver que $\nu(p_{i+1}) \leqslant \nu(q_{i+1})$. Supposons le contraire, $\nu(\lambda p_{i+1} - q_{i+1}) = \nu(q_{i+1})$, $\forall\ \lambda \in \Bbbk$, $\lambda p_{i+1} - q_{i+1}$ est donc une $(i+1)$-ième curvette (cf. sous-section 3.2). Quitte à multiplier q_{i+1} par un inversible et à faire une troncation, on peut supposer que $q_{i+1} \in \Bbbk[[x]][y]$ où $y = q_1$ et $\deg_y(q_{i+1}) = w_{i+1} := \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(q_{i+1})$. On peut choisir $\lambda \in \Bbbk$ tel que $\deg_y(\lambda p_{i+1} - q_{i+1}) < w_{i+1}$, ce qui est impossible car les $(i+1)$-ièmes curvettes sont toutes tangentes entre elles et de même ordre $\mathfrak{M}$-adique ([Spi90], 7.3 et 7.5). □

PROPOSITION 4.14 **(Straight Line Expansion).** — *Soit ν une valuation définie par une courbe irréductible singulière C d'équation f (voir la sous-section 3.6 et [Spi90], Section 7, p. 131) et soit $q_0, q_1 \dots, q_{g+1}$ une suite de Monique (pour ν) qui soit aussi de Abhyankar–Moh. Soit*

$$f = \sum q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} q_{i+1}^{a(i+1)} L_A(x) \tag{4.8}$$

la forme réduite de f par rapport à la suite $(x = q_0, q_1, \dots, q_i, q_{i+1})$, $1 \leqslant i+1 \leqslant g$. On note n la multiplicité de f à l'origine.

Alors, parmi les termes de valeur minimale dans cette écriture (4.8), il y a le terme avec $a(1) = \cdots = a(i) = 0$, $a(i+1) = \frac{n}{w_{i+1}}$ et $L_{0,\dots,0,\frac{n}{w_{i+1}}}$ inversible, et un autre terme avec $a(i+1) = 0$. De plus, si $i+1 = g$, ce sont les deux seuls termes de valeur minimale.

Cette proposition a été prouvée par Abhyankar en caractéristique 0, il l'appelle *straight line expansion*, elle est essentielle pour la suite (voir algorithme 6.1). Dans le cas $i = 0$, il s'agit du résultat bien connu que le polygone de Newton d'une branche analytique est droit.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $n = \mathrm{col}(f, q_0)$ et que d'après la sous-section 3.5 on a $\frac{n}{w_{i+1}} = e_i$.

Désormais, nous supposons $i \geqslant 1$. Désignons par f', q'_{i+1} les transformés stricts de f, q dans R_{k_i}.

On note $\mathrm{div}(uv)$ le diviseur exceptionnel de R_{k_i} et l'on définit a, b par $q_{i+1} = u^a v^b q'_{i+1}$. Par le lemme 4.8 appliqué à f et q_{i+1}, on a : $f = u^{ae_i} v^{be_i} f'$. Par (3.4), on a : $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_{k_i}}(f') = e_i = \mathrm{col}(f', u) = \nu(u)$. u, q'_{i+1} est un système régulier de paramètres de R_{k_i} ; quitte à éventuellement permuter u et v et à les multiplier par des inversibles, on peut supposer $v = u + q'_{i+1} \bmod \mathfrak{M}^2_{k_i}$.

La *straight line expansion* pour f', u, q'_{i+1}, donne :

$$f = u^{ae_i} v^{be_i} f' = u^{ae_i} v^{be_i} \left(\gamma q'^{e_i}_{i+1} + \sum_{\substack{c \geqslant 0 \\ a(i+1) < e_i}} \gamma_{c,a(i+1)} q'^{a(i+1)}_{i+1} u^c \right), \quad (4.9)$$

où les $\gamma_{c,a(i+1)} \in \Bbbk$, γ inversible dans R_{k_i} et $\gamma_{c,a(i+1)} = 0$ si $ce_i + a(i+1)\nu(q'_{i+1}) < e_i\nu(q'_{i+1})$; et pour un c_0, on a $c_0 e_i = e_i \nu(q'_{i+1})$ et $\gamma_{c_0,0} \neq 0$.

Soit $M_A := q_1^{a(1)} \cdots q_{i+1}^{a(i+1)} L_A(x)$ un monôme non nul du développement de f (cf. (4.8)) avec $(\nu(M_A), a(i+1))$ minimal pour l'ordre lexicographique. Dans R_{k_i}, $M_A = \delta u^\alpha v^\beta q'^{a(i+1)}_{i+1}$, δ inversible, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. On a $M_A = \delta u^{\alpha+\beta} q'^{a(i+1)}_{i+1} + N$ avec $\nu(N) > \nu(M_A)$. En se reportant à (4.9), on constate que

$$M_A = \delta u^{\alpha+\beta} q'^{a(i+1)}_{i+1} = \gamma_{c,a(i+1)} q'^{a(i+1)}_{i+1} u^c u^{ae_i + be_i} \bmod I_{\nu(M_A)+}.$$

Donc, dans (4.8), tous les monômes sont de valeur au moins égale à $e_i\nu(q_{i+1})$. Par le lemme 4.8 appliqué à f et q_{i+1}, $u^{ae_i}v^{be_i}$ divise dans R_{k_i} tous les monômes $q_1^{a(1)} \cdots q_{i+1}^{a(i+1)} L_A(x)$ non nuls de (4.8).

Parmi ces monômes, l'un d'entre eux doit être égal à $u^{ae_i}v^{be_i}\gamma q'^{e_i}_{i+1} \bmod I_{\omega+}$, où $\omega = e_i\nu(q'_{i+1}) + e_i\nu(u^a v^b) = \nu(q_{i+1}^{e_i})$, c'est $q_{i+1}^{e_i} L_{0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}}}$ avec $L_{0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}}}$ inversible.

Le deuxième monôme cherché est le monôme non nul de (4.8) égal à $u^{ae_i}v^{be_i}\gamma_{c,0} \bmod I_{\omega+}$, avec $ce_i = e_i\nu(q'_{i+1})$ et $\gamma_{c,0} \neq 0$.

Dans le cas $i+1 = g$, d'après la sous-section 3.2 et la proposition 4.5, la valeur minimale des monômes de (4.8) est $\nu(f) = \frac{n}{w_g}\nu(q_g)$. Les termes de valeur minimale de (4.8) sont de la forme : $\sum_{0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{w_g}} q_g^{\frac{n}{w_g} - i} M_i$, avec $M_i = q_1^{a(1)} \cdots q_{g-1}^{a(g-1)} L_A(x)$ monôme réduit en $q_0, \ldots, q_{g-1}$ et $\nu(M_i) = i\nu(q_g)$ ou $M_i = 0$. Pour $i > 0$ avec $M_i \neq 0$, $\nu(M_i) = \sum_{j \leqslant g-1} a_j \nu(q_j) + \nu(L_A)$ est dans le semigroupe engendré par $\nu(q_0), \ldots, \nu(q_{g-1})$, donc est divisible par $e_{g-1} = \frac{n}{w_g}$, or, $\mathrm{pgcd}(\nu(q_0), \ldots, \nu(q_g)) = \mathrm{pgcd}(e_{g-1}, \nu(q_g)) = 1$. Donc $\frac{n}{w_g}$ divise i, $\frac{n}{w_g} = i$. Il y a donc au plus deux termes de valeur minimale dans (4.8) (et donc exactement 2 par le résultat précédent) : $M_0 q_g^{\frac{n}{w_g}} + M_{\frac{n}{w_g}}$, $M_0 \in \Bbbk$. On peut aussi remarquer que f' est singulière avec une paire de Puiseux, et qu'alors dans le développement de $f' \in \Bbbk[[q'_{i+1}, u]]$, seuls les deux monômes correspondant aux sommets du polygone de Newton de f' génèrent des points sur le bord du polygone. $\square$

COROLLAIRE 4.15. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 4.13, supposons de plus que ν est définie par une courbe analytiquement irréductible d'équation f. Notons $n := \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f)$. Soit $i \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant i \leqslant g-1$, soit $p_{i+1} \in \Bbbk[[x]][y] \cap R$ tel que $\deg_y(p_{i+1}) = w_{i+1} = \deg_y(q_{i+1})$ et $\nu(p_{i+1}) \geqslant \frac{w_{i+1}}{w_i}\nu(q_i)$. On met f sous forme réduite par rapport à la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \ldots, q_i, p_{i+1}$:*

$$f = \sum L_A q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} p_{i+1}^{a(i+1)}, \quad A = (a(1), \ldots, a(i+1)), \quad L_A \in \Bbbk[[x]].$$

Notons ω le minimum des valeurs pour la valuation ν des monômes $L_A q_0^{a(0)} \cdots q_i^{a(i)} p_{i+1}^0$ où $A = (a(0), \ldots, a(i), 0)$ (éventuellement $\omega = \infty$).

Alors :

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - (a) $\nu(p_{i+1}) < \nu(q_{i+1})$;
   - (b) $\frac{w_{i+1}}{n}\omega$ *est dans le semi-groupe engendré par* $\nu(q_0), \ldots, \nu(q_i)$ *(en particulier,* $\omega \neq \infty$*) ;*
   - (c) *il existe un unique monôme* $M := \lambda q_0^{b(0)} \cdots q_i^{b(i)}$ *avec* $b(j)d(j) < d(j+1)$, $1 \leqslant j \leqslant i$, $\lambda \in \Bbbk$, *tel que* $\mathrm{in}_\nu(M) = -\mathrm{in}_\nu(p_{i+1}) \in \mathrm{gr}_\nu(R)_{\nu(p_{i+1})}$.
2. *Quand les conditions 1a,1b,1c sont vraies, alors* $L_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}(0) \neq 0$ *et, en désignant par S la somme des monômes de valeur minimale de la forme réduite par rapport à la suite de Abhyankar–Moh* $q_0, \ldots, q_i, p_{i+1}$, *on a :*

$$S = L_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}(p_{i+1})^{\frac{n}{w_{i+1}}} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant \frac{n}{w_{i+1}}} (p_{i+1})^{\frac{n}{w_{i+1}}-j} N_j \tag{4.10}$$

avec :

$$L_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}(0) \binom{n/w_{i+1}}{j} M^j = N_j \bmod I_{j\nu(p_{i+1})}. \tag{4.11}$$

En particulier, si $\frac{n}{w_{i+1}}$ n'est pas un multiple de la caractéristique, il y a parmi les monômes de valeur minimale le monôme $L_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}(p_{i+1})^{\frac{n}{w_{i+1}}-1}M$

Démonstration. — Il est clair que 1c implique 1a. Si l'on a 1a, alors il existe un monôme M qui a même valeur que p_{i+1}, les exposants de ce monôme sont uniques (lemme 4.6), quitte à multiplier M par un scalaire, on obtient le monôme de 1c. Montrons que 1b implique 1a. Supposons que l'on a 1b et que $\nu(p_{i+1}) \geqslant \nu(q_{i+1})$, alors $q_0, \ldots, q_i, p_{i+1}, q_{i+2}, \ldots, q_{g+1}$ est une suite de Monique et $\nu(p_{i+1}) = \nu(q_{i+1})$ (proposition 4.13). Quitte à se plonger dans $\widehat{R}$ et à multiplier $q_{i+2}, \ldots, q_{g+1}$ par des inversibles, la suite $q_0, \ldots, q_i, p_{i+1}, q_{i+2}, \ldots, q_{g+1}$ est de Abhyankar–Moh, d'après la proposition 4.14 on a $\nu(p_{i+1}) = \frac{w_{i+1}}{n}\omega$, ce qui contredit le fait que $\nu(q_{i+1})$ n'est pas dans le semi-groupe engendré par $\nu(q_0), \ldots, \nu(q_i)$.

On a prouvé $1c \iff 1a \Leftarrow 1b$.

Désormais, on suppose 1a et 1c vrais. On définit a par $p_{i+1} = q_{i+1} - a$, on a clairement $\nu(p_{i+1}) = \nu(M) < \nu(q_{i+1})$, $\mathrm{in}_\nu(a) = \mathrm{in}_\nu(M)$. Écrivons la forme réduite de f relativement à $q_0 = x, q_1, \cdots, q_{i+1}$:

$$\begin{aligned} f &= \sum q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} (p_{i+1} + a)^{a(i+1)} \Lambda_A(x) \\ &= \sum q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} \Lambda_A(x) \left(\sum \binom{a(i+1)}{\alpha} M^\alpha p_{i+1}^\beta + c(\alpha, \beta) \right), \end{aligned}$$

avec $\Lambda_A(x) \in \Bbbk[[x]]$, $\alpha + \beta = a(i+1)$, $\nu(c(\alpha, \beta)) > a(i+1)\nu(M)$.

Alors, un calcul simple et l'hypothèse $\nu(p_{i+1}) \geqslant \frac{w_{i+1}}{w_i}\nu(q_i)$ impliquent

$$f = \Lambda_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}(p_{i+1} + M)^{\frac{n}{w_{i+1}}} + b$$

où $\widehat{\nu}(b) > \frac{n}{w_{i+1}}\widehat{\nu}(a)$, $\widehat{\nu}$ étant la pseudo-valuation associée à la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \ldots, q_i, p_{i+1}$ et définie par $\widehat{\nu}(q_j) = \nu(q_j)$, $0 \leqslant j \leqslant i$, $\widehat{\nu}(p_{i+1}) = \nu(p_{i+1})$.

Par unicité de la forme réduite relativement à $q_0 = x, q_1, \ldots, p_{i+1}$, on a $\Lambda_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}(0) = L_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}(0) \neq 0$. Notons N_j le monôme réduit en $q_0 = x, q_1, \ldots, q_i$ qui a même forme initiale que $\Lambda_{(0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}})}\binom{\frac{n}{w_{i+1}}}{j}M^j$; par le lemme 4.7, Nj est un monôme en $q_0, \ldots, q_i$. On a (4.10) et (4.11) avec ces N_j et cela entraîne 1b. □

Remarque 4.16. — On remarque que (4.11) donne une relation très simple entre N_1 et M quand $\frac{n}{w_{i+1}}$ n'est pas multiple de la caractéristique ; dans ce cas, le développement réduit de f relativement à la suite de Abhyankar–Moh $x, q_1, \ldots, q_i, q_{i+1}$ permet de calculer facilement M. Le calcul de M est plus subtil si $\frac{n}{w_{i+1}}$ est multiple de la caractéristique : nous le ferons dans l'algorithme 5.1.

PROPOSITION–DÉFINITION 4.17 **(Racines approchées)**. — ([Abh88], section 13.) *Supposons que f est sous forme de Weierstraß ($f \in \Bbbk[y][[x]]$*

et $\deg_y(f) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f) := n$*), et que la caractéristique de* $\Bbbk$ *ne divise pas* n*, alors, si* $d \in \mathbb{N}$ *divise* n*, il existe un et un seul polynôme* $g = y^{\frac{n}{d}} + b_1(x)y^{\frac{n}{d}-1} + \cdots + b_{\frac{n}{d}}(x) \in \Bbbk[y][[x]]$ *tel que* $\deg_y(f - g^d) < n - \frac{n}{d}$*, on l'appelle* d***-ième racine approchée de*** f*.*

COROLLAIRE 4.18. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 4.17, si* $(q_0, q_1, \ldots, q_{g+1})$ *est une suite de Monique, posons* $w_i = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(q_i)$*,* $0 \leqslant i \leqslant g$*. Si l'on désigne par* p_i*,* $1 \leqslant i \leqslant g+1$ *les racines approchées de* f *de degrés* w_i *en* y*,* $1 \leqslant i \leqslant g$*, alors* $(x, p_1, \ldots, p_{g+1})$ *est une suite de Monique.*

Démonstration. — Il est bien connu que p_1 est une curvette. On a vu que dans une suite génératrice, on pouvait prendre $q_{g+1} = f$, or p_{g+1} est la racine approchée dont le degré en y est celui de f, $p_{g+1} = f$. Supposons avoir montré que p_j, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant g-1$ est extrait d'une suite de Monique et montrons que p_{i+1} est une curvette. Désignons par $q_{i+1} = p_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}} + \sum p_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}-k} q_1^{a(1)} \cdots q_{i-1}^{a(i-1)} K_A(x)$ une $(i+1)$-ième curvette, développons f relativement à la suite $(x, p_1, \ldots, p_i, q_{i+1})$:

$$f = q_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}}} + q_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}}-1} \sum_A p_1^{a(1)} \cdots p_i^{a(i)} M_A(x) + h, \quad \deg_y(h) < n - w_{i+1}. \tag{4.12}$$

Si le facteur de $q_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}}-1}$ est nul, alors $q_{i+1} = p_{i+1}$, et nous avons le résultat annoncé. Sinon, soit $M = p_1^{a(1)} \cdots p_i^{a(i)} M_A(x)$ le monôme de degré maximal en y dans (4.12), d'après la *straight line expansion*, M a une valeur pour ν supérieure ou égale à celle de q_{i+1} et donc strictement supérieure, puisque $\nu(q_{i+1})$ n'est pas dans le semi-groupe engendré par les $\nu(p_j)$, $0 \leqslant j \leqslant i$. Donc, $\widehat{q}_{i+1} = q_{i+1} + \frac{w_{i+1}}{n} M$ est aussi une curvette, et un calcul simple montre que, dans le développement de f relativement à la suite $(x, p_1, \ldots, p_i, \widehat{q}_{i+1})$, le facteur de $\widehat{q}_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}}-1}$ est nul ou est de degré en y strictement plus petit que celui de M ; une récurrence décroissante sur le degré du facteur de $\widehat{q}_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}}-1}$ donne le résultat. $\square$

5. Construction d'une suite de Monique (cas général)

ALGORITHME 5.1. —

ENTRÉES

$(R, \mathfrak{M})$ est un anneau local régulier de dimension 2, on suppose que R contient un corps de représentants $\Bbbk = R/\mathfrak{M}$ algébriquement clos, $f \in \mathfrak{M}$ analytiquement irréductible.

SORTIE

$(q_0, \ldots, q_g, q_{g+1} = f)$ une suite de Abhyankar–Moh qui est suite de Monique associée à la valuation définie par f.

1. *On choisit $q_0 := x \in R$ régulier tel que $\mathrm{in}_{\mathfrak{M}}\, q_0$ ne divise pas $\mathrm{in}_{\mathfrak{M}}\, f$. On pose $i = 0$.*
2. *$(q_0, \ldots, q_i)$ étant construits, on pose : $r_0 := \mathrm{col}(f, q_0), \ldots, r_i := \mathrm{col}(f, q_i)$, $e_i := \mathrm{pgcd}(r_0, \ldots, r_i)$.*
3. *Si $e_i = 1$: STOP, $g := i$, la suite cherchée est $q_0, q_1, \ldots, q_g, q_{g+1} := f$.*
4. *On pose $w_{i+1} := \frac{r_0}{e_i}$ (on rappelle que $r_0 = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f)$).*
5. *Si $i = 0$: on pose $q_{1,0} := y \in R$ tel que (x, y) est un système régulier de paramètres.*

   Si $i \geqslant 1$: on pose $q_{i+1,0} := q_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}} = q_i^{\frac{e_{i-1}}{e_i}}$.
6. *On pose $j = 0$.*
7. *On développe f par rapport à la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \ldots, q_i, q_{i+1,j}$:*

$$f = \sum L_A q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} q_{i+1,j}^{a(i+1)}. \quad A = (a(1), \ldots, a(i+1)), \tag{5.1}$$

8. *On pose $\lambda = L_{0,\ldots,0,\frac{n}{w_{i+1}}} \bmod \mathfrak{M}$, $\lambda \in \Bbbk$. Soit $\mathcal{S}$ la somme des monômes $\mathcal{M}$ avec $\mathrm{col}(\mathcal{M}, f)$ de valeur minimale de (5.1), valeur notée $\omega := \mathrm{col}(\mathcal{M}, f)$.*
9. *Si $\frac{n}{w_{i+1}}$ n'est pas divisible par la caractéristique de $\Bbbk$:*
   (a) *On cherche dans $\mathcal{S}$ le monôme $\mathcal{M}_0$ avec $\mathrm{col}(\mathcal{M}_0, f) = \omega$ et $a_0(i+1) = \frac{n}{w_{i+1}} - 1$.*
   (b) *S'il n'y en a pas, on pose $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; aller à 7. avec $i := i+1$.*

(c) *Sinon $\mathcal{M}_0$ existe. On pose $q_{i+1,j+1} = q_{i+1,j} + \lambda^{-1}\frac{w_{i+1}}{n}\mathcal{M}_0$. Aller à 7. avec $j := j+1$.*

10. *Sinon, $\Bbbk$ est de caractéristique $p > 0$ et p divise $\frac{n}{w_{i+1}}$.*

(a) *On pose $\frac{n}{w_{i+1}} = p^\alpha d$, avec $d \in \mathbb{N}$ premier à p. On cherche dans $\mathcal{S}$ le monôme $\mathcal{M}_0$ avec $a_0(i+1) = \frac{n}{w_{i+1}} - p^\alpha$.*

(b) *S'il n'y en a pas : on pose $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; aller à 7. avec $i := i+1$.*

(c) *Sinon, $\mathcal{M}_0$ existe. On note $\delta := \mathrm{col}(\mathcal{M}_0, f) = p^\alpha \,\mathrm{col}(q_{i+1,j}, f)$.*

(d) *Si $\frac{\delta}{p^\alpha}$ n'est pas dans le semi-groupe engendré par $r_0, r_1, \ldots, r_i$: on pose $q_{i+1,j} := q_{i+1}$; aller à 7. avec $i := i+1$.*

(e) *Sinon, on a $\frac{\delta}{p^\alpha} = a_0 r_0 + a_1 r_1 + \cdots + a_i r_i$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}$ et $a_\ell w_\ell < w_{\ell+1}$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant i$.*

(f) *On cherche $\varepsilon \in \Bbbk$ tel que, en écrivant sous forme réduite*

$$(\varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i})^{p^\alpha} = \sum \Lambda_B q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i)}, \quad \Lambda_B \in \Bbbk[[x]],$$

pour un multi-indice B on ait : $\mathcal{M}_0 = \Lambda_B q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i)} \bmod (x)$.

(g) *S'il n'y a pas de tel ε : on pose $q_{i+1,j} := q_{i+1}$; aller à 7. avec $i := i+1$.*

(h) *Sinon ε existe. On pose $q_{i+1,j+1} := q_{i+1,j} + \varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i}$; aller à 7. avec $j := j+1$.*

Justification de l'algorithme 5.1. — On a $\mathrm{col}(x, f) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f) = r_0$, d'où x est un q_0. Pour le reste, si $q_{i+1,j}$ n'est pas une curvette, alors il existe un monôme réduit $M_j = \varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i}$ tel que $\mathrm{in}_\nu(q_{i+1,j}) + \mathrm{in}_\nu(M_j) = 0$. Par (4.11), $\mathrm{in}_\nu((\varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i})^{p^\alpha}) = \mathrm{in}_\nu(N)$; par la proposition 4.5 et le lemme 4.7, cette égalité est équivalente à ce que, dans la forme réduite de $(\varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i})^{p^\alpha} = \sum \Lambda_B q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i)}$, $\Lambda_B \in \Bbbk[[x]]$, $N = \Lambda_B q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i)} \bmod (x)$ pour un multi-indice B.

Remarquons que, d'après 4.15.1b., les conditions « $q_{i+1,j}$ n'est pas une curvette » et « $\frac{\delta}{p^\alpha} := \mathrm{col}(N, f) = p^\alpha \,\mathrm{col}(q_{i+1,j}, f)$ est dans le semi-groupe engendré par $r_0, r_1, \ldots, r_i$ » sont équivalentes. Donc, par ce corollaire, dans ce cas on pourra toujours trouver les $a_0, a_1, \ldots, a_i$ et ε. Si $q_{i+1,j}$ n'est pas une curvette, l'algorithme calcule $M_j = \varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i}$, monôme réduit avec $a_i < \frac{w_{i+1}}{w_i}$ tel que $\mathrm{in}_\nu(q_{i+1,j}) + \mathrm{in}_\nu(M_j) = 0$ et donc $\nu(q_{i+1,j}) < \nu(q_{i+1,j+1})$; au bout d'un temps fini, on atteindra $\nu(q_{i+1})$ et donc q_{i+1}. □

6. Critère d'irréductibilité analytique (cas général)

Il y a trois différences essentielles entre notre algorithme et celui de Abhyankar :

1. Les q_i, les candidats à être des éléments d'une suite génératrice, sont calculés par l'algorithme 6.1, Abhyankar prend des racines approchées de f, cela lui impose la caractéristique 0.
2. Nous vérifions la *straight line expansion* pour f relativement à $q_0, \dots, q_i$, $1 \leqslant i$, tandis que Abhyankar le fait pour q_{i+1} relativement à $q_0, \dots, q_i$.
3. Abhyankar impose de vérifier l'inégalité de Zariski (3.2).

ALGORITHME 6.1. —

ENTRÉES

$(R, \mathfrak{M})$ *est un anneau local régulier de dimension* 2, *on suppose que* R *contient un corps de représentants* $\mathbb{k} = R/\mathfrak{M}$ *algébriquement clos,* $f \in \mathfrak{M}$, $n := \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}}(f)$.

SORTIE

$(q_0, \dots, q_h)$ *une suite de Abhyankar–Moh.*

1. Si $\operatorname{char}(\mathbb{k}) = p > 0$ *: On calcule* $\tau = \operatorname{col}(f, \frac{\partial f}{x}, \frac{\partial f}{y})$. *Si* $\tau = \infty$ *: STOP.*

2. On choisit $q_0 := x \in R$ *régulier tel que* $\operatorname{in}_{\mathfrak{M}} q_0$ *ne divise pas* $\operatorname{in}_{\mathfrak{M}} f$. *On pose* $i := 0$.

3. $(q_0, \dots, q_i)$ *étant construits, on pose :* $r_0 := \operatorname{col}(f, q_0), \dots, r_i := \operatorname{col}(f, q_i)$, $e_i := \operatorname{pgcd}(r_0, \dots, r_i)$.

4. Si $e_i = 1$ *ou* ($e_i = e_{i-1}$ *et* $i \geqslant 1$) *ou* $r_i = \infty$ *: STOP,* $h := i$, *la suite* $q_0, q_1, \dots, q_h$ *est complète.*

5. Sinon, on pose $w_{i+1} := \frac{r_0}{e_i}$ *(on rappelle que* $r_0 = \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}}(f)$*).*

6. Si $i = 0$ *: on pose* $q_{1,0} = y$ *avec* $y \in R$ *tel que* (x, y) *est un système régulier de paramètres.*

Si $i \geqslant 1$ *: on pose* $q_{i+1,0} := q_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}} = q_i^{\frac{e_{i-1}}{e_i}}$.

7. On pose $j := 0$.

8. *On développe f par rapport à la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \dots, q_i, q_{i+1,j}$:*

$$f = \sum L_A q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} q_{i+1,j}^{a(i+1)}, \quad A = (a(1), \dots, a(i+1)). \tag{6.1}$$

On pose $\lambda := L_{0,\dots,0,\frac{n}{w_{i+1}}} \bmod \mathfrak{M}$, $\lambda \in \Bbbk$. Soit $\mathcal{S}$ la somme des monômes $\mathcal{M}$ avec $\operatorname{col}(\mathcal{M}, f)$ de valeur minimale de (6.1), valeur notée $\omega := \operatorname{col}(\mathcal{M}, f)$.

9. *Si $\frac{n}{w_{i+1}}$ n'est pas divisible par la caractéristique de $\Bbbk$:*

   (a) *On cherche dans $\mathcal{S}$ le monôme $\mathcal{M}_0$ avec $\operatorname{col}(\mathcal{M}_0, f) = \omega$ et dernier exposant $a_0(i+1) = \frac{n}{w_{i+1}} - 1$.*

   (b) *S'il n'y en a pas : on pose $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; aller à 3. avec $i := i+1$.*

   (c) *Sinon $\mathcal{M}_0$ existe. Si $\mathcal{M}_0 \in \mathfrak{M}^{\tau+2}$, où $\tau := \operatorname{col}(f, \frac{\partial f}{\partial q_0}, \frac{\partial f}{\partial q_1})$ est le nombre de Tjurina de f : on pose $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; aller à 3. avec $i := i+1$.*

   (d) *Sinon $\mathcal{M}_0$ existe et $\mathcal{M}_0 \notin \mathfrak{M}^{\tau+2}$. On pose $q_{i+1,j+1} := q_{i+1,j} + \lambda^{-1} \frac{w_{i+1}}{n} N$, aller à 8. avec $j := j+1$.*

10. *Sinon $\Bbbk$ est de caractéristique $p > 0$ et p divise $\frac{n}{w_{i+1}}$.*

    (a) *On pose $\frac{n}{w_{i+1}} = p^\alpha d$, $d \in \mathbb{N}$ premier à p. On cherche dans $\mathcal{S}$ le monôme $\mathcal{M}_0$ avec $a_0(i+1) = \frac{n}{w_{i+1}} - p^\alpha$.*

    (b) *S'il n'y en a pas : on pose $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; aller à 3. avec $i := i+1$.*

    (c) *Sinon $\mathcal{M}_0$ existe. On note $\delta := \operatorname{col}(M, f) = p^\alpha \operatorname{col}(q_{i+1,j}, f)$.*

    (d) *Si $\frac{\delta}{p^\alpha}$ n'est pas dans le semi-groupe engendré par $r_0, r_1, \dots, r_i$: on pose $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; aller à 3. avec $i := i+1$.*

    (e) *Sinon, on a $\frac{\delta}{p^\alpha} = a_0 r_0 + a_1 r_1 + \cdots + a_i r_i$ avec $a_0, a_1, \dots, a_i \in \mathbb{N}$ et $a_\ell w_\ell < w_{\ell+1}$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant i+1$. On pose $N := q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i}$.*

    (f) *Si $N \in \mathfrak{M}^{\tau+2}$ (où τ est le nombre de Tjurina de f) : on pose $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; aller à 3. avec $i := i+1$.*

    (g) *Sinon $N \notin \mathfrak{M}^{\tau+2}$. On cherche $\varepsilon \in \Bbbk$ tel que, dans la forme réduite de εN :*

    $$\varepsilon N = (\varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i})^{p^\alpha} = \sum \Lambda_B q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i)}, \quad \Lambda_B \in \Bbbk[[x]],$$

    on ait pour un multi-indice B : $\mathcal{M}_0 = \Lambda_B q_1^{b(1)} \cdots q_i^{b(i)} q_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}} - p^\alpha} \bmod (x)$.

(h) *S'il n'y a pas de tel* ε : *on pose* $q_{i+1} := q_{i+1,j}$; *aller à 3. avec* $i := i+1$.

(i) *Sinon* ε *existe. On pose* $q_{i+1,j+1} := q_{i+1,j} + \varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_i}$; *aller à 8. avec* $j := j+1$.

Dans le cas où $R = \mathbb{k}[[X,Y]]$, $\operatorname{char}\mathbb{k} = 0$, $f \in \mathbb{k}[Y][[X]]$, f mise sous forme de Weierstraß, l'algorithme précédent se simplifie comme suit :

1. On choisit $q_0 := x \in R$ régulier tel que $\operatorname{in}_{\mathfrak{M}} q_0$ ne divise pas $\operatorname{in}_{\mathfrak{M}} f$. On pose $i := 0$.

2. $(q_0, \ldots, q_i)$ étant construits, on pose : $r_0 := \operatorname{col}(f, q_0), \ldots, r_i := \operatorname{col}(f, q_i)$, $e_i := \operatorname{pgcd}(r_0, \ldots, r_i)$.

3. Si $e_i = 1$ ou ($e_i = e_{i-1}$ et $i \geqslant 1$) ou $r_i = \infty$: STOP, $h := i$, la suite $q_0, q_1, \ldots, q_h$ est complète.

4. Sinon, on pose $w_{i+1} := \frac{r_0}{e_i}$ (on rappelle que $r_0 = \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}}(f)$).

5. Si $i = 0$: on pose q_1 égal à la n-ième racine approchée de f ; aller à 2. avec $i := 1$.

6. Sinon $i \geqslant 1$. On pose q_{i+1} égal à la e_i-ième racine approchée de f ; aller à 2. avec $i := i+1$.

THÉORÈME 6.2 (Critère d'irréductibilité). — *On applique l'algorithme précédent. Si* $\operatorname{char}(\mathbb{k}) = p > 0$ *et si* $\tau = \infty$, *alors* f *n'est pas réduite, et* f *n'est pas analytiquement irréductible.*

Sinon, soit h *tel que* q_h *a été construit et* $e_h = 1$ *ou* $e_{h+1} = e_h$ *ou* $r_h = \infty$ *ou* $h = \sup\{\, i \mid q_i$ *existe* $\}$.

Alors, f *est irréductible si et seulement si* $e_h{=}1$ *et si le développement réduit de* f *relativement à la suite de Abhyankar–Moh* $q_0, \ldots, q_i$ *est une* straight line expansion, *pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant h$ *(nous dirons que* f ***vérifie la* straight line expansion *par rapport à*** $q_0, \ldots, q_i$*). C'est-à-dire, si l'on développe* f *relativement à la suite de Abhyankar–Moh* $q_0, q_1, \ldots, q_i$, *et si à chaque monôme* $q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} H_A(x)$ *de ce développement (cf. proposition 4.1), on affecte le poids* $a(1)r_1 + \cdots + a(i)r_i + \operatorname{ord}_x(H_A(x))$, *alors parmi les monômes de poids minimal doivent figurer le monôme* $\lambda q_i^{\frac{n}{n_i}}$ $(= \lambda q_i^{e_{i-1}})$ *où* $\lambda \in \mathbb{k}[[x]]$ *est inversible, ainsi qu'un monôme où l'exposant de* q_i *est nul.*

THÉORÈME 6.3 **(Critère d'irréductibilité de Abhyankar).** — *On applique l'algorithme précédent dans le cas particulier où $f \in \Bbbk[Y][[X]]$, $R = \Bbbk[[X,Y]]$, f mise sous forme de Weierstraß, $\Bbbk$ de caractéristique 0 ; on définit l'indice h par : q_h a été construit et $e_h = 1$ ou $e_{h+1} = e_h$ ou $r_h = \infty$.*

Alors, f est irréductible, si et seulement si $e_h = 1$ et le développement réduit de q_{i+1} relativement à la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \ldots, q_i$ est une straight line expansion, *pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant h$ et si $e_{i-1}r_i > e_{i-2}r_{i-1}$, $2 \leqslant i \leqslant h$.*

Justification du critère 6.2 dans le cas irréductible. — Notons ν la valuation associée à f et g le nombre de paires de Puiseux. Appliquons l'algorithme 6.1, alors, par le théorème 7.1 qui suit, dans 6.1.8., si N existe, alors, pour $i+1 \leqslant g$, $N \notin \mathfrak{M}^{\tau+2}$, en effet $\nu(N) \leqslant \nu(q_{i+1,j}) \leqslant \nu(q_{i+1}) < \nu(f) \leqslant \nu(\mathfrak{M}^{\tau+2})$.

Donc, si f est irréductible, l'algorithme 6.1 coïncide avec l'algorithme 5.1 et calcule une suite génératrice $q_0, q_1, \ldots, q_k$ associée à la valuation définie par f, s'arrête quand $e_k = 1$, c'est-à-dire quand la suite génératrice est complètement déterminée, et le critère 6.2 annonce que f est analytiquement irréductible. $\square$

6.1. Justification du critère 6.2 dans le cas général

Si $\tau = \infty$, il est clair que f n'est pas réduite.

Dans cette sous-section, on utilise les hypothèses et notations suivantes.

On suppose que si $p > 0$, alors $\tau \neq \infty$; donc $f \in R$ est éventuellement irréductible.

On factorise f dans $\widehat{R}$ le complété de R : $f = \gamma g_1^{\alpha_1} \cdots g_\ell^{\alpha_\ell}$, avec les g_j analytiquement irréductibles, étrangers deux à deux, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, γ inversible. (Rappel : f analytiquement irréductible $\iff$ ($\ell = 1$ et $\alpha_1 = 1$).) On désigne par ν_j la valuation associée à g_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, cf. sous-section 3.6.

LEMME 6.4. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on suppose $e_0 \neq 1$ et q_1 construit. Si f, q_0, q_1 satisfont la condition de* straight line expansion *du critère 6.2, alors, on a un des cas suivants :*

1. *$r_1 = 1$, alors f est irréductible.*
2. *r_1 est un multiple de r_0 et $e_1 \neq 1$, alors f n'est pas analytiquement irréductible et q_1 divise f dans R.*

3. $e_1 = \infty$, *alors* f *n'est pas analytiquement irréductible.*

4. On n'est dans aucun des cas précédents. Alors, d'après la sous-section 3.4, q_0, q_1 *sont les deux premiers termes d'une suite génératrice associée à* g_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$ *; si* $\ell \geqslant 2$, *les* g_j *ont la même première sous-suite* (S_1) *de la sous-section 3.4.*

Démonstration. — On se convainc que la *straight line expansion* signifie que le polygone de Newton de f associé aux paramètres q_0, q_1 n'a que deux sommets : $(0, r_0)$ et $(r_1, 0)$. Le lecteur vérifie qu'alors le polygone de Newton de g_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$ associé aux paramètres q_0, q_1 n'a que deux sommets et est homothétique à celui de f.

Supposons que r_1 n'est pas un multiple de r_0 et $e_1 \neq \infty$. Comme $\frac{r_1}{r_0}$ n'est pas entier, q_0, q_1 sont les deux premiers termes d'une suite génératrice associée à g_j et à q_2 ; de plus, la sous-suite (S_1) de la sous-section 3.4 est définie par q_0, q_1 et $\frac{r_1}{r_0} = \frac{\nu_{k_1}(q_1)}{\nu_{k_1}(q_0)}$, où ν_{k_1} est la valuation $\mathfrak{M}$-adique de R_{k_1} ; on a donc les conclusions de 4. Le cas 1. est bien connu. Les autres assertions sont claires. $\square$

LEMME 6.5. — *Soit* $f \in R$ *avec les hypothèses ci-dessus. Soit* $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *tel que l'algorithme 6.1 a au moins s pas et a construit une suite* $q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}, q_s$ *avec* $q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}$ *sous-suite commune de suites génératrices des* g_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$ *et les* g_j *ont les mêmes* $s-1$ *premières sous-suites* (S_i) *de la sous-section 3.4. Si, de plus,* $f, q_0, q_1, \ldots, q_s$ *satisfont la condition de* straight line expansion *du critère 6.2, alors, on a un des cas suivants :*

1. $e_s = 1$ *: alors* f *est analytiquement irréductible.*

2. $e_s = e_{s-1}$ *: alors* f *n'est pas analytiquement irréductible.*

3. $e_s = \infty$ *: alors* f *n'est pas analytiquement irréductible et* q_s *divise* f *dans* R.

4. On n'est dans aucun des cas précédents : alors $q_0, q_1, \ldots, q_s$ *sont les* $s+1$ *premiers termes d'une suite génératrice associée à* g_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, *si* $\ell \geqslant 2$, *les* g_j *ont les mêmes s premières sous-suites* (S_i) *de la sous-section 3.4 :* $R_{k_i} \longrightarrow R_{k_i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_{k_{i+1}-1}$, $0 \leqslant i \leqslant s-1$.

Démonstration. — Notons μ la valution $\mathfrak{M}$-adique de l'anneau $R_{k_{s-1}}$. Notons $\beta_{j,0} := \nu_j(q_0), \ldots, \beta_{j,s} := \nu_j(q_s)$ et $e_{j,i}$ le pgcd de $\beta_{j,0}, \ldots, \beta_{j,i}$, $0 \leqslant i \leqslant s$ (ν_j est la valuation définie par g_j, cf. hypothèses et notations ci-dessus).

Dans le cas où le transformé strict de q_s ne passe pas par le point fermé de $R_{k_{s-1}}$, on a : $q_s = u^a v^b \in R_{k_{s-1}}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $\mathrm{div}(uv)$ étant l'équation locale du diviseur exceptionnel. Alors :

$$\begin{aligned} \mu(q_s) &= a+b \\ \nu_j(q_s) &= (a+b)\mu(g'_j) = (a+b)\,\mathrm{col}(u, g'_j) = (a+b)\,\mathrm{col}(v, g'_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell, \end{aligned}$$

où g'_j désigne le transformé strict de g_j dans $R_{k_{s-1}-1}$. Donc $\mathrm{col}(f, q_s) = (a+b)\mu(f')$. D'autre part, par (3.4), $\mu(g'_j) = e_{j,s-1}$, donc

$$\mathrm{col}(f, q_s) = (a+b)\mu(f') = (a+b)\sum \alpha_j e_{j,s-1} = (a+b)e_s.$$

Remarquons que $\mu(q_0), \ldots, \mu(q_{s-1})$ engendrent le semi-groupe $\mu(R)$ (cf. la sous-section 3.6) : leur pgcd est 1. Par la proposition 3.5, appliquée à ν_j et μ,

$$\beta_{j,i} = e_{j,s-1}\mu(q_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant s-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell,$$
$$\mu(q_s) = b_0\mu(q_0) + \cdots + b_{s-1}\mu(q_{s-1}),$$

où $b_i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{col}(q_s, g_j) &= \nu_j(q_s) = e_{j,s-1}\mu(q_s) \\ \mathrm{col}(q_s, f) &= r_s = b_0\beta_0 + \cdots + b_{s-1}\beta_{s-1}, \end{aligned}$$

e_{s-1} divise r_s, $e_{s-1} = e_s \neq 1$; on est donc dans le cas 2. Comme $e_s = e_{s-1} > 1$, on a une contradiction avec la sous-section 3.5, et f n'est pas irréductible.

Désormais, supposons qu'on n'est pas dans le cas 2. Le transformé strict d'une branche q de q_s passe par $R_{k_{s-1}}$. Comme $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(q_s)$ est inférieur ou égal à celui d'une s-ième curvette de μ, où $\mathfrak{M}$ est le maximal de R, par [Spi90], 7.3 et 7.5, $q = q_s$ est une s-ième curvette de μ. Alors désignons par f', q'_s, g'_j, les transformés stricts de f, q_s, g_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, dans $R_{k_{s-1}}$. Quitte à éventuellement permuter u et v, on peut supposer que u, q'_s est un système régulier de paramètres de $R_{k_{s-1}-1}$. □

Nous allons prouver :

LEMME 6.6. — *On a les hypothèses du lemme 6.4 pour $f', u, q'_s, R_{k_{s-1}}$ et $e_s = \mathrm{col}(f', q'_s)$.*

Admettons le lemme 6.6. Dans le cas 6.5.1, f est irréductible ; dans le cas 6.5.3, q'_s divise f' qui est réductible ; dans le cas 6.5.4, l'algorithme entamera le calcul de q_{s+1}, la décroissance des e_s et le lemme 6.6 mettent fin à la justification du critère.

Preuve du lemme 6.6. — Par (3.4), on a $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_{k_{s-1}}}(g'_j) = e_{j,s-1}$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$. Des calculs de la preuve du lemme 6.5, cela donne $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}_{k_{s-1}}}(f') = e_{s-1}$. On définit a, b par : $q_s = u^a v^b q'_s$. Par la proposition 3.5 (2) appliquée à μ et aux valuations u-adique et v-adique, on a : $g_j = u^{ae_{j,s-1}} v^{be_{j,s-1}} g'_j$, d'où $f = u^{ae_{s-1}} v^{be_{s-1}} f'$.

Montrons que $u^{ae_{s-1}} v^{be_{s-1}}$ divise dans $R_{k_{s-1}}$ tous les monômes du développement de f relativement à la suite génératrice $q_0, \dots, q_s$. Soit $M_A := q_0^{a(0)} q_1^{a(1)} \cdots q_s^{a(S)}$ un tel monôme. Si $a(\mathrm{S}) \geqslant e_{s-1}$, $q_s^{e_{s-1}} = u^{ae_{s-1}}$ $v^{be_{s-1}} q'_s$ divise M_A. Si $a(\mathrm{S}) < e_{s-1}$, la *straight line expansion* implique : $\mathrm{col}(q_0^{a(0)} q_1^{a(1)} \cdots q_{s-1}^{a(s-1)}, f) > \mathrm{col}(q_s^{e_{s-1}-a(S)}, f)$. Par la proposition 3.5, $\nu_j(q_0^{a(0)} q_1^{a(1)} \cdots q_{s-1}^{a(s-1)}) > \nu_j(q_s^{e_{s-1}-a(S)})$. Par le lemme 4.8, $(u^a v^b)^{e_{s-1}-a(S)}$ divise $q_0^{a(0)} q_1^{a(1)} \cdots q_{s-1}^{a(s-1)}$ dans $R_{k_{s-1}}$.

Posons $M_A = u^{ae_{s-1}} v^{be_{s-1}} M_{s,A} q_s'^{a(S)}$. On a donc : $f' = u^{ae_{s-1}} v^{be_{s-1}}$ $\sum_A M_{s,A} q_s'^{a(S)}$. La *straight line expansion* nous donne que $\mathrm{col}(M_{s,A}, f') \geqslant \mathrm{col}(q'{s}^{e_{s-1}}, f')$ avec égalité à $\mathrm{col}(M_{s,a(1),\dots,a(s-1),0}, f')$ pour un certain $A = (a(1), \dots, a(s-1), 0)$. Le lecteur voit que cela implique la *straight line expansion* pour f', u, q'_s, e_s. L'égalité $e_s \doteq \mathrm{col}(f', q'_s)$ est une conséquence de (3.3) appliqué à (f', q'_s) et μ. □

THÉORÈME 6.7. — *Avec les hypothèses de cette sous-section, la suite $q_0, q_1, \dots, q_{h-1}$ de l'algorithme 6.1 est une troncature de suites de Monique de $g_1, \dots, g_\ell$ et :*

- *soit q_h n'est pas une curvette commune à tous les $g_1, \dots, g_\ell$, et alors $q_0, q_1, \dots, q_{h-1}$ est la plus grande troncature possible ;*
- *soit $q_0, q_1, \dots, q_h$ est une troncature de suites de Monique de $g_1, \dots, g_\ell$ et c'est la plus grande possible.*

Démonstration. — Le lemme 6.6 prouve que la suite $q_0, q_1, \dots, q_{h-1}$ du critère 6.2 est une troncature de suites de Monique de $g_1, \dots, g_\ell$.

Supposons avoir construit par l'algorithme 6.1 une suite $q_0, q_1, \dots, q_{s-1}$ qui est une troncature de suites de Monique de $g_1, \dots, g_\ell$ et supposons qu'on puisse compléter cette troncature par une curvette q commune à tous les $g_1, \dots, g_\ell$, alors $s \leqslant h$ et $q_0, q_1, \dots, q_{s-1}, q_s$ est une troncature.

Reprenons les notations de 6.1.3. On a $r_i := \mathrm{col}(f, q_i) = \sum 1 \leqslant j \leqslant \ell\alpha_i$ $\mathrm{col}(g_j, q_i)$, $0 \leqslant i \leqslant s-1$. Dans 6.1.3., il n'y a pas de STOP, on calcule q_s. Notons μ la valuation définie par q.

Cas général. On calcule q_s de proche en proche, on commence par $q_{s,0}$, ensuite dans 6.1.3, on construit une suite $q_{s,k}$ telle que $q_{s,k} = q_{s,k-1} + M_{k-1}$, $M_{k-1} = \varepsilon q_0^{a_0} q_1^{a_1} \cdots q_i^{a_{s-1}}$ est le monôme réduit vérifiant $\mathrm{col}(q_{s,k}, f) > \mathrm{col}(q_{s,k-1}, f)$.

Par la proposition 3.5 appliquée à μ et aux ν_j, on a $\mathrm{col}(q_{s,k-1}, f) = \frac{\mathrm{col}(q_0,f)}{\nu_j(q_0)}\nu_j(q_{s,k-1})$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, tant que $\nu_j(q_{s,k-1}) < \nu_j(q)$, donc $\mathrm{in}_{\nu_j}(q_{s,k-1}) + \mathrm{in}_{\nu_j}(M_{k-1}) = 0$, $\nu_j(q_{s,k-1}) < \nu_j(q_{s,k})$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, et, par le théorème 7.1, $M_{k-1} \notin \mathfrak{M}^{\tau+2}$, 6.1.3. ne donne pas d'ordre de sortie. Si $\nu_j(q_{s,k-1}) \geqslant \nu_j(q)$, comme $\mathrm{col}(q_{s,k-1}, f) = \mathrm{col}(M_{k-1}, f)$, on a $\nu_j(M_{k-1}) \geqslant \nu_j(q)$, $\nu_j(q_{s,k}) \geqslant \nu_j(q)$ (sinon on aurait $\mathrm{col}(M_{k-1}, f) = \frac{\mathrm{col}(q_0,f)}{\nu_j(q_0)}\nu_j(M_{k-1}) < \mathrm{col}(q, f)$ par la proposition 3.5). L'algorithme 6.1 peut donc faire des calculs inutiles en 6.1.8, mais comme les $\mathrm{col}(M_{k-1}, f)$ sont strictement croissantes, au bout d'un temps fini, si f est réduit, le nombre de Tjurina de f est fini, et 6.1.8. donnera l'ordre de sortie.

Dans le cas de la caractéristique 0 et f sous forme de Weierstraß relativement à q_0, q_1, on prend pour q_s la racine approchée d'ordre e_{s-1}. En reprenant la preuve du corollaire 4.18 et en utilisant la proposition 3.5 appliquée à μ et aux ν_j, on montre que q_s est une curvette commune aux g_j,, $1 \leqslant j \leqslant \ell$. Puis on reprend la démonstration dans le cas général. $\square$

6.2. Justification du critère de Abhyankar 6.3

Il suffit de montrer que si le critère de Abhyankar annonce « f irréductible », le critère 6.2 aussi. Dans cette section, $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$.

Si $e_h = 1$ et le développement réduit de q_{i+1} relativement à la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \dots, q_i$ est une *straight line expansion* pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant h$, et si $e_{i-1}r_i > e_{i-2}r_{i-1}$, $2 \leqslant i \leqslant h$, alors $f = q_{h+1}$ et f est une *straight line expansion* relativement à $q_0, \dots, q_h$. Il suffit de montrer par récurrence décroissante sur i que f est une *straight line expansion* relativement à $q_0, \dots, q_i$, $1 \leqslant i \leqslant h$. On considère la pseudo-valuation $\widehat{\nu}_i$ définie par la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \dots, q_i$ et les poids $\nu_{i,j} = \mathrm{col}(f, q_j)$, $0 \leqslant j \leqslant i$. Le lecteur se convainc que l'hypothèse que le développement réduit de q_{i+1} relativement à la suite de Abhyankar–Moh $q_0, \dots, q_i$ est une *straight line expansion*, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant h$ et si $e_{i-1}r_i > e_{i-2}r_{i-1}$, $2 \leqslant i \leqslant h$, implique qu'on a les hypothèses 4.5.1 et 4.5.2 de la proposition 4.5 (avec même des inégalités strictes dans 4.5.1). On met q_{i+1} sous forme réduite relativement à la suite $q_0, q_1, \dots, q_i$:

$$q_{i+1} = q_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}} + \sum q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} Q_{a(1),\dots,a(i-1),a(i)}(x), \tag{6.2}$$

avec $Q_{a(1),\dots,a(i-1),a(i)}(x) \in \Bbbk[[x]]$.

Alors $q_i^{\frac{w_{i+1}}{w_i}}$ et un monôme $q_1^{a(1)} \cdots q_{i-1}^{a(i-1)} Q_{a(1),\ldots,a(i-1),0}(x)$ sont parmi les termes de valeur minimale pour $\widehat{\nu}_i$. Soit $f = \sum L_A q_1^{a(1)} \cdots q_i^{a(i)} q_{i+1}^{a(i+1)}$, $A = (a(1), \ldots, a(i+1))$, $L_A \in \Bbbk[[x]]$, le développement réduit de f relativement à $q_0, \ldots, q_{i+1}$. Quand on reporte (6.2) dans $q_1^{a(1)} \cdots q_{i+1}^{a(i+1)}$ $L_{a(1),\ldots,a(i+1)}(x)$, par la *straight line expansion*, on crée une somme de termes de valeurs supérieures ou égales à $a(i+1)\frac{w_{i+1}}{w_i}\widehat{\nu}_i(q_i) + (\frac{n}{w_{i+1}} - a(i+1))\widehat{\nu}_i(q_{i+i})$; si $\frac{n}{w_{i+1}} - a(i+1) > 0$, cette valeur est $> a(i+1)\frac{w_{i+1}}{w_i}\widehat{\nu}_i(q_i) + \frac{w_{i+1}}{w_i}(\frac{n}{w_{i+1}} - a(i+1))\widehat{\nu}_i(q_i) = \frac{n}{w_i}\widehat{\nu}_i(q_i)$. Quand on met tous ces termes sous forme réduite, par la proposition 4.5, on crée des monômes de valeurs $> \frac{n}{w_i}\widehat{\nu}_i(q_i)$. Donc, dans la forme réduite de f relativement à la suite $q_0, q_1, \ldots, q_i$, les monômes de valeur minimale proviennent tous de la forme réduite de $q_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}}}$; dans cette forme réduite, comme $\deg_y(q_{i+1}^{\frac{n}{w_{i+1}}}) = \deg_y(q_i^{\frac{n}{w_i}})$, il apparaît $q_i^{\frac{n}{w_i}}$, et des monômes réduits provenant du développement de $(q_1^{a(1)} \cdots q_{i-1}^{a(i-1)}$ $Q_{a(1),\ldots,a(i-1),0}(x))^{\frac{n}{w_{i+1}}}$; le lemme 4.7 permet de conclure.

7. Troncation

Nous allons maintenant prouver un théorème de troncation qui est à rapprocher du résultat de Samuel [Sam56]. Notre résultat donne une condition suffisante pour que deux courbes aient le même arbre de désingularisation, tandis que Samuel donne une condition pour que deux singularités isolées soient analytiquement isomorphes. Les deux notions sont proches mais ne sont pas équivalentes. Notons de plus que le résultat de Samuel est valable en toute dimension.

THÉORÈME 7.1 **(Troncation)**. — *Soit $(R, \mathfrak{M})$ un anneau local régulier de dimension 2 contenant un corps parfait $\Bbbk$ tel que le faisceau des $\Bbbk$-différentielles soit de type fini. Soient $f \in R$ réduite, et $g \in R$ tels que $f - g \in \mathfrak{M}^{\tau+2}$, où τ est le nombre de Tjurina de f, alors f et g ont exactement le même arbre de désingularisation. C'est-à-dire que, si l'on effectue une suite d'éclatements centrés en des points fermés,*

$$X(0) = \operatorname{Spec}(R) \longleftarrow X(1) \longleftarrow \ldots \longleftarrow X(n), \quad 0 < n,$$

en désignant par $E(n)$ le diviseur exceptionnel de $X(0) \longleftarrow X(n)$ et par f_n et g_n les transformés stricts de f et g dans $X(n)$, alors : les points singuliers de g_n et de f_n dans $X(n)$ $(0 \leqslant n)$, et les points réguliers où g_n et f_n ne sont pas à croisements normaux avec $E(n)$ $(0 \leqslant n)$, sont les mêmes.

7.1. Bases de différentielles

Rappelons quelques notions qui ont été introduites dans un cadre beaucoup plus général ([Cos87] I Préliminaires et [Gir83]).

Soit X un $\Bbbk$-schéma régulier nœthérien, $\Bbbk$ corps parfait, tel que le faisceau des $\Bbbk$-différentielles soit de type fini. Tout point $O \in X$ admet alors un voisinage ouvert affine U d'anneau $R = \mathcal{O}_X(U)$ tel qu'il existe une suite $(x_1, \ldots, x_s)$ d'éléments de R tels que

$$dx_1, \ldots, dx_s \text{ est une base de} \Omega_{R/\Bbbk}. \tag{7.1}$$

Si O est un point géométrique de X, on peut compléter un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,O}$ pour obtenir une suite vérifiant (7.1).

7.2. Idéaux jacobiens

Dans ces conditions, si l'on note $\mathcal{D}(X)$ le faisceau des dérivations sur $\Bbbk$, on a : $\mathcal{D}(X)(U) = \bigoplus R\partial_i$ où ∂_i est défini par :

$$df = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \partial_i(f) dx_i, \quad f \in R, \quad \partial_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

Un diviseur à croisements normaux de X (on écrira **d.c.n.**) est un sous-schéma fermé E dont les composantes réduites sont régulières et, localement, $E = V(x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i})$, $a_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, où $(x_1, \ldots, x_s)$ est une suite vérifiant (7.1) dans un voisinage de O. Soit Y un fermé régulier de X à croisements normaux avec E et d'idéal P, on note :

$$\mathcal{D}(X, E, Y)$$

le faisceau des dérivations D de $\mathcal{O}_X$ telles que $D(I(E)) \subseteq I(E)$ et $D(P) \subseteq P$.

Si $f \in \mathcal{O}_X(X)$ et $f \notin \mathcal{O}_X(X)^p$, on a un faisceau non nul d'idéaux défini par :

$$\mathcal{J}(X, f, E, Y) = \mathcal{D}(X, E, Y)(f).$$

On peut avoir $Y = \varnothing$, on pose alors :

$$\mathcal{J}(X, f, E, \varnothing) = \mathcal{J}(X, f, E),$$
$$\mathcal{D}(X, E, \varnothing) = \mathcal{D}(X, E).$$

On vérifie que :

$$\mathcal{J}(X, f, E, Y) \subseteq \mathcal{J}(X, f, E).$$

7.3. Hypothèses

Désormais, X est un $\Bbbk$-schéma régulier nœthérien irréductible de dimension 2, $\Bbbk$ corps parfait, tel que le faisceau des $\Bbbk$-différentielles de X soit de type fini. E est un diviseur à croisements normaux réduit de X, $f \in \mathcal{O}_X(X)$; si $\Bbbk$ est de caractéristique $p > 0$, alors $f \notin \mathcal{O}_X(X)^p$, O est un point fermé de X.

Dans la suite, le fermé Y de la sous-section 7.2 sera toujours $\{O\}$ et donc P l'idéal maximal correspondant. Pour prouver le théorème, X sera un des $X(n)$ et $f \in R$ sera confondu avec son composé $f \circ e$ où e est $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$. Comme f est réduite dans R, si $\mathrm{char}(\Bbbk) = p > 0$, alors $f \circ e \notin \mathcal{O}_X(X)^p$.

7.4. Les idéaux $\mathcal{J}$

Explicitons les idéaux $\mathcal{J}(X, f, E, \{O\}) \subseteq \mathcal{J}(X, f, E)$. Il y a trois cas à considérer.

1. Si $E = \varnothing$, alors $\mathcal{J}(X, f, E) = (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_s f)$; si de plus $(x_1, x_2) = (x, y)$ est un système régulier de paramètres de O, alors
$$\mathcal{J}(X, f, E, \{O\}) = \left((x, y)(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}), \partial_3 f, \ldots, \partial_s f\right).$$

2. Si $E = \mathrm{div}(x)$ et $x = x_1$ dans (7.1), alors $\mathcal{J}(X, f, E) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x}, \partial_2 f, \ldots, \partial_s f\right)$; si de plus $(x_1, x_2) = (x, y)$ est un système régulier de paramètres de O, alors
$$\mathcal{J}(X, f, E, \{O\}) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x}, (x, y)\frac{\partial f}{\partial y}, \partial_3 f, \ldots, \partial_s f\right).$$

3. Si $E = \mathrm{div}(xy)$ et $(x_1, x_2) = (x, y)$ dans (7.1), alors
$$\mathcal{J}(X, f, E) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}, \partial_3 f, \ldots, \partial_s f\right) = \mathcal{J}(X, f, E, \{O\}).$$

7.5. E-pgcd

Avec les hypothèses précédentes, soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux sur X, alors il existe un et un seul couple d'idéaux $(\mathcal{H}, J)$ tel que : $\mathcal{J} = \mathcal{H}J$, $\mathcal{H}$ est l'idéal d'un diviseur à croisements normaux à support contenu dans celui de E et, pour tout point maximal η de E, on a $\mathcal{H}\mathcal{O}_{X,\eta} = \mathcal{J}\mathcal{O}_{X,\eta}$. On dit que $\mathcal{H}$ est le E-pgcd de $\mathcal{J}$.

À l'aide de la sous-section 7.3, on montre facilement que $\mathcal{J}(X,f,E,Y)$ et $\mathcal{J}(X,f,E)$ ont le même E-pgcd. On note

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(X,f,E,\{O\}) &:= \mathcal{J}(X,f,E,\{O\})+(f),\\ \mathcal{T}(X,f,E) &:= \mathcal{J}(X,f,E)+(f)\end{aligned}$$

où la lettre $\mathcal{T}$ est utilisée en hommage à G. N. Tjurina. Alors, $\mathcal{T}(X,f,E,\{O\})$ et $\mathcal{T}(X,f,E)$ ont le même E-pgcd, que l'on note $\mathcal{H}$; on pose

$$\begin{aligned}T(X,f,E,\{O\}) &= \mathcal{H}^{-1}\mathcal{T}(X,f,E,\{O\})\\ T(X,f,E) &= \mathcal{H}^{-1}\mathcal{T}(X,f,E)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha(O) &= \mathrm{ord}_O(T(X,f,E,\{O\}))\\ \beta(O) &= \mathrm{ord}_O(T(X,f,E)).\end{aligned} \tag{7.2}$$

On vérifie facilement que :

$$\beta(O)\leqslant\alpha(O)=\mathrm{ord}_O(\mathcal{H}^{-1}f)\leqslant 1+\beta(O).$$

$$\alpha(O)=1=1+\beta(O) \iff \mathcal{H}^{-1}f \text{ est régulière en } O, \tag{7.3}$$
$$\text{à croisements normaux avec } E.$$

Lemme 7.2. — *Soient $X\leftarrow X'$ l'éclatement centré en O et E' l'image inverse réduite de E ; en confondant systématiquement les éléments de $\mathcal{O}_{X,O}$ et leurs composés avec $X\leftarrow X'$, on a :*

$$T(X',f,E')=(x,y)^{-\alpha(O)}T(X,f,E,\{O\}). \tag{7.4}$$

Démonstration. — Dans le cadre le plus général possible, voir [Cos87], proposition E.1. Donnons des indications. En fait, il suffit de montrer que :

$$\mathcal{T}(X',f,E')=\mathcal{T}(X,f,E,\{O\}). \tag{7.5}$$

On suppose que dans (7.1) $(x_1,x_2)=(x,y)$ est un système régulier de paramètres. Il y a quatre cas à considérer :

1. $E=\varnothing$;
2. $E=\mathrm{div}(x)$ et l'on est dans la carte de X' où le diviseur exceptionnel de $X\leftarrow X'$ est $\mathrm{div}(x)$;

3. $E = \mathrm{div}(x)$ et l'on est dans la carte de X' où le diviseur exceptionnel de $X \leftarrow X'$ est $\mathrm{div}(y)$;

4. $E = \mathrm{div}(xy)$.

Si l'on est dans la carte de X' où le diviseur exceptionnel de $X \leftarrow X'$ est $\mathrm{div}(y)$, alors en tout point de cette carte, on peut prendre comme coordonnées différentielles $x' := \frac{x}{y}, y' := y, x_3, \ldots, x_s$.

De la relation $dx = y\,dx' + x'dy$, on déduit que $\frac{\partial}{\partial x'} = y\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} + x'\frac{\partial}{\partial x}$.

On a dans la carte considérée l'égalité des $O_{X'}$-modules

$$(x,y)(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = (\frac{\partial}{\partial x'}, y'\frac{\partial}{\partial y'}),$$

cela donne (7.5) dans le cas 1.

De même, on a l'égalité des $O_{X'}$-modules

$$(x\frac{\partial}{\partial x}, (x,y)\frac{\partial}{\partial y}) = (x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}) = (x'\frac{\partial}{\partial x'}, y'\frac{\partial}{\partial y'}),$$

cela donne (7.5) dans les cas 3 et 4.

Le lecteur fera le cas 2. □

Rappelons maintenant un résultat essentiel de J. Giraud ([Gir83], p. 116), dont nous recopions la démonstration ultra-courte.

LEMME 7.3 **(Giraud).** — *Soit X un schéma régulier de dimension 2, soit ξ un point fermé de X et soit $e : X' \longrightarrow X$ l'éclatement de X de centre ξ, on note E le diviseur exceptionnel réduit de e. Soit encore I un idéal de $\mathcal{O}_X$ supporté en ξ et soient $\mathcal{I}' = I\mathcal{O}_X$ et $I' = \mathcal{H}'^{-1}\mathcal{I}'$ où $\mathcal{H}'$ est le E-pgcd de $\mathcal{I}'$. Alors, on a :*

$$\sum_{e(\xi')=\xi} (\Bbbk(\xi') : \Bbbk(\xi))c(I', \xi') \leqslant c(I, \xi) - \frac{m(m+1)}{2} \tag{7.6}$$

où $c(I, \xi)$ est la colongueur de l'idéal I au point ξ, $\Bbbk(\xi)$ est le corps résiduel du point ξ, $m = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}(\xi)}(I)$.

Démonstration. — On a les inclusions :

$$\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{O}_{X'}$$

$$I \subseteq e_*(\mathcal{I}') \subseteq e_*(\mathcal{H}') \subseteq e_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_X.$$

Par suite, on a $c(I,\xi) = \mathrm{length}(\mathcal{O}_X/I) \geqslant \mathrm{length}(\mathcal{O}_X/e_*(\mathcal{I}'))$ et l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{e_*(\mathcal{H}')}{e_*(\mathcal{I}')} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_X}{e_*(\mathcal{I}')} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_X}{e_*(\mathcal{H}')} \longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathcal{I}'$ est engendré par ses sections, on a $R^1e_*(\mathcal{I}') = 0$ et le terme de gauche est donc $e_*(\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{I}'})$ dont la longueur est le terme de gauche de (7.6). Par ailleurs, puisque I est de colongueur finie, $\mathcal{H}' = \mathfrak{M}(\xi)^m\mathcal{O}_{X'}$. Donc, $e_*(\mathcal{H}') = \mathfrak{M}(\xi)^m$ dont la colongueur est $\frac{m(m+1)}{2}$, ce qui prouve (7.6). □

LEMME 7.4. — *Avec les hypothèses de la sous-section 7.3, on suppose qu'au moins une composante de E passe par O, alors on a l'inégalité :*

$$\mathrm{col}(T(X,f,E,\{O\})\mathcal{O}_{X,O}) \leqslant \mathrm{col}(T(X,f,E)\mathcal{O}_{X,O}) + 1.$$

Démonstration. — Si $T(X,f,E,\{O\}) = T(X,f,E)$, le résultat est trivial. Supposons donc que $T(X,f,E,\{O\}) \neq T(X,f,E)$, ce qui, par la sous-section 7.4, implique $E = \mathrm{div}(x)$.

Pour calculer la colongueur d'un idéal, on construit une base de Gröbner de l'idéal en prenant pour ordre des variables l'ordre suivant sur les exposants des monômes x^ay^b : $(a,b) \leqslant (c,d) \iff a+b < c+d$ ou $a+b = c+d$ et $(a,b) \leqslant_{\mathrm{lex}} (c,d)$ (base standard normalisée au sens de Hironaka, [Hir70]). La colongueur est l'aire de l'escalier délimité par les monômes minimaux des éléments de la base construite. Soit $(\phi_1,\dots,\phi_m)$ une base de Gröbner de $T(X,f,E)$, alors, on a $\phi_i = A_ix\frac{\partial f}{\partial x} + B_i\frac{\partial f}{\partial y} + C_if$, $1 \leqslant i \leqslant m$, où A_i, B_i, C_i sont des éléments de $\Bbbk[[x,y]]$. Si $B_i \in \mathfrak{M}$ alors $\phi_i \in T(X,f,E,\{O\})$. Donc pour un certain i, $B_i \notin \mathfrak{M}$; soit i_0 le plus petit de ces indices ; s'il existe un autre indice j avec B_j inversible, le monôme initial de ϕ_j est strictement plus grand que celui de ϕ_{i_0}, et alors on peut remplacer dans la base de Gröbner ϕ_{i_0} par $\phi_{i_0} - \frac{B_{i_0}}{B_j}\phi_j$. Bref, on peut supposer que dans la base de Gröbner de $T(X,f,E)$, tous les éléments sauf un noté ϕ_{i_0} sont dans $T(X,f,E,\{O\})$. Alors, $\phi_1,\phi_2,\dots,x\phi_{i_0},y\phi_{i_0},\dots,\phi_m$ sont dans $T(X,f,E,\{O\})$, et comme $\mathrm{col}(\phi_1,\phi_2,\dots,x\phi_{i_0},y\phi_{i_0},\dots,\phi_m) \leqslant \mathrm{col}(\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_m) + 1$, on a l'inégalité annoncée. □

LEMME 7.5. — *Avec les hypothèses de la sous-section 7.3, on a :*

1. *Si au moins une composante de E passe par O, et si f est soit singulière en O soit régulière et non à croisements normaux avec E, alors* $\mathrm{col}(T(X,f,E)\mathcal{O}_{X,O}) \geqslant \alpha(O)$.

2. *Si E est vide et f singulière, alors* $1+\mathrm{col}(T(X,f,E)\mathcal{O}_{X,O}) \geqslant \alpha(O)$.

Démonstration. — Si $T(X,f,E) = T(X,f,E,\{O\})$, le résultat est trivial. Dans le cas contraire, $E = \mathrm{div}(x)$, ou $E = \varnothing$. On voit facilement que, pour tout idéal $\mathfrak{M}$-primaire I de $\mathcal{O}_{X,O}$, on a :

$$\mathrm{col}(I) \geqslant \frac{\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(I)(1+\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(I))}{2}.$$

Si $E = \mathrm{div}(x)$, alors, en prenant $I = (T(X,f,E,\{O\}))$, le lemme 7.4 donne le résultat si $\alpha(O) \geqslant 1$; si $\alpha(O) = 1$, nous sommes dans le premier cas avec f tangente à $E = \mathrm{div}(x)$, c'est-à-dire, $f = \gamma x^A(x+\beta y^B)$ avec γ et β inversibles et $B > 1$; un calcul rapide donne $\mathrm{col}(T(X,f,E)\mathcal{O}_{X,O}) \geqslant B-1 \geqslant 1 = \alpha(O)$.

Reste le cas où E est vide, f est singulière, on a $\alpha(O) \geqslant 2$, et $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(T(X,f,E)) \geqslant \alpha(O)-1$. Alors $1+\mathrm{col}(T(X,f,E)\mathcal{O}_{X,O}) \geqslant 1+\frac{(\alpha(O)-1)\alpha(O)}{2} \geqslant \alpha(O)$, ce qui termine la preuve. □

PROPOSITION 7.6. — *Avec les hypothèses de la sous-section 7.3, on pose $f = x^Ay^Bf_1$, $A,B \in \mathbb{N}$, où x^Ay^B est un générateur local de $\mathcal{H}$. Soit $g_1 \in \mathcal{O}_{X,O}$. On suppose :*

(H1) *f_1 est réduite.*

(H2) *$h := f_1 - g_1 \in \mathfrak{M}^\rho$ où $\mathfrak{M}$ est le maximal de $\mathcal{O}_{X,O}$ et $\rho = \tau+1$ si E est non vide, $\rho = \tau+2$ si E est vide, et $\tau = \mathrm{col}(T(X,f,E)\mathcal{O}_{X,O})$.*

(H3) *h est divisible dans $\mathcal{O}_{X,O}$ par une équation de E.*

Effectuons l'éclatement $e : X' \longrightarrow X$ centré en O, on note E' l'image inverse réduite de E. Alors :

1. *Les points par lesquels passe le transformé strict g' de g_1 sont les mêmes que ceux par lesquels passe le transformé strict f' de f_1.*

2. *De plus, en chacun de ces points, si f' n'est pas régulière à croisements normaux avec E', il en est de même pour g' et on a les hypothèses (H1),(H2),(H3) pour $e \circ f$, f', g', X' et E'.*

Cette proposition prouve le théorème par récurrence sur n le nombre d'éclatements.

Le reste de l'article est consacré à la preuve de la proposition 7.6.

7.6. Preuve de la proposition 7.6

Par le lemme 7.5, f_1 et g_1 ont même forme initiale pour la valuation $\mathfrak{M}$-adique : cela donne 7.6.1.

Si f_1 (et donc g_1) est régulière à croisements normaux avec E, il n'y a plus rien à démontrer.

Désormais on suppose que f_1 n'est pas régulière à croisements normaux avec E. On confond f et $f \circ e$. Par (7.2) et (7.3), $\alpha(O) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(f_1) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(T(X, f, E, \{O\})) \geqslant 1$.

Effectuons l'éclatement e, plaçons-nous en un point O' au-dessus de O par lequel passent f' et g', supposons par exemple que $\mathrm{div}(x)$ soit en O' la composante du diviseur exceptionnel de e. Par (7.4), on a

$$f' = x^{-\alpha(O)} f_1, g' = x^{-\alpha(O)} g_1, T(X', f, E') = x^{-\alpha(O)} T(X, f, E, \{O\}).$$

Donc, par le lemme de Giraud on a :

$$\mathrm{col}(T(X', f', E')\mathcal{O}_{X',O'}) \leqslant \mathrm{col}(T(X, f, E, \{O\})\mathcal{O}_{X,O}) - \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2}.$$

De plus, $f' - g' = x^{-\alpha(O)}(f_1 - g_1)$, donc $\mathrm{ord}_{O'}(f' - g') \geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h) - \alpha(O)$.

7.7. Premier cas : $E = \varnothing$

En ce cas, puisque f est singulière, on a $\alpha(O) \geqslant 2$. Montrons que

$$\mathrm{col}(T(X, f, E, \{O\})\mathcal{O}_{X,O}) \leqslant \mathrm{col}(T(X, f, E)\mathcal{O}_{X,O}) + \alpha(O). \tag{7.7}$$

Si $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(T(X, f, E)) = \alpha(O) - 1$, soit $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ une base standard normalisée de $T(X, f, E)$, on a $m \leqslant \alpha(O) - 1$ et les $x\Phi_1, y\Phi_1, \ldots, x\Phi_m, y\Phi_m$ sont dans $T(X, f, E, \{O\})$. L'escalier de $T(X, f, E, \{O\})$ est au pire celui de $T(X, f, E)$ translaté de 1 horizontalement avec une marche de plus ; l'aire délimitée augmente au plus de la hauteur de l'escalier initial qui est $\alpha(O)$, on a donc (7.7).

Si $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(T(X,f,E)) = \alpha(O)$, alors $\alpha(O)$ est un multiple de la caractéristique de $\Bbbk$; en choisissant convenablement x, y l'on a une base standard normalisée $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ de $T(X,f,E)$ avec $\Phi_1 = f_1$, f_1 de monôme initial $y^{\alpha(O)}$, donc $m \leqslant \alpha(O)+1$; les éléments $f_1 = \Phi_1, x\Phi_2, y\Phi_2, \ldots, x\Phi_m, y\Phi_m$ sont dans $T(X,f,E,\{O\})$ et donc on a (7.7).

Avec des notations évidentes, on a :

$$\begin{aligned}\tau' &= \mathrm{col}(T(X',f',E')\mathcal{O}_{X',O'}) \\ &\leqslant \mathrm{col}(T(X,f,E,\{O\})\mathcal{O}_{X,O}) - \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2} \\ &\leqslant \tau + \alpha(O) - \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}'}(f'-g') - \tau' &\geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h) - \alpha(O) - \tau + \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2} - \alpha(O) \\ &\geqslant 2 + \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2} - 2\alpha(O) \\ &= \frac{\alpha(O)(\alpha(O)-3)}{2} + 2 \\ &\geqslant 1.\end{aligned}$$

On en déduit (H1) et (H2) pour f', g', E', X', O'. Comme $f' - g' = x^{-\alpha(O)}h$ et $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h) \geqslant \tau + 2 \geqslant 1 + \alpha(O)$, on a (H3).

7.8. Deuxième cas : $E = \mathrm{div}(xy)$

Par la sous-section 7.4, $T(X,f,E,\{O\}) = T(X,f,E)$, donc par le lemme de Giraud :

$$\begin{aligned}\tau' &= \mathrm{col}(T(X',f',E')\mathcal{O}_{X',O'}) \\ &\leqslant \mathrm{col}(T(X,f,E,\{O\})\mathcal{O}_{X,O}) - \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2} \\ &= \tau - \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2}.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}'}(f'-g')-\tau' &\geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h)-\alpha(O)-\tau+\frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2}\\ &\geqslant 1+\frac{\alpha(O)(\alpha(O)-1)}{2}\\ &\geqslant 1.\end{aligned}$$

On a donc (H1) et (H2) pour f', g', E', X', O'. De plus, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h) \geqslant \tau + 1 \geqslant 1+\alpha(O)$, donc la composante de E' créée par e divise $f'-g'$, et si E' a localement une autre composante, c'est la transformée stricte d'une composante de E_{red} ; comme elle divisait $f_1 - g_1$ dans R, elle divise $f'-g'$ dans $O_{X',O'}$, et l'on a (H3).

7.9. Troisième cas : une seule composante de E passe par O

Par le lemme 7.4 et le lemme de Giraud on a :

$$\begin{aligned}\tau' &= \mathrm{col}(T(X',f',E')\mathcal{O}_{X',O'})\\ &\leqslant \mathrm{col}(T(X,f,E,\{O\})\mathcal{O}_{X,O})-\frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2}\\ &\leqslant \mathrm{col}(T(X,f,E)\mathcal{O}_{X,O})+1-\frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2}\\ &= \tau+1-\frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2}.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}'}(f'-g')-\tau' &\geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h)-\alpha(O)-\tau+\frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2}-1\\ &\geqslant \frac{\alpha(O)(\alpha(O)-1)}{2}.\end{aligned}$$

Si $\alpha(O) \geqslant 2$, on a (H1) et (H2) pour f', g', E', X', O', et le même argument que dans la sous-section 7.8 donne (H3).

Si $\alpha(O) = 1$, alors, sachant que O' est sur le transformé strict de f_1 et que $\mathrm{div}(x)$ est le diviseur de l'éclatement centré en O, on a $f = y^B(\gamma y + \beta x^C)$ où β et γ sont des inversibles, $B, C \in \mathbb{N}$. Alors, O' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(y)$, E' a localement deux composantes. Par (H2), y divise h ;

de plus, O' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(y)$ donc, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}'}(f' - g') \geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h) - \alpha(O) + 1$, les inégalités précédentes peuvent être améliorées en :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}'}(f' - g') - \tau' &\geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h) - \alpha(O) + 1 - \tau + \frac{\alpha(O)(\alpha(O)+1)}{2} - 1 \\ &\geqslant \frac{\alpha(O)(\alpha(O)-1)}{2} + 1 \\ &\geqslant 1.\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}}(h) \geqslant \tau + 1 \geqslant 1 + \alpha(O)$, la composante de E' créée par e divise $f' - g'$; l'autre composante étant la transformée stricte de $\mathrm{div}(y)$, elle divise $f' - g'$, et l'on a la condition (H3). Ce qui termine la preuve de la proposition 7.6.

Bibliographie

[Abh88] Abhyankar (S.S.). — What is the difference between a parabola and a hyperbola?, The Mathematical intelligencer, Vol. 10, No. 4, p. 36–43 (1988).

[Abh77] Abhyankar (S.S.). — Expansion techniques in algebraic geometry, (Notes by Balwant Singh), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1977).

[Abh89] Abhyankar (S.S.). — Irreducibility criterion for germs of analytic functions of two complex variables, Adv. in Math., Vol. 74, No. 2, p. 190–257 (April 1989).

[Cam80] Campillo (A.). — Algebroid curves in positive characteristic, L.N.M. 813 (1980).

[Cos75] Cossart (V.). — Sur le polyèdre caractéristique d'une singularité, Bull. Soc. Math. de France 103, 13–19 (1975).

[Cos87] Cossart (V.). — Polyèdre caractéristique d'une singularité. Thèse. Univ. d'Orsay p. 1–484 (1987).

[CosMor03] Cossart (V.), Moreno-Socías (G.). — Irreducibility criterion : a geometric point of view, dans « Valuation Theory and its Applications », vol. II, Field Institute Comm. 33, p. 27–42 (2003).

[Gir83] Giraud (J.). — Forme normale d'une fonction sur une surface de caractéristique positive, Bull. Soc. Math. de France 111, p. 109–124 (1983).

[GwoPło95] Gwoździewicz (J.), Płoski (A.). — On the approximate roots of polynomials, Ann. Polonoci Mathematici, LX.3, p. 199–209 (1995).

[Hir70] Hironaka (H.). — Characteristic polyhedra of singularities, J. Math. Kyoto Univ. 10, p. 251–293 (1970).

[Kuo73] Kuo (T.C.). — Generalized Newton–Puiseux theory and Hensel's lemma in $\mathbb{C}[[x,y]]$, Can. J. Math. 41, p. 1101–1116 (1973).

[Lej73] Lejeune-Jalabert (M.). — Thèse, Univ. Paris 7 (1973).

[Lip87] LIPMAN (J.). — On complete ideals in regular local rings, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata, p. 203–231 (1987).

[Mac97] MAC-CALLUM (S.). — On testing a bivariate polynomial for analytic reducibility, J. Symb. Comp. 24, p. 509–535 (1997).

[Mor90] MORENO-SOCÍAS (G.). — Lazy resolution of plane curves, Notes informelles de calcul formel, Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, Palaiseau (1990).

[Sam56] SAMUEL (P.). — Algébricité de certains points algébroïdes, J. de Math. Pures et Appliquées, tome XXXV, fasc. 1, p. 1–6 (1956).

[SamZar60] SAMUEL (P.), ZARISKI (O.). — Commutative algebra, vol. 2, Van Nostrand (1960).

[Spi90] SPIVAKOVSKY (M.). — Valuations in function fields of surfaces, Amer. J. of Math., 112, p. 107–156 (1990).