ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JOËL MERKER

Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 14, nº 2 (2005), p. 215-330

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_2_215_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 2, 2005
pp. 215–330

Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle(*)

JOËL MERKER (†)

RÉSUMÉ. — La recherche de formes normales[1] pour les sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$ soulève la question de la convergence des normalisations formelles. En 1983, J.K. Moser et M.W. Webster ont donné des exemples de surfaces analytiques réelles dans $\mathbb{C}^2$ à tangente complexe isolée et hyperbolique au sens de E. Bishop, qui sont formellement mais non holomorphiquement normalisables (à cause d'un phénomène de petits diviseurs), même lorsque la forme normale est elle-même analytique ou algébrique. En revanche, il apparaît qu'un tel phénomène ne se produit pas pour les sous-variétés dont la dimension CR est localement constante, d'après des résultats récents dus à S.M. Baouendi, P. Ebenfelt et L.-P. Rothschild, et qui sont énoncés avec des hypothèses de non-dégénérescence relativement simples, mais satisfaites en un point Zariski-générique[2]. Ces auteurs établissent notamment que toute application CR formelle inversible entre deux sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ génériques, analytiques réelles, finiment non-dégénérées et minimales (au sens de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov) est convergente. Nous démontrons ici un théorème de convergence plus général, valable sans aucune hypothèse de non-dégénérescence, et qui confirme la rigidité de la catégorie CR (*voir* Théorème 1.2). Ce résultat s'interprète alors comme un principe de symétrie de Schwarz formel pour les applications CR. Nous en déduisons que toute équivalence CR formelle entre deux sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ génériques, analytiques réelles et minimales est convergente si et seulement si les deux sous-variétés sont holomorphiquement non-dégénérées (au sens de N. Stanton). Enfin, nous établissons que deux sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ génériques, analytiques réelles et minimales sont formellement CR équivalentes si et seulement si elles sont biholomorphiquement équivalentes.

(*) Reçu le 19 janvier 2004, accepté le 6 juillet 2004

(†) CNRS, Université de Provence, LATP, UMR 6632, CMI, 39 rue Joliot-Curie, F-13453 Marseille Cedex 13, France
E-mail : merker@cmi.univ-mrs.fr

(1) *Voir* les travaux fondateurs de S.-S. Chern, J.K. Moser [CM1974] et de J.K. Moser, S.M. Webster [MW1983] ainsi que les articles plus récents de S.M. Webster [We1992], de X. Huang, S.G. Krantz [HK1995], de X. Gong [Go1996] et de P. Ebenfelt [Eb1998].

(2) *Voir* [BER1997], [Za1997], [BER1999a], [BER1999b], [BRZ2001].

ABSTRACT. — Searching normal forms[1] for real analytic submanifolds of $\mathbb{C}^n$ involves convergence problems. In 1983, J.K. Moser and S.M. Webster provided examples of real analytic surfaces in $\mathbb{C}^2$ having an isolated hyperbolic (in the sense of E. Bishop) complex tangency, which are formally but not holomorphically normalizable (because of the presence of small divisors), even if the normal form is itself real analytic or algebraic. On the contrary, it appears that such a nonconvergence phenomenon does not appear for submanifolds of $\mathbb{C}^n$ whose CR dimension is locally constant, in view of recent results by S.M. Baouendi, P. Ebenfelt and L.P. Rothschild. These results hold true with hypotheses which are relatively simple, but satisfied at a Zariski-generic point[2]. Notably, these authors establish that every invertible formal CR mapping between two submanifolds of $\mathbb{C}^n$ which are real analytic, generic, finitely nondegenerate and minimal (in the sense of J.-M. Trépreau and A.E. Tumanov) is convergent. In this paper, we establish a more general convergence theorem, which is valid without any nondegeneracy condition, and which confirms the rigidity of the CR category (*see* Theorem 1.2). This result may be interpreted as a formal Schwarz reflection principle for CR mappings. We deduce that every formal CR equivalence between two submanifolds of $\mathbb{C}^n$ which are real analytic, generic and minimal is convergent if and only if both submanifolds are holomorphically nondegenerate (in the sense of N. Stanton). Finally, we establish that two submanifolds of $\mathbb{C}^n$ which are real analytic, generic and minimal are formally CR equivalent if and only if they are biholomorphically equivalent.

Table des matières

1. Introduction

Cette *Introduction* étendue est nécessaire à la présentation des résultats principaux de ce mémoire. Dans les Sections 3 et 4, qu'il est conseillé de lire en parallèle, le lecteur trouvera une exposition autonome, élémentaire et détaillée des concepts de base qui y sont utilisés.

Notre objectif principal est d'élaborer un point de vue conceptuel et synthétique sur le principe de réflexion dit « analytique » en plusieurs variables complexes. Notamment, nous insisterons sur quatre concepts majeurs : la minimalité, les jets de sous-variétés de Segre, l'application de réflexion CR et les conditions CR-horizontales de non-dégénérescence.

Nous espérons qu'un tel point de vue permettra de mieux appréhender l'abondance des théorèmes démontrés récemment dans cette direction de recherche. Au lieu de céder, comme certains auteurs, à la tentation d'exprimer tous les résultats et toutes les conséquences possibles, ce qui nuirait à l'unité du sujet, nous sélectionnerons rigoureusement trois énoncés : Théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4, ainsi que deux applications : Corollaires 1.5 et 1.6. Puisqu'une telle sélection ne saurait se passer d'explications motivées, nous détaillerons nos angles d'attaque à partir d'une analyse de la littérature récente, en formulant des principes combinatoires organisateurs.

1.1. Équivalences CR formelles entre sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ analytiques réelles et génériques

Soit M une sous-variété locale de $\mathbb{C}^n$, analytique réelle, passant par l'origine et envisagée au voisinage de ce point de référence. Si elle est de codimension 1, on l'appelle une *hypersurface*. En général, nous supposerons que M est de codimension $d \geqslant 1$ strictement positive et qu'elle est *générique*, c'est-à-dire que $T_0M + JT_0M = T_0\mathbb{C}^n$, où J est la structure complexe standard de $T\mathbb{C}^n$. Nous supposons aussi que sa dimension CR, égale à $m := n - d$, est strictement positive.

Dans les coordonnées holomorphes $t := (t_1, \ldots, t_n)$ canoniques de $\mathbb{C}^n$, la sous-variété M, entendue comme sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$, peut être représentée comme l'ensemble des $t \in \mathbb{C}^n$ où s'annulent exactement d séries entières analytiques $\rho_j(t, \bar{t}) \in \mathbb{C}\{t, \bar{t}\}$, pour $j = 1, \ldots, d$; de telles séries entières doivent satisfaire aux conditions de réalité $\rho_j(t, \bar{t}) \equiv \overline{\rho}_j(\bar{t}, t)$ pour $j = 1, \ldots, d$, s'annuler pour $t = 0$ et posséder des différentielles réelles $d\rho_1, \ldots, d\rho_d$ qui sont indépendantes à l'origine. La généricité de M équivaut alors au fait que les différentielles complexes $\partial\rho_1, \ldots, \partial\rho_d$ sont elles aussi, de surcroît, indépendantes à l'origine.

De même, soient $\rho'_1(t', \bar{t}') = 0, \ldots, \rho'_{d'}(t', \bar{t}') = 0$ des équations cartésiennes définissant une autre sous-variété locale de $\mathbb{C}^{n'}$, analytique réelle, générique, passant par l'origine, qui est de codimension $d' \geqslant 1$ et de dimension CR égale à $m' := n' - d' \geqslant 1$, toutes deux strictement positives.

Soit $h(t) := (h_1(t), \ldots, h_n(t))$ une collection de séries formelles $h_i(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$, $i = 1, \ldots, n$, dont les termes constants s'annulent. Par définition, h induit une *application CR formelle entre M et M'* s'il existe une matrice de taille $d' \times d$ de séries formelles $b(t, \bar{t})$ telle que l'on a l'identité formelle vectorielle $\rho'(h(t), \overline{h}(\bar{t})) \equiv b(t, \bar{t})\, \rho(t, \bar{t})$, interprétée dans le produit $\mathbb{C}[\![t, \bar{t}]\!]^d := \mathbb{C}[\![t, \bar{t}]\!] \times \cdots \times \mathbb{C}[\![t, \bar{t}]\!]$ contenant exactement d facteurs. On notera $h : (M, 0) \longrightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0)$ une telle application, avec en indice la lettre $\mathcal{F}$, initiale du mot « formel », car une telle application n'a rien d'une application ponctuelle.

Dans le langage abstrait de la géométrie analytique locale, les applications formelles s'identifient à des morphismes entre anneaux locaux de séries entières convergentes, le tout étant inséré dans une théorie architecturée, mais nous pensons qu'il est encore trop tôt pour entreprendre le travail, certes désirable, d'abstraction de tous les concepts de géométrie CR qui interviendront dans ce mémoire.

De notre point de vue, c'est à partir de l'identité formelle de départ $\rho'\left(h(t), \overline{h}(\bar{t})\right) \equiv b\,(t, \bar{t})\ \rho\,(t, \bar{t})$ que tous nos calculs se déploieront de manière absolument concrète et structurée.

Nous dirons que h est une *équivalence* CR formelle si $n' = n$ et si le déterminant $\det\left(\frac{\partial h_{i_1}}{\partial t_{i_2}}(0)\right)_{1 \leqslant i_1,\, i_2 \leqslant n}$ ne s'annule pas ; on démontre que ceci implique $d' = d$ et $m' = m$.

Ces définitions généralisent au cas formel la notion d'application CR continue, lisse, analytique ou algébrique entre sous-variétés de $\mathbb{C}^n$, analytiques réelles et génériques. Avant de poursuivre, dressons un bref historique récent du principe de réflexion afin justifier le fait que nous ne travaillerons pas avec des sous-variétés algébriques.

1.2. Principe de réflexion algébrique et variations

L'étude de la régularité des applications CR formelles est une variation du principe dit « de réflexion », historiquement initié dans le cas d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ entre hypersurfaces strictement pseudoconvexes par S. Pinchuk dans [Pi1975] et plus tard, mais indépendamment, par H. Lewy dans [Le1977]. Le paragraphe de [CM1974] consacré à la convergence des formes normales formelles de J.K. Moser contient une démonstration implicite du fait que toute équivalence CR formelle entre hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ analytiques réelles et Levi non-dégénérées est convergente. Dans le premier article [BER1997] consacré à la paramétrisation des applications CR par un jet d'ordre fini en un point ainsi qu'à la régularité des applications CR formelles, S.M. Baouendi, P. Ebenfelt et L.-P. Rothschild démontrent que toute application CR formelle entre deux hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ analytiques réelles et finiment non-dégénérées est convergente. Ce résultat répondait à une question soulevée par F. Treves ; la non-dégénérescence finie généralise la Levi non-dégénérescence par passage aux dérivées d'ordre supérieur. Peu de temps après, ces énoncés furent transférés à la codimension quelconque par les mêmes auteurs dans [BER1998], en supposant la sous-variété M minimale à l'origine (au sens de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov). La preuve est basée sur les itérations de sous-variétés de Segre, appelées « ensembles de Segre » dans l'article [BER1996], suite de [BR1995]. Grâce à cet outil complexe, ces trois auteurs établissent une condition suffisante optimale pour l'algébricité des biholomorphismes entre sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ algébriques réelles et minimales de codimension quelconque (*cf.* la recension [Tr2000]).

Évidemment, les résultats précités ne s'appuient pas sur une généralisation au cas Levi dégénéré des formes normales de J.K. Moser, car nous sommes bien loin actuellement de posséder des indications valables pour édifier une théorie satisfaisante, malgré quelques tentatives incomplètes effectuées dans cette direction pour la dimension complexe trois (*cf.* par exemple [Eb1998]).

Par ailleurs, grâce à la notion de *degré de transcendance* d'une application holomorphe, telle qu'elle apparaît pour la première fois dans le travail [Pu1990] de Y. Pushnikov, basé sur des indications de S. Pinchuk, les trois auteurs B. Coupet, F. Meylan et A. Sukhov sont parvenus à éliminer dans [CMS1999] toute hypothèse de rang sur une application holomorphe h entre sous-variétés algébriques réelles. Cependant, en toute rigueur, on pourrait se dispenser de la terminologie « degré de transcendance », car le point-clé de [Pu1990] et de [CMS1999] consiste à raisonner avec des polynômes minimaux pour les relations algébriques entre les composantes de h et celles de $\overline{h}$. Concrètement, cette approche offre une simplification élégante des calculs majeurs développés pour les sous-variétés essentiellement finies dans [BJT1985], qui avaient été illustrés auparavant sur un exemple par M. Derridj dans [De1985].

Aussi l'approche « degré de transcendance » a-t-elle conduit à une série de travaux récents : [CPS2000], [Me2001a], [Da2001], [CDMS2002], [MMZ2002], [MMZ2003], tous basés sur le même procédé algébrique d'élimination. En effet, il a été rapidement remarqué que le schéma de démonstration s'étendait, sans obstacle majeur et modulo quelques variations mineures, à la situation (légèrement plus générale) où la sous-variété image M' est supposée algébrique réelle, tandis que la sous-variété source M est supposée analytique réelle.

Conjecturalement, on s'attend à ce que presque tous les principes de réflexion connus soient valides dans le cas où M et M' sont *toutes deux analytiques réelles*. Malheureusement, la finitude intrinsèque au concept d'algébricité, qui est fortement utilisée dans ces travaux, fait défaut dans le cas général où M' est analytique réelle. On peut alors se demander si une sous-variété analytique réelle peut être rendue algébrique dans un système de coordonnées locales adéquat.

Récemment, en collaboration avec H. Gaussier, l'auteur a établi dans [GM2004] que la plupart (au sens de R. Baire), des sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ minimales et finiment non-dégénérées dont le groupe d'automorphismes holomorphes locaux est commutatif et de dimension n, ne peuvent être rendues algébriques dans aucun système de coordonnées holomorphes locales, quelle que soit la transcendance relative du changement de coordonnées. On dira que de telles sous-variétés ne sont pas localement *algébrisables*. Par le biais d'arguments heuristiques qui extrapoleraient les théorèmes spécifiques de [GM2004], on pourrait se convaincre que dans toute classe de sous-variétés analytiques réelles génériques locales non homogènes dont le groupe d'automorphismes holomorphes possède une structure fixée, la plupart d'entre elles ne sont pas localement algébrisables. Quant aux sous-variétés homogènes, le fait qu'elles soient localement algébrisales doit se discuter au cas par cas ; cette caractéristique ne dépend en effet que de la nature de leur groupe transitif de transformation, lequel permet bien entendu de les reconstruire sans ambiguïté comme l'orbite d'un point donné, du reste quelconque.

Un tel phénomène général de « non-algébrisabilité » locale générique (au sens de R. Baire) laisse entrevoir que les résultats précités, qui utilisent fortement l'algébricité, sont d'une portée restreinte. C'est pourquoi nous préfèrerons raisonner avec des outils purement analytiques, par exemple les espaces de jets (§1.4) ou ce que nous appellerons l'application de réflexion associée à h (§1.6). Commençons par présenter en résumé la géométrie de la complexification extrinsèque de M.

1.3. Minimalité

C'est un principe général, déjà à l'œuvre dans le théorème de C.F. Gauss sur l'existence de coordonnées isothermes, omniprésent dans les mathématiques de la fin du dix-neuvième siècle, dans les travaux d'É. Cartan et dans le développement contemporain de la géométrie CR, qu'il est judicieux d'introduire dès que possible des variables supplémentaires. En suivant S.-S. Chern, J.K. Moser et S.M. Webster ([CM1974], [We1977], [We1978], [MW1983]), remplaçons donc $\bar{t}$ par une variable $\tau \in \mathbb{C}^n$ indépendante ; on obtient la relation vectorielle $\rho'\big(h(t), \overline{h}(\tau)\big) \equiv b(t, \tau)\, \rho(t, \tau)$, qui exprime que l'application formelle *complexifiée* $h^c(t, \tau) := \big(h(t), \overline{h}(\tau)\big)$ de l'application CR formelle h induit une application formelle entre la *complexification de* M, qui est la sous-variété analytique complexe de $\mathbb{C}^{2n}$ définie par $\mathcal{M} := \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \rho_j(t, \tau) = 0, j = 1, \ldots, d\}$, et la complexification $\mathcal{M}' := \{(t', \tau') \in \mathbb{C}^{n'} \times \mathbb{C}^{n'} : \rho'_{j'}(t', \tau') = 0,\ j' = 1, \ldots, d'\}$. Dorénavant, nous raisonnerons le plus souvent possible directement avec les objets géométriques complexifiés.

On vérifie (*voir* le §3.2 pour des explications) que dans tout système de coordonnées holomorphes locales $(z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ telles que $T_0M + \big(\{0\} \times \mathbb{C}^d\big) = T_0\mathbb{C}^n$, la sous-variété complexifiée $\mathcal{M}$ peut être représentée par d équations analytiques complexes graphées de la forme $\xi_j = \Theta_j(\zeta, t)$, pour $j = 1, \ldots, d$, où $\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Dans ce système de coordonnées, la collection de séries entières $\Theta_j \in \mathbb{C}\{\zeta, t\}$ est alors unique.

Commençons par présenter en résumé le concept de *minimalité*. On renvoie à la Section 3 pour une exposition de sa signification géométrique. Soit p un point $\mathcal{M}$ de coordonnées $(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Soit $z_1 \in \mathbb{C}^m$ et soit $\zeta_1 \in \mathbb{C}^m$. On définit les deux applications

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{z_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := \big(z_p + z_1, \overline{\Theta}(z_p + z_1, \zeta_p, \xi_p), \zeta_p, \xi_p\big) \qquad \text{et} \\ \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := (z_p, w_p, \zeta_p + \zeta_1, \Theta(\zeta_p + \zeta_1, z_p, w_p)) \end{cases} \tag{1.1}$$

Notons que $\mathcal{L}_{z_1}(p)$ et $\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(p)$ appartiennent à $\mathcal{M}$. Itérons ces applications en les composant alternativement l'une avec l'autre : en partant de l'origine $0 \in \mathcal{M}$, définissons $\underline{\Gamma}_1(z_1) := \underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)$, puis

$$\underline{\Gamma}_2(z_1, z_2) := \mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)), \tag{1.2}$$

puis $\underline{\Gamma}_3(z_1, z_2, z_3) := \underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))$, et encore

$$\underline{\Gamma}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) := \mathcal{L}_{z_4}(\underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))), \tag{1.3}$$

et ainsi de suite. Pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on obtient des applications holomorphes locales $\underline{\Gamma}_k$ de $\mathbb{C}^{mk}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ et satisfaisant $\underline{\Gamma}_k(0) = 0$.

Nous dirons que M est *minimale* (au sens de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov) s'il existe un entier μ_0 tel que l'image par $\underline{\Gamma}_{\mu_0}$ d'un voisinage de l'origine arbitrairement petit dans $\mathbb{C}^{m\mu_0}$ contient un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}$. On démontre que cette condition est invariante par changement de coordonnées holomorphes locales. C'est tout ce que nous aurons besoin de savoir au sujet de la géométrie de la sous-variété source $\mathcal{M}$.

1.4. Jets de sous-variétés de Segre

Pour le principe de réflexion CR formel, ce sont les équations de la sous-variété image $\mathcal{M}'$ qui joueront le rôle le plus important. Cependant, le défaut majeur des équations analytiques de la forme $\rho'_{j'}(t',\, \tau') = 0$ réside dans la non-unicité des séries entières $\rho'_{j'}$. En effet, la sous-variété $\mathcal{M}'$ est aussi bien représentée comme le lieu d'annulation de tout autre jeu de d' séries entières analytiques définissantes qui sont de la forme $\widetilde{\rho}'_{j'}(t',\, \tau') := \sum_{l'=1}^{d'} c'_{j',\, l'}(t',\, \tau')\, \rho'_{l'}(t',\, \tau')$, où la matrice de taille $d' \times d'$ des séries entières $c'_{j',\, l'} \in \mathbb{C}\{t',\, \tau'\}$ est inversible. Pour éliminer ce défaut qui pourrait s'avérer gênant (*cf.* les commentaires qui suivent l'énoncé du théorème principal 1.2), il convient de représenter comme un graphe aussi bien $\mathcal{M}'$ que $\mathcal{M}$. Soit donc un système de coordonnées holomorphes locales $(z',\, w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ avec $T_0M' + \left(\{0\} \times \mathbb{C}^{d'}\right) = T_0\mathbb{C}^{n'}$, dans lequel la sous-variété complexifiée $\mathcal{M}'$ est représentée par d' équations analytiques complexes de la forme $\xi'_{j'} = \Theta'_{j'}(\zeta',\, t')$, pour $j' = 1,\, \ldots,\, d'$, où $\tau' = (\zeta',\, \xi') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$.

Fixons $t' \in \mathbb{C}^{n'}$ et $k \in \mathbb{N}$. La *sous-variété de Segre complexifiée conjuguée* est la sous-variété analytique complexe de $\mathbb{C}^{n'}$ définie par $\underline{\mathcal{S}}'_{t'} := \{(\zeta',\, \xi') \in \mathbb{C}^{n'} : \xi' = \Theta'(\zeta',\, t')\}$. Définissons alors l'application de ses jets d'ordre k explicitement par

$$\varphi'_k(\zeta',\, t') := \left(\zeta',\, \left(\frac{1}{\beta'!}\, \partial_{\zeta'}^{\beta'}\, \Theta'_{j'}(\zeta',\, t')\right)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\, |\beta'| \leqslant k}\right). \tag{1.4}$$

Elle est à valeurs dans $\mathbb{C}^{m'+N_{d',\, m',\, k}}$, pour un certain entier $N_{d',\, m',\, k}$. Comme l'ont compris K. Diederich et S.M. Webster dans [DW1980], ce sont les propriétés de cette application analytique complexe locale, définie au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{n'}$, qui gouvernent les divers principes de réflexion possibles, y compris pour les applications CR formelles. Nous dirons que $\mathcal{M}'$ est

(nd1) *Levi non-dégénérée à l'origine* si φ'_1 est de rang $m' + n'$ en $(\zeta',\, t') = (0,\, 0)$;

(nd2) *finiment non-dégénérée à l'origine* s'il existe un entier k_0 tel que φ'_k est de rang $n' + m'$ en $(\zeta', t') = (0, 0)$, pour tout $k \geqslant k_0$;

(nd3) *Essentiellement finie à l'origine* si φ'_k est est une application holomorphe finie en $(\zeta', t') = (0, 0)$, pour tout $k \geqslant k_0$;

(nd4) *Segre non-dégénérée à l'origine* s'il existe un entier k_0 tel que la restriction de φ'_k à la sous-variété de Segre complexifiée conjuguée $\underline{\mathcal{S}}'_0$ (qui est de dimension complexe égale à m') est de rang générique égal à m', pour tout $k \geqslant k_0$;

(nd5) *holomorphiquement non-dégénérée* s'il existe un entier k_0 tel que l'application φ'_k est de rang générique maximal possible, égal à $m'+n'$, pour tout $k \geqslant k_0$.

On démontre que ces cinq conditions ne dépendent pas du système de coordonnées (z', w') dans lequel on a représenté $\mathcal{M}'$ sous la forme $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$ (*voir* [Me2003] pour les détails).

Bien entendu, par souci de pureté, on pourrait en toute rigueur éviter d'introduire une terminologie spécifique pour de telles conditions de non-dégénérescence. Néanmoins, puisque l'usage a déjà consacré les quatre conditions que sont **(nd1)**, **(nd2)**, **(nd3)** et **(nd5)**, nous adopterons ces dénominations établies, et nous en introduirons de nouvelles ultérieurement.

La nécessité d'introduire la condition **(nd4)** est due à un exemple intéressant que l'on trouve page 721 de [BER2000].

On vérifie (*voir* par exemple [Me2003]) les quatre implications

$$\textbf{(nd1)} \Rightarrow \textbf{(nd2)} \Rightarrow \textbf{(nd3)} \Rightarrow \textbf{(nd4)} \Rightarrow \textbf{(nd5)}, \tag{1.5}$$

dont seule la troisième est non triviale.

Les conditions **(nd2)** et **(nd3)** apparaissent explicitement dans [DW1980]. C.K. Han obtient dans [Ha1983] un principe de réflexion avec une formulation différente de **(nd2)**. Il est important de noter que **(nd1)**, **(nd2)** sont des hypothèses de rang constant sur l'application de jets (1.1) ; c'est pourquoi elles sont des plus aisées à manipuler (*cf.* [BER1996], [BER1997], [BER1998], [BER1999a], [BER1999b], [BRZ2001]). Quant à la condition **(nd3)**, elle n'est pas très éloignée de **(nd2)** du point de vue de la théorie des singularités ; elle a été répétitivement posée comme hypothèse du principe de réflexion analytique, suite au travail [BJT1985] qui développait une technologie adéquate (*cf.* [BR1988], [BR1990], [BR1995], [BER1999a], [CPS1999], [BER2000] et [Da2001] pour une synthèse récente ; voir aussi [DF1988] pour une approche alternative, plus géométrique).

Il est important de remarquer que les quatre premières conditions **(nd1)**, **(nd2)**, **(nd3)** et **(nd4)** sont ponctuelles, tandis que la dernière ne l'est pas, puisqu'il s'agit d'un rang générique. Il existe des exemples de sous-variétés génériques qui sont holomorphiquement non-dégénérées, mais qui ne sont ni finiment non-dégénérées, ni essentiellement finies, ni même Segre non-dégénérées en certains points appartenant à un sous-ensemble analytique réel non vide de M'. Ainsi, la notion de non-dégénérescence holomorphe est la plus fine des cinq.

La condition intermédiaire **(nd4)**, qui apparaît dans [Me2000], est déjà plus délicate. En vérité, pour les sous-variétés M' dites *rigides* dont les fonctions définissantes $\Theta'_{j'} \equiv \Theta'_{j'}(\zeta', z')$ ne dépendent pas de w', on vérifie que les conditions **(nd4)** et **(nd5)** sont équivalentes. Comme la condition **(nd5)**, la condition **(nd4)** autorise que les fibres $(\varphi'_k)^{-1}(\varphi'_k(\zeta', t'))$ de l'application de jets soient de dimension non localement constante au voisinage de l'origine. Il est bien connu alors que les concepts standard de géométrie différentielle sont insuffisants : on entre dans le domaine de la théorie des singularités analytiques complexes.

Dans [Hi1973], H. Hironaka met au point un procédé d'éclatements locaux successifs qui permet, par transformations strictes successives, de remplacer tout morphisme analytique local par un morphisme « redressé » qui satisfait la condition algébrique dite de « platitude » introduite par J.-P. Serre. Ce théorème dit d'« aplatissement local » implique la constance locale de la dimension des fibres, lorsque les espaces d'arrivée et de but du morphisme « aplati » sont lisses. L'existence de ce procédé suggère de l'appliquer à l'étude des applications CR formelles (*cf.* [Te1996]). Nous avons constaté que cette approche aboutit dans le cas des applications CR définies par des séries entières, mais dans cet article, nous n'utiliserons pas la théorie de H. Hironaka. En effet, grâce à un théorème dit d'approximation dû à M. Artin (*voir* Théorème 2.1 ci-dessous), nous pourrons résumer en partie la complexité causée par les singularités de l'application de jets d'ordre infini ((1.1)), pour $k = \infty$; l'utilisation de ce théorème dans le sujet remonte à M. Derridj dans [De1986], d'après une suggestion de A. Douady. La complexité de la preuve du résultat principal (Théorème 1.2) ci-dessous demeurera substantielle, car elle implique un grand nombre de collections infinies d'identités formelles.

Dans [Me2002], en utilisant la technique géométrique dite des « disques analytiques », nous avons établi un principe de réflexion pour les difféomorphismes CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre hypersurfaces analytiques réelles holomorphiquement non-dégénérées. Afin d'obtenir une version de ce résultat en codimension quelconque, nous pensons que le théorème d'aplatissement local de H. Hironaka, M. Lejeune et B. Tessier devrait être appliqué au morphisme de jets (1.8).

1.5. Non-dégénérescence holomorphe

Dans [St1995] et [St1996], N. Stanton a introduit la non-dégénérescence holomorphe. Elle dit que M' est *holomorphiquement non-dégénérée* s'il n'existe pas de champ de vecteurs $X' = \sum_{i'=1}^{n'} a'_{i'}(t') \frac{\partial}{\partial t'_{i'}}$ *non nul* et à coefficients holomorphes qui est tangent à M'. On démontre que cette définition équivaut à celle que nous avons formulée (*voir* le §3.4 dans [Me2003]).

La condition de non-dégénérescence holomorphe est connue pour être la condition nécessaire la plus naturelle pour qu'un principe de réflexion soit valide (*cf.* le premier article [BR1995] contenant une telle observation dans un cadre algébrique, *cf.* [Me2001a] pour un résultat sans condition de rang dans le cadre algébrique, et *cf.* [Me2002] pour un résultat récent dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$). Rappelons-en le principe. Soit $X' := \sum_{i'=1}^{n'} a'_{i'}(t') \, \frac{\partial}{\partial t'_{i'}}$ un champ de vecteurs non nul et à coefficients holomorphes qui est tangent à M'. Soit $(s', t') \longmapsto \exp(s'X')(t')$ le flot local de X', où $s' \in \mathbb{C}$ et $t' \in \mathbb{C}^{n'}$. Grâce à la condition de tangence, ce flot induit une famille à un paramètre d'automorphismes holomorphes locaux de M'. Dans le §2.4 ci-dessous, nous vérifierons qu'il existe de nombreuses séries entières *non convergentes* $\varpi'(t') \in \mathbb{C}[\![t']\!]$ dont le terme constant est nul, telles que la composition du flot avec la substition du temps complexe s' par $\varpi'(t')$, c'est-à-dire $t' \mapsto_{\mathcal{F}} \exp(\varpi'(t')X')(t')$, est une auto-application CR formelle inversible de M' non convergente. Une obstruction similaire au principe de réflexion se produit lorsque M' est holomorphiquement non-dégénérée, dans la catégorie algébrique, $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^0$.

La simplicité de cette obstruction laisse évidemment deviner que la non-dégénérescence holomorphe pourrait être une condition nécessaire et suffisante à la convergence de h. En supposant M minimale à l'origine, nous établissons la réciproque attendue. C'est notre premier résultat principal, annoncé dans [Me2001c].

THÉORÈME 1.1. — *Soit $h : (M, 0) \to_{\mathcal{F}} (M', 0)$ une équivalence CR formelle entre sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ analytiques réelles, génériques, de même codimension $d \geqslant 1$ et de même dimension CR égale à $m := n - d \geqslant 1$. Si M est minimale à l'origine et si M' est holomorphiquement non-dégénérée, l'application CR formelle h est convergente.*

Reste à s'interroger sur la nécessité de supposer M minimale à l'origine. On pourrait formuler et démontrer une version formelle du Théorème 2.7

de [Me2001a] énoncé dans un cadre algébrique, ce qui donnerai : si M n'est nulle part minimale et s'il existe un groupe à un paramètre réel d'auto-applications holomorphes locales stabilisant M, il existe de nombreuses auto-applications CR formelles de M qui ne sont pas convergentes. Par ailleurs, il a été démontré dans [BER1996] que le principe de réflexion algébrique pour les biholomorphismes est valide en supposant seulement que la sous-variété source M est minimale en tout point hors d'un sous-ensemble analytique réel strict. On parle alors de minimalité *en un point Zariski-générique*. Il existe donc une conjecture « folklorique » d'après laquelle le Théorème 1.1 devrait être vrai en supposant seulement que M est minimale en un point Zariski-générique, ce qui signifie qu'elle n'est pas forcément minimale à l'origine, mais qu'elle est minimale en des points arbitrairement proches de l'origine.

Il s'agit là d'une hypothèse fine qui pourrait à nouveau impliquer la théorie des singularités. Pour l'instant, bien que quelques résultats soient connus pour le principe de réflexion $\mathcal{C}^\infty$ entre hypersurfaces non minimales (*cf.* [Eb2002]), aucun analogue formel n'est connu. Les idées font défaut, mais nous considérons que cette question mérite d'être étudiée.

Une version du Théorème 1.1, valable avec l'hypothèse **(nd4)** exprimant que M' est Segre non-dégénérée à l'origine, a été démontrée dans le travail non publié [Me1999]. Pour les applications entre hypersurfaces, le Théorème 1.1 a été démontré d'abord dans la première version de [Me2001b], et indépendamment ensuite par N. Mir dans [Mi2000] (publié auparavant), dont la première version contenait aussi une démonstration d'un énoncé plus général : la convergence de l'*application de réflexion* pour les équivalences CR formelles entre hypersurfaces.

1.6. Application de réflexion

Dans le cas d'une variable complexe, le principe de réflexion classique dû à K.H.A. Schwarz est valable sans hypothèse de non-dégénérescence sur la frontière. Cela n'est pas étonnant, puisque tout arc analytique réel est localement biholomorphe à un segment ouvert de l'axe réel. Dès qu'il y a plus de deux variables complexes, il est bien connu que le principe de réflexion pour les applications CR entre hypersurfaces serait faux sans une hypothèse forte de non-dégénérescence, telle que la Levi non-dégénérescence ou telle que la finitude essentielle. Intuitivement parlant, de telles hypothèses expriment que toutes les variables horizontales $z' \in \mathbb{C}^{m'}$ ainsi que les conjuguées complexifiées $\zeta' \in \mathbb{C}^{m'}$ sont (très !) présentes dans les séries définissantes $\Theta'_{j'}(\zeta', z', w')$ de $\mathcal{M}'$. On peut toutefois se demander s'il n'existe pas une généralisation du principe de réflexion de Schwarz, qui soit valide sans faire aucune hypothèse sur la frontière. Dans un travail antérieur (*voir* [Me1997b] et aussi la remarque page 1098 de l'article [MM1999]), l'auteur a effectivement trouvé un invariant dont les propriétés de régularité sont plus générales que celles de l'application CR.

Pour une application CR formelle $h : (M, 0) \longrightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0)$, cet invariant se présente comme suit. Soient $\xi'_{j'} - \Theta'_{j'}(\zeta', t') = 0$, $j' = 1, \ldots, d'$, des équations complexes arbitraires pour $\mathcal{M}'$ dans un voisinage de l'origine. Alors l'*application de réflexion* associée à h et à ce système de coordonnées s'exprime par une série formelle vectorielle à deux variables $\tau' \in \mathbb{C}^{n'}$ et $t \in \mathbb{C}^n$:

$$\mathcal{R}'_h(\tau', t) := \xi' - \Theta'(\zeta', h(t)) \in \mathbb{C}[\![\tau', t]\!]^{d'}. \tag{1.6}$$

En toute rigueur, cette application $\mathcal{R}'_h$ dépend du système de coordonnées dans lequel on a représenté $\mathcal{M}'$, mais grâce à l'invariance biholomorphe des sous-variétés de Segre, on démontre que la convergence de $\mathcal{R}'_h$, c'est-à-dire la propriété $\mathcal{R}'_h(\tau', t) \in \mathbb{C}\{\tau', t\}^{d'}$, est une propriété invariante (*voir* la Section 4 ci-dessous). Dans ce mémoire, nous énoncerons et démontrerons un résultat de convergence de $\mathcal{R}'_h$, valable sans aucune hypothèse de non-dégénérescence sur M' : le Théorème principal 1.2 ci-dessous.

1.7. Résultats récents

Au cours de la démonstration des résultats principaux des articles [BJT1985] et [BR1988] (consacrés au principe de réflexion pour les applications CR de classe $\mathcal{C}^\infty$), une expression voisine de (1.6) apparaît, *mais on n'a pas pas vu qu'elle devrait jouir d'une propriété de régularité analytique, même lorsque la sous-variété image M' est très dégénérée.* Pour les applications CR entre hypersurfaces essentiellement finies, le prolongement holomorphe de $\mathcal{R}'_h$ s'identifie au prolongement de h en tant que correspondance, tel qu'il est traité dans [DF1988], [DFY1994], [DP1995], [DP1998], [Sh2000], [PV2001], [DP2003], [Sh2003], parfois avec l'hypothèse plus forte que M' ne contienne pas de courbe holomorphe.

En 1998, inspiré par nos conjectures sur l'application de réflexion dans [Me1997b] et par la remarque de la page 1098 du preprint de [MM1999], N. Mir a démontré de manière indépendante dans [Mi1998] que l'application de réflexion associée à un biholomorphisme entre hypersurfaces algébriques est algébrique. Sa définition de l'application de réflexion élimine la variable ξ' dans (1.6) ; celle-ci a pourtant un sens géométrique, puisque la définition de $\mathcal{R}'_h$ est intrinsèquement reliée aux sous-variétés de Segre complexifiées. Ni dans ce travail, ni dans d'autres travaux ultérieurs [Mi2000], [Mi2002], [BMR2002] consacrés à l'application de réflexion, N. Mir ne traite l'invariance biholomorphe de cette application. Or, pour peu que l'on établisse que l'algébricité de $\mathcal{R}'_h$ est une propriété invariante par changement de coordonnées algébriques (*cf.* [Me2001a] et [Me2002]), le résultat principal de [Mi1998] devient un corollaire élémentaire de [BR1995]. En effet (*cf.* le §11 de [Me2001a]), en déplaçant légèrement le point de référence en un point où l'application de jets (1.4) est de rang localement constant – ce qui est autorisé puisque l'application considérée est déjà holomorphe dans un ouvert – et en éliminant des variables muettes, on se ramène à un biholomorphisme local entre deux sous-variétés algébriques réelles, génériques et finiment non-dégénérées contenues dans des espaces euclidiens complexes de dimensions inférieures ; alors les résultats de [BR1995] (codimension 1) ou de [BER1996] (codimension quelconque) s'appliquent directement. En résumé, pour le principe de réflexion algébrique, l'algébricité de la fonction de réflexion équivaut à l'algébricité d'une application holomorphe entre sous-variétés génériques de dimension inférieure (*cf.* le Théorème 11.4 de [Me2001a] qui établit cette équivalence sans aucune hypothèse de rang).

En revanche, pour les applications CR formelles (ou $\mathcal{C}^\infty$), il est vraiment impossible de déplacer la situation locale en un point où les singularités de l'application de jets (1.4) disparaissent.

Avant d'énoncer notre résultat principal, présentons une deuxième liste hiérarchisée, comportant cinq conditions CR-horizontales de non-dégénérescence.

1.8. Conditions CR-horizontales de non-dégénérescence

Pour les sous-variétés génériques M' quelconques, sans aucune condition de non-dégénérescence, le principe de réflexion implique déjà des questions délicates, même en supposant, pour simplifier, que l'application h est inversible. Mais puisqu'un grand nombre de raffinements ont eu cours durant la dernière décennie et qu'il est presque toujours possible d'arguer de la « nouveauté » d'un résultat qui suppose l'application h toujours un peu plus dégénérée – pourvu que les techniques connues s'appliquent encore –, nous pensons qu'il est nécessaire d'exposer un principe organisateur pour présenter les conditions de non-dégénérescence sur l'application h.

Pour exprimer ces conditions, travaillons d'emblée avec les équations complexes graphées du §1.3 pour $\mathcal{M}'$, ou plutôt avec les équations conjuguées $w_{j'} = \overline{\Theta}'_{j'}(z', \tau')$, $j' = 1, \ldots, d'$, qui sont équivalentes, d'après le §3.2. Représentons aussi la complexification $\mathcal{M}$ de M par des équations complexes de la forme $w_j = \overline{\Theta}_j(z, \tau)$, $j = 1, \ldots, d$ dans des coordonnées adaptées $t = (z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Posons $\overline{r}_j(\tau, t) := w_j - \overline{\Theta}_j(z, \tau)$ et

$\overline{r}'_{j'}(\tau', t') := w'_{j'} - \overline{\Theta}'_{j'}(z', \tau')$. Par hypothèse, il existe une matrice de taille $d' \times d$ de séries formelles $\overline{b}(\tau, t)$ telle que $\overline{r}'\left(\overline{h}(\tau), h(t)\right) \equiv \overline{b}(\tau, t)\, \overline{r}(\tau, t)$ dans $\mathbb{C}[\![t, \tau]\!]^d$. Décomposons les composantes de l'application d'une manière compatible avec le scindage $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ des coordonnées, ce qui donne $h(t) =: (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{m'} \times \mathbb{C}[\![t]\!]^{d'}$. En remplaçant w par $\overline{\Theta}(z, \tau)$ dans l'identité fondamentale $\overline{r}'\left(\overline{h}(\tau), h(t)\right) \equiv \overline{b}(\tau, t)\, \overline{r}(\tau, t)$, le second membre s'annule identiquement et nous obtenons les identités formelles suivantes, valables dans $\mathbb{C}[\![z, \tau]\!]$:

$$g_{j'}\left(z, \overline{\Theta}(z, \tau)\right) \equiv \overline{\Theta}'_{j'}\left(f(z, \overline{\Theta}(z, \tau), \overline{h}(\tau))\right), \tag{1.7}$$

pour $j' = 1, \ldots, d'$. En posant $\tau = 0$ dans ces identités, on obtient les identités

$$g_{j'}\left(z, \overline{\Theta}(z, 0)\right) \equiv \overline{\Theta}'_{j'}\left(f(z, \overline{\Theta}(z, \tau), 0)\right). \tag{1.8}$$

Classiquement, on les interprète en exprimant que la restriction de l'application formelle h à la sous-variété de Segre S_0 passant par l'origine, définie par $\{(z, w) \in \mathbb{C}^n : w = \overline{\Theta}(z, 0)\}$, induit une application formelle à valeurs dans la sous-variété de Segre S'_0 de l'espace image définie par $\{(z', w') \in \mathbb{C}^{n'} : w' = \overline{\Theta}'(z', 0)\}$. Alors la restriction de h à S_0 coïncide avec l'application formelle

$$\mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathcal{F}} \Big(f\left(z, \overline{\Theta}(z, 0)\right),\ \ \overline{\Theta}'\left(f\left(z, \overline{\Theta}(z, 0), 0\right)\right)\Big) \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}. \tag{1.9}$$

Ce sont les propriétés de non-dégénérescence de cette application formelle induite qui gouvernent les divers raffinements possibles du principe de réflexion analytique. Par projection sur le sous-espace $\mathbb{C}^{m'} \times \{0\}$, on peut évidemment identifier cette application avec sa *partie CR-horizontale* définie par

$$\mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathcal{F}} f\left(z, \overline{\Theta}(z, 0)\right) \in \mathbb{C}^{m'}. \tag{1.10}$$

Avec ces notations, nous pouvons formuler très concrètement cinq conditions sur l'application (1.10), que nous ordonnons par ordre croissant de généralité. L'application CR formelle h sera dite

(cr1) *CR-inversible* à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une équivalence formelle en $z = 0$;

(cr2) *CR-submersive* à l'origine si $m' \leqslant m$ et si sa partie CR-horizontale est une submersion formelle en $z = 0$;

(cr3) *CR-finie* à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une application formelle finie en $z = 0$;

(cr4) *CR-dominante* à l'origine si $m' \leqslant m$ et si sa partie CR-horizontale est dominante en $z = 0$;

(cr5) *CR-transversale* à l'origine si sa partie CR-horizontale est transversale en $z = 0$;

Nous renvoyons le lecteur au §2.2 pour des définitions complètes de ces cinq conditions de non-dégénérescence, valides dans la catégorie des applications formelles quelconques ; la condition **(cr5)**, qui n'implique *aucune inégalité entre m' et m*, est exprimée *in extenso* au début du §1.9. Bien entendu, en utilisant l'invariance biholomorphe des sous-variétés de Segre, on démontre que ces définitions ne dépendent pas des systèmes de coordonnées dans lesquels on représente M et M'.

Les cinq conditions du §2.2 sont tout à fait classiques en géométrie analytique locale. On vérifie les quatre implications

$$\textbf{(cr1)} \Rightarrow \textbf{(cr2)} \Rightarrow \textbf{(cr3)} \Rightarrow \textbf{(cr4)} \Rightarrow \textbf{(cr5)}, \tag{1.11}$$

pourvu que $m' = m$ dans la deuxième et dans la troisième. Dans le contexte CR, les conditions **(cr1)** et **(cr2)** apparaissent dans [Za1997] ; la condition **(cr3)**, maintenant classique, est une condition naturelle pour les applications CR entre hypersurfaces essentiellement finies ; elle apparaît dans [DF1988], [BR1988] et dans d'autres références. La condition **(cr4)** apparaît dans [BR1990]. Enfin, la condition **(cr5)** apparaît dans [BER2000], avec une appellation différente. Mais dans cette référence, les auteurs supposent la sous-variété M' essentiellement finie : ils travaillent avec la condition **(nd3)**, bien comprise depuis le travail fondateur [BJT1985].

Le préfixe commun aux cinq conditions « CR- » se justifie de la manière suivante : puisque l'espace tangent au point $0 \in \mathcal{S}_0$ coïncide avec l'espace tangent complexe à M en 0, lequel absorbe la *structure CR infinitésimale* de M en 0, on peut penser que l'application formelle induite $h|_{\mathcal{S}_0} : (\mathcal{S}_0, 0) \longrightarrow_{\mathcal{F}} (\mathcal{S}'_0, 0)$ est un « prolongement » de l'application *CR tangente $dh : T_0^c M \to T_0^c M'$*.

Sélectionnons maintenant la condition **(cr5)**, puisque c'est la plus générale.

1.9. Résultat principal

Par définition (*cf.* le §2.2 ci-dessous), une application CR formelle h comme dans le §1.8 est *CR-transversale à l'origine* s'il n'existe pas de série formelle $F'(z'_1, \ldots, z'_{m'}) \in \mathbb{C}[\![z'_1, \ldots, z'_{m'}]\!]$ non nulle telle que l'on a l'identité

$$F'\left(f_1\left(z, \overline{\Theta}(z,0)\right), \ldots, f_{m'}\left(z, \overline{\Theta}(z,0)\right)\right) \equiv 0, \tag{1.12}$$

dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$. Le résultat principal de cet article, dont le Théorème 1.1 découle en vérité comme corollaire, est le suivant.

THÉORÈME 1.2. — *Soit $h : (M, 0) \to_{\mathcal{F}} (M', 0)$ une application CR formelle entre deux sous-variétés de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n'}$ analytiques réelles, génériques, de codimensions $d \geqslant 1$, $d' \geqslant 1$ et de dimensions CR égales à $m := n-d \geqslant 1$, $m' := n' - d' \geqslant 1$. Si M est minimale à l'origine et si h est CR-transversale, pour tout système de coordonnées $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ dans lequel la complexification $\mathcal{M}'$ est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$, l'application de réflexion CR formelle associée $\mathcal{R}'_h(\tau', t) := \xi' - \Theta'(\zeta', h(t))$ est convergente.*

Dans le §4.6, nous démontrerons que si cette propriété de convergence est satisfaite dans un tel système de coordonnées (z', w'), alors pour tout autre système de coordonnées (z'', w'') centrées à l'origine dans lesquelles la complexification de la sous-variété transformée est représentée par des équations similaires $\xi''_{j'} - \Theta''_{j'}(\zeta'', t'') = 0$, $j' = 1, \ldots, d'$, l'application de réflexion associée est elle aussi convergente.

La force principale de ce théorème réside dans le fait qu'il ne requiert aucune condition de non-dégénérescence sur M'. Comme pour le Théorème 1.1, nous pensons bien entendu qu'il demeure valide en supposant seulement que M est minimale en un point Zariski-générique.

Attention, il y a un piège ! Par souci de généralité, on pourrait être tenté comme dans [BMR2002] de raisonner avec des équations définissantes analytiques réelles arbitraires $\rho'_{j'}(t', \bar{t}') = 0$ pour M', telles qu'introduites dans le §1.1. L'application de réflexion associée serait alors définie par $\widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau', t) := \rho'_{j'}(h(t), \tau') \in \mathbb{C}[\![t, \tau']\!]^{d'}$, et le Théorème 1.2 exprimerait, sous les mêmes hypothèses, qu'elle est convergente. Mais en 1997, J.-M. Trépreau nous a fait remarquer qu'un tel énoncé serait trivialement faux.

En effet, choisissons une série entière non convergente $\varpi(z_2) \in \mathbb{C}[\![z_2]\!]$ telle que $\varpi(z_2) = z_2 + \mathrm{O}(z_2^2)$ et considérons l'application formelle définie par $h(z_1, z_2, w) := (z_1, \varpi(z_2), w)$. C'est une équivalence CR formelle entre l'hypersurface algébrique M de $\mathbb{C}^3$ définie par $w = \bar{w} + iz_1\bar{z}_1$ et (la même !) l'hypersurface de $\mathbb{C}^3$ définie par $r' = 0$, où $r' := \bar{w}' - w' + iz'_1\bar{z}'_1$. Notons que M' est holomorphiquement dégénérée, puisque le champ holomorphe $\frac{\partial}{\partial z'_2}$ lui est tangent. Il est vrai que l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h(\tau', t)$ égale à $\xi' - w + iz_1\,\zeta'_1$ est convergente. Par contre, il est vraiment faux que l'application de réflexion associée à une équation définissante arbitraire pour M' est convergente. En effet, prenons par exemple la fonction $\rho'(t', \bar{t}') := [1 + z'_1\bar{z}'_1 + z'_2\bar{z}'_2]\, r'(t', \bar{t}')$; son lieu d'annulation coïncide avec

M'. Si l'application de réflexion

$$\widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau',\, t) := [1 + z_1\zeta'_1 + \varpi(z_2)\,\zeta'_2] \cdot [\xi' - w + iz_1\,\zeta'_1] \tag{1.13}$$

était convergente par rapport aux six variables $(z_1,\, z_2,\, w,\, \zeta'_1,\, \zeta'_2,\, \xi')$, on en déduirait en considérant $\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_2\partial\xi'}\widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau',\, t)\Big|_{\tau'=0}$ que la série formelle $\varpi(z_2)$ est convergente, ce qui contredirait notre choix initial. Par conséquent, il n'est pas anodin de choisir d'emblée des équations complexes graphées $\xi' = \Theta'(\zeta',\, t')$ pour la représentation de la complexifiée $\mathcal{M}'$ ainsi que pour la définition de l'application de réflexion CR formelle.

Comme nous l'avons mentionné à la fin du §1.11, N. Mir a obtenu dans [Mi2000] une démonstration du Théorème 1.1 pour les équivalences formelles dans le cas $d = d' = 1$, mais la méthode, astucieuse, achoppe dès que la codimension d de M est supérieure ou égale à 2. La première version de [Me2001b], qui a circulé avant [Mi2000], contenait seulement le Théorème 1.1 dans le cas $d = d' = 1$. Dans cette référence, l'existence de paires d'identités de réflexion conjuguées apparaissait clairement, bien qu'exploitée de manière insuffisante. En fait, dans la version publiée [Me2001b], il a suffi d'inclure le court §9 pour obtenir le Théorème 1.2 pour les équivalences formelles dans le cas $d = d' = 1$. Cette *paire d'identités de réflexion conjuguées* étant absolument cruciale pour la démonstration du Théorème 1.2, nous allons l'exposer dans le §1.10 ci-dessous.

En Mai 2000, une démonstration complète du Théorème 1.2 pour les équivalences CR formelles a été annoncée dans [Me2000]. Cette annonce électronique a donné lieu à la publication résumée [Me2001c]. Sept mois plus tard, en décembre 2000, S.M. Baouendi, N. Mir et L.-P. Rothschild ont annoncé électroniquement le même type de résultats, avec les raffinements attendus sur le rang de l'application h, lesquels ne s'élèvent pourtant que jusqu'au niveau **(cr4)**. Un examen de la publication [BMR2002] à laquelle a donné lieu ce travail (qui ne contient plus les références à nos travaux présentes dans la version électronique) montre que ces auteurs utilisent les paires d'identités de réflexion conjuguées, ce que seul l'ultra-spécialiste peut déceler dans le cœur technique de la démonstration principale (*voir* les équations (5.2) et (5.3), la Proposition 6.1 et le Lemme 7.1 de [BMR2002]). Par ailleurs, ces auteurs, qui n'emploient pas la terminologie « application de réflexion » (utilisée pourtant dans [Mi2000], [Mi2002]), introduisent une notion alternative d'« idéal de Segre », laquelle est définie au moyen d'équations analytiques réelles arbitraires $\rho'_{j'}(t',\, \bar{t}') = 0$ pour M'. Ce choix pour énoncer leurs théorèmes de convergence, les contraint à quelques circonlocutions, puisque la convergence de $\widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau',\, t) := \rho'_{j'}(h(t),\, \tau') \in \mathbb{C}[\![t,\, \tau']\!]^{d'}$ n'est satisfaite que pour les représentants graphés de l'idéal engendré par les séries entières complexifiées $\rho'_{j'}(t', \tau')$, comme nous venons de le voir.

En conclusion de ce paragraphe, la prolixité et le raffinement des résultats présentés dans [BMR2002] confinent à un certain hermétisme auquel nous n'adhèrerons jamais, puisque les quatre concepts analytico-géométriques qui sont impliqués dans le sujet sont relativement simples :

(1) minimalité locale comme propriété des orbites de champs de vecteurs CR complexifiés, dont les sous-variétés intégrales coïncident avec les sous-variétés de Segre complexifiées (Section 3) ;

(2) jets d'ordre k des sous-variétés de Segre complexifiées et diverses conditions de non-dégénérescence (Section 4) ;

(3) application de réflexion CR comme invariant fondamental qui jouit de propriétés de régularité (Sections 1, 5 et 6) ;

(4) conditions de non-dégénérescence CR-horizontales (Section 1) ;

Ce sont ces hypothèses multiples, combinées souvent à l'alternative entre catégorie algébrique et catégorie analytique, qui sont responsables de la combinatoire de théorèmes possibles publiés récemment sur le principe de réflexion analytique. Toutefois, cette diversité s'exerce au détriment de résultats plus rares où une difficulté substantielle a été surmontée et elle occulte leur repérage.

Exposons maintenant le point-clé qui est à la base de la démonstration du Théorème 1.2.

1.10. Paire d'identités de réflexion conjuguées

Soient $w_j = \overline{\Theta}_j(z, \tau)$, $j = 1, \ldots, d$ un système de d équations complexes graphées pour la complexification $\mathcal{M}$ de M et soient $\xi_j = \Theta_j(\zeta, t)$, $j = 1, \ldots, d$, les équations conjuguées. On considère la paire de systèmes de m champs de vecteurs holomorphes tangents à $\mathcal{M}$ définis comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k := \dfrac{\partial}{\partial z_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z, \tau)\, \dfrac{\partial}{\partial w_j}, \qquad k = 1, \ldots, m, \\[2ex] \underline{\mathcal{L}}_k := \dfrac{\partial}{\partial \zeta_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta, t)\, \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}, \qquad k = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{1.14}$$

Par hypothèse, l'application CR formelle $h(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{m'} \times \mathbb{C}[\![t]\!]^{d'}$ satisfait les d' identités formelles (1.7) et leurs conjuguées complexifiées, que nous écrirons ensemble comme suit :

$$\begin{cases} \overline{g}_{j'}\,(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)) \;\equiv \Theta'_{j'}\left(\overline{f}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)),\, h(t)\right), \\ g_{j'}\left(z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau)\right) \equiv \overline{\Theta}'_{j'}\left(f\left(z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau)\right),\, \overline{h}(\tau)\right). \end{cases} \tag{1.15}$$

On les abrègera en les écrivant $g(t)=\overline{\Theta}'\left(f(t),\, \overline{h}(\tau)\right)$ et $\overline{g}(\tau)=\Theta'\left(\overline{f}(\tau),\, h(t)\right)$, étant entendu que $(t,\, \tau) \in \mathcal{M}$. Développons les fonctions $\Theta'_{j'}$ par rapport aux puissances de ζ' : on obtient des expressions de la forme $\Theta'_{j'}(\zeta', t') = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \Theta'_{j',\gamma'}(t')$, avec des séries entières convergentes $\Theta'_{j',\gamma'}(t') \in \mathbb{C}\{t'\}$ qui satisfont bien sûr une estimée de Cauchy, puisque les fonctions $\Theta'_{j'}(\zeta', t')$ sont holomorphes par rapport aux deux variables ζ' et t'. En utilisant ce développement, nous pouvons tout d'abord réécrire l'application de réflexion (1.6) sous la forme plus explicite

$$\mathcal{R}'_h(\tau',\, t) = \xi' - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'}\, \Theta'_{\gamma'}(h(t)). \tag{1.16}$$

Dans la Section 5 ci-dessous, nous établirons que la convergence de l'application de réflexion est équivalente à la convergence de la collection infinie de séries formelles $\Theta'_{j',\,\gamma'}(h(t))$, pour tous $j' = 1,\, \ldots,\, d'$ et tous $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Nous appellerons *composantes de l'application de réflexion* ces séries formelles $\Theta'_{j',\,\gamma'}(h(t))$, parfois notées sous la forme vectorielle abrégée $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$.

En utilisant le même développement partiel en séries entières des $\Theta'_{j',\,\gamma'}(\zeta',\, t')$, on peut aussi réécrire les relations fondamentales (1.15) sous une forme plus explicite, dont le mérite principal est de faire clairement apparaître toutes les composantes de l'application de réflexion :

$$\begin{cases} \overline{g}(\tau) = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}(\tau)^{\gamma'}\, \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ g(t) = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'}\, \overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right), \end{cases} \tag{1.17}$$

où $(t,\, \tau) \in \mathcal{M}$. Venons-en maintenant aux identités de réflexion. Pour un multiindice arbitraire $\beta = (\beta_1,\, \beta_2,\, \ldots,\, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$, on note $\mathcal{L}^\beta$ et $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ les dérivations holomorphes et antiholomorphes d'ordre $|\beta|$ définies par

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\beta := (\mathcal{L}_1)^{\beta_1} (\mathcal{L}_1)^{\beta_2} \cdots (\mathcal{L}_m)^{\beta_m} \qquad \text{et} \\ \underline{\mathcal{L}}^\beta := (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1} (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_2} \cdots (\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Classiquement, on applique les dérivations antiholomorphes $(\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1} (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_2} \cdots (\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}$ au premier jeu d'équations (1.17). De manière équivalente, à une conjugaison près, on pourrait appliquer les dérivations conjuguées $(\mathcal{L}_1)^{\beta_1}$ $(\mathcal{L}_1)^{\beta_2} \cdots (\mathcal{L}_m)^{\beta_m}$ au second jeu d'équations (1.17). Au total, les deux procédés reviennent à choisir une fois pour toutes les variables t ou les variables $\bar{t}$ pour écrire les identités de réflexion. C'est le point de vue qui est adopté dans tous les travaux consacrés au principe de réflexion analytique que sont [Pi1975], [Le1977], [We1978], [We1982], [DW1980], [Ha1983], [De1985], [BJT1985], [BR1988], [Pu1990], [BR1990], [BR1995], [SS1996], [BER1996], [BER1997], [Mi1998], [BER1999a], [CMS1999], [CPS1999], [BER1999b], [CPS2000], [BER2000], [Me2001a], [BRZ2001], [Me2002], [Eb2002], [CDMS2002], [MMZ2002] et [MMZ2003]. Nous l'analyserons dans le §1.11 ci-dessous.

Respectons une exigence de complétude : nous disposons de deux jeux de d' équations formelles fondamentales (1.17) et de deux jeux infinis de dérivations fondamentales (1.18). Au total, ce ne sont donc pas deux mais quatre identités de réflexion que nous devrions obtenir.

Pour les écrire, on observe que $\underline{\mathcal{L}}_k(h) \equiv 0$ et que $\mathcal{L}_k\left(\overline{h}\right) \equiv 0$ pour $k = 1, \ldots, m$, ce qui est évident d'après les formules (1.14). Il en découle que $\underline{\mathcal{L}}^\beta(h) \equiv 0$ et que $\mathcal{L}^\beta\left(\overline{h}\right) \equiv 0$ puis aussi $\underline{\mathcal{L}}^\beta \Theta'_{\gamma'}(h) \equiv 0$ et $\mathcal{L}^\beta\left(\overline{\Theta}'\left(\overline{h}\right)\right) \equiv 0$, pourvu bien sûr que $\beta \neq 0$.

Ainsi, en appliquant les dérivations (1.18) pour $\beta \neq 0$ aux identités (1.17), on obtient quatre familles infinies d'identités de réflexion. Disposons-les en deux paires conjuguées comme suit : première paire :

$$\left\{\begin{aligned} \underline{\mathcal{L}}^\beta\,\overline{g}(\tau) &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta \left[\overline{f}(\tau)^{\gamma'}\right] \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ 0 &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'}\, \underline{\mathcal{L}}^\beta \left[\overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right)\right]; \end{aligned}\right. \tag{1.19}$$

seconde paire, conjuguée (modulo transposition) de la première :

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{L}^\beta g(t) &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathcal{L}^\beta \left[f(t)^{\gamma'}\right] \overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right), \\ 0 &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}(\tau)^{\gamma'}\, \mathcal{L}^\beta \left[\Theta'_{\gamma'}(h(t))\right]. \end{aligned}\right. \tag{1.20}$$

Bien entendu, $\beta \neq 0$ et $(t, \tau) \in \mathcal{M}$. Les deux paires (1.19) et (1.20) sont donc conjuguées terme à terme (modulo une transposition) ; elles ne sont donc pas essentiellement distinctes. Mais dans chacune des deux paires, une différence importante est à noter : tandis que ce sont *a priori* toutes les composantes $\overline{f}_{k'}$ et $\overline{g}_{j'}$ de l'application $\overline{h}$ que l'on différentie dans la première identité (1.19), ce sont les composantes conjuguées de l'application de réflexion $\overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right)$ que l'on différentie à la seconde ligne.

La différence a son importance pour la raison suivante. D'après la propriété mentionnée après (1.16), le Théorème 1.2 énonce essentiellement que les composantes $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion sont des séries convergentes. Il n'énonce nullement que toutes les composantes de l'application $h(t)$ sont convergentes. L'exemple élémentaire discuté après le Théorème 1.2 (ou d'autres analogues) montre qu'en général, aucune contrainte de convergence n'est exercée sur les composantes de h qui n'apparaissent pas dans les composantes de l'application de réflexion. C'est pourquoi la première identité de réflexion (1.19) a le défaut majeur de faire intervenir inévitablement les dérivées d'éventuelles « mauvaises » composantes de h, tout du moins celles qui ne sont pas intrinsèquement liées à l'application invariante $\mathcal{R}'_h$. Au contraire, dans la seconde identité (1.19) (tout aussi bien que dans la seconde identité (1.20)), on différentie les vrais objets invariants que sont les composantes $\overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}\right)$ (ou leurs conjuguées $\Theta'_{\gamma'}(h)$).

À notre connaissance, les seuls travaux dans lesquels on considère aussi la seconde identité de réflexion (1.19) (ainsi que sa conjuguée, la première identité de (1.20)) sont : [Me2001b], [Me2001c] et [BMR2002]. Avant de poursuivre le commentaire, passons en revue ce qu'il est possible d'énoncer au moyen de la première identité de réflexion (1.19).

1.11. Conditions de non-dégénérescence sur h

Au lieu de formuler conjointement des conditions de non-dégénérescence sur M' avec des conditions de non-dégénérescence CR-horizontales sur h (*cf.* [BR1988], [BER1997], [BER1998], [Za1997], [BER1999a], [BER1999b], [BER2000], [BRZ2001] et [BMR2002]), formulons des conditions de non-dégénérescence sur les premières identités de réflexion (1.19) (*cf.* [Ha1990], [SS1996], [CPS1999], [Me1999], [Da2001]). Pour cela, introduisons une collection infinie de séries entières formelles dépendant des trois variables $t \in \mathbb{C}^n$, $\tau \in \mathbb{C}^n$ (avec $(t, \tau) \in \mathcal{M}$) et $t' \in \mathbb{C}^{n'}$, laquelle est définie en remplaçant $h(t)$ par t' dans la première ligne de (1.19), ce qui donne :

$$\Psi'_{j',\beta}(t, \tau, t') := \underline{\mathcal{L}}^{\beta}\, \overline{g}_{j'} - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^{\beta} \left[\overline{f}^{\gamma'}\right] \Theta'_{j',\beta}(t'), \qquad (1.21)$$

pour $j' = 1, \ldots, d'$ et $\beta \in \mathbb{N}^m$. Dans (1.23) ci-dessous, on notera aussi ces séries $\Psi'_{j',\beta}(z, w, \zeta, \xi, t')$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. En ne considérant que les multiindices $\beta \in \mathbb{N}^m$ de longueur $|\beta| \leqslant k$, et en posant $(t, \tau) := 0$, définissons l'application formelle suivante, qui est à valeurs dans $\mathbb{C}^{N_{d', n', k}}$ pour un certain entier $N_{d', n', k}$:

$$\psi'_k : t' \longmapsto \left(\Psi'_{j', \beta}(0, 0, t')\right)_{1 \leqslant j' \leqslant d', \, |\beta| \leqslant k}. \tag{1.22}$$

Puisque les termes $\underline{\mathcal{L}}^\beta \, \overline{g}_{j'}$ et $\underline{\mathcal{L}}^\beta \left[\overline{f}^{\gamma'}\right]$ sont constants lorsque l'on pose $(t, \tau) = (0, 0)$, l'application ψ'_k est holomorphe au voisinage de l'origine.

L'application CR formelle h sera dite

(h1) *Levi non-dégénérée* à l'origine si ψ'_1 est de rang n' en $t' = 0$;

(h2) *finiment non-dégénérée* à l'origine s'il existe un entier ℓ_0 tel que ψ'_k est de rang n' en $t' = 0$ pour tout $k \geqslant \ell_0$;

(h3) *essentiellement finie* à l'origine s'il existe un entier ℓ_0 tel que ψ'_k est une application holomorphe finie pour tout $k \geqslant \ell_0$;

(h4) *Segre non-dégénérée* à l'origine s'il existe des entiers $j'(1), \ldots, j'(n')$ satisfaisant $1 \leqslant j'(i'_1) \leqslant d'$ pour $i'_1 = 1, \ldots, n'$, et des multiindices distincts $\beta(1), \ldots, \beta(n') \in \mathbb{N}^m$ tels que le déterminant suivant :

$$\det \left(\frac{\partial \Psi'_{j'(i'_1), \beta(i'_1)}}{\partial t'_{i'_2}} \left(z, \overline{\Theta}(z, 0), 0, 0, h\left(z, \overline{\Theta}(z,0)\right)\right) \right)_{1 \leqslant i'_1, \, i'_2 \leqslant n'} \tag{1.23}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$.

On vérifie que ces quatre conditions ne dépendent pas du sytème de coordonnées holomorphes locales dans lequel la sous-variété M' est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$ (*cf.* [Me2003]). La condition **(h1)** apparaît dans [SS1996] ainsi que dans d'autres références précédentes ; la condition **(h2)** apparaît dans [La2000] ; la condition **(h3)** apparaît dans [CPS1999], [Me1999], [Da2001] et [DM2002] ; ces références expriment la condition **(h3)** en disant, de manière équivalente, que la *variété caractéristique* $\mathbb{V}'_0 := \{t' : \Psi'_{j', \beta}(0, 0, t') = 0, \; j' = 1, \ldots, d', \; \beta \in \mathbb{N}^m\}$, qui est un sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^{n'}$ passant par l'origine, est de dimension zéro en $t' = 0$; enfin, la condition nouvelle **(h4)** apparaît dans [Me1999].

Avant de présenter les quatre principes de réflexion auxquels donnent naissance les quatre conditions **(h1)**, **(h2)**, **(h3)** et **(h4)**, nous voudrions mentionner qu'elles sont satisfaites si l'on effectue une hypothèse de non-dégénérescence sur M' combinée à une hypothèse de non-dégénérescence CR-horizontale sur h.

PROPOSITION 1.3. — *Supposons h CR-transversale à l'origine.*

(1) *Si M' est Levi non-dégénérée à l'origine, h est finiment non-dégénérée à l'origine.*

(2) *Si M' est finiment non-dégénérée à l'origine, h est finiment non-dégénérée à l'origine.*

(3) *Si M' est essentiellement finie à l'origine, h est essentiellement finie à l'origine.*

(4) *Si M' est Segre non-dégénérée à l'origine, h est Segre non-dégénérée à l'origine.*

Puisque la condition **(cr5)** est la plus générale, cette proposition se démultiplie en quatre autres propositions énoncées avec **(cr1)**, avec **(cr2)**, avec **(cr3)** ou avec **(cr4)** à la place de **(cr5)**. Une partie de ces vingt assertions, mais pas la totalité, se trouve implicitement démontrée dans les travaux de S.M. Baouendi, L.P. Rothschild et divers co-auteurs. Pour la démonstration relativement technique de ce résultat que nous n'utiliserons pas, nous renvoyons le lecteur au Théorème 4.3.1 de [Me2003].

Mentionnons toutefois les quatre observations :

(1) h Levi non-dégénérée $\Rightarrow M'$ Levi non-dégénérée ;

(2) h finiment non-dégénérée $\Rightarrow M'$ finiment non-dégénérée ;

(3) h essentiellement finie $\Rightarrow M'$ essentiellement finie ;

(4) h Segre non-dégénérée $\Rightarrow M'$ Segre non-dégénérée.

Chacune de ces implications est stricte, comme le montreraient des exemples élémentaires analogues à ceux qui sont développés dans [Me2001d]. La condition de CR-transversalité sur h est la condition la plus fine qu'il faut ajouter pour garantir les réciproques de ces implications.

1.12. Quatre principes de réflexion CR formels pour h

Ainsi, travaillons directement avec les quatre conditions de non-dégénérescence sur h.

THÉORÈME 1.4 ([Me1999], Theorem 1.2.1). — *Soit $h : (M,0) \to_{\mathcal{F}} (M',0)$ une application CR formelle entre deux sous-variétés de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n'}$ analytiques réelles, génériques, de codimensions $d \geqslant 1$, $d' \geqslant 1$ et de dimensions CR* *égales à* $m := n - d \geqslant 1$, $m' := n' - d' \geqslant 1$. *Si* M *est minimale à l'origine et si*

(i) *h est Levi ou finiment non-dégénérée à l'origine ; ou si*

(ii) *h est essentiellement finie à l'origine ; ou si*

(iii) *h est Segre non-dégénérée à l'origine,*

h est convergente.

La partie **(i)** est essentiellement démontrée dans [BER1997] et [BER1998] (*voir* aussi [La2000]). La partie **(ii)** est essentiellement démontrée dans [BER2000], grâce à une variation sur les arguments classiques de [BJT1985], mais avec des conditions de non-dégénérescence séparées sur M' et sur h. On trouve une copie conforme de cette démonstration relativement complexe dans [Mi2002], où la condition **(h3)** est empruntée à [CPS1999] et à [Me1999]. Le Théorème 1.2 de [DM2002] coïncide avec ce même résultat, mais grâce à l'argument élémentaire de tranchage tiré de [Me1999], on peut affirmer que la complexité de la preuve donnée dans [BER2000] ou dans [Mi2002] n'a pas lieu d'être. Répétons que la condition **(h3)** est paradigmatique depuis le travail classique [BJT1985].

Lorsque **(h1)** ou **(h2)** est satisfaite, en appliquant le théorème des fonctions implicites, on démontre qu'il existe un entier $\ell_0 \geqslant 1$ et une application Φ holomorphe locale telle que les identités de réflexion apparaissant à la première ligne de (1.19) se résolvent par rapport à $h(t)$, grâce au théorème des fonctions implicites, sous la forme :

$$h(t) \equiv \Phi\left(t, \tau, J_\tau^{\ell_0}\, \overline{h}(\tau)\right), \tag{1.24}$$

pour $(t, \tau) \in \mathcal{M}$ (le §5.2 ci-dessous fournit les détails). Ici, la notation $J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)$ désigne le jet d'ordre ℓ_0 de $\overline{h}(\tau)$. Une telle relation remonte aux travaux fondateurs de S. Pinchuk [Pi1975] et H. Lewy [Le1977]. Elle est appelée *identité de réflexion basique* dans [BER1999a]. Afin de rendre plus accessible la démonstration du Théorème 1.2, nous reconstituerons la démonstration très simple de la convergence de h sous cette hypothèse dans la Section 5, en utilisant notre propre formalisme.

Lorsque **(h3)** est satisfaite, on démontre grâce à un procédé d'élimination algébrique standard (*cf.* les travaux [BJT1985], [BER1999a] reprenant les détails de ce procédé bien connu depuis le traité de Van der Waerden [VdW1970]), qu'il existe un entier $\ell_0 \geqslant 1$ et n' polynômes tels que les identités de réflexion qui apparaissent à la première ligne de (1.19) fournissent une « quasi-résolution polynomiale » de $h(t)$ par rapport au jet d'ordre ℓ_0 de $\overline{h}(\tau)$, c'est-à-dire que l'on a n' relations polynomiales de la forme

$$h_{i'}(t)^{N(i')} + \sum_{1\leqslant k'\leqslant N(i')} A'_{i',\,k'}\left(t,\,\tau,\,J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)\right)\,h_{i'}(t)^{N(i')-k'} \equiv 0, \qquad (1.25)$$

pour $i' = 1, \ldots, n'$ et pour $(t,\,\tau) \in \mathcal{M}$, où les $A'_{i',\,k'}$ sont des applications holomorphes locales. Nous renvoyons au Théorème 1.2 de [DM2002] pour une démonstration épurée de la convergence de h sous cette hypothèse.

Enfin, dans la Section 6, nous exposerons la démonstration non publiée du Théorème 1.4 **(iii)** contenue dans [Me1999].

1.13. Absence de finitude relative dans le cas analytique réel

Il y a une explication au fait que la seconde collection d'identités de réflexion n'est généralement pas considérée dans les références précitées. En effet, les hypothèses de non-dégénérescence du type **(h1)**, **(h2)**, **(h3)** ou **(h4)** permettent toutes de ramener l'infinité des identités de réflexion à un nombre fini de relations de dépendance entre les composantes $h_{i'}(t)$ et un jet d'ordre fini $J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)$ de l'application formelle conjuguée. L'essence même du principe de réflexion de Schwarz à une ou plusieurs variables complexes se joue dans la possibilité d'exprimer h en fonction de $\overline{h}$ – cela est bien connu. Mais lorsque M' n'est ni finiment non-dégénérée ni essentiellement finie, une telle résolution est impossible : aucune version du théorème des fonctions implicites n'est valide lorsque le morphisme des k-jets de sous-variétés de Segre (1.4) est d'une complexité arbitraire. En général, il est donc nécessaire de considérer l'infinité des séries $\Theta'_{j',\,\gamma'}(h(t))$.

Il y a pourtant un cas où une résolution finie est possible : c'est lorsque M' est algébrique. En fait, dans [Mi2002], N. Mir obtient le Théorème 1.2 pour les applications CR-dominantes en supposant M' algébrique, car dans ce cas (subrepticement simplifié), toutes les séries $\{\Theta'_{j',\,\gamma'}(t')\}_{1\leqslant j'\leqslant d',\,\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}$ sont alors *algébriquement dépendantes* par rapport à un nombre *fini* d'entre elles. Grâce à cette propriété cruciale de finitude, on peut obtenir des identités de réflexion analogues à (1.25) : pour toute composante $\Theta'_{j',\,\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion, il existe une relation polynomiale, satisfaite pour $(t,\,\tau) \in \mathcal{M}$:

$$\sum_{0\leqslant k'\leqslant N'_0} A'_{k'}\left(t,\,\tau,\,J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)\right)\,\left[\Theta'_{j',\,\gamma'}(h(t))\right]^{k'} = 0, \qquad (1.26)$$

où chaque ℓ_0, chaque N'_0 et chaque série analytique $A'_{k'}$ dépend de j' et de γ'.

Au contraire, dans la catégorie analytique réelle, il est absolument faux qu'étant donné un nombre infini de séries entières convergentes $\varphi_k(\mathsf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathsf{x}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, il en existe un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant N+1$, il existe une application holomorphe locale $G_k(\mathsf{x}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N, Y_k)$ telle que $G_k(\mathsf{x}, h_1(\mathsf{x}), \ldots, h_N(\mathsf{x}), h_k(\mathsf{x})) \equiv 0$. Ce phénomène est relié à un exemple classique dû à Osgood, aux de travaux de A.M. Gabrielov, de E. Bierstone, P.D. Milman, de B. Malgrange ; il exhibe une différence majeure avec la géométrie algébrique locale. Aussi, l'utilisation des conditions de non-dégénérescence dans les travaux antérieurs était-elle cruciale, puisqu'à chaque étape de la démonstration, on peut substituer à la considération de l'*infinité* de séries formelles $\{\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))\}_{1\leqslant j'\leqslant d', \gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}$ celle des n composantes de h seulement. Dans ce cas, toutes les $\{\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))\}_{1\leqslant j'\leqslant d', \gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}$ sont clairement holomorphes respectivement à $(h_1(t), \ldots, h_{n'}(t))$. Mais ici, dans le cas général, on travaillera directement avec cette collection infinie $\{\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))\}_{1\leqslant j'\leqslant d', \gamma'\in\mathbb{N}^{m}}$, en utilisant de manière cruciale les deux paires d'identités de réflexion conjuguées (1.19) et (1.20) (*voir* le §7.11 ci-dessous).

1.14. Applications

Terminons cette introduction par l'énoncé de deux applications principales. D'après le Théorème 1.1, les composantes $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion associée à une équivalence formelle sont convergentes : elles s'identifient à des séries convergentes $\theta'_{j',\gamma'}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. En appliquant le théorème d'approximation de M. Artin aux équations analytiques $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t)) - \theta'_{\gamma'}(t) \equiv 0$ satisfaites par l'application formelle $h(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{n'}$, on déduit l'existence d'une application convergente $\mathsf{H}(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ telle que $\Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}(t)) - \theta'_{j',\gamma'}(t) \equiv 0$. Dans le §7.18, nous vérifierons qu'une telle application $\mathsf{H}(t)$ établit un biholomorphisme local entre M et M'. Ainsi :

COROLLAIRE 1.5. — *Deux sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ analytiques réelles génériques et minimales sont formellement équivalentes si et seulement si elles sont biholomorphes.*

Ce résultat a été obtenu dans [BER1997] par S.M. Baouendi, P. Ebenfelt et L.P. Rothschild avec l'hypothèse simple de non-dégénérescence finie. Ici, nous l'obtenons sans hypothèse de non-dégénérescence sur M', mais en utilisant fortement la minimalité. Nous pensons qu'il devrait être vrai sans aucune hypothèse sur les sous-variétés M et M' formellement équivalentes, excepté le fait qu'elles sont génériques.

Grâce au même argument d'approximation, on peut aussi déduire du Théorème 1.2 que pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe une une application

$\mathsf{H}^N(t) \in \mathbb{C}\{t\}^N$ dont la série de Taylor coïncide avec celle de h jusqu'à l'ordre $(N-1)$ compris, telle que $\mathsf{H}^N(t)$ établit une application holomorphe locale de M à valeurs dans M' (*voir* le Corollaire 7.13).

Enfin, dans le §2.5 nous établirons le corollaire suivant qui donne un critère général pour la convergence de h.

COROLLAIRE 1.6. — *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, supposons de plus qu'il existe des entiers* $j'(1), \ldots, j'(n')$ *tels que* $1 \leqslant j'(i_1') \leqslant n'$ *pour* $i_1' = 1, \ldots, n'$ *et des multiindices distincts* $\gamma'(1), \ldots, \gamma'(n') \in \mathbb{N}^{m'}$ *tels que le déterminant suivant :*

$$\det \left(\frac{\partial \Theta'_{j'(i_1'),\ \gamma'(i_1')}}{\partial t'_{i_2'}}(h(t)) \right)_{1 \leqslant i_1',\, i_2' \leqslant n'} \tag{1.27}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![t]\!]$. *Alors* M' *est holomorphiquement non-dégénérée et* h *est convergente.*

Notre premier Théorème 1.1 découle en vérité comme conséquence directe du Théorème 1.2 et de ce corollaire (*voir* §2.5).

1.15. Remarque finale

Le lecteur aura remarqué que cette introduction contient de nombreuses références aux travaux de S.M. Baouendi, de P. Ebenfelt, de F. Meylan, de N. Mir, de L.P. Rothschild et de D. Zaitsev. Durant la période 1998–2004, ces auteurs ont régulièrement suivi l'évolution de nos travaux, publiés dans des revues spécialisées ou prépubliés électroniquement. Si tous nos travaux sur les applications CR font référence à leurs travaux, comme c'est l'usage, pour la période 1998–2004, force est de constater qu'il n'existe qu'une seule publication de ces auteurs, groupée ou individuelle, dont la *bibliographie* contienne une référence à l'un de nos travaux : il s'agit du livre [BER1999a], qui cite notre travail de thèse paru en 1997, portant sur les singularités éliminables pour les fonctions CR (un autre sujet de recherche) ainsi que l'article [MM1999], écrit en 1997. Cette absence de citation est donc constatable non seulement dans les travaux que nous citons ici, mais aussi dans *tous les autres travaux (pré)publiés par ces auteurs durant cette période.* Les travaux de N. Mir, très proches des nôtres, constituent le cas le plus frappant d'absence de citation bibliographique. Pour cette raison, nous nous devions de détailler dans cette introduction la chronologie précise de l'apparition des résultats récents sur les applications CR formelles.

1.16. Remerciement

Je remercie vivement Françoise Panigeon pour ses relectures minutieuses sur écran.

2. Préliminaire : séries formelles, analytiques et algébriques

2.1. Séries formelles, analytiques, algébriques

Dans ce paragraphe liminaire et élémentaire, destiné seulement à fixer fermement nos notations et à présenter le théorème d'approximation de M. Artin, la lettre $\mathbb{K}$ désigne ou bien le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou bien le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathsf{x} := (\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ des indéterminées. Soit $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$ l'anneau local des séries formelles en les variables $(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n)$. Par définition, un élément $\varphi(\mathsf{x}) \in \mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$ s'écrit sous la forme $\varphi(\mathsf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \varphi_\alpha \, \mathsf{x}^\alpha$, où x^α est le monôme $\mathsf{x}_1^{\alpha_1} \mathsf{x}_2^{\alpha_2} \cdots \mathsf{x}_n^{\alpha_n}$ et où les coefficients φ_α, du reste arbitraires, appartiennent à $\mathbb{K}$ pour tout multiindice $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Une telle série est *identiquement nulle* si tous ses coefficients φ_α sont nuls. Nous écrirons cette propriété $\varphi(\mathsf{x}) \equiv 0$ (dans $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$). Cette relation, bien que triviale, sera fréquemment utilisée dans ce mémoire. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la variable x et les coefficients φ_α sont complexes et on définit $\overline{\varphi}(\mathsf{x}) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \overline{\varphi}_\alpha \, \mathsf{x}^\alpha$ en ne conjuguant que les coefficients de la série, de telle sorte que l'on a $\overline{\varphi(\mathsf{x})} \equiv \overline{\varphi}(\bar{\mathsf{x}})$, la barre de conjugaison se distribuant sur la série et sur la variable.

La *longueur* du multiindice α est l'entier $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. La dérivée partielle correspondante sera notée $\partial_{\mathsf{x}}^\alpha := \partial_{\mathsf{x}_1}^{\alpha_1} \partial_{\mathsf{x}_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{\mathsf{x}_n}^{\alpha_n}$ et parfois $\partial^{|\alpha|} \varphi(\mathsf{x}) / \partial \mathsf{x}_1^{\alpha_1} \partial \mathsf{x}_2^{\alpha_2} \cdots \partial \mathsf{x}_n^{\alpha_n}$. Évidemment, on a $\varphi_\alpha = [1/\alpha!] \, \partial_{\mathsf{x}}^\alpha \varphi(\mathsf{x})|_{\mathsf{x}=0}$, où le symbole $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ est le produit des factorielles des α_j.

Sur $\mathbb{K}^n$, la norme $|\mathsf{x}| := \max\{|\mathsf{x}_1|, |\mathsf{x}_2|, \dots, |\mathsf{x}_n|\}$ sera la plus commode. Si les coefficients satisfont une estimée de Cauchy de la forme $|\varphi_\alpha| \leqslant C \rho^{-|\alpha|}$, où $C > 0$ et $\rho > 0$, on dira que la série formelle $\varphi(\mathsf{x})$ *converge normalement* dans le *cube ouvert* $\square_n(\rho) := \{\mathsf{x} \in \mathbb{K}^n : |x| < \rho\}$. Bien entendu, sous cette condition, une valeur numérique $\varphi(\mathsf{x}) \in \mathbb{K}$ peut être assignée univoquement à φ en tout point $\mathsf{x} \in \square_n(\rho)$. On dira que φ est $\mathbb{K}$-*analytique* et on écrira $\varphi \in \mathbb{K}\{\mathsf{x}\}$, les constantes ρ et C étant de peu d'importance pour les problèmes que nous étudierons. Si de plus il existe un polynôme *non nul* $P(\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n, \Phi) \in \mathbb{K}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n, \Phi] \backslash \{0\}$ tel que $P(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n, \varphi(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n)) \equiv 0$, on dira que φ est $\mathbb{K}$-*algébrique* (au sens de J. Nash) et on écrira $\varphi(\mathsf{x}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}\}$. Évidemment, on a les deux inclusions strictes

$$\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!] \supset \mathbb{K}\{\mathsf{x}\} \supset \mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}\}. \tag{2.1}$$

Ces trois ensembles $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$, $\mathbb{K}\{\mathsf{x}\}$ et $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}\}$ sont des anneaux dits de *séries entières* qui sont locaux, nothériens, factoriels et qui satisfont les théorèmes de préparation et de division de K. Weierstrass. Ils sont stables par composition et par différentiation ; le théorème des fonctions implicites y est valide.

2.2. Application formelles

Soient n et n' deux entiers strictement positifs. Une *application formelle de* $\mathbb{K}^n$ *dans* $\mathbb{K}^{n'}$ consiste en la donnée d'un n'-uplet de séries entières formelles $\varphi(\mathsf{x}) := (\varphi_1(\mathsf{x}), \ldots, \varphi_{n'}(\mathsf{x}))$ appartenant à $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$ et sans terme constant, *i.e.* satisfaisant $\varphi_{i'}(0) = 0$. Une telle application est dite

(1) *inversible* si $n' = n$ et si $\det\left([\partial\varphi_{i_1}/\partial\mathsf{x}_{i_2}](0)\right)_{1\leqslant i_1,\, i_2\leqslant n} \neq 0$;

(2) *submersive* si $n' \leqslant n$ et s'il existe des entiers $1 \leqslant i(1) < \cdots < i(n') \leqslant n$ tels que $\det\left([\partial\varphi_{i'_1}/\partial\mathsf{x}_{i(i'_2)}](0)\right)_{1\leqslant i'_1,\, i'_2\leqslant n'} \neq 0$;

(3) *finie* si l'idéal engendré par les composantes $\varphi_1(\mathsf{x}), \ldots, \varphi_{n'}(\mathsf{x})$ est de codimension finie dans $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$, ce qui implique que $n' \geqslant n$;

(4) *dominante* si $n' \leqslant n$ et s'il existe des entiers $1 \leqslant i(1) < \cdots < i(n') \leqslant n$ tels que le déterminant $\det\left([\partial\varphi_{i'_1}/\partial\mathsf{x}_{i(i'_2)}](\mathsf{x})\right)_{1\leqslant i'_1,\, i'_2\leqslant n'} \not\equiv 0$ ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$;

(5) *transversale* s'il n'existe pas de série formelle $F'(\mathsf{x}'_1, \ldots, \mathsf{x}'_{n'}) \in \mathbb{C}[\![\mathsf{x}'_1, \ldots, \mathsf{x}'_{n'}]\!]$ non nulle telle que $F'(\varphi_1(\mathsf{x}), \ldots, \varphi_{n'}(\mathsf{x})) \equiv 0$ dans $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$.

On démontre de manière élémentaire que ces conditions sont ordonnées par ordre croissant de généralité (*voir* [Me2003]). La dernière condition, de loin la plus générale, n'implique aucune inégalité entre les dimensions n et n'.

2.3. Approximation

Le principal outil (non trivial) de géométrie analytique que nous utiliserons *ad nauseam* énonce que la série de Taylor de toute solution purement formelle d'équations $\mathbb{K}$-analytiques peut être corrigée à l'infini de manière à la rendre convergente, de telle sorte que la série modifiée demeure solution des équations analytiques données.

THÉORÈME 2.1 (M. ARTIN : [Ar1968], [Ar1969]). — *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 1$, *soit* $\mathsf{x} = (\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n) \in \mathbb{K}^n$, *soit* $m \in \mathbb{N}$, *avec* $m \geqslant 1$, *soit* $\mathsf{y} = (\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_m) \in \mathbb{K}^n$, *soit* $d \in \mathbb{N}$ *avec* $d \geqslant 1$ *et soit* $R_1(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \ldots, R_d(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ *une collection arbitraire de séries entières appartenant à* $\mathbb{K}\{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$ *ou à* $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$ *qui s'annulent à l'origine, c'est-à-dire* $R_j(0, 0) = 0$ *pour* $j = 1, \ldots, d$. *Supposons qu'il existe une application formelle* $h(\mathsf{x}) = (h_1(\mathsf{x}), \ldots, h_m(\mathsf{x})) \in \mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]^m$ *avec* $h(0) = 0$ *telle que*

$$R_j\,(\mathsf{x}, h(\mathsf{x})) \equiv 0 \;\text{ dans }\; \mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!], \qquad \text{pour }\; j = 1, \ldots, d. \tag{2.2}$$

Soit $\mathfrak{m}(\mathsf{x}) := \mathsf{x}_1\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!] + \cdots + \mathsf{x}_n\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$ *l'idéal maximal de* $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$. *Pour tout entier* $N \geqslant 1$, *il existe une série entière convergente* $h^N(\mathsf{x})$ *qui appartient à* $\mathbb{K}\{\mathsf{x}\}^m$ *ou à* $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}\}^m$ *telle que*

$$R_j\left(\mathsf{x}, h^N(\mathsf{x})\right) \equiv 0 \;\text{ dans }\; \mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!], \qquad \text{pour }\; j = 1, \ldots, d, \tag{2.3}$$

et qui approxime $h(\mathsf{x})$ *à l'ordre* $N - 1$, *c'est-à-dire qui satisfait*

$$h^N(\mathsf{x}) \equiv h(\mathsf{x}) \mod \left(\mathfrak{m}(x)^N\right). \tag{2.4}$$

Dans la démonstration du théorème principal 1.2, nous verrons très fréquemment apparaître des solutions formelles d'un nombre infini d'équations analytiques qu'il faudra transformer en solutions convergentes. Heureusement, la considération d'un nombre fini d'équations analytiques $R_j(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = 0$, $j = 1, \ldots, d$ dans le théorème de M. Artin n'est en rien restrictive. En effet, s'il l'on se donne au contraire un nombre infini de telles équations $R_j(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = 0$, pour $j = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, grâce à la noethérianité de $\mathbb{K}\{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$ ou de $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$, il existe un entier $d \geqslant 1$ tel que l'idéal engendré par tous les R_j coïncide avec l'idéal engendré par $R_1, R_2, \ldots, R_d$. En d'autres termes, pour tout entier $l = 1, 2, \ldots, \infty$ et tout $j = 1, \ldots, d$, il existe des coefficients $\lambda_{l,j}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ appartenant à $\mathbb{K}\{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$ ou à $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ tels que $R_l(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \equiv \sum_{j=1}^{d} \lambda_{l,j}(\mathsf{x}, \mathsf{y})\, R_j(\mathsf{x}, \mathsf{y})$. On déduit immédiatement que les équations finies $R_1\,(\mathsf{x}, h(\mathsf{x})) \equiv \cdots \equiv R_d\,(\mathsf{x}, h(\mathsf{x})) \equiv 0$ sont satisfaites si et seulement si les équations infinies $R_l(\mathsf{x}, h(\mathsf{x})) \equiv 0$ pour $l = 1, 2, \ldots, \infty$ le sont ; on déduit de même qu'une solution convergente $h^N(\mathsf{x}) \in \mathbb{K}\{\mathsf{x}\}$ ou $h^N(\mathsf{x}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}\}$ des équations finies $R_1\left(\mathsf{x}, h^N(\mathsf{x})\right) \equiv \cdots \equiv R_d\left(\mathsf{x}, h^N(\mathsf{x})\right) \equiv 0$ est automatiquement une solution des équations infinies $R_l\left(\mathsf{x}, h^N(\mathsf{x})\right) \equiv 0$, $l = 1, 2, \ldots, \infty$. En définitive, le Théorème 2.1 est tout aussi valide pour un nombre infini d'équations analytiques.

Notons qu'il n'est pas possible d'appliquer directement le Théorème 2.1 pour démontrer le Corollaire 1.5 ou le corollaire plus général du Théorème 1.2 cité avant l'énoncée du Corollaire 1.6. En effet, sous les hypothèses dudit théorème, l'application CR formelle complexifiée $h^c : (\mathcal{M}, 0) \longrightarrow_{\mathcal{F}}$

$(\mathcal{M}', 0)$ satisfait les d' équations analytiques complexes de la première ligne de (1.15), dont les variables sont $\mathsf{x} := (\zeta, t) \in \mathbb{C}^{m+n}$. En appliquant le Théorème 2.1, on trouve pour tout N une application $(H^N(\zeta, t), \Phi^N(\zeta, t)) \in \mathbb{C}\{\zeta, t\}^{2n}$ approximant h^c jusqu'à l'ordre $(N-1)$ et satisfaisant les mêmes équations analytiques. Malheureusement, rien ne permet de s'assurer que la variable ζ n'apparaît pas dans H^N et plus encore, que $\Phi^N = \overline{H}^N$. Toutes les différentiations que nous effectuerons dans les Sections 5, 6 et 7 auront pour véritable but de séparer les variables t de leurs conjuguées complexifiées τ.

Énonçons maintenant un corollaire direct (et connu) du Théorème 2.1 qui fournit un critère puissant pour la convergence d'applications formelles et rappelons-en une démonstration, élémentaire parmi d'autres.

COROLLAIRE 2.2. — *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, si $d = m$ et si le déterminant*

$$\det \left(\frac{\partial R_j}{\partial \mathsf{y}_k} (\mathsf{x}, h(\mathsf{x})) \right)_{1 \leqslant j,\, k \leqslant m} \tag{2.5}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$, la série formelle $h(\mathsf{x})$ est en fait convergente analytique ou algébrique, i.e. appartient à $\mathbb{K}\{\mathsf{x}\}^m$ ou à $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{\mathsf{x}\}^m$.

Démonstration. — Grâce à la formule de Taylor sous forme intégrale, on trouve aisément des séries entières $S_{j,k}(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{y}')$ analytiques ou algébriques satisfaisant les formules de division

$$R_j(\mathsf{x}, \mathsf{y}) - R_j(\mathsf{x}, \mathsf{y}') \equiv \sum_{k=1}^{m} S_{j,k}(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{y}') \, [\mathsf{y}_k - \mathsf{y}'_k], \tag{2.6}$$

pour $j = 1, \ldots, d$. Notons qu'en faisant tendre y'_k vers y_k, il est clair qu'on obtient

$$S_{j,k}(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{y}) \equiv [\partial R_j / \partial y_k](\mathsf{x}, \mathsf{y}). \tag{2.7}$$

Grâce au Théorème d'approximation 2.1, on trouve pour tout entier $N \geqslant 1$ des séries entières convergentes analytiques ou algébriques $h^N(\mathsf{x})$ qui sont solutions des équations $R_j\left(\mathsf{x}, h^N(\mathsf{x})\right) \equiv 0$, pour $j = 1, \ldots, m$, et qui satisfont $h^N(\mathsf{x}) \equiv h(\mathsf{x}) \mod \left(m(\mathsf{x})^N\right)$.

Remplaçons maintenant y par $h(\mathsf{x})$ et y' par $h^N(\mathsf{x})$ dans les équations (2.6), ce qui donne

$$\begin{cases} 0 \equiv R_j(\mathsf{x}, h(\mathsf{x})) - R_j\left(\mathsf{x}, h^N(\mathsf{x})\right) \\ \quad \equiv \displaystyle\sum_{k=1}^{m} S_{j,k}\left(\mathsf{x}, h(\mathsf{x}), h^N(\mathsf{x})\right) [h_k(\mathsf{x}) - h_k^N(\mathsf{x})], \end{cases} \tag{2.8}$$

pour $j = 1, \ldots, m$. En tenant compte de l'identité (2.7), l'hypothèse que le déterminant (2.5) ne s'annule pas identiquement s'écrit de manière équivalente

$$\det\left(S_{j,k}\left(\mathsf{x},\, h(\mathsf{x}),\, h(\mathsf{x})\right)\right)_{1\leqslant j,\, k\leqslant m} \not\equiv 0 \quad \text{dans } \mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]. \tag{2.9}$$

Il en découle aisément que si N est suffisamment grand, le déterminant

$$\det\left(S_{j,\,k}\left(\mathsf{x},\, h(\mathsf{x}),\, h^N(\mathsf{x})\right)\right)_{1\leqslant j,\, k\leqslant m} \tag{2.10}$$

ne s'annule (lui non plus) pas identiquement dans $\mathbb{K}[\![\mathsf{x}]\!]$. Finalement, en interprétant (2.8) comme un système linéaire homogène dont les inconnues sont les $h_k(\mathsf{x}) - h_k^N(\mathsf{x})$, pour $k = 1, \ldots, m$, la non-annulation du déterminant (2.10) implique immédiatement que $h_k(\mathsf{x}) \equiv h_k^N(\mathsf{x})$ pour $k = 1, \ldots, m$. En conclusion, l'application formelle $h(\mathsf{x}) \equiv h^N(\mathsf{x})$, qui s'identifie donc à l'une des applications *convergentes* qui sont fournies par l'approximation de M. Artin pour N assez grand, est effectivement convergente, analytique ou algébrique. □

2.4. Équivalences CR formelles non convergentes entre sous-variétés holomorphiquement dégénérées

Dans ce paragraphe, nous vérifions l'assertion faite au §1.5 de l'Introduction. Soit donc $(s', t') \longmapsto \exp(s'X')(t') =: \varphi'(s', t')$ le flot local d'un champ de vecteurs holomorphe $X' = \sum_{i'=1}^{n'} a'_{i'}(t')\, \frac{\partial}{\partial t'_{i'}}$ non nul tangent à une sous-variété M' de $\mathbb{C}^{n'}$ analytique réelle, générique et passant par l'origine. Par définition, cette application holomorphe définie au voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n'}$ est uniquement déterminée par la condition initiale $\varphi'(0, t') \equiv t'$ et par le système d'équations différentielles ordinaires $\partial_{s'}\, \varphi'_{i'}(s', t') \equiv a'_{i'}(\varphi'(s', t'))$, pour $i' = 1, \ldots, n'$.

Supposons M' représentée par les équations analytiques réelles $\rho'_{j'}(t', \bar{t}') = 0$, pour $j' = 1, \ldots, d'$. La condition de tangence de X' à M' implique évidemment que le flot de X' stabilise M', c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible de taille $d' \times d'$ de séries entières convergentes $c'(s', t', \bar{s}', \bar{t}')$ telle que l'on a l'identité vectorielle

$$\rho'\left(\varphi'(s', t'),\, \overline{\varphi}'(\bar{s}', \bar{t}')\right) \equiv c'\left(s', t', \bar{s}', \bar{t}'\right)\, \rho'\left(t', \bar{t}'\right). \tag{2.11}$$

De plus, comme X' ne s'annule pas identiquement, après une renumérotation éventuelle, on peut supposer que $a'_1(t') \not\equiv 0$. Il en découle que $\partial_{s'}\, \varphi'_1(0, t') \equiv a'_1\left(\varphi'(0, t')\right) \not\equiv 0$ dans $\mathbb{C}\{t'\}$. Autrement dit, dans le développement en série entière de $\partial_{s'}\, \varphi'_1(s', t')$ par rapport aux puissances de s', qui s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty} (s')^k\, \varphi'_{1,\,k}(t')$, on a $\varphi'_{1,\,0}(t') \not\equiv 0$. On vérifie alors facilement que pour toute série formelle $\varpi'(t') \in \mathbb{C}[\![t']\!]$ dont l'ordre d'annulation est suffisamment élevé, *i.e.* $\varpi'(t') \in [m(t')]^N$ pour N assez grand, la composition $\partial_{s'}\varphi'_1(\varpi'(t'), t')$ ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![t']\!]$. Le lemme suivant achève d'établir l'énoncé désiré.

LEMME 2.3. — *Pour toute série entière $\varpi'(t') \in \mathbb{C}[\![t']\!]$ non convergente qui satisfait $\partial_{s'}\varphi'_1(\varpi'(t'), t') \not\equiv 0$, l'application $t' \mapsto_{\mathcal{F}} \varphi'(\varpi'(t'), t')$ induit une auto-application CR formelle de M' qui n'est pas convergente.*

Démonstration. — En effet, si l'on remplace s' par $\varpi'(t')$ dans (2.11), on voit immédiatement que $t' \longmapsto_{\mathcal{F}} \varphi'(\varpi'(t'), t')$ induit une auto-application CR formelle de M'.

Supposons par l'absurde qu'elle est convergente. En particulier, sa première composante $\varphi'_1(\varpi'(t'), t')$ s'identifie à une série convergente. Notons-la $\alpha'_1(t') \in \mathbb{C}\{t'\}$ et considérons l'identité formelle

$$\varphi'(\varpi'(t'), t') - \alpha'_1(t') \equiv 0, \tag{2.12}$$

qui exprime que $\varpi'(t')$ est solution d'équations analytiques. Puisque l'on suppose que $\partial_{s'}\varphi'_1(\varpi'(t'), t') \not\equiv 0$, l'hypothèse principale du Corollaire 2.9 est exactement satisfaite, ce qui implique que $\varpi'(t')$ est convergente. Cette contradiction conclut le raisonnement par l'absurde. En conclusion, l'auto-application CR formelle $t' \mapsto_{\mathcal{F}} \varphi'(\varpi'(t'), t')$ n'est pas convergente. □

2.5. Démonstrations du Corollaire 1.6 et du Théorème 1.1

D'après le Théorème 1.2, toutes les composantes $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))$ s'identifient à des séries entières convergentes $\theta'_{j',\gamma'}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, pour $j' = 1, \ldots, d'$ et $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Considérons les équations analytiques suivantes, en nombre infini :

$$\Theta'_{j',\gamma'}(h(t)) - \theta'_{j',\gamma'}(t) \equiv 0\ ; \tag{2.13}$$

elles sont satisfaites par l'application formelle $h(t)$. Les hypothèses du Corollaire 1.6 sont exactement celles qui assurent que le Corollaire 2.2 s'applique. Donc $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ converge. Le Corollaire 1.6 est démontré.

Pour établir le Théorème 1.1, rappelons que M' est holomorphiquement non-dégénérée si et seulement si il existe des entiers $j'(1), \ldots, j'(n')$ tels que $1 \leqslant j'(i'_1) \leqslant d'$ pour $i'_1 = 1, \ldots, n'$ et des multiindices distincts $\gamma'(1), \ldots, \gamma'(n') \in \mathbb{N}^{m'}$ tels le déterminant suivant :

$$\det\left(\frac{\partial\Theta'_{j'(i'_1),\ \gamma'(i'_1)}}{\partial t'_{i'_2}}(t')\right)_{1\leqslant i'_1,\, i'_2\leqslant n'} \tag{2.14}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![t']\!]$ (*cf.* [St1996], [BER1999a] ou le Lemme 3.2.49 **(5)** dans [Me2003]). Si $h(t)$ est inversible à l'origine elle est à la fois CR-transversale et transversale à l'origine. Le Théorème 1.2 s'applique : les composantes $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))$ s'identifient à des séries entières convergentes $\theta'_{j',\gamma'}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, pour $j' = 1, \ldots, d'$ et $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

Puisque h est transversale à l'origine, le déterminant (1.27) pour les mêmes entiers $j'(i'_1)$ et les mêmes multiindices $\gamma'(i'_1)$ ne peut pas s'annuler identiquement. L'hypothèse principale du Corollaire 1.6 est satisfaite, donc $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ converge. Nous en déduisons même que le Théorème 1.1 est vrai avec l'hypothèse plus générale que h est CR-transversale et transversale à l'origine, ou avec d'autres hypothèses intermédiaires.

3. Géométrie locale des paires de feuilletages minimales

3.1. Avertissement

Nos considérations seront toujours locales, centrées en un point fixe de $\mathbb{C}^n$ que l'on supposera être l'origine, sans perte de généralité. Nous éviterons soigneusement d'employer le langage des germes, dont l'ambiguïté fondamentale qui consiste à ne pas préciser dans quels petits ouverts on travaille, loin de simplifier les énoncés et les démonstrations, entretient des imprécisions qui nuisent à la cohérence de l'ensemble et occultent le sens géométrique concret des concepts, localisés au fur et à mesure des preuves[3].

Dans cette section et dans celle qui suit, nous présentons les notions de base. Elles sont développées en partie dans d'autres références, mais elles y sont généralement exposées dans un autre langage ou d'une manière parfois incomplète que nous jugeons trop peu conceptuelle ou insuffisamment épurée. Après une présentation progressive et générale des deux objets fondamentaux que sont la paire de feuilletages invariants (Section 3) et les jets des sous-variétés de Segre (Section 4), les objets analytiques avec lesquels nous travaillerons réellement seront clairement et concrètement posés dans les deux résumés qui apparaissent aux sous-sections 3.10 et 4.7.

(3) Par exemple, le fait de travailler avec des polydisques emboîtés dont les rayons décroissants sont précisés successivement en fonction de contraintes explicites est un ingrédient substantiel pour démontrer de manière rigoureuse et complète que l'ensemble des automorphismes holomorphes locaux d'une sous-variété locale de $\mathbb{C}^n$ analytique réelle, générique et finiment non-dégénérée est un *groupe de Lie local de dimension finie*, notion qui ne s'accommode guère du langage des germes si l'on tient à la relier concrètement à l'objet géométrique qui est stabilisé (*voir* le Théorème 4.1 dans [GM2004] ; le théorème le plus général dans cette direction obtenu auparavant par les auteurs de [Za1997] et [BER1999a] se limite, sans nécessité apparente, au sous-groupe d'isotropie d'un point fixe donné à l'avance).

Bien que les concepts de base possèdent tous un sens géométrique initial, en vérité, ce qui constituera pour nous l'essence même du Théorème principal 1.2, c'est l'architecture purement algébrique des calculs formels qui apparaîtront dans sa démonstration développée ; c'est l'enchaînement structuré, réglé et épuré des gestes formels ; et surtout, c'est la *nature duelle des calculs*, toujours absolument symétriques par conjugaison complexe. C'est pourquoi nous exprimerons nos calculs en déployant leurs deux versions parallèles d'une manière simultanée. Enfin, c'est grâce à cette compréhension interne de la symétrie entre les variables holomorphes et les variables antiholomorphes que nous serons à même de transférer presque directement un large pan de la géométrie CR à l'étude des systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles analytiques (*voir* [Me2004]).

Ainsi, dans ce mémoire, sera privilégiée la concrétude explicite des calculs par rapport à leur possible abstraction structurale.

3.2. Sous-variétés génériques analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$

Une sous-variété analytique réelle locale M de $\mathbb{C}^n$ passant par l'origine est dite *générique* si son espace tangent *génère* $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire $T_0M + JT_0M = T_0\mathbb{C}^n$, où J désigne la structure complexe standard de $\mathbb{C}^n$. Il en découle trivialement que la codimension réelle d de M satisfait $d \leqslant n$. Si $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ sont des coordonnées centrées à l'origine, on peut représenter concrètement M par d équations cartésiennes indépendantes $\rho_1(t, \bar{t}) = 0, \dots, \rho_d(t, \bar{t}) = 0$, où les séries entières convergentes $\rho_j(t, \bar{t}) \in \mathbb{C}\{t, \bar{t}\}$ s'annulent à l'origine et satisfont la condition de réalité $\rho_j(t, \bar{t}) \equiv \bar{\rho}_j(\bar{t}, t)$. L'hypothèse que M est une sous-variété (sans singularités) de $\mathbb{C}^n$ équivaut au fait que la matrice $\left(\frac{\partial \rho_j}{\partial t_{k_1}}(t, \bar{t}) \ \ \frac{\partial \rho_j}{\partial \bar{t}_{k_1}}(t, \bar{t})\right)_{1 \leqslant j \leqslant d}^{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n}$ à d lignes et à $2n$ colonnes est de rang d à l'origine. En exprimant analytiquement la condition géométrique $T_0M + JT_0M = T_0\mathbb{C}^n$, on voit aussi que la généricité de M équivaut au fait que la matrice $\left(\frac{\partial \rho_j}{\partial t_k}(t, \bar{t})\right)_{1 \leqslant j \leqslant d}^{1 \leqslant k \leqslant n}$ de taille $d \times n$ est de rang d à l'origine. On vérifie que cette dernière condition est indépendante du choix des équations définissantes et qu'elle est alors satisfaite en tout point $p \in M$ suffisamment proche de l'origine : la généricité est une condition ouverte. Sans perte de généralité, on pourra donc supposer qu'elle est satisfaite en tout point de M.

Les sous-variétés analytiques réelles dites *Cauchy-Riemann* (CR) de $\mathbb{C}^n$ les plus générales ne sont pas forcément génériques, néanmoins, il est bien connu qu'elles sont génériques dans leur complexification intrinsèque, qui est une sous-variété complexe localement biholomorphe à $\mathbb{C}^{n'}$ pour un entier

$n' \leqslant n$; par conséquent, ne travailler qu'avec des sous-variétés génériques n'est en rien restrictif.

Grâce à la formule de la dimension pour la somme de deux sous-espaces vectoriels $\dim_{\mathbb{R}}(E+F) = \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E \cap F)$, on déduit que la distribution de sous-espaces linéaires réels $M \ni p \mapsto T_pM \cap JT_pM$ est de rang constant $2(n-d)$. Le sous-espace $T_pM \cap JT_pM$ est appelé sous-espace complexe tangent à M et noté T_p^cM. Puisque $J^2 = -\mathrm{Id}$, c'est l'unique sous-espace J-invariant de T_pM de dimension maximale. L'entier $m := n-d$ est appelé la *dimension CR* de M.

Seuls deux cas limites sont inintéressants du point de vue de la géométrie CR locale : lorsque la codimension d s'annule, auquel cas M s'identifie à un cube ouvert de $\mathbb{C}^n$, et lorsque la dimension CR m s'annule, auquel cas M s'identifie à un cube ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, *dans tout le mémoire nous travaillerons avec des sous-variétés génériques locales de codimension et de dimension CR strictement positives.*

Après une transformation linéaire inversible de $\mathbb{C}^n$ arbitrairement proche de l'identité, on peut supposer que dans les coordonnées t scindées en deux groupes $t = (z, w) = (z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_d) = (x+iy, u+iv) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, l'espace tangent T_0M ne contient aucun vecteur réel de l'espace des v ; de manière équivalente, on a : $T_0M + \big(\{0\} \times \mathbb{R}_v^d\big) = T_0\mathbb{C}^n$. Puisque la sous-variété M est alors graphée au-dessus de $\mathbb{C}_z^m \times \mathbb{R}_u^d$, on peut la représenter par d équations de la forme $v_j = \varphi_j(x, y, u)$, $j = 1, \ldots, d$, où les séries analytiques réelles $\varphi_j(x, y, u) \in \mathbb{R}\{x, y, u\}$ satisfont bien sûr $\varphi_j(0) = 0$.

De notre point de vue, toute représentation de M par des équations définissantes réelles possède le défaut majeur de ne pas différencier clairement les variables t et $\bar{t}$. C'est pourquoi nous utiliserons toujours d'autres équations définissantes, dites *équations complexes.*

Remplaçons x par $(z+\bar{z})/2$, y par $(z-\bar{z})/2i$, u par $(w+\bar{w})/2$ et v par $(w-\bar{w})/2i$ dans ces équations, ce qui donne $w_j - \bar{w}_j = 2i\,\varphi_j\,((z+\bar{z})/2, (z-\bar{z})/2i, (w+\bar{w})/2$. La matrice des dérivées partielles de ces d équations scalaires par rapport aux variables w_l, calculée à l'origine, vaut : $I_{d\times d} - 2i\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_l}(0, 0, 0)\right)_{1\leqslant j\leqslant d}^{1\leqslant l\leqslant d}$; elle est non nulle, puisque sa partie réelle ne s'annule pas. Par conséquent, le théorème des fonctions implicites (version analytique complexe) s'applique et il permet de résoudre w en fonction des variables z, $\bar{z}$ et $\bar{w}$. Notons les d équations complexes obtenues sous la forme $w_j = \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \bar{w})$, $j = 1, \ldots, d$, où les $\overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \bar{w}) \in \mathbb{C}\{z, \bar{z}, \bar{w}\}$ sont les uniques solutions des identités analytiques[4]

$$\frac{\overline{\Theta}_j(z,\,\bar z,\,\bar w)-\bar w_j}{2i}\equiv\varphi_j\left(\frac{z+\bar z}{2},\,\frac{z-\bar z}{2i},\,\frac{\overline{\Theta}(z,\,\bar z,\,\bar w)+\bar w}{2}\right). \tag{3.1}$$

On vérifie que de telles équations complexes existent avec l'hypothèse (un peu plus générale) $T_0M+(\{0\}\times\mathbb{C}^n_w)=T_0\mathbb{C}^n$. Un problème de cohérence surgit alors immédiatement : les séries entières $\overline{\Theta}_j$ étant à valeurs complexes, les parties réelles et imaginaires des équations $w_j=\overline{\Theta}_j(z,\,\bar z,\,\bar w)$ fournissent en vérité $2d$ équations réelles. De manière équivalente, il faudrait leur ajouter les équations conjuguées $\bar w_j=\Theta_j(\bar z,z,w)$, $j=1,\ldots,d$, ce qui semble contredire le fait que M est de codimension d. Autre ambiguïté : on aurait pu choisir de résoudre par rapport à $\bar w$ plutôt que par rapport à w.

Heureusement, on démontre (*cf.* [BER1999a] ou [Me2003]) qu'il existe une matrice inversible $(\bar a_{i,j}\,(\bar t,\,t))_{1\leqslant i\leqslant d}^{1\leqslant j\leqslant d}$ de séries formelles convergentes, de taille $d\times d$, égale à $-\mathrm{Id}_{d\times d}$ à l'origine, telle qu'on a l'identité formelle vectorielle

$$\bar w-\Theta(\bar z,\,z,\,w)\equiv\bar a(\bar t,\,t)\,\left[w-\overline{\Theta}(z,\,\bar z,\,\bar w)\right] \tag{3.2}$$

dans $\mathbb{C}\{t,\,\bar t\}^d$. Réciproquement, on vérifie que pour toute série entière vectorielle analytique $\Theta(\bar z,\,z,\,w)\in\mathbb{C}\{\bar z,\,z,\,w\}^d$ satisfaisant une telle équation, le sous-ensemble $M:=\{(z,\,w)\in\mathbb{C}^n:\,w=\overline{\Theta}(z,\,\bar z,\,\bar w)\}$ est une sous-variété locale de $\mathbb{C}^n$ analytique *réelle*, générique et de codimension d.

Il découle aussi visiblement de (3.2) qu'on n'obtiendrait aucune équation indépendante nouvelle pour la représentation de M par les équations $w_j=\overline{\Theta}_j(z,\,\bar z,\,\bar w)$ en leur ajoutant les équations conjuguées $\bar w_j=\Theta_j(\bar z,\,z,\,w)$.

Mais on se gardera d'en déduire (comme dans [BER1999a]) que l'on peut choisir définitivement pour la représentation de M l'une de ses deux collections d'équations définissantes conjuguées. En effet, nous allons constater nettement dans la Section 7 ci-dessous qu'il est nécessaire d'effectuer un jeu alternatif permanent entre les deux systèmes d'équations, vus comme un couple d'objets symétriques articulés par la relation (3.2) : *cette ambiguïté est fondamentale.*

---

(4) Nous notons ici ces solutions $\overline{\Theta}_j$, en les équipant d'emblée d'une barre de conjugaison complexe, avec l'idée que dans leurs $2m+d$ arguments $(z,\,\bar z,\,\bar w)$, ceux qui sont des conjugués de variables complexes dominent. Dans la suite, nous verrons à quel point le jeu alternatif entre les séries entières $\overline{\Theta}_j(z,\bar z,\bar w)$ et leurs conjuguées $\Theta_j(\bar z,\,z,\,w)$ est crucial.

3.3. Complexification extrinsèque

Soient maintenant $\zeta \in \mathbb{C}^m$ et $\xi \in \mathbb{C}^d$ des nouvelles coordonnées indépendantes correspondant aux complexifications des variables $\bar{z}$ et $\bar{w}$, ce que l'on peut écrire symboliquement $\zeta := (\bar{z})^c$ et $\xi := (\bar{w})^c$, où la lettre « c » est l'initiale du mot « complexification ». On notera $\tau := (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^n$ la complexification de $\bar{t}$. Dans la suite, on utilisera les notations légèrement abrégées $\overline{\Theta}(z, \bar{t})$ et $\Theta(\bar{z}, t)$ plus fréquemment que $\overline{\Theta}(z, \bar{z}, \bar{w})$ et $\Theta(\bar{z}, z, w)$. En remplaçant $\bar{t}$ par τ dans les séries entières convergentes $\overline{\Theta}_j(z, \bar{t}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m, \alpha \in \mathbb{N}^n} \overline{\Theta}_{j,\beta,\alpha}\, z^\beta\, \bar{t}^\alpha$, où $\overline{\Theta}_{j,\beta,\alpha} \in \mathbb{C}$, on obtient des séries entières convergentes $\overline{\Theta}_j(z, \tau) := \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m, \alpha \in \mathbb{N}^n} \overline{\Theta}_{j,\beta,\alpha}\, z^\beta\, \tau^\alpha$ des $m + n$ variables indépendantes (z, τ). La *complexification extrinsèque* $\mathcal{M} := (M)^c$ de M est alors la sous-variété analytique complexe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ passant par l'origine et de codimension d qui est définie par l'une des deux collections de d équations définissantes holomorphes

$$w_j = \overline{\Theta}_j(z, \tau) \qquad \text{ou} \qquad \xi_j = \Theta_j(\zeta, t), \tag{3.3}$$

qui sont évidemment équivalentes en vertu de la complexification de la relation (3.2), qui s'écrit :

$$\xi - \Theta(\zeta, t) \equiv \bar{a}(\tau, t)\, \left[w - \overline{\Theta}(z, \tau)\right]. \tag{3.4}$$

Notons que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 2m + d$. Notons aussi que M se plonge dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ comme l'intersection de sa complexification $\mathcal{M}$ avec la diagonale antiholomorphe $\underline{\Lambda} := \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \tau = \bar{t}\}$. Cependant, dans toute la suite de ce mémoire, nous ne travaillerons désormais qu'avec des sous-variétés génériques complexifiées. C'est pourquoi *notre objet géométrique fondamental de départ est la sous-variété analytique complexe locale $\mathcal{M}$ définie par les équations (3.3) qui sont articulées par la relation de symétrie (3.4).* Plus analytiquement encore, *notre objet fondamental de départ est la collection des séries entières analytiques complexes $\overline{\Theta}_j(z, \tau)$ ainsi que leurs conjuguées $\Theta_j(\zeta, t)$.*

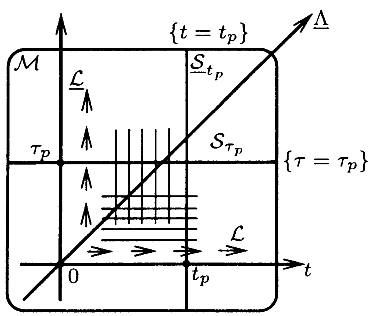
3.4. Paire de feuilletages invariants

Toute biholomorphisme local de $\mathbb{C}^n$ la forme $t' = h(t) = (h_1(t), \ldots, h_n(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^n$ fixant l'origine induit par conjugaison l'anti-biholomorphisme $\bar{t}' = \bar{h}(\bar{t})$ et par conséquent, il se complexifie en un biholomorphisme $(t', \tau') = (h(t), \bar{h}(\tau))$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ qui est d'une forme particulière, puisqu'il est à variables séparées. Géométriquement parlant, un tel biholomorphisme du produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ envoie les sous-ensembles $\{t = ct.\}$ et $\{\tau = ct.\}$ sur les sous-ensembles $\{t' = ct.\}$ et $\{\tau' = ct.\}$: il stabilise la paire de feuilletages triviaux qui sont parallèles aux axes de coordonnées « horizontales » t et

« verticales » τ. Par conséquent, tous les concepts analytico-géométriques locaux qui sont attachés à M d'une manière qui est invariante par rapport aux changements de coordonnées holomorphes de la forme $t \mapsto h(t)$ coïncident avec les objets analytico-géométriques de $\mathcal{M}$ qui sont invariants par rapport au sous-groupe (infini) de transformations de la forme $(t, \tau) \mapsto (h(t), \bar{h}(\tau))$. En particulier, les deux feuilletages de $\mathcal{M}$ dont les feuilles sont les intersections de $\mathcal{M}$ avec les sous-ensembles $\{t = ct.\}$ et $\{\tau = ct.\}$ sont invariants. Analytiquement, ces feuilles sont ce qu'on appellera les *sous-variétés de Segre complexifiées* $\mathcal{S}_{\tau_p}$ et les *sous-variétés de Segre complexifiées conjuguées*[5], définies par

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{\tau_p} := \big\{(t, \tau) \in \mathbb{C}^{2n} : \ \tau = \tau_p, \ w = \overline{\Theta}(z, \tau_p)\big\} = \mathcal{M} \cap \{\tau = \tau_p\} & \text{et} \\ \underline{\mathcal{S}}_{t_p} := \big\{(t, \tau) \in \mathbb{C}^{2n} : \ t = t_p, \ \xi = \Theta(\zeta, t_p)\big\} \ = \mathcal{M} \cap \{t = t_p\}, \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\tau_p \in \mathbb{C}^n$ et $t_p \in \mathbb{C}^n$ sont fixes.



La complexification d'une sous-variété analytique réelle porte une paire de feuilletages invariants qui sont les sous-variétés intégrales des complexifiés des champs de vecteurs de types $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et qui s'identifient aussi aux sous-variétés de Segre complexifiées.

Figure 1. — Géométrie de la complexification $\mathcal{M}$

Le diagramme ci-dessus a pour objet de représenter cette paire fondamentale de feuilletages. Cependant, nous mettons le lecteur en garde, parce que sur cette figure bidimensionnelle, la codimension dans $\mathcal{M}$ de la paire de feuilletages semble nulle alors qu'en réalité, elle est strictement positive :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_{\tau_p} - \dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{S}}_{t_p} = d \geqslant 1. \tag{3.6}$$

Pour se représenter intuitivement la situation géométrique d'une manière plus adéquate, on devrait imaginer par exemple que $\mathcal{M}$ est un cube de dimension trois équipé de deux feuilletages par des courbes qui sont en position générale.

---

(5) Avant complexification, on peut définir préalablement les sous-variétés de Segre classiques $S_{\bar{t}_p} \subset \mathbb{C}^n$ ([Se1931a], [Se1931b], [Se1932], [We1977], [We1977]) et conjuguées $\overline{S}_{t_p} \subset \mathbb{C}^n$ (traditionnellement ignorées), que l'on envisage d'emblée comme un couple symétrique articulé par la conjugaison complexe (*voir* surtout [Me1998] et [Me2003]).

3.5. Flots de champs CR complexifiés

On dira intuitivement que $\mathcal{M}$ est *minimale à l'origine* si l'on peut recouvrir un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}$ en se déplaçant alternativement le long des sous-variétés de Segre complexifiées et le long des sous-variétés de Segre complexifiées conjuguées. Afin de définir rigoureusement cette condition (*voir* la Définition 3.1 *infra*), il est nécessaire d'exprimer mathématiquement ce que l'on entend par déplacement alternatif le long de la paire de feuilletages invariants.

Pour cela, complexifions une famille génératrice $L_1, \dots, L_m$ de champs de vecteurs CR tangents à M de type (1, 0) ainsi que leurs conjugués $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_m$ qui sont de type (0, 1). On peut choisir explicitement les générateurs $L_k := \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z, \bar{z}, \bar{w}) \frac{\partial}{\partial w_j}$ pour $k = 1, \dots, m$. Les complexifications fournissent deux collections de m champs de vecteurs à coefficients analytiques donnés explicitement par

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k := \dfrac{\partial}{\partial z_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z, \zeta, \xi) \dfrac{\partial}{\partial w_j}, \quad k = 1, \dots, m, \quad \text{et} \\ \underline{\mathcal{L}}_k := \dfrac{\partial}{\partial \zeta_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta, z, w) \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad k = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{3.7}$$

On vérifie immédiatement que $\mathcal{L}_k \left(w_j - \overline{\Theta}_j(z, \zeta, \xi)\right) \equiv 0$, ce qui montre que les champs de vecteurs $\mathcal{L}_k$ sont tangents à $\mathcal{M}$. De manière analogue, $\underline{\mathcal{L}}_k \left(\xi_j - \Theta_j(\zeta, z, w)\right) \equiv 0$, de telle sorte que les champs de vecteurs $\underline{\mathcal{L}}_k$ sont aussi tangents à $\mathcal{M}$. De plus, on vérifie immédiatement les relations de commutation $[\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_{k'}] = 0$ et $[\underline{\mathcal{L}}_k, \underline{\mathcal{L}}_{k'}] = 0$ pour tous $k, k' = 1, \dots, m$. D'après le théorème de Frobenius, il découle de ces relations de commutation que chacune des distributions m-dimensionnelles engendrées par ces deux collections de champs de vecteurs est intégrable ; cela n'a rien de surprenant, puisque les variétés intégrales de $\{\mathcal{L}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$ ne sont autres que les variétés de Segre complexifiées, tandis que les variétés intégrales de $\{\underline{\mathcal{L}}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$ ne sont autres que les variétés de Segre complexifiées conjuguées. Bien sûr, en général les $\mathcal{L}_k$ ne commutent pas avec les $\underline{\mathcal{L}}_{k'}$: c'est justement la non-intégrabilité de la distribution CR complexifiée engendrée par les deux familles $\{\mathcal{L}_k, \underline{\mathcal{L}}_{k'}\}_{1 \leqslant k, k' \leqslant m}$ qui est responsable de la minimalité (*cf.* Lemme 3.3 *infra*).

Grâce à cette paire de familles de champs de vecteurs, on peut paramétrer les sous-variétés de Segre complexifiées (conjuguées). En effet, introduisons les flots « multiples » des deux collections $(\mathcal{L}_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ et $(\underline{\mathcal{L}}_{k'})_{1 \leqslant k' \leqslant m}$. Si p est un point arbitraire de $\mathcal{M}$ dont les coordonnées $(w_p, z_p, \zeta_p, \xi_p) \in \mathbb{C}^{2n}$ satisfont les équations (3.3) et si $z_1 := (z_{1,1}, \dots, z_{1,m}) \in \mathbb{C}^m$ est un paramètre de « multitemps » complexe arbitraire, définissons le « multiflot » de $\mathcal{L}$ par

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{z_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := \exp(z_1 \mathcal{L})(p) \\ \qquad\qquad := \exp(z_{1,1}\mathcal{L}_1(\cdots(\exp(z_{1,m}\mathcal{L}_m(p)))\cdots)) \\ \qquad\qquad := \left(z_p + z_1, \overline{\Theta}(z_p + z_1, \zeta_p, \xi_p), \zeta_p, \xi_p\right). \end{cases} \tag{3.8}$$

Bien entendu, $\mathcal{L}_{z_1}(p)$ appartient à $\mathcal{M}$. De manière analogue, pour $p \in \mathcal{M}$ et $\zeta_1 \in \mathbb{C}^m$, le « multiflot » de $\underline{\mathcal{L}}$ se définit par

$$\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := (z_p, w_p, \zeta_p + \zeta_1, \Theta(\zeta_p + \zeta_1, z_p, w_p)), \tag{3.9}$$

et l'on a $\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(p) \in \mathcal{M}$. Notons que les deux applications (3.8) et (3.9) sont holomorphes par rapport à leurs variables.

3.6. Chaînes de Segre

Ainsi, plaçons tout d'abord le point p à l'origine et déplaçons-nous le long de la variété de Segre complexifiée conjuguée $\underline{\mathcal{S}}_0$ d'une hauteur de $z_1 \in \mathbb{C}^m$, c'est-à-dire considérons le point $\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)$, que nous noterons aussi $\underline{\Gamma}_1(z_1)$. Bien sûr, on a $\underline{\Gamma}_1(0) = 0$. Soit $z_2 \in \mathbb{C}^m$. En partant de ce point $\underline{\Gamma}_1(z_1)$, déplaçons-nous horizontalement le long de la variété de Segre complexifiée d'une longueur de $z_2 \in \mathbb{C}^m$, c'est à dire considérons le point

$$\underline{\Gamma}_2(z_1, z_2) := \mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)). \tag{3.10}$$

Ensuite, définissons $\underline{\Gamma}_3(z_1, z_2, z_3) := \underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))$, puis

$$\underline{\Gamma}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) := \mathcal{L}_{z_4}(\underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))), \tag{3.11}$$

et ainsi de suite. Le diagramme suivant illustre le procédé :

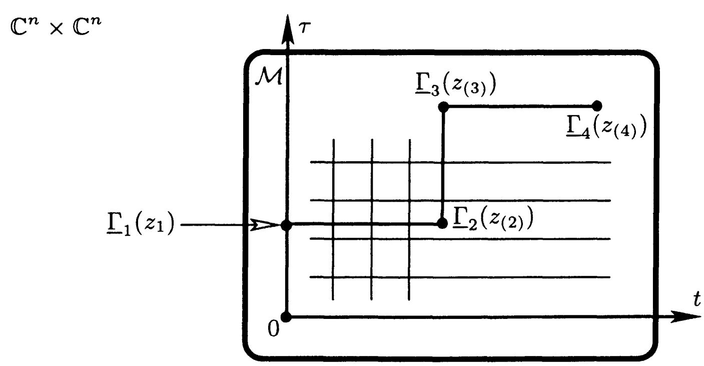


Figure 2. — Chaînes de Segre dans $\mathcal{M}$

Par récurrence, pour tout entier positif k, on obtient une application holomorphe locale $\underline{\Gamma}_k(z_1, \ldots, z_k)$ à valeurs dans $\mathcal{M}$, définie pour $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^m$ suffisamment petits et satisfaisant $\underline{\Gamma}_k(0, \ldots, 0) = 0$. Dans la suite, nous utiliserons souvent l'abréviation $z_{(k)} := (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^{mk}$ et nous appellerons $\underline{\Gamma}_k$ la *k-ième chaîne de Segre conjuguée.*

Si l'on commençait cette suite d'applications holomorphes composées par le flot de $\mathcal{L}$ au lieu de commencer par celui de $\underline{\mathcal{L}}$, on obtiendrait des applications $\Gamma_1(z_1) := \mathcal{L}_{z_1}(0)$, puis $\Gamma_2(z_{(2)}) := \underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_{z_1}(0))$, *etc.*, et généralement $\Gamma_k(z_{(k)})$. Nous appellerons Γ_k la *k-ième chaîne de Segre.*

Puisque $\Gamma_k(0) = \underline{\Gamma}_k(0) = 0$, pour tout entier strictement positif k, il existe un cube (polydisque) suffisamment petit $\square_{mk}(\delta_k)$ centré à l'origine dans $\mathbb{C}^{mk}$ et de rayon $\delta_k > 0$ tel que $\Gamma_k(z_{(k)})$ et $\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})$ appartiennent à $\mathcal{M}$ pour tout $z_{(k)} \in \square_{mk}(\delta_k)$.

Il existe une relation de symétrie entre Γ_k et $\underline{\Gamma}_k$. En effet, soit $\overline{\sigma}$ l'involution antiholomorphe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ définie par $\overline{\sigma}(t, \tau) := (\bar{\tau}, \bar{t})$. Puisque l'on a $w = \overline{\Theta}(z, \zeta, \xi)$ si et seulement si $\xi = \Theta(\zeta, z, w)$, cette involution envoie $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ et elle fixe aussi point par point la diagonale antiholomorphe $\underline{\Lambda}$. En appliquant $\overline{\sigma}$ aux définitions (3.8) et (3.9) des flots de $\mathcal{L}$ et de $\underline{\mathcal{L}}$, on vérifie aisément que $\overline{\sigma}(\mathcal{L}_{z_1}(p)) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{z}_1}(\overline{\sigma}(p))$. Il en découle la relation de symétrie générale $\overline{\sigma}\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) = \underline{\Gamma}_k\left(\overline{z_{(k)}}\right)$. Dans la suite de ce mémoire, nous travaillerons essentiellement avec les applications $\underline{\Gamma}_k$.

3.7. Minimalité locale

Observons que $\mathcal{L}_0(p) = p$ et que $\underline{\mathcal{L}}_0(p) = p$; autrement dit, $\mathcal{L}_0$ et $\underline{\mathcal{L}}_0$ coïncident avec l'application identité. Nous en déduisons l'identité : $\Gamma_{k+1}(z_{(k)}, 0) \equiv [\mathcal{L} \text{ ou } \underline{\mathcal{L}}]_0\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \equiv \Gamma_k(z_{(k)})$. Par conséquent, les rangs des applications $\underline{\Gamma}_k$ croissent avec k. Bien entendu, ces rangs sont bornés par $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 2m + d$. On déduit aussi des relations $\Gamma_{k+1}(z_{(k)}, 0) = \Gamma_k(z_{(k)})$ que pour tout $k \geqslant 2$, le rang à l'origine de $\underline{\Gamma}_k$ est invariablement égal à $2m$, mais en des points $\underline{z}^*_{(k)} \in \square_{mk}(\delta_k)$ distincts de l'origine, le rang des applications $\underline{\Gamma}_k$ peut augmenter jusqu'à atteindre $2m + d$. Nous pouvons maintenant énoncer la définition précise de la notion de minimalité.

DÉFINITION 3.1. — *La sous-variété complexifiée $\mathcal{M}$ d'une sous-variété locale de $\mathbb{C}^n$ analytique réelle, générique M est dite minimale à l'origine s'il existe un entier $\mu_0 \geqslant 1$ et des points $\underline{z}^*_{(\mu_0)} \in \square_{m\mu_0}(\delta_{\mu_0})$, arbitrairement proches de l'origine satisfaisant $\underline{\Gamma}_{\mu_0}\left(\underline{z}^*_{(\mu_0)}\right) = 0$ tels que l'application $\underline{\Gamma}_{\mu_0}$ est de rang (maximal possible) égal à $2m + d$ en ces points $\underline{z}^*_{(\mu_0)}$.*

Dans ce cas, l'image d'un petit voisinage d'un tel point $\underline{z}^*_{(\mu_0)}$ dans $\mathbb{C}^{m\mu_0}$ contient un petit voisinage de 0 dans $\mathcal{M}$. Grâce à la relation $\overline{\sigma}\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) = \underline{\Gamma}_k\left(\overline{z_{(k)}}\right)$, une propriété similaire est satisfaite par Γ_{μ_0}, avec le même entier μ_0. On dira aussi que M est minimale à l'origine si sa complexifiée $\mathcal{M}$ l'est, au sens de cette définition.

Bien qu'il ne soit pas nécessaire, *stricto sensu*, de commenter cette condition de minimalité pour comprendre la démonstration du Théorème 1.2, formulons quand même quelques énoncés explicatifs.

3.8. Commentaires

Rappelons que le *rang générique* d'une application holomorphe entre deux cubes complexes est le maximum de son rang aux différents points du cube à la source. En travaillant d'abord avec le rang générique des applications $\underline{\Gamma}_k$, qui lui aussi croît avec k, on démontre des propriétés élémentaires que nous résumons dans l'énoncé suivant, établi dans la Section 7 de [Me1998] et dans le Chapitre 2 de [Me2003].

THÉORÈME 3.2. — *La minimalité en* 0 *de la sous-variété générique complexifiée $\mathcal{M} = (M)^c$ de $\mathbb{C}^n$ est une propriété invariante par biholomorphisme local : elle ne dépend ni du choix d'équations définissantes pour M, ni du choix d'un système de coordonnées holomorphes s'annulant au point de référence, ni du choix d'un système générateur de champs CR complexifiés (conjugués) $(\mathcal{L}_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ et $(\underline{\mathcal{L}}_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$. De plus, il existe un entier invariant ν_0 satisfaisant $\nu_0 \leqslant d+1$, qu'on appellera le* type de Segre *de M à l'origine, qui est le plus petit entier k tel que les applications Γ_k et $\underline{\Gamma}_k$ sont de rang générique égal à $2m+d$ sur le cube $\square_{mk}(\delta_k)$, pour tout $k \geqslant \nu_0+1$. Enfin, l'entier* impair *$\mu_0 := 2\nu_0 + 1$, que l'on appellera le* type de Segre de $\mathcal{M}$ *à l'origine, est le plus petit entier k tel que les applications Γ_k et $\underline{\Gamma}_k$ sont de rang égal à $2m+d$ en des points $z^*_{(k)} \in \square_{mk}(\delta_k)$ et $\underline{z}^*_{(k)} \in \square_{mk}(\delta_k)$ satisfaisant $\Gamma_k\left(z^*_{(k)}\right) = 0$ et $\underline{\Gamma}_k\left(\underline{z}^*_{(k)}\right) = 0$ qui sont arbitrairement proches de l'origine dans $\mathbb{C}^{mk}$.*

Le fait qu'il existe de tels points $z^*_{(k)}$ et $\underline{z}^*_{(k)}$ arbitrairement proches de l'origine est dû à la propriété qu'ont les applications holomorphes locales d'atteindre leur rang générique en tout point d'un ouvert de Zariski dense de l'espace source, grâce au principe du prolongement analytique (*cf.* [Me1998], [Me2003]). Ce fait assez crucial sera utilisé dans le §3.10 ci-dessous.

Le procédé de démonstration de ce théorème est inspiré de la construction des orbites de champs de vecteurs, telle qu'elle apparaît dans l'article [Su1973], dont la nouveauté principale résidait dans le traitement des systèmes de champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, par opposition aux champs dont les coefficients sont analytiques. Mais dans la catégorie analytique, un théorème semblable était connu depuis l'article [Na1966], où l'auteur raisonne plutôt en considérant l'algèbre de Lie engendrée par un système de champs de vecteurs analytiques. H.J. Sussmann démontre une proposition générale établissant l'équivalence entre ces deux procédés ([Su1973], Theorem 8.1 et §9), laquelle, spécifiée à la géométrie CR analytique locale, nous offre l'énoncé suivant :

LEMME 3.3 ([BER1996], [Me1998]). — *La sous-variété générique* analytique *complexifiée* $\mathcal{M} = (M)^c$ *de* $\mathbb{C}^n$ *est minimale à l'origine (au sens de la Définition 3.1) si et seulement si l'algèbre de Lie engendrée par les sections locales du fibré tangent complexe* $T^cM = TM \cap JTM$ *engendre l'espace tangent à* M *à l'origine (cette algèbre de Lie est constituée de toutes les combinaisons linéaires à coefficients analytiques réels de crochets de Lie emboîtés* $[X_1[X_2[X_3[\ldots[X_k, X_{k+1}]\ldots]]]]$ *de longueur finie* k *arbitraire, où les* X_l *sont des sections de* T^cM*).*

Cette deuxième condition, plus ancienne, est classique. Certains auteurs appellent la sous-variété générique *M de type fini à l'origine* (au sens de T. Bloom et I. Graham) si les crochets de Lie de T^cM de longueur arbitraire engendrent TM à l'origine. Nous préférons l'appellation de *minimalité à l'origine* (au sens de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov), puisque ce sont les orbites des champs de vecteurs CR complexifiés qui sont les « bons objets », et non leurs crochets de Lie. En effet, ce sont les travaux profonds de J.-M. Trépreau [Tr1986], [Tr1990] et de A.E. Tumanov [Tu1988], [Tu1994] qui ont fait définitivement comprendre l'adéquation de la correspondance entre les orbites CR et les wedges attachés pour l'extension holomorphe des fonctions CR (*cf.* aussi [Me1994]).

Rappelons aussi que les deux concepts que sont les flots de champs de vecteurs et leurs crochets de Lie sont étrangers l'un à l'autre quant à la combinatoire des calculs, comme l'illustrent les nombreux exemples que l'on trouve à la Section 8 de [Me1998]. De plus, la démonstration d'un théorème essentiellement équivalent au Théorème 3.2 que l'on trouve dans [BER1996] et dans [BER1999a] utilise fortement les crochets de champs de vecteurs et un système de coordonnées dites « normales », qui sont adaptées aux *nombres de L. Hörmander* de la structure, lesquels sont des invariants combinatoires décrivant les sauts de dimension occasionnés par le calcul successif des crochets de Lie (*voir* les chapitres 4 et 10 de [BER1999a]). En adoptant le point de vue « crochets de Lie », les démonstrations deviennent extraordinairement techniques, et ce, sans nécessité interne. On pourrait de surcroît s'étonner que dans le livre [BER1999a] (publié dans une collection prestigieuse) qui contient une copie de la démonstration du théorème de H.J. Sussmann (§3.1 : *Nagano's theorem* ; §3.2 : *Sussmann's theorem*), le lien naturel entre le procédé de H.J. Sussmann et ce que les auteurs appellent « ensembles de Segre » (qui sont en vérité des projections sur $\mathbb{C}^n$ des images dans $\mathcal{M}$ des applications $\underline{\Gamma}_k$ ou Γ_k), n'ait pas été observé.

Deux ans après l'apparition de notre prépublication électronique [Me1998] (travail non publié), S.M. Baouendi, P. Ebenfelt et L.-P. Rothschild ont repris en partie notre point de vue basé sur l'article de H.J. Sussmann, afin de construire plus économiquement leurs « ensembles de Segre » ; leur prépublication fut publiée dans une revue spécialisée en géométrie algébrique pure : [BER2003]. Néanmoins, dans cette référence, le point de vue exprimé par les FIGURES 1 et 2 ci-dessus est absent : on n'y trouve ni mention de la paire de feuilletages invariants, ni description intrinsèque de la symétrie par conjugaison complexe ni aucune « vision » géométrique. De plus, ces auteurs évitent de mentionner que l'extraordinaire technicité des chapitres 4 et 10 de leur livre [BER1999a] devient caduque.

Le point de vue ensembliste qui consiste à considérer les projections sur $\mathbb{C}^n$ des images des chaînes de Segre, *i.e.* les ensembles $\pi_t\left(\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})\right)$ n'apporte rien du point de vue fonctionnel. Ce sont au contraire les chaînes de Segre Γ_k et $\underline{\Gamma}_k$ vues comme *applications holomorphes locales* ainsi que leur propriété de submersivité (dans le cas minimal) qui sont vraiment utilisées dans l'étude du principe de réflexion analytique. Par conséquent, nous n'adopterons jamais la terminologie « ensembles de Segre ».

En conclusion, retenons seulement la propriété de submersivité de $\underline{\Gamma}_k$ énoncée dans la Définition 3.1.

3.9. Projections des submersions Γ_k et $\underline{\Gamma}_k$ sur $\mathcal{M}$

Soit $\mu_0 = 2\nu_0+1$ le type de Segre type de $\mathcal{M}$ à l'origine 0, qui est toujours impair. Si $\mathcal{M}$ est minimale à l'origine, les deux applications holomorphes locales

$$\Gamma_{\mu_0} \text{ et } \underline{\Gamma}_{\mu_0} \quad : \qquad \square_{m\mu_0}(\delta_{\mu_0}) \longrightarrow \mathcal{M} \tag{3.12}$$

satisfont $\Gamma_{\mu_0}(z^*_{(\mu_0)}) = 0$ et $\underline{\Gamma}_{\mu_0}(\underline{z}^*_{\mu_0}) = 0$ et elles sont submersives en $z^*_{(\mu_0)}$ et $\underline{z}^*_{(\mu_0)}$, c'est-à-dire de rang (maximal) égal à $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$.

Si l'on veut quitter l'espace $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ où vit la complexification $\mathcal{M}$ et revenir à l'espace $\mathbb{C}^n$ des coordonnées t où vit M (ou à l'espace des coordonnées τ où vit la conjuguée $\overline{M}$ de M), on peut aussi utiliser la propriété de submersivité des deux applications (3.12) en les composant à gauche avec l'une des deux projections $\pi_t(t,\,\tau) := t$ et $\pi_\tau(t,\,\tau) := \tau$ (sur les sous-espaces de coordonnées « horizontales » et « verticales »), qui sont bien évidemment submersives, ce qui donne deux couples de possibilité : $\pi_t\left(\Gamma_{\mu_0}(z_{(\mu_0)})\right)$, $\pi_t\left(\underline{\Gamma}_{\mu_0}(z_{(\mu_0)})\right)$ et $\pi_\tau\left(\Gamma_{\mu_0}(z_{(\mu_0)})\right)$, $\pi_\tau\left(\underline{\Gamma}_{\mu_0}(z_{(\mu_0)})\right)$. Pour deux de ces quatre expressions, une légère simplification formelle intervient alors : nous affirmons que l'on a les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} &\pi_t\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0+1}(z_{(2\nu_0+1)})\right) \equiv \pi_t\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})\right) \qquad \text{et} \\ &\pi_\tau\left(\Gamma_{2\nu_0+1}(z_{(2\nu_0+1)})\right) \equiv \pi_\tau\left(\Gamma_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})\right). \end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

En effet, puisque $\mu_0 = 2\nu_0 + 1$ est impair, le premier terme de flot (à gauche) de la chaîne de Segre conjuguée $\underline{\Gamma}_{2\nu_0+1}(z_{(2\nu_0+1)})$ est le terme $\underline{\mathcal{L}}_{z_{2\nu_0+1}}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$\underline{\Gamma}_{2\nu_0+1}\left(z_{(2\nu_0+1)}\right) = \underline{\mathcal{L}}_{z_{2\nu_0+1}}\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})\right). \tag{3.14}$$

Si l'on note les quatre coordonnées du point $\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})$ par

$$\left(z(z_{(2\nu_0)}),\, w(z_{(2\nu_0)}),\, \zeta(z_{(2\nu_0)}),\, \xi(z_{(2\nu_0)})\right), \tag{3.15}$$

une application de la formule (3.9) nous donne

$$\left\{\begin{aligned} \underline{\Gamma}_{2\nu_0+1}(z_{(2\nu_0+1)}) &= \underline{\mathcal{L}}_{z_{2\nu_0+1}}\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})\right) \\ &= \Big(z(z_{(2\nu_0)}),\, w(z_{(2\nu_0)}),\, z_{2\nu_0+1} + \zeta(z_{(2\nu_0)}), \\ &\quad \Theta\left(z_{2\nu_0+1} + \zeta(z_{(2\nu_0)}),\, z(z_{(2\nu_0)}),\, w(z_{(2\nu_0)})\right)\Big). \end{aligned}\right. \tag{3.16}$$

Puisque $\pi_t(z,\, w,\, \zeta,\, \xi) = (z,\, w)$, la première relation (3.13) est évidente. La seconde se vérifie de manière analogue.

Au total, on obtient deux submersions à valeurs dans $\mathbb{C}^n_t$ et dans $\mathbb{C}^n_\tau$.

COROLLAIRE 3.4. — *Si M est minimale à l'origine, il existe un entier $\nu_0 \leqslant d+1$, le type de Segre de M à l'origine, et il existe des points $\underline{z}^*_{(2\nu_0)} \in \mathbb{C}^{2m\nu_0}$ et $z^*_{(2\nu_0)} \in \mathbb{C}^{2m\nu_0}$ arbitrairement proches de l'origine tels que les deux applications*

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbb{C}^{2m\nu_0} \ni z_{(2\nu_0)} \longmapsto \pi_t\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})\right) \in \mathbb{C}^n \qquad \text{et} \\ &\mathbb{C}^{2m\nu_0} \ni z_{(2\nu_0)} \longmapsto \pi_\tau\left(\Gamma_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})\right) \in \mathbb{C}^n \end{aligned}\right. \tag{3.17}$$

sont de rang n et s'annulent aux deux points $\underline{z}^*_{(2\nu_0)}$ et $z^*_{(2\nu_0)}$.

3.10. Résumé : utilisation concrète de la minimalité

Nous sommes maintenant en mesure de ramener les théorèmes de convergence annoncés dans l'Introduction à des propriétés de convergence sur les chaînes de Segre conjuguées.

LEMME 3.5. — *Pour démontrer le Théorème 1.4, il suffit d'établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les applications formelles $z_{(k)} \longmapsto_{\mathcal{F}} h\left(\pi_t\left(\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})\right)\right)$ sont convergentes, i.e. appartiennent à $\mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{n'}$. De même, pour démontrer le Théorème principal 1.2, il suffit d'établir que les applications formelles $z_{(k)} \longmapsto_{\mathcal{F}} \xi' - \Theta'\left(\zeta',\ h\left(\pi_t\left(\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})\right)\right)\right) \in \mathbb{C}\{\zeta',\, z_{(k)}\}^{d'}$ sont convergentes pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ces deux propriétés sont satisfaites en remplaçant $\underline{\Gamma}_k$ par Γ_k.*

Ce sont effectivement ces propriétés de convergence qui apparaîtront naturellement dans les Sections 5, 6 et 7 ci-dessous. Par souci d'élégance et de symétrie, nous travaillerons simultanément avec les deux composantes h et $\overline{h}$ de l'application complexifiée $h^c = (h,\, \overline{h})$: sans composer avec les projections π_t et π_τ, nous démontrerons que $z_{(k)} \longmapsto_{\mathcal{F}} h^c\left(\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})\right)$ converge pour tout k

Démonstration. — En effet, prenons $k := 2\nu_0$ et supposons l'application formelle

$$z_{(2\nu_0)} \longmapsto_{\mathcal{F}} h\left(\pi_t\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(z_{(2\nu_0)})\right)\right) =: H(z_{(2\nu_0)}) \tag{3.18}$$

convergente. Puisque l'on peut choisir un point $\underline{z}^*_{(2\nu_0)}$ arbitrairement proche de l'origine où la première application (3.17) est submersive, assurons-nous que ce point $z^*_{(2\nu_0)}$ appartient au domaine de convergence normale de $H(z_{(2\nu_0)})$. Soit $s := (s_1,\, \dots,\, s_n) \in \mathbb{C}^n$ et soit $s \mapsto \phi_{2\nu_0}(s) \in \mathbb{C}^{2m\nu_0}$ une application affine satisfaisant $\phi_{2\nu_0}(0) = \underline{z}^*_{2\nu_0}$ telle que l'application holomorphe locale $s \longmapsto \pi_t\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(\phi_{2\nu_0}(s))\right)$ est de rang n en $s = 0$. On déduit d'abord que

$$h\left(\pi_t\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(\phi_{(2\nu_0)}(s))\right)\right) \equiv H(\phi_{2\nu_0}(s)) \in \mathbb{C}\{s\}^{n'} \tag{3.19}$$

est convergente. Ensuite, puisque $s \longmapsto \pi_t\left(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(\phi_{2\nu_0}(s))\right)$ est de rang n en $s = 0$, on conclut que $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ est convergente.

La seconde assertion du Lemme 3.5 se vérifie de manière similaire. □

4. Jets de sous-variétés de Segre et application de réflexion

4.1. Préliminaire

Dans l'article fondamental [We1978], généralisé plus tard en codimension supérieure (*cf.* [We1982]), S.M. Webster a introduit l'application qui, à un point p d'une hypersurface analytique réelle M de $\mathbb{C}^n$, associe le plan tangent complexe à M en p, c'est-à-dire $p \mapsto (p,\, T_p^c M)$, et il a observé que l'image de l'hypersurface M est une sous-variété analytique totalement réelle de $\mathbb{C}^{2n-1}$ si et seulement si M est Levi non-dégénérée. Puisque la sous-variété de Segre $S_{\bar{p}}$ passant par $p \in M$ admet comme espace tangent en p le même sous-espace $T_p^c M$, cette application s'identifie avec l'application qui, à un point p de M, associe le jet d'ordre 1 de la sous-variété de Segre passant par p. Dans [DW1980], K. Diederich et S.M. Webster ont généralisé cette idée en introduisant les jets d'ordre arbitraire des sous-variétés de Segre ; ils ont ainsi exhibé des conditions nouvelles de non-dégénérescence, plus générales que la Levi non-dégénérescence. Puisqu'aucun travail de fondation n'a été publié jusqu'à présent pour décrire ces concepts, nous entreprenons de résumer ici les éléments d'une théorie autonome des jets de sous-variétés de Segre. Nous élaborerons ainsi un point de vue alternatif aux calculs non géométriques du Chapitre 11 de [BER1999a].

4.2. Définitions fondamentales

Soit $\mathcal{M}$ la complexification extrinsèque d'une sous-variété analytique réelle générique définie par les deux jeux symétriques d'équations (3.3). Rappelons que la sous-variété de Segre complexifiée $\underline{\mathcal{S}}_t$ peut être considérée comme le sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ défini par $\{\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^n : \xi = \Theta(\zeta, t)\}$, où t est considéré comme fixé. Elle est paramétrée par $\zeta \in \mathbb{C}^m$. Introduisons alors l'application des jets d'ordre k de $\underline{\mathcal{S}}_t$ en l'un de ses points $(\zeta, \Theta(\zeta, t))$, qui est définie précisément par

$$J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t := \left(\zeta, \left(\frac{1}{\beta!}\, \partial_\zeta^\beta \Theta_j(\zeta, t)\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\, |\beta|\leqslant k}\right). \tag{4.1}$$

Elle est à valeurs dans $\mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}}$ où $N_{d,m,k} := d\frac{(m+k)!}{m!\; k!}$ est le nombre de dérivées partielles qui apparaissent à droite de la virgule du second membre de (4.1). Remarquons que les termes $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ apparaissent comme premières composantes de l'application (4.1). Remarquons aussi que si $k_2 \geqslant k_1$ et si π_{k_2,k_1} désigne la projection caonique $\mathbb{C}^{m+N_{d,\,m,\,k_2}} \longrightarrow \mathbb{C}^{m+N_{d,\,m,\,k_1}}$, on a : $\pi_{k_2,\,k_1}(J_\tau^{k_2}\underline{\mathcal{S}}_t) = J_\tau^{k_1}\underline{\mathcal{S}}_t$. Nous noterons dans la suite cette application par $(t, \tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$, où nous sous-entendons que $(t, \tau) \in \mathcal{M}$.

De manière analogue, introduisons l'application des jets d'ordre k de la sous-variété de Segre complexifiée $\mathcal{S}_\tau$ en l'un de ses points $\big(z, \overline{\Theta}(z, \tau)\big)$. Elle est définie précisément par

$$J_t^k \mathcal{S}_\tau := \left(z, \left(\frac{1}{\beta!}\, \partial_z^\beta \overline{\Theta}_j(z, \tau)\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\;|\beta|\leqslant k}\right). \tag{4.2}$$

Le lien de symétrie entre ces deux applications est très simple :

$$J_{\bar{t}}^k \underline{\mathcal{S}}_{\bar{\tau}} \equiv \overline{J_t^k \mathcal{S}_\tau} \tag{4.3}$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "J^k_\bullet \mathcal{S}_\bullet"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "J^k_{\bar\bullet} \underline{\mathcal{S}}_\bullet"] \\ \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} \arrow[r, "(\bar\bullet)"] & \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} \end{tikzcd}$$

où $(\bar\bullet)$ désigne l'opérateur de conjugaison complexe. Puisque ces deux applications de jets sont essentiellement équivalentes, il n'était pas restrictif de présenter dans le §1.4 les cinq conditions de non-dégénérescence **(nd1)**, **(nd2)**, **(nd3)**, **(nd4)** et **(nd5)** seulement à partir de $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$.

4.3. Invariance biholomorphe de l'application de jets

Soit $t' = h(t)$ un changement de coordonnées holomorphes locales centré à l'origine. Soit $\mathcal{M}' := h^c(\mathcal{M})$ l'image de la complexification $\mathcal{M}$ de M par ce changement de coordonnées. Puisque h^c est inversible, la codimension de $\mathcal{M}'$ est la même que celle de $\mathcal{M}$. Soient $\xi'_j = \Theta'_j(\zeta', t')$, $j = 1, \ldots, d$, $\zeta' \in \mathbb{C}^m$, $\xi' \in \mathbb{C}^m$, $t' \in \mathbb{C}^n$, des équations complexes graphées pour $\mathcal{M}'$ dans un système de cordonnées analogue au système de coordonnées dans lequel $\mathcal{M}$ est représentée. Par hypothèse, $h_i(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ avec $h_i(0) = 0$, pour $i = 1, \ldots, n$, et il existe une matrice $b(t, \tau)$ de taille $d \times d$ de séries entières convergentes telle que l'on a l'identité formelle vectorielle $r'\left(h(t), \overline{h}(\overline{t})\right) \equiv b(t, \tau)\, r(t, \tau)$ dans $\mathbb{C}\{t, \tau\}^d$, où l'on a posé

$$r_j(t, \tau) := \xi_j - \Theta_j(\zeta, t), \qquad \text{et} \qquad r'_j(t', \tau') := \xi'_j - \Theta'_j(\zeta', t'), \tag{4.4}$$

pour $j = 1, \ldots, d$. Puisque nous scindons les coordonnées $t' = (z', w') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ et $\tau' = (\zeta', \xi') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ en deux groupes, divisons aussi les composantes du biholomorphisme h en deux groupes $h(t) := (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^m \times \mathbb{C}\{t\}^d$. En remplaçant ξ par $\Theta(\zeta, t)$ dans l'identité fondamentale $r'\left(h(t), \overline{h}(\overline{t})\right) \equiv b(t, \tau)\, r(t, \tau)$, le membre de droite s'annule identiquement et nous obtenons les d identités formelles suivantes, valables dans $\mathbb{C}\{\zeta, t\}$ et qui seront notre point de départ

$$\overline{g}_j\left(\zeta, \Theta(\zeta, t)\right) \equiv \Theta'_j\left(\overline{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)\right), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{4.5}$$

En différentiant ces identités une infinité de fois par rapport à $\zeta \in \mathbb{C}^m$, nous allons établir les relations suivantes, dont l'apparence technique ne doit pas cacher qu'elles ont une signification géométrique cruciale que nous expliquons ci-après.

LEMME 4.1. — *Pour tout $j = 1, \ldots, d$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, il existe une application rationnelle $Q_{j,\beta}$ dont l'expression explicite, qui ne dépend ni de $\mathcal{M}$, ni de h, ni de $\mathcal{M}'$, peut être calculée grâce à des formules combinatoires* *universelles*[6], *telle que l'on a les identités formelles suivantes, valables dans* $\mathbb{C}\{\zeta, t\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\beta!} \dfrac{\partial^{|\beta|}\Theta_j'}{\partial(\zeta')^\beta} \left(\overline{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)\right) \equiv \\ \equiv Q_{j,\beta}\left(\left(\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta, t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d, |\beta_1|\leqslant|\beta|}, \left(\partial_\tau^{\alpha_1}\overline{h}_{i_1}(\zeta, \Theta(\zeta, t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n, |\alpha_1|\leqslant|\beta|}\right) \\ =: R_{j,\beta}\left(\zeta, \left(\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta, t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d, |\beta_1|\leqslant|\beta|}\right) \\ =: q_{j,\beta}(\zeta, t), \end{cases} \tag{4.6}$$

où l'avant-dernière équation définit la série entière $R_{j,\beta}$ *à partir de* $Q_{j,\beta}$ *par simple oubli de la dépendance en les jets de* $\overline{h}$, *et la dernière définit la série entière* $q_{j,\beta}$ *à partir de* $Q_{j,\beta}$, *par simple oubli de toute dépendance par rapport aux jets de* Θ *ou de* $\overline{h}$. *Ici, les séries entières* $Q_{j,\beta}$ *sont holomorphes au voisinage du jet constant obtenu en posant* $(\zeta, t) = (0, 0)$, *i.e.* $\left((\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(0, 0))_{1\leqslant j_1\leqslant d, |\beta_1|\leqslant|\beta|}, (\partial_\tau^{\alpha_1}\overline{h}_{i_1}(0, 0))_{1\leqslant i_1\leqslant n, |\alpha_1|\leqslant|\beta|}\right)$. *Des relations symétriques analogues sont satisfaites en remplaçant* Θ, Θ', ζ, t, $\overline{f}$, h *par* $\overline{\Theta}$, $\overline{\Theta}'$, z, τ f, $\overline{h}$.

L'existence des séries entières $R_{j,\beta}$ exprime que l'application (4.3) des jets d'ordre k des sous-variétés de Segre complexifiées conjuguées est invariante par biholomorphisme, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{h} & \mathcal{M}' \\ {\scriptstyle J^k_\bullet S_\bullet}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J^k_\bullet \underline{S}'_\bullet} \\ \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} & \xrightarrow{R^k(h)} & \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} \end{array}$$

où l'application $R^k(h)$, qui dépend de h, est définie par ses composantes $R_{j,\beta}$ pour $j = 1, \ldots, d$ et $|\beta| \leqslant k$. Comme h est inversible, on vérifie que la transformation associée $R^k(h)$ est elle aussi un biholomorphisme local. Grâce à l'inversibilité de $R^k(h)$, on démontre sans difficulté que les cinq conditions de non-dégénérescence **(nd1)**, **(nd2)**, **(nd3)**, **(nd4)** et **(nd5)** introduites dans le §1.4 sont invariantes par biholomorphisme local (*voir* le Chapitre 3 de [Me2003] pour les détails).

---

(6) Mais le travail d'explicitation complète serait particulièrement fastidieux, car quatre ingrédients se combineraient ensemble dans le calcul : la formule généralisée de Faà di Bruno pour la différentiation de fonctions de plusieurs variables composées ; le développement formel des dérivations composées $(\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1}(\underline{\mathcal{L}}_2)^{\beta_2}\cdots(\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}$, où $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$; la formule universelle pour les dérivations partielles d'ordre quelconque d'un quotient de deux séries entières ; les déterminants de Cramer. Heureusement, nous n'aurons pas besoin ici d'une formule explicite pour les séries entières analytiques $Q_{j,\beta}$.

Démonstration. — Nous allons différentier les équations (4.5) par rapport à ζ_k, pour $k = 1, \ldots, m$. Rappelons ici les expressions explicites des champs de vecteurs CR de type (0, 1) complexifiés $\underline{\mathcal{L}}_k$ définis précédemment :

$$\underline{\mathcal{L}}_k = \frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \tag{4.7}$$

pour $k = 1, \ldots, m$. On voit immédiatement que le fait de différenter une série entière composée $\psi(\zeta, \xi)|_{\xi=\Theta(\zeta, t)} = \psi(\zeta, \Theta(\zeta, t))$ par rapport à ζ_k équivaut à lui appliquer le champ de vecteurs $\underline{\mathcal{L}}_k$, entendu comme dérivation, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_k} \psi(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv [\underline{\mathcal{L}}_k \psi] (\zeta, \Theta(\zeta, t)). \tag{4.8}$$

Cette observation est triviale, mais elle a son importance ; géométriquement parlant, appliquer l'opérateur $\underline{\mathcal{L}}_k$ signifie que l'on différentie le long de la sous-variété de Segre complexifiée conjugué $\underline{\mathcal{S}}_t$, le tout étant paramétré par t.

Ainsi, en différentiant les relations (4.5) par rapport à ζ_k et en utilisant la formule de dérivation composée, on obtient les relations

$$\underline{\mathcal{L}}_k \overline{g}_j(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv \sum_{l=1}^{m} \underline{\mathcal{L}}_k \overline{f}_l(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \frac{\partial \Theta'_j}{\partial \zeta'_l} \left(\overline{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)\right), \tag{4.9}$$

pour $k = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, d$.

Par ailleurs, en posant $t = 0$ dans (4.5), on obtient

$$\overline{g}_j(\zeta, \Theta(\zeta, 0)) \equiv \Theta'_j \left(\overline{f}(\zeta, \Theta(\zeta, 0)), 0\right). \tag{4.10}$$

Ces identités expriment que la restriction de $h^c = (h, \overline{h})$ à la sous-variété de Segre complexifiée conjuguée $\underline{\mathcal{S}}_0 = \{(0, 0, \zeta, \Theta(\zeta, 0)) : \zeta \in \mathbb{C}^m\}$, qui est de dimension complexe m, est à valeurs dans la sous-variété de Segre complexifiée conjuguée $\underline{\mathcal{S}}'_0 = \{(0, 0, \zeta', \Theta'(\zeta', 0)) : \zeta' \in \mathbb{C}^m\}$, qui est de même dimension. Puisque h^c est un biholomorphisme, cette restriction est forcément inversible, c'est-à-dire que l'application $\zeta \mapsto \overline{h}(\zeta, \Theta(\zeta, 0))$ est de rang m en $\zeta = 0$. Autrement dit, la matrice (constante) des dérivées partielle à l'origine $\left(\underline{\mathcal{L}}_k \overline{h}_i(0)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}^{1 \leqslant k \leqslant m}$ est de rang m. Mais à cause des relations (4.9), prises en $t = 0$, les d dernières lignes de la matrice $\left(\underline{\mathcal{L}}_k \overline{h}_i(0)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}^{1 \leqslant k \leqslant m}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants de ses m premières lignes. Il en découle finalement que le déterminant suivant de taille $m \times m$ ne s'annule pas :

$$\det \left(\underline{\mathcal{L}}_{k_1} \overline{f}_{k_2}(0)\right)_{1 \leqslant k_1,\, k_2 \leqslant m} \neq 0. \tag{4.11}$$

Par conséquent, nous pouvons diviser par le déterminant

$$\mathcal{D}(\zeta, t) := \det \left(\underline{\mathcal{L}}_{k_1} \overline{f}_{k_2}(\zeta, \Theta(\zeta, t))\right)_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant m}, \tag{4.12}$$

pourvu que $\zeta \in \mathbb{C}^m$ et $t \in \mathbb{C}^n$ soient suffisamment petits pour qu'il ne s'annule pas.

Maintenant, envisageons les équations (4.9) à j fixé comme un système linéaire non homogène dont les inconnues sont les m dérivées partielles $\partial\Theta'_j/\partial\zeta'_1, \ldots, \partial\Theta'_j/\partial\zeta'_m$. Grâce aux formules de Cramer, nous pouvons résoudre ce système, ce qui donne des expressions de la forme

$$\frac{\partial\Theta'_j}{\partial\zeta'_k}\left(\overline{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)\right) \equiv \frac{T_{j,k}\left(\left(\underline{\mathcal{L}}_{k'_1} \overline{h}_{i_1}(\zeta, \Theta(\zeta, t))\right)_{1 \leqslant i_1 \leqslant n,\, 1 \leqslant k'_1 \leqslant m}\right)}{\mathcal{D}(\zeta, t)}. \tag{4.13}$$

Ici, en examinant la forme explicite des déterminants de Cramer, on vérifie aisément que les termes $T_{j,k}$ sont des polynômes universels en leurs variables.

Traitons maintenant le cas $|\beta| = 2$ de (4.6). Pour un mutiindice arbitraire $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$, nous noterons $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ la dérivation d'ordre $|\beta|$ définie par la composition $(\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1}(\underline{\mathcal{L}}_2)^{\beta_2} \cdots (\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}$.

Différentions à nouveau les identités (4.9) par rapport aux variables ζ_k. Nous obtenons à nouveau des systèmes de Cramer de même déterminant $\mathcal{D}(\zeta, t)$ que l'on peut résoudre. Aussi, pour toute paire d'entiers (k_1, k_2) avec $1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant m$ et pour tout $j = 1, \ldots, d$, il existe des polynômes universels T_{j,k_1,k_2} tels que l'on peut écrire

$$\frac{\partial^2\Theta'_j}{\partial\zeta'_{k_1}\partial\zeta'_{k_2}}\left(\overline{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)\right) \equiv \frac{T_{j,k_1,k_2}\left(\left(\underline{\mathcal{L}}^{\beta_1} \overline{h}_{i_1}(\zeta, \Theta(\zeta, t))\right)_{1 \leqslant i_1 \leqslant n, 1 \leqslant |\beta_1| \leqslant 2}\right)}{\mathcal{D}(\zeta, t)^3}. \tag{4.14}$$

Le lecteur aura remarqué l'exposant 3 qui apparaît au dénominateur. On doit le comprendre comme "3"="2"+"1", où "2" provient de la différentiation du quotient $T_{j,k}/\mathcal{D}$ dans (4.17) et où "1" provient de la seconde application de la règle de Cramer.

Différentions successivement les relations (4.5) par rapport à $\zeta^\beta = \zeta_1^{\beta_1}\zeta_2^{\beta_2} \cdots \zeta_m^{\beta_m}$. En raisonnant par récurrence, on démontre que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ et pour tout $j = 1, \ldots, d$, il existe un polynôme $T_{j,\beta}$ dont l'expression explicite est complexe, mais universelle, tel que l'identité suivante est satisfaite, dans $\mathbb{C}\{\zeta,\, t\}$:

$$\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^{|\beta|}\Theta'_j}{\partial(\zeta')^\beta}\left(\overline{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t)\right) \equiv \frac{T_{j,\beta}\left(\left(\underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}\overline{h}_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,\, t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n, 1\leqslant|\beta_1|\leqslant|\beta|}\right)}{[\mathcal{D}(\zeta,t)]^{2|\beta|-1}}. \tag{4.15}$$

À ce stade, il est important d'observer qu'en développant les dérivations multiples $\underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}$, où $\beta_1 \in \mathbb{N}^m$ est un multiindice fixé, on obtient des opérateurs différentiels à coefficients non constants. Plus précisément, en utilisant les expressions explicites (4.7) des champs de vecteurs $\underline{\mathcal{L}}_k$, et en raisonnant par récurrence, il est aisé d'établir que les coefficients des opérateurs $\underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}$, exprimés par rapports aux opérateurs ∂_t^α, sont des polynômes universels en les dérivées partielles $\left(\partial^{|\beta_2|}\Theta_{j_2}(\zeta,\, t)/\partial\zeta^{\beta_2}\right)_{1\leqslant j_2\leqslant d,\, 1\leqslant|\beta_2|\leqslant|\beta_1|}$. Ainsi, le numérateur de (4.15) devient un polynôme universel (dont l'expression explicite ne nous serait pas utile) en les variables

$$\left(\left(\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta,\, t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,\, |\beta_1|\leqslant|\beta|},\, \left(\partial_t^{\alpha_1}\overline{h}_{i_1}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n,\, |\alpha_1|\leqslant|\beta|}\right) \tag{4.16}$$

De même, en développant le déterminant qui apparaît au dénominateur, on obtient un polynôme universel en les variables (4.16), pour $|\beta_1| \leqslant 1$. Concluons que nous avons effectivement construit l'application rationnelle souhaitée $Q_{j,\,\beta} := T_{j,\,\beta}/[\mathcal{D}]^{2|\beta|-1}$.

Il nous reste maintenant à établir l'invariance biholomorphe de l'application de réflexion CR formelle.

4.4. Inversion

Dans cet objectif, développons les séries entières Θ'_j par rapport aux puissances de ζ', ce qui donne $\Theta'_j(\zeta',\, t') =: \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m}(\zeta')^\beta\,\Theta'_{j,\,\beta}(t')$, pour $j = 1,\, \ldots,\, d$, où les $\Theta'_{j,\,\beta}(t')$ sont des séries entières analytiques complexes. Avec ces notations, nous pouvons développer le membre de gauche de (4.6) en conservant pour membre de droite la dernière ligne de (4.6), ce qui donne :

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m}\frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\,\gamma!}\,\overline{f}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t))^\gamma\;\Theta'_{j,\,\beta+\gamma}(h(t)) \equiv q_{j,\,\beta}(\zeta,\, t). \tag{4.17}$$

Puisque nous voulons établir l'invariance biholomorphe de l'application de réflexion, nous devrions résoudre les termes $\Theta'_{j,\,\beta}(h(t))$ qui apparaissent dans le développement de la première ligne de (4.6) par rapport aux autres termes, de telle sorte que n'apparaissent au final que des termes $\Theta_{j_1,\,\beta_1}(t)$.

Pour cela, il est utile de savoir qu'une collection infinie d'identités formelles de la forme

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\,\gamma!}\,\zeta'^{\gamma}\,\theta'_{j,\,\beta+\gamma} = q_{j,\,\beta}, \tag{4.18}$$

où $j = 1, \ldots, d$, où $\beta \in \mathbb{N}^m$, où $\zeta' \in \mathbb{C}^m$ et où les constantes $\theta'_{j,\,\beta} \in \mathbb{C}$ et $q_{j,\,\beta} \in \mathbb{C}$ sont arbitraires et indépendantes, peut être résolue formellement par rapport aux inconnues $\theta'_{j,\,\beta}$ au moyen d'une formule totalement similaire, à des différences de signe près :

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} (-1)^{\gamma}\,\frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\,\gamma!}\,\zeta'^{\gamma}\,q_{j,\,\beta+\gamma} = \theta'_{j,\,\beta}, \tag{4.19}$$

pour tout $j = 1, \ldots, d$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. On peut se convaincre de cette formule d'inversion de deux manières : ou bien en remplaçant l'expression (4.19) de $\theta'_{j,\,\beta}$ directement dans (4.18) et en effectuant le calcul, ou bien en raisonnant avec des séries de Taylor convergentes en deux points distincts et en extrapolant ensuite la relation obtenue aux séries formelles non convergentes.

L'application de cette formule d'inversion aux identités (4.17) nous donne les relations formelles

$$\begin{cases} \Theta'_{j,\beta}(h(t)) \equiv \displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} (-1)^{\gamma}\,\frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\,\gamma!}\,\overline{f}(\zeta,\,\Theta(\zeta,\,t))^{\gamma}\cdot q_{j,\,\beta+\gamma}(\zeta,\,t) \\ \qquad\qquad\;\; \equiv \displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} (-1)^{\gamma}\,\frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\,\gamma!}\,\overline{f}(\zeta,\,\Theta(\zeta,\,t))^{\gamma}\cdot \\ \cdot Q_{j,\beta+\gamma}\left(\left(\partial_{\zeta}^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,|\beta_1|\leqslant|\beta|+|\gamma|},\left(\partial_{\tau}^{\alpha_1}\overline{h}_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n,|\alpha_1|\leqslant|\beta|+|\gamma|}\right). \end{cases} \tag{4.20}$$

Ici, un argument de convergence est nécessaire. Heureusement, grâce aux estimées de Cauchy pour les dérivées partielles de séries entières analytiques, il existe des constantes $\sigma' > 0$, $\rho' > 0$ et $C' > 0$ telles qu'on a une estimation de la forme

$$\left|\frac{1}{\beta!}\,\frac{\partial^{|\beta|}\Theta'_j}{\partial(\zeta')^{\beta}}(\zeta',\,t')\right| < C'\,(\rho')^{-|\beta|}, \tag{4.21}$$

pour tous ζ', t' satisfaisant $|\zeta'| < \sigma'$, $|t'| < \sigma'$. Soit $\sigma > 0$ une constante suffisamment petite pour que l'on ait $|h(t)| < \sigma'$ (d'où aussi $|\overline{h}(\tau)| < \sigma'$) pour tout t tel que $|t| < \sigma$. On en déduit la même estimée de Cauchy que (4.21) pour le membre de gauche de (4.6), avec les mêmes constantes $\rho' > 0$ et $C' > 0$. Ensuite, ces estimations se transfèrent immédiatement aux membres de la dernière ligne de (4.6) :

$$|q_{j,\beta}(\zeta,\,t)| < C'\,(\rho')^{-|\beta|}. \tag{4.22}$$

Cette dernière estimation suffit pour assurer que les formules (4.20) sont normalement convergentes lorsque $|\zeta| < \sigma$ et $|t| < \sigma$.

4.5. Formules fondamentales

Pour terminer, posons $\zeta = 0$ dans les formules (4.20), ce qui exige quelques commentaires. Notons que les termes $\Theta_j(0, t)$ s'identifient bien évidemment aux termes $\Theta_{j,\beta}(t)|_{\beta=0}$ du développement $\Theta_j(\zeta, t) =: \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m} \zeta^\beta\, \Theta_{j,\beta}(t)$ de Θ_j par rapport aux puissances de ζ. Par conséquent, les puissances $\overline{f}(0, \Theta(0, t))^\gamma$ et les jets $\partial_\tau^{\alpha_1}\overline{h}_{i_1}(\zeta, \Theta(0, t))$ qui apparaissent dans $(4.20)|_{\zeta=0}$ sont des séries entières analytiques par rapport aux d variables $\Theta_{j_1,0}(t)$, pour $j_1 = 1, \ldots, d$. Au total, *les identités* $(4.20)|_{\zeta=0}$ *ne font intervenir à droite que les fonctions* $\Theta_{j_1,\beta_1}(t)$. Notons ici que l'indice β_1 n'est pas borné, à cause de la présence de la somme $\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m}$.

En conclusion, si l'on note $S_{j,\beta}$ ce second membre, on obtient des formules absolument fondamentales entre les composantes $\Theta'_{j,\beta}(t')$ attachées à l'équation de $\mathcal{M}' = h^c(\mathcal{M})$ et les composantes $\Theta_{j,\beta}(t)$ attachées à l'équation de $\mathcal{M}$, formules que nous écrirons :

$$\Theta'_{j,\beta}(h(t)) \equiv S_{j,\beta}\left(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(t)\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,\beta_1\in\mathbb{N}^m}\right). \tag{4.23}$$

Ici, $S_{j,\beta}$ est une série entière qui dépend d'une infinité de variables. Néanmoins, il ne sera pas nécessaire d'en appeler à la théorie des fonctions holomorphes d'une infinité de variables, pourvu que $S_{j,\beta}$ soit entendu comme défini par $(4.20)|_{\zeta=0}$, avec les estimées de Cauchy $(4.22)|_{\zeta=0}$.

4.6. Invariance biholomorphe de la convergence de l'application de réflexion CR formelle

Grâce aux relations (4.23), nous pouvons établir l'assertion qui fait immédiatement suite à l'énoncé du Théorème 1.2.

En effet, comme dans les hypothèses du Théorème 1.2, soit $h : (M, 0) \longrightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0)$ une application CR formelle entre sous-variétés génériques analytiques réelles de codimension d et d' dans $\mathbb{C}^n$ et dans $\mathbb{C}^{n'}$. Soit un système de coordonnées holomorphes $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ dans lequel la complexification $\mathcal{M}'$ est représentée par les équations graphées $\xi'_{j'} = \Theta'_{j'}(\zeta', t')$, $j' = 1, \ldots, d'$.

Supposons que l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h(\tau', t) := \xi' - \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'}\, \Theta'_{\gamma'}(h(t))$ converge. De manière équivalente, toutes les séries formelles $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t)) \in \mathbb{C}\{t\}$ convergent et elles satisfont une estimée de Cauchy telle que $\left|\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))\right| < C'\,(\rho')^{-|\gamma'|}$, pour $|t| < \sigma$.

Soit $t'' := \phi'(t')$ un biholomorphisme local fixant l'origine qui transforme M' en $M'' := \phi'(M')$. Après une renumérotation éventuelle des coordonnées t'', on peut supposer qu'elles se scindent en $t'' = (z'', w'') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ de telle sorte que $T_0 M'' + \left(\{0\} \times \mathbb{C}^{d'}_{w''}\right) = T_0 \mathbb{C}^{n'}_{t''}$. Soient alors $\xi''_{j'} = \Theta''_{j'}(\zeta'', t'')$, $j' = 1, \ldots, d'$, des équations graphées pour la complexification $\mathcal{M}''$. Le but est de démontrer que l'application de réflexion transformée $\mathcal{R}''_{\phi' \circ h}(\tau'', t) := \xi'' - \Theta''(\zeta'', \phi'(h(t)))$ converge elle aussi.

Pour le vérifier, scindons aussi les composantes du changement de coordonnées comme suit : $\phi'(t') =: (\varphi'(t'), \psi'(t')) \in \mathbb{C}\{t'\}^{m'} \times \mathbb{C}\{t'\}^{d'}$. Les relations (4.23) pour la transformation ϕ' s'écrivent

$$\Theta''_{j',\gamma'}\,(\phi'(t')) \equiv S'_{j',\gamma'}\left(\left\{\Theta'_{j'_1,\gamma'_1}(t')\right\}_{1 \leqslant j'_1 \leqslant d',\, \gamma'_1 \in \mathbb{N}^{m'}}\right). \tag{4.24}$$

Remplaçons-y t' par $h(t)$, ce qui donne :

$$\Theta''_{j',\gamma'}\,(\phi'(h(t))) \equiv S'_{j',\gamma'}\left(\left\{\Theta'_{j'_1,\gamma'_1}(h(t))\right\}_{1 \leqslant j'_1 \leqslant d',\, \gamma'_1 \in \mathbb{N}^{m'}}\right). \tag{4.25}$$

Puisque les $S'_{j',\gamma'}$ sont analytiques et puisque les $\Theta'_{j'_1,\gamma'_1}(h(t))$ convergent par hypothèse, nous déduisons de (4.25) que les composantes $\Theta''_{j',\gamma'}\,(\phi'(h(t)))$ de l'application de réflexion $\mathcal{R}''_h(\tau'', t) := \xi'' - \Theta''(\zeta'', h(t))$ convergent. Un examen de la construction des $S_{j',\gamma'}$ montre que toutes les estimées de Cauchy nécessaires sont satisfaites. L'assertion est démontrée.

4.7. Résumé

En définitive, toutes les hypothèses du Théorème principal 1.2 et du Théorème 1.4 sont invariantes par changement de coordonnées. Sans perte de généralité, nous pourrons donc travailler avec un système fixé de coordonnées dans lesquelles la complexification $\mathcal{M}'$ est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$.

5. Convergence d'applications CR formelles finiment non-dégénérées

5.1. Préliminaire

Afin de rendre plus accessible la lecture du Théorème 1.4 **(iii)** (Section 6) et du Théorème 1.2 (Section 7), nous démontrons ici le Théorème 1.4

(i) (connu) en utilisant notre propre formalisme ; cette section est exclusivement consacrée à cette démonstration. Certaines observations combinatoires, qui seront réutilisées ultérieurement, apparaîtront au cours des raisonnements (*voir* par exemple le Lemme 5.1 ci-dessous). Puisqu'elles sont explicitées d'une manière parfois incomplète ou exagérément résumée dans [BER1998] et dans [BER1999a], nous les détaillerons soigneusement.

5.2. Résolution de $h(t)$ en fonction des jets de $\overline{h}(\tau)$

Soit $h^c : (\mathcal{M}, 0) \longrightarrow_{\mathcal{F}} (\mathcal{M}', 0)$ la complexification de l'application CR formelle du Théorème 1.4 **(i)**. Nous utiliserons les notations du §1.10 et du §1.11.

Rappelons que, d'après le §1.11, en appliquant les dérivation $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ à la première ligne de (1.15), nous obtenons les identités de réflexion écrites à la première ligne de (1.19), que nous réécrivons plus précisément comme suit :

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta\, \overline{g}_{j'}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t))\; \Theta'_{j',\, \gamma'}(h(t)), \tag{5.1}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. Il est nécessaire d'examiner ce que donnent les termes $\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{g}_{j'}$ et $\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma}$.

Les lettres β et γ (resp. β' et γ') désigneront toujours des multiindices de $\mathbb{N}^m$ (resp. de $\mathbb{N}^{m'}$) ; la lettre α désignera toujours un multiindice de $\mathbb{N}^n$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ un entier positif. Nous noterons $J_t^\ell h(t) := (\partial_t^\alpha h_{i'}(t))_{1 \leqslant i' \leqslant n',\, |\alpha| \leqslant \ell}$ le jet d'ordre ℓ de h et aussi $J_\tau^\ell \overline{h}(\tau) := \left(\partial_\tau^\alpha \overline{h}_{i'}(\tau)\right)_{1 \leqslant i' \leqslant n',\, |\alpha| \leqslant \ell}$ le jet d'ordre ℓ de $\overline{h}(\tau)$. Le nombre de ces dérivées partielles est égal à $N_{n',\, n,\, \ell} := n' \, \frac{(n+\ell)!}{n!\; \ell!}$. Nous appellerons *jet strict* de h (ou de $\overline{h}$) les dérivées partielles de h (ou de $\overline{h}$) d'ordre strictement positif.

En observant que les coefficients des champs de vecteurs $\underline{\mathcal{L}}_k$ définis à la deuxième ligne de (1.14) sont analytiques et en raisonnant par récurrence, on démontre l'assertion suivante.

LEMME 5.1. — *Pour tout $i' = 1, \ldots, n'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, il existe un polynôme $P_{i',\, \beta}$ en le jet $J_\tau^{|\beta|} \overline{h}(\tau)$ dont les coefficients sont des séries entières convergentes par rapport aux variables $(t,\, \tau)$ qui ne dépendent que des séries définissantes $\Theta_j(\zeta,\, t)$ de $\mathcal{M}$, tel que*

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{h}_{i'}(\tau) \equiv P_{i',\, \beta}\left(t,\, \tau,\, J_\tau^{|\beta|}\, \overline{h}(\tau)\right), \tag{5.2}$$

pour $(t,\, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Démonstration. — Pour $\beta = 0$, l'existence de $P_{i',\beta}$ est évidente. Raisonnons par récurrence sur l'entier $|\beta|$, en supposant plus précisément que le premier groupe d'arguments de $P_{i',\beta}$ est le jet $J_\zeta^{|\beta|}\Theta(\zeta, t)$ par rapport à ζ de la série définissante $\Theta(\zeta, t)$, et en supposant que $P_{i',\beta}$ est un polynôme universel par rapport aux variables $\left(J_\zeta^{|\beta|}\Theta(\zeta, t),\, J_\tau^{|\beta|}\overline{h}(\tau)\right)$. Fixons $\ell \in \mathbb{N}$ et supposons les relations (5.2) vraies pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ tel que $|\beta| \leqslant \ell$. En appliquant la dérivation $\underline{\mathcal{L}}_k$ à (5.2), et en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$\left\{\begin{aligned}
\underline{\mathcal{L}}_k\underline{\mathcal{L}}^\beta\overline{h}_{i'}(\tau) &\equiv \underline{\mathcal{L}}_k\left[P_{i',\beta}\left(J_\zeta^{|\beta|}\Theta(\zeta, t),\, J_\tau^{|\beta|}\overline{h}(\tau)\right)\right] \\
&\equiv \sum_{\beta_1\in\mathbb{N}^m,\, |\beta_1|\leqslant|\beta|}\ \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial P_{i',\beta}}{\partial J_j^{|\beta_1|}} \cdot \partial_{\zeta_k}\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_j(\zeta, t) \\
&\quad + \sum_{i_1'=1}^{n'}\ \sum_{\alpha_1\in\mathbb{N}^n,\, |\alpha_1|\leqslant|\beta|} \frac{\partial P_{i_1',\beta}}{\partial J_{i_1'}^{\alpha_1}} \cdot \partial_{\zeta_k}\partial_\tau^{\alpha_1}\overline{h}_{i_1'}(\tau) \\
&\quad + \sum_{i_1'=1}^{n'}\ \sum_{\alpha_1\in\mathbb{N}^n,\, |\alpha_1|\leqslant|\beta|}\ \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial P_{i',\beta}}{\partial J_{i_1'}^{\alpha_1}} \cdot \partial_{\zeta_k}\Theta_j \cdot \partial_{\xi_j}\partial_\tau^{\alpha_1}\overline{h}_{i_1'}(\tau) \\
&=: P_{i',\beta+\mathbf{1}_k^m}\left(J_\zeta^{|\beta|+1}\Theta(\zeta, t),\, J_\tau^{|\beta|}\overline{h}(\tau),\right),
\end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

où le symbole $\mathbf{1}_k^m$ désigne le multiindice $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^m$, avec 1 à la k-ième place et 0 aux autres places. Le calcul (5.3) démontre bien que $P_{i',\beta+\mathbf{1}_k^m}$ est un polynôme et qu'il se déduit de $P_{i',\beta}$ par une formule algébrico-différentielle universelle de différentiation composée. Puisque tout multiindice de longueur $\ell+1$ peut s'écrire $\beta+\mathbf{1}_k^m$, où $|\beta| = \ell$, ceci démontre le Lemme 5.1. $\square$

Grâce à la formule de Leibniz pour la différentiation d'un produit de fonctions, on observe plus généralement qu'un développement polynomial analogue existe pour $\underline{\mathcal{L}}^\beta\overline{h}^\alpha(\tau)$, lorsque $\alpha \in \mathbb{N}^{n'}$ est un multiindice arbitraire. Nous n'aurons pas besoin de formules combinatoires explicites, que du reste, nous n'avons pas tenté d'écrire.

Grâce à ce préliminaire, en tenant compte du fait que $\tau = (\zeta, \Theta(\zeta, t))$ sur $\mathcal{M}$, nous pouvons développer les identités (5.1) comme suit :

$$R'_{j',\beta}\left(\zeta, t, J_\tau^{|\beta|}\overline{h}(\zeta, \Theta(\zeta, t)) : h(t)\right) \equiv 0, \tag{5.4}$$

où les $R'_{j',\beta}\left(\zeta, t, J_\tau^{|\beta|}\overline{h} : t'\right)$ sont des séries entières convergentes, relativement polynomiales par rapport au jet strict de $\overline{h}$. Le dernier argument t'

est placé après un signe « : » pour bien notifier que dans (5.1), ce sont les composantes de $\overline{h}$ que l'on dérive en appliquant les opérateurs $\underline{\mathcal{L}}^\beta$, tandis que les composantes de h ne sont pas différentiées.

En revenant à la définition (1.21) des applications $\Psi'_{j',\beta}$ introduites dans le §1.11, nous avons la coïncidence de notations :

$$\Psi'_{j',\beta}(0,\,0,\,t') \equiv R'_{j',\beta}\left(0,\,0,\,J_\tau^{|\beta|}\overline{h}(0)\,:\,t'\right). \tag{5.5}$$

D'après l'hypothèse principale du Théorème 1.4 **(i)**, pour k assez grand, l'application $t' \longmapsto \left(\Psi'_{j',\beta}(0,\,0,\,t')\right)_{1\leqslant j'\leqslant d',\,|\beta|\leqslant k}$ est de rang n' en $t'=0$. Nous noterons ℓ_0 un tel entier k. De manière équivalente, l'application holomorphe locale

$$t' \longmapsto \left(R'_{j',\beta}\left(0,\,0,\,J_\tau^{|\beta|}\overline{h}(0)\,:\,t'\right)\right)_{1\leqslant j'\leqslant d',\,|\beta|\leqslant \ell_0} \tag{5.6}$$

est de rang n' en $t'=0$.

Grâce à cette hypothèse forte, nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites aux identités (5.4), écrites seulement pour $|\beta|\leqslant\ell_0$, afin de résoudre $h(t)$ en fonction des autres variables, ce qui donne une expression de la forme

$$h(t) \equiv \Phi\left(\zeta,\,t,\,J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\zeta,\,\Theta(\zeta,\,t))\right), \tag{5.7}$$

où l'application Φ est à valeurs dans $\mathbb{C}^{n'}$, et holomorphe au voisinage de $\left(0,\,0,\,J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(0)\right)$ dans $\mathbb{C}^{m+n+N_{n',\,n,\,\ell_0,}}$.

En admettant un léger écart de notation, nous réécrirons l'identité (5.7) sous la forme

$$h(t) = \Phi\left(t,\,\tau,\,J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)\right), \tag{5.8}$$

étant entendu que $(t,\,\tau)\in\mathcal{M}$, c'est-à-dire que ξ doit être remplacé par $\Theta(\zeta,\,t)$ si l'on veut interpréter (5.8) comme une véritable identité formelle dans $\mathbb{C}[\![\zeta,\,t]\!]^{n'}$.

En partant des identités de réflexion écrites à la deuxième ligne de (1.20) et en raisonnant comme ci-dessus, on démontre que $\overline{h}(\tau)$ satisfait l'identité suivante sur $\mathcal{M}$:

$$\overline{h}(\tau) = \overline{\Phi}\left(\tau,\,t,\,J_t^{\ell_0}h(t)\right), \tag{5.9}$$

Pour se convaincre que c'est bien l'application conjuguée $\overline{\Phi}$ qui apparaît dans (5.9), on peut aussi poser $\tau := \bar{t}$ dans (5.8), conjuguer de part et d'autre du signe « = », puis complexifier la variable $(\bar{t})^c =: \tau$ dans l'identité obtenue, ce qui donne (5.9).

En résumé, nous avons obtenu un couple d'identités formelles, valables pour $(t, \tau) \in \mathcal{M}$:

$$\begin{cases} h(t) & = \Phi\left(t,\, \tau,\, J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)\right), \\ \overline{h}(\tau) & = \overline{\Phi}\left(\tau,\, t,\, J_t^{\ell_0} h(t)\right). \end{cases} \tag{5.10}$$

Soit $\Pi(t, \tau) \in \mathbb{C}[\![t, \tau]\!]$ une série formelle sans terme constant, par exemple $h_{i'}(t) - \Phi_{i'}\left(t,\, \tau,\, J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)\right)$, où i' est fixé. Quand nous disons que $\Pi(t, \tau) = 0$ pour $(t, \tau) \in \mathcal{M}$, nous entendons que l'on a les deux identités formelles $\Pi(t, \zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv 0$ dans $\mathbb{C}[\![\zeta, t]\!]$ et $\Pi(z, \overline{\Theta}(z, \tau), \tau) \equiv 0$ dans $\mathbb{C}[\![z, \tau]\!]$. De manière élémentaire, on vérifie qu'en posant $r(t, \tau) := \xi - \Theta(\zeta, t)$ et $\overline{r}(\tau, t) := w - \overline{\Theta}(z, \tau)$, ces identités sont équivalentes entre elles et qu'elles sont équivalentes à la propriété suivante : il existe deux matrices de séries formelles $c(t, \tau)$ et $d(t, \tau)$ de taille $1 \times d$ telles que $\Pi(t, \tau) \equiv c(t, \tau)\, r(t, \tau)$ et $\Pi(t, \tau) \equiv d(t, \tau)\, \overline{r}(\tau, t)$ dans $\mathbb{C}[\![t, \tau]\!]$. Retenons donc que l'expression $\Pi(t, \tau) = 0$ pour $(t, \tau) \in \mathcal{M}$ signifie rigoureusement que $\Pi(t, \zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv 0$ ou que $\Pi(z, \overline{\Theta}(z, \tau), \tau) \equiv 0$.

Le couple d'identités (5.10) est absolument fondamental : il signifie que $h(t)$ (resp. $\overline{h}(\tau)$) peut être résolu par rapport au jet d'ordre ℓ_0 de $\overline{h}(\tau)$ (resp. de $h(t)$) et que cette résolution est *analytique* (puisque Φ l'est), bien que $h(t)$, $\overline{h}(\tau)$ et leurs jets soient, par hypothèse, des applications *formelles* qui sont *a priori* non convergentes. Ces identités ne permettent pas encore de démontrer que $h(t)$ et $\overline{h}(\tau)$ convergent : en effet, les variables t et τ sont encore mêlées dans (5.10), et les deux termes $J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\tau)$, $J_t^{\ell_0} h(t)$ sont *a priori* non convergents. Mais dans le reste de cette section, en « démélangeant » les variables t et τ, nous allons établir l'énoncé suivant, qui complètera la démonstration du Théorème 1.4 **(i)**.

ASSERTION 5.2. — *En supposant $\mathcal{M}$ minimale à l'origine, le couple d'identités (5.10) implique que $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ et que $\overline{h}(\tau) \in \mathbb{C}\{\tau\}^{n'}$ convergent.*

5.3. Passage aux jets d'ordre quelconque

Notre premier objectif est de généraliser (5.10) en faisant apparaître, à la place des membres de gauche $h(t)$ et $\overline{h}(\tau)$, des jets d'ordre arbitraires $J_t^{\ell} h(t)$ et $J_\tau^{\ell}\overline{h}(\tau)$, où $\ell \in \mathbb{N}$. Nous verrons ci-après pourquoi cela est nécessaire.

Pour cela, introduisons les champs de vecteurs Υ_j, $j = 1, \ldots, d$, et $\underline{\Upsilon}_j$, $j = 1, \ldots, d$, définis comme suit :

$$\Upsilon_j := \frac{\partial}{\partial w_j} + \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial \Theta_l}{\partial w_j}(\zeta, t)\, \frac{\partial}{\partial \xi_l}\ ; \qquad \underline{\Upsilon}_j := \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial \overline{\Theta}_l}{\partial \xi_j}(z, \tau)\, \frac{\partial}{\partial w_l}. \tag{5.11}$$

Ces champs de vecteurs sont tangents à $\mathcal{M}$: en effet, on vérifie immédiatement que $\Upsilon_{j_1}[\xi_{j_2} - \Theta_{j_2}(\zeta, t)] \equiv 0$ et que $\underline{\Upsilon}_{j_1}\left[w_{j_2} - \overline{\Theta}_{j_2}(z, \tau)\right] \equiv 0$, pour $j_1, j_2 = 1, \ldots, d$. Observons que la collection des $2m+d$ champs de vecteurs $\mathcal{L}_k$, $\underline{\mathcal{L}}_k$ et Υ_j engendre le fibré tangent $T\mathcal{M}$. La même propriété est satisfaite par la collection $\mathcal{L}_k$, $\underline{\mathcal{L}}_k$ et $\underline{\Upsilon}_j$. Notons au passage des relations de commutation que nous n'utiliserons pas : $[\Upsilon_j, \underline{\mathcal{L}}_k] = 0$ et $\left[\underline{\Upsilon}_j, \mathcal{L}_k\right] = 0$. Considérons l'action sur $h(t)$ des champ de vecteurs Υ_j, interprétés comme dérivations. Soit $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d) \in \mathbb{N}^d$ un multiindice arbitraire. Notons Υ^δ la dérivation composée $(\Upsilon_1)^{\delta_1}(\Upsilon_2)^{\delta_2} \cdots (\Upsilon_d)^{\delta_d}$, qui est d'ordre $|\delta|$. On observe immédiatement que

$$\Upsilon^\delta h(t) \equiv \partial_w^\delta h(t). \tag{5.12}$$

De manière similaire, $\underline{\Upsilon}^\delta \overline{h}(\tau) \equiv \partial_\xi^\delta \overline{h}(\tau)$.

En procédant comme dans la démonstration du Lemme 5.1, on vérifie que pour tout $i' = 1, \ldots, n'$ et tout multiindice $\alpha = (\beta, \delta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^d$, il existe des séries entières $Q_{i', \beta, \delta}$ telles que

$$\mathcal{L}^\beta\, \Upsilon^\delta h(t) \equiv Q_{i', \beta, \delta}\left(t, \tau, J_t^{|\beta|+|\delta|} h_{i_1'}(t)\right). \tag{5.13}$$

Ces séries sont polynomiales par rapport aux variables de jets et possèdent des coefficients analytiques par rapport à (t, τ), lesquels coefficients ne dépendent que des séries définissantes $\Theta_j(\zeta, t)$ de $\mathcal{M}$.

Réciproquement, puisque les n champs de vecteurs $\mathcal{L}_k$ et Υ_j engendrent l'espace des $(t_1, \ldots, t_n)$, nous pouvons inverser les formules $\mathcal{L}^\beta \Upsilon^\delta h_{i'}(t) \equiv Q_{i', \beta, \delta}$, en considérant les dérivées partielles $\partial_t^{\alpha_1} h_{i_1'}(t)$ comme inconnues. En examinant les termes de plus haute dérivation dans les polynômes $Q_{i', \beta, \delta}$, on constate que le système linéaire que l'on doit inverser est de type trigonal, et de déterminant 1 : l'inversion est élémentaire et conserve la polynomialité. On en déduit :

LEMME 5.3. — *Pour tout $i' = 1, \ldots, n'$ et tout multiindice $\alpha = (\beta, \delta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^d$, il existe une série entière $P_{i', \alpha}$, polynomiale par rapport à son dernier groupe de variables, dont les coefficients sont des séries entières convergentes par rapport à (t, τ) qui ne dépendent que des séries définissantes*

$\Theta_j(\zeta,\, t)$ de $\mathcal{M}$, tel que l'identité suivante est satisfaite dans $\mathbb{C}[\![t]\!]$:

$$\partial_t^\alpha h_{i'}(t) \equiv P_{i',\,\alpha}\left(t,\, \tau,\, \left(\mathcal{L}^{\beta_1}\Upsilon^{\delta_1} h(t)\right)_{|\beta_1|\leqslant|\beta|,\, |\delta_1|\leqslant|\delta|}\right), \tag{5.14}$$

lorsque $(t,\, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Appliquons maintenant la dérivation $\mathcal{L}^\beta\Upsilon^\delta$ à la première ligne de (5.9) et la dérivation $\underline{\mathcal{L}}^\beta\underline{\Upsilon}^\delta$ à la seconde ligne de (5.9) : cela est autorisé, puisque les champs de vecteurs $\mathcal{L}_k$, $\underline{\mathcal{L}}_k$, Υ_j et $\underline{\Upsilon}_j$ sont tangents à $\mathcal{M}$. Comme les coefficients de ces dérivations sont analytiques, en utilisant la « règle de la chaîne » pour différentier les membres de droite Φ et $\overline{\Phi}$ de (5.9), nous voyons apparaître des expressions polynomiales par rapport aux variables de jets stricts, dont les coefficients sont analytiques par rapport aux variables $(t,\, \tau) \in \mathcal{M}$. L'ordre de ces variables de jets monte jusqu'à $\ell_0 + |\beta| + |\delta|$. En appliquant le Lemme 5.3, nous pouvons effectuer des substitutions linéaires sur les identités obtenues afin de résoudre les dérivées partielles $\partial_t^\alpha h_{i'}(t)$, ce qui donne des identités de la forme

$$\partial_t^\alpha h_{i'}(t) \equiv \Phi_{i',\,\alpha}\left(t,\, \zeta,\, \Theta(\zeta,\, t),\, J_\tau^{\ell_0+|\beta|+|\delta|}\overline{h}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t))\right).$$

Soit $\ell \in \mathbb{N}$ un entier arbitraire. Collectons les identités obtenues pour tous les multiindices α satisfaisant $|\alpha| \leqslant \ell$ et résumons les calculs effectués.

LEMME 5.4. — *Pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, il existe une série entière $\Phi_\ell = \Phi_\ell\left(t,\, \tau,\, J^{\ell_0+\ell}\right)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{N_{n',\,n,\,\ell}}$, polynomiale par rapport aux variables de jets stricts, dont les coefficients sont des séries entières convergentes par rapport à $(t,\, \tau)$ qui ne dépendent que des séries définissantes $\Theta_j(\zeta,\, t)$ de $\mathcal{M}$, telle que les deux identités suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} J_t^\ell h(t) \equiv \Phi_\ell\left(t,\, \zeta,\, \Theta(\zeta,\, t),\, J_\tau^{\ell_0+\ell}\overline{h}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t))\right) & \text{et} \\ J_\tau^\ell \overline{h}(\tau) \equiv \overline{\Phi}_\ell\left(\tau,\, z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau),\, J_t^{\ell_0+\ell} h(z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau))\right), \end{cases} \tag{5.15}$$

dans $\mathbb{C}[\![\zeta,\, t]\!]^{N_{n',\,n,\,\ell}}$ et dans $\mathbb{C}[\![z,\, \tau]\!]^{N_{n',\,n,\,\ell}}$.

Ces formules constituent la généralisation désirée de (5.9). Elles seront notre nouveau point de départ.

La deuxième étape cruciale dans la démonstration de l'assertion 5.10 va consister à effectuer un grand nombre d'« auto-substitutions » entre ces formules, en se « déplaçant » le long des chaînes de Segre (conjuguées). Par souci de clarté et de compréhensibilité, commençons par détailler les deux premières étapes.

5.4. Restrictions à la première et à la deuxième chaîne de Segre conjuguée

Rappelons que $h^c(t,\,\tau) = \big(h(t),\, \overline{h}(\tau)\big)$. Nous admettrons l'abus de notation suivant : au lieu d'écrire rigoureusement $h\,(\pi_t(t,\,\tau))$ et $\overline{h}\,(\pi_\tau(t,\,\tau))$, nous écrirons $h(t,\,\tau) = h(t)$ et $\overline{h}(t,\,\tau) = \overline{h}(\tau)$.

Soit $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 1$, soit $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^\nu$ et soit $\mathsf{Q}(\mathsf{x}) = (\mathsf{Q}_1(\mathsf{x}), \dots, \mathsf{Q}_{2n}(\mathsf{x})) \in \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]^{2n}$ une application formelle quelconque satisfaisant $\mathsf{Q}(0) = 0$. Puisque le flot multiple de $\mathcal{L}$ défini par (3.8) n'agit pas sur les variables τ et que le flot multiple de $\underline{\mathcal{L}}$ défini par (3.9) n'agit pas sur les variables t, nous avons deux relations simples :

$$\begin{cases} J_t^\ell h\left(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(\mathsf{Q}(\mathsf{x}))\right) & \equiv J_t^\ell h\,(\mathsf{Q}(\mathsf{x})) \qquad \text{et} \\ J_\tau^\ell \overline{h}\,(\mathcal{L}_{z_1}(\mathsf{Q}(\mathsf{x}))) & \equiv J_\tau^\ell \overline{h}\,(\mathsf{Q}(\mathsf{x}))\,. \end{cases} \tag{5.16}$$

Pour généraliser ces observations, rappelons que lorsque k est impair, la k-ième chaîne de Segre conjuguée $\underline{\Gamma}_k$ commence à gauche par le multiflot $\underline{\mathcal{L}}_{z_k}(\cdots)$; de même, lorsque k est pair, elle commence à gauche par le multiflot $\mathcal{L}_{z_k}(\cdots)$. Nous déduisons alors de (5.16) deux relations triviales, mais absolument cruciales :

$$\begin{cases} J_t^\ell h\left(\underline{\Gamma}_k\left(z_{(k)}\right)\right) & \equiv J_t^\ell h\left(\underline{\Gamma}_{k-1}\left(z_{(k-1)}\right)\right), \qquad \textsf{si } k \textsf{ est impair ;} \\ J_\tau^\ell \overline{h}\left(\underline{\Gamma}_k\left(z_{(k)}\right)\right) & \equiv J_\tau^\ell \overline{h}\left(\underline{\Gamma}_{k-1}\left(z_{(k-1)}\right)\right), \qquad \textsf{si } k \textsf{ est pair.} \end{cases} \tag{5.17}$$

Des relations similaires sont satisfaites avec la chaîne de Segre Γ_k.

Restreignons maintenant les relations (5.15) à la première chaîne de Segre conjuguée, c'est-à-dire remplaçons $(t,\,\tau)$ par $\underline{\Gamma}_1\left(z_{(1)}\right)$. En tenant compte de (5.16), nous obtenons :

$$\begin{cases} J_t^\ell h\,(0) & \equiv \Phi_\ell\left(\underline{\Gamma}_1(z_1),\ J_\tau^{\ell_0+\ell}\overline{h}\,(\underline{\Gamma}_1(z_1))\right) \qquad \text{et} \\ J_\tau^\ell \overline{h}\,(\underline{\Gamma}_1(z_1)) & \equiv \overline{\Phi}_\ell\left(\underline{\Gamma}_1(z_1),\ J_t^{\ell_0+\ell}h(0)\right). \end{cases} \tag{5.18}$$

La première relation ne sera pas utile ; interprétons la seconde : *puique le jet $J_t^\ell h(0)$ est constant et puisque $\overline{\Phi}_\ell$ est analytique, le membre de droite converge par rapport à la variable $z_1 \in \mathbb{C}^m$* ; par conséquent, le membre de gauche est convergent par rapport à z_1, ce qui signifie que *la restriction à la première chaîne de Segre conjuguée du jet d'ordre quelconque $J_\tau^\ell \overline{h}$ converge.*

Passons maintenant à la deuxième chaîne de Segre conjuguée. Remplaçons $(t,\,\tau)$ par $\underline{\Gamma}_2(z_{(2)}) = \underline{\Gamma}_2(z_1,\,z_2)$ dans (5.15). En tenant compte de (5.16), nous obtenons :

$$\left\{\begin{aligned} J_t^\ell h\left(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)})\right) &\equiv \Phi_\ell\left(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)}),\ J_\tau^{\ell_0+\ell}\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_1(z_1)\right)\right) \qquad \text{et} \\ J_\tau^\ell\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_1(z_1)\right) &\equiv \overline{\Phi}_\ell\left(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)}),\ J_t^\ell h\left(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)})\right)\right). \end{aligned}\right. \tag{5.19}$$

La seconde relation ne sera pas utile. Quant à la première, on voit tout de suite qu'il faut y remplacer le terme $J_\tau^{\ell_0+\ell}\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_1(z_1)\right)$ par l'expression que nous venons d'obtenir dans (5.18), sans oublier de remplacer ℓ par $\ell_0+\ell$, ce qui nous donne :

$$\left\{\begin{aligned} J_t^\ell h\left(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)})\right) &\equiv \Phi_\ell\left(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)}),\ J_\tau^{\ell_0+\ell}\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_1(z_1)\right)\right) \\ &\equiv \Phi_\ell\left(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)}),\ \overline{\Phi}_{\ell_0+\ell}\left(\underline{\Gamma}_1(z_1),\ J_t^{2\ell_0+\ell}h(0)\right)\right) \\ &=: \Pi_{\ell,2}\left(z_{(2)},\ J_t^{2\ell_0+\ell}h(0)\right). \end{aligned}\right. \tag{5.20}$$

Pour pouvoir effectuer une telle substitution, il était important de formuler à l'avance les identités (5.15) qui généralisent aux jets d'ordre quelconque les identités (5.9). Interprétons maintenant le résultat : l'expression de la seconde ligne de (5.20) est convergente, puisque Φ_ℓ et $\overline{\Phi}_{\ell_0+\ell}$ sont analytiques et puisque le jet $J_t^{2\ell_0+\ell}h(0)$ de l'application formelle h est constant. On en déduit que *la restriction à la seconde chaîne de Segre conjuguée du jet d'ordre quelconque $J_t^\ell h$ converge.*

Le lecteur aura deviné qu'en poursuivant ces substitutions le long des chaînes de Segre conjuguées de longueur arbitraire, nous pourrons conclure la démonstration de l'assertion 5.10, grâce au Lemme 3.5. Écrivons donc la démonstration finale.

5.5. Substitutions sur les chaînes de Segre conjuguées de longueur arbitraire

L'assertion suivante généralise les substitutions précédentes.

LEMME 5.5. — *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, il existe une série formelle $\Pi_{\ell,k} = \Pi_{\ell,k}\left(z_{(k)},\ J^{k\ell_0+\ell}\right)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{N_{n',n,\ell}}$, polynomiale par rapport aux variables de jets stricts, dont les coefficients sont des séries entières convergentes par rapport à $z_{(k)}$ qui ne dépendent que des séries définissantes $\Theta_j(\zeta,t)$ de $\mathcal{M}$, telle que les deux identités formelles suivantes :*

$$\left\{\begin{aligned} J_\tau^\ell\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})\right) &\equiv \overline{\Pi}_{\ell,k}\left(z_{(k)},\ J_t^{k\ell_0+\ell}h(0)\right), \qquad \text{si } k \text{ est impair ;} \\ J_t h\left(\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})\right) &\equiv \Pi_{\ell,k}\left(z_{(k)},\ J_t^{k\ell_0+\ell}h(0)\right) \qquad \text{si } k \text{ est pair,} \end{aligned}\right. \tag{5.21}$$

sont satisfaites dans $\mathbb{C}[\![z_{(k)}]\!]^{N_{n',n,\ell}}$.

Ce lemme nous permet de conclure la démonstration de l'assertion 5.10, et par là-même celle du Théorème 1.4 **(iii)**. En effet, en posant $\ell = 0$ dans la seconde identité (5.21), grâce à la convergence de $\Pi_{0,\,k}$, l'hypothèse du Lemme 3.5 est satisfaite.

Démonstration. — Pour $k = 1, 2$, le travail est achevé. Raisonnons par récurrence en supposant le lemme vrai pour un entier k. On supposera k impair – le cas où il est pair se traitera de manière similaire.

Remplaçons (t, τ) par $\underline{\Gamma}_{k+1}(z_{(k+1)})$ dans la première ligne de (5.15) ; utilisons la seconde relation (5.17) pour simplifier ; appliquons l'hypothèse de récurrence, c'est-à-dire la première ligne de (5.21) : ces trois actions reviennent à effectuer le calcul suivant :

$$\left\{\begin{aligned} J_t^\ell h\left(\underline{\Gamma}_{k+1}(z_{(k+1)})\right) &\equiv \Phi_\ell\left(\underline{\Gamma}_{k+1}(z_{(k+1)}),\, J_\tau^{\ell_0+\ell}\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right) \\ &\equiv \Phi_\ell\left(\underline{\Gamma}_{k+1}(z_{(k+1)}),\, J_\tau^{\ell_0+\ell}\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_{k}(z_{(k)})\right)\right) \\ &\equiv \Phi_\ell\left(\underline{\Gamma}_{k+1}(z_{(k+1)}),\, \overline{\Pi}_{\ell_0+\ell,\,k}\left(z_{(k)},\, J_t^{k\ell_0+\ell_0+\ell}h(0)\right)\right) \\ &=: \Pi_{\ell,\,k+1}\left(z_{(k+1)},\, J_t^{(k+1)\ell_0+\ell}h(0)\right). \end{aligned}\right. \tag{5.22}$$

Le résultat obtenu n'est autre que la formule (5.21) au niveau $k + 1$.

Étudions à présent la convergence de h avec des hypothèses moins simples que la non-dégénérescence finie **(h2)**.

6. Convergence d'applications CR formelles Segre non-dégénérées

6.1. Préliminaire

Cette section est entièrement consacrée à démontrer le Théorème 1.4 **(iii)**, valable pour des applications CR formelles satisfaisant la condition de non-dégénérescence **(h4)**. D'après le §5.2, nous pouvons développer les identités de réflexion (5.1) sous la forme (5.3). En revenant à la définition (1.21) des séries $\Psi'_{j',\,\beta}(z, w, \zeta, \xi, t')$ introduites dans le §1.11, nous avons la coïncidence de notations :

$$\left\{\begin{aligned} 0 &\equiv \Psi'_{j',\,\beta}\left(z,\, \overline{\Theta}(z, 0),\, 0,\, 0,\, h\left(z,\, \overline{\Theta}(z, 0)\right)\right) \\ &\equiv R'_{j',\,\beta}\left(z,\, \overline{\Theta}(z, 0),\, 0,\, 0,\, J_\tau^{|\beta|}\overline{h}(0) : h\left(z,\, \overline{\Theta}(z, 0)\right)\right). \end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

Une fois pour toutes, choisissons des entiers $j'(1), \ldots, j'(n')$ et des multi-indices distincts $\beta(1), \ldots, \beta(n')$ tels que le déterminant (1.23) ne s'annule pas. Pour alléger la présentation, nous noterons les séries $R'_{j'(i'_1),\,\beta(i'_1)}$ par $R'_{i'_1}$, pour $i'_1 = 1,\,\ldots,\,n'$. Définissons $\ell_0 := \max_{1\leqslant i'_1\leqslant n'} |\beta(i'_1)|$.

6.2. Proposition principale

Nous ramenons ainsi la démonstration du Théorème 1.4 **(iii)** à la proposition suivante, légèrement plus générale, puisqu'on ne suppose pas que h est une application CR formelle à valeurs dans une sous-variété générique analytique réelle complexifiée $\mathcal{M}'$, mais seulement que c'est une application formelle satisfaisant certaines équations analytiques.

PROPOSITION 6.1. — *Soient $R'_{i'}\left(t,\,\tau,\,J^{\ell_0}\,:\,t'\right)$, $i' = 1,\,\ldots,\,n'$, des séries entières holomorphes dans un voisinage de $\left(0,\,0,\,J^{\ell_0}_{\tau}\overline{h}(0)\,:\,0\right)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{N_{n',\,n,\,\ell_0}}$, polynomiales par rapport aux variables de jets stricts. Soit $\mathcal{M}$ la complexification d'une sous-variété analytique réelle générique représentée par les équations (3.3) et soit $h(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{n'}$ une application formelle, avec $h(0) = 0$. Supposons que pour $(t,\,\tau) \in \mathcal{M}$, les deux identités formelles conjuguées qui suivent sont satisfaites :*

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= R'_{i'}\left(t,\,\tau,\,J^{\ell_0}_{\tau}\overline{h}(\tau)\,:\,h(t)\right), \\ 0 &= \overline{R}'_{i'}\left(\tau,\,t,\,J^{\ell_0}_{t}h(t)\,:\,\overline{h}(\tau)\right). \end{aligned}\right. \tag{6.2}$$

pour $i' = 1,\,\ldots,\,n'$. Si $\mathcal{M}$ est minimale en 0 et si le déterminant suivant :

$$\det\left(\frac{\partial R'_{i'}}{\partial t_{i'_1}}\left(z,\,\overline{\Theta}(z,\,0),\,0,\,0,\,J^{\ell_0}_{\tau}\overline{h}(0)\,:\,h\left(z,\,\overline{\Theta}(z,\,0)\right)\right)\right)_{1\leqslant i',\,i'_1\leqslant n'} \not\equiv 0, \tag{6.3}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}\{z\}$, l'application $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ est convergente.

Démonstration. — En travaillant avec les chaînes de Segre Γ_k (alors que nous avons travaillé avec les chaînes conjuguées $\underline{\Gamma}_k$ dans la Section 5), établissons que $h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{n'}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le Lemme 3.5, cela suffira pour obtenir la conclusion de la Proposition 6.1. Commençons par établir un critère simplifié pour la convergence des jets de h et de $\overline{h}$ sur les chaînes de Segre.

6.3. Jets transversaux de h

Rappelons que les champs de vecteurs Υ_j et $\underline{\Upsilon}_j$ tangents à $\mathcal{M}$ sont définis par (5.11). Notons les relations

$$\begin{cases} J^\ell_\tau \overline{h}\left(\Gamma_k\left(z_{(k)}\right)\right) \equiv J^\ell_\tau \overline{h}\left(\Gamma_{k-1}\left(z_{(k-1)}\right)\right), & \text{si } k \text{ est impair}, \\ J^\ell_t h\left(\Gamma_k\left(z_{(k)}\right)\right) \equiv J^\ell_t h\left(\Gamma_{k-1}\left(z_{(k-1)}\right)\right), & \text{si } k \text{ est pair}, \end{cases} \tag{6.4}$$

qui sont analogues et équivalentes par conjugaison aux relations (5.17).

LEMME 6.2. — *Soit $\ell \in \mathbb{N}$, soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $\Gamma_k(z_{(k)})$ la k-ième chaîne de Segre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le jet d'ordre ℓ de h ou de $\overline{h}$ converge sur la k-ième chaîne de Segre, i.e. en tenant compte des simplifications (6.4) :*

$$\begin{cases} J^\ell_t h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{n',\,n,\,\ell}} & \text{si } k \text{ est impair}, \\ J^\ell_\tau \overline{h}\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{n',\,n,\,\ell}} & \text{si } k \text{ est pair ;} \end{cases} \tag{6.5}$$

(ii) *pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ et tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ satisfaisant $|\beta| + |\delta| \leqslant \ell$, les dérivées suivantes de h ou de $\overline{h}$ convergent :*

$$\begin{cases} \left[\mathcal{L}^\beta \Upsilon^\delta h\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{n'} & \text{si } k \text{ est impair}, \\ \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \underline{\Upsilon}^\delta \overline{h}\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{n'} & \text{si } k \text{ est pair ;} \end{cases} \tag{6.6}$$

(iii) *pour tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ satisfaisant $|\delta| \leqslant \ell$, les dérivées suivantes de h ou de $\overline{h}$ convergent :*

$$\begin{cases} \left[\Upsilon^\delta h\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{n'} & \text{si } k \text{ est impair}, \\ \left[\underline{\Upsilon}^\delta \overline{h}\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{n'} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \tag{6.7}$$

Interprétons la dernière propriété **(iii)** : on doit se figurer que les différentiations $\mathcal{L}^\beta$ et $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ sont « horizontales », puisqu'elles agissent le long des sous-variétés de Segre complexifiées (conjuguées) ; au contraire, les différentiations Υ^δ et $\underline{\Upsilon}^\delta$ doivent être considérées comme « transversales » , puisque les $2m + d$ champs de vecteurs $\mathcal{L}_k$, $\underline{\mathcal{L}}_k$ et Υ_j (ou $\underline{\Upsilon}_j$) engendrent $T\mathcal{M}$ (*cf.* le §5.3). Ainsi, le Lemme 6.2 ramène la convergence **(i)** des jets de h et de $\overline{h}$ à celle **(iii)** de leurs seuls « jets transversaux ».

Démonstration. — Rappelons qu'en développant $\mathcal{L}^\beta \Upsilon^\delta h_{i'}(t)$ (ou $\underline{\mathcal{L}}^\beta \underline{\Upsilon}^\delta \overline{h}_{i'}(\tau)$) par rapport aux jets $\partial^\alpha_t h_{i'}(t)$, on obtient les formules (5.13) et leurs inverses (5.14) (ainsi que leurs conjuguées). Nous en déduisons immédiatement l'équivalence entre **(i)** et **(ii)**.

(ii) implique **(iii)** trivialement. Réciproquement, supposons k impair pour fixer les idées. Observons que la k-ième chaîne de Segre $\Gamma_k(z_{(k)})$ s'écrit $\mathcal{L}_{z_k}\left(\Gamma_{k-1}(z_{(k-1)})\right)$. Soit $\phi(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{n'}$ une application formelle arbitraire. Soit $z \in \mathbb{C}^m$. D'après la définition (3.8) du flot de $\mathcal{L}$, on $\frac{\partial}{\partial z_l}\left[\phi(\mathcal{L}_z(0))\right] \equiv [\mathcal{L}_l\phi]\left(\mathcal{L}_z(0)\right)$, pour $l = 1, \ldots, m$. Plus généralement, en notant $z_{k;\,l}$, $l = 1, \ldots, m$, les composantes de $z_k \in \mathbb{C}^m$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial z_{k;\,l}}\left[\phi\left(\mathcal{L}_{z_k}\left(\Gamma_{k-1}(z_{(k-1)})\right)\right)\right] \equiv [\mathcal{L}_l\phi]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right). \tag{6.8}$$

Pour un multiindice $\beta \in \mathbb{N}^m$ arbitraire, nous en déduisons l'identité :

$$\partial_{z_k}^{\beta}\left[\phi\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\right] \equiv \left[\mathcal{L}^{\beta}\phi\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right). \tag{6.9}$$

Supposons maintenant que $\left[\Upsilon^{\delta}h\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{n'}$ est convergent. Puisque la propriété de convergence d'une série formelle est stable par dérivation quelconque par rapport à ses variables, nous en déduisons, en appliquant la différentiation $\partial_{z_k}^{\beta}$ à la série $\left[\Upsilon^{\delta}h\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)$ et en utilisant au passage la formule (6.9), que $\left[\mathcal{L}^{\beta}\Upsilon^{\delta}\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)$ est aussi convergent, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. Ceci démontre que **(iii)** implique **(ii)** dans le cas où k est impair. Le cas où k est pair se traite de manière analogue. □

6.4. Convergence des jets de h et de $\overline{h}$ sur la première chaîne de Segre

Nous pouvons maintenant amorcer la démonstration de la Proposition 6.1. Rappelons que pour $k = 1$, on a $z_{(1)} \equiv z_1 \in \mathbb{C}^m$. Remplaçons (t, τ) par $\Gamma_1(z_1)$ dans la première ligne de (6.2), ce qui nous donne les n' identités formelles :

$$0 \equiv R'_{i'}\left(\Gamma_1(z_1),\, J_{\tau}^{\ell_0}\overline{h}(0) \,:\, h(\Gamma_1(z_1))\right), \tag{6.10}$$

pour $i' = 1, \ldots, n'$. Au passage, nous avons utilisé la relation connue $J_{\tau}^{\ell_0}\overline{h}\left(\Gamma_1(z_1)\right) \equiv J_{\tau}^{\ell_0}\overline{h}(0)$. Grâce à l'analyticité des $R'_{i'}$, grâce au fait que $J_{\tau}^{\ell_0}\overline{h}(0)$ est constant, grâce au Corollaire 2.2 et enfin, grâce à l'hypothèse analytique principale (6.3) de la Proposition 6.1, nous déduisons immédiatement de (6.10) que la restriction de h à la première chaîne de Segre, *i.e.* $h(\Gamma_1(z_1)) \equiv h\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0)\right) \in \mathbb{C}\{z_1\}^{n'}$, est convergente.

La prochaine étape consiste à généraliser aux jets de h d'ordre quelconque cette propriété de convergence, après composition par $\Gamma_1(z_1)$. Nous verrons dans le §6.5 ci-après pourquoi cela est nécessaire.

LEMME 6.3. — *Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a $J_t^\ell h\,(\Gamma_1(z_1)) \in \mathbb{C}\{z_1\}^{N_{n',\,n,\,\ell}}$.*

Démonstration. — Grâce au Lemme 6.2, il suffit d'établir que

$$\left[\Upsilon^\delta h\right](\Gamma_1(z_1)) \in \mathbb{C}\{z_1\}^{n'}, \tag{6.11}$$

pour tout $\delta \in \mathbb{N}^d$. Pour cela, nous aurons besoin de formules analogues à (6.8) et (6.9), en remplaçant $\mathcal{L}$ par Υ et $\underline{\mathcal{L}}$ par $\underline{\Upsilon}$. Soient $p = (z_p,\, w_p,\, \zeta_p,\, \xi_p) \in \mathcal{M}$, $w \in \mathbb{C}^d$ et $\xi \in \mathbb{C}^d$. Les multiflots des champs de vecteurs Υ_j et $\underline{\Upsilon}_j$ introduits dans (5.11) ont pour expression explicite

$$\begin{cases} \Upsilon_w(p) & := (z_p,\, w_p + w,\, \zeta_p,\, \Theta(\zeta_p,\, z_p,\, w_p + w)) \qquad \text{et} \\ \underline{\Upsilon}_\xi(p) & := \left(z_p,\, \overline{\Theta}(z_p,\, \zeta_p,\, \xi_p + \xi),\, \zeta_p,\, \xi_p + \xi\right). \end{cases} \tag{6.12}$$

Il est clair que $\Upsilon_w(p) \in \mathcal{M}$ et que $\underline{\Upsilon}_\xi(p) \in \mathcal{M}$. Soit $\phi(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{n'}$. L'argument qui nous a permis d'établir (6.9) permet de vérifier que pour tout $\delta \in \mathbb{N}^d$, la relation formelle suivante est satisfaite :

$$\partial_w^\delta \left[\phi\left(\Upsilon_w\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right)\right] \equiv \left[\Upsilon^\delta \phi\right]\left(\Upsilon_w\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right). \tag{6.13}$$

Remplaçons maintenant $(t,\, \tau)$ par $\Upsilon_w\left(\Gamma_1(z_1)\right) \in \mathcal{M}$ dans la première ligne de (6.2), ce qui donne les identités formelles :

$$0 \equiv R'_{i'}\left(\Upsilon_w\left(\Gamma_1(z_1)\right),\, J_\tau^{\ell_0}\overline{h}\left(\Upsilon_w\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right) \,:\, h\left(\Upsilon_w\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right)\right), \tag{6.14}$$

dans $\mathbb{C}[\![z_1,\, w]\!]$, pour $i' = 1, \ldots, n'$. Dans ces identités, on ne peut effectuer aucune simplification en utilisant les relations (6.4). Néanmoins, en différentiant ces identités par rapport à w_j, $j = 1, \ldots, d$, et en posant $w = 0$, on pourra appliquer la simplification cruciale $J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(\Gamma_1(z_1)) \equiv J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(0)$. Pour exprimer précisément ce que fournit l'application de l'opérateur $\partial_{w_j}(\cdot)|_{w=0}$ à (6.14), groupons les variables dont dépendent les séries convergentes $R'_{i'}$ en trois sous-groupes : $(t,\, \tau)$; J^{ℓ_0} ; et t'. En appliquant l'opérateur $\partial_{w_j}(\cdot)|_{w=0}$ à (6.14), grâce à la «règle de la chaîne» pour la différentiation de séries composées et grâce à (6.13), nous obtenons une somme massive constituée de trois sous-groupes de polynômes différentiels, que nous écrivons en détail comme suit, juste avant de formuler des commentaires explicatifs :

$$\begin{cases} 0 \equiv \dfrac{\partial R'_{i'}}{\partial w_j}\left(\Gamma_1(z_1),\, J^{\ell_0}_\tau \overline{h}(0) \,:\, h\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right) \\ + \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \Theta_l}{\partial w_j}(0,\, z_1,\, \overline{\Theta}(z_1,\, 0))\, \frac{\partial R'_{i'}}{\partial \xi_l}\left(\Gamma_1(z_1),\, J^{\ell_0}_\tau \overline{h}(0) \,:\, h\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right) \\ + \displaystyle\sum_{i'_1=1}^{n'} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{N}^n, |\alpha_1| \leqslant \ell_0} \frac{\partial R'_{i'}}{\partial\left(\partial^{\alpha_1}_\tau \overline{h}_{i'_1}\right)}\left(\Gamma_1(z_1),\, J^{\ell_0}_\tau \overline{h}(0) \,:\, h\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right) \cdot \Upsilon_j \partial^{\alpha_1}_\tau \overline{h}_{i'}(0) \\ + \displaystyle\sum_{i'_1=1}^{n'} \frac{\partial R'_{i'}}{\partial t'_{i'_1}}\left(\Gamma_1(z_1),\, J^{\ell_0}_\tau \overline{h}(0) \,:\, h\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right) \cdot \left[\Upsilon_j h_{i'_1}\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right), \end{cases} \tag{6.15}$$

pour $i' = 1, \ldots, n'$ et $j = 1, \ldots, d$. Les deux premières lignes explicitent les dérivées partielles par rapport au premier groupe de variables $(t,\, \tau)$; la troisième ligne collecte les dérivées partielles par rapport au second groupe $J^{\ell_0}_\tau \overline{h}$; la quatrième ligne collecte les dérivées partielles par rapport au troisième groupe t'. D'après le début du §6.4, nous savons déjà que $h(\Gamma_1(z_1)) \in \mathbb{C}\{z_1\}^{n'}$ converge. En examinant tous les termes de la première, de la deuxième et de la troisième ligne de (6.15), nous voyons qu'ils sont convergents. De plus, les termes de la quatrième ligne situés avant le signe de multiplication « $\cdot$ » sont eux aussi convergents. Par conséquent, nous pouvons réécrire (6.15) sous la forme contractée :

$$0 \equiv b'_{i',\,j}(z_1) + \sum_{i'_1=1}^{n'} r'_{i',\,i'_1,\,j}(z_1) \cdot \left[\Upsilon_j h_{i'_1}\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right), \tag{6.16}$$

pour $i' = 1, \ldots, n'$ et $j = 1, \ldots, d$. Ici, comme nous venons de le remarquer, les séries entières $b'_{i',\,j}(z_1)$ et $r'_{i',\,i'_1,\,j}(z_1)$ sont convergentes. En fixant j pour appliquer le lemme suivant, nous déduisons de (6.16) que $\left[\Upsilon_j h_{i'_1}\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right) \in \mathbb{C}\{z_1\}$ converge, pour tout $i'_1 = 1, \ldots, n'$ et tout $j = 1, \ldots, d$.

LEMME 6.4. — *Soit $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 1$, soit $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^\nu$, soit $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geqslant 1$, soit $r'_{i',\,i'_1}(\mathsf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathsf{x}\}$ pour $i',\, i'_1 = 1, \ldots, n'$ et soit $b'_{i'}(\mathsf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathsf{x}\}$ pour $i' = 1, \ldots, n'$. Si n' séries* a priori *formelles $a'_{i'_1}(\mathsf{x}) \in \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]$, $i'_1 = 1, \ldots, n'$, satisfont formellement le système linéaire*

$$0 \equiv b'_{i'}(\mathsf{x}) + \sum_{i'_1=1}^{n'} r'_{i',\,i'_1}(\mathsf{x})\, a'_{i'_1}(\mathsf{x}), \tag{6.17}$$

et si

$$\det\Big(r'_{i',\,i'_1}(\mathsf{x})\Big)_{1\leqslant i',\,i'_1\leqslant n'}\not\equiv 0 \tag{6.18}$$

dans $\mathbb{C}\{\mathsf{x}\}$*, les séries* $a'_{i'_1}(\mathsf{x})\in\mathbb{C}\{\mathsf{x}\}$ *sont en fait convergentes.*

On peut démontrer ce lemme de manière élémentaire en appliquant les formules de Cramer : pour chaque $a'_{i'_1}(\mathsf{x})$, on obtient alors un quotient de séries convergentes, dont le dénominateur est constitué du déterminant (6.18) ; par unicité des séries formelles $a'_{i'_1}(\mathsf{x})$, le dénominateur est nécessairement absorbé par le numérateur ; en appliquant le théorème de division de K. Weierstrass (version formelle et version analytique), on en déduit que les séries $a'_{i'_1}(\mathsf{x})\in\mathbb{C}\{\mathsf{x}\}$ convergent. Observons aussi que ce lemme est un cas particulier du Corollaire 2.2, si l'on considère les équations analytiques $r'_{i'}(\mathsf{x},\,\mathsf{y}):=b'_{i'}(\mathsf{x})+\sum_{i'_1=1}^{n'}r'_{i',\,i'_1}(\mathsf{x})\,\mathsf{y}_{i'_1}=0$.

En résumé, nous avons établi que $[\Upsilon_j h]\,(\Gamma_1(z_1))\in\mathbb{C}\{z_1\}^{n'}$ pour $j=1,\,\dots,\,d$, ce qui nous donne le Lemme 6.3 pour $\ell=1$.

Pour traiter le cas général, nous allons démontrer (6.11) par récurrence. Soit $\ell\in\mathbb{N}$ tel que $\ell\geqslant 1$; supposons la propriété (6.11) satisfaite pour tout multiindice $\delta_2\in\mathbb{N}^d$ tel que $|\delta_2|\leqslant\ell$. Soit j tel que $1\leqslant j\leqslant d$. Soit $\delta_1\in\mathbb{N}^d$ un multiindice arbitraire tel que $|\delta_1|=\ell$. Rappelons qu'un multiindice $\delta\in\mathbb{N}^d$ arbitraire tel que $|\delta|=\ell+1$ s'écrit $\delta=\delta_1+\mathbf{1}_j^d$, où $\mathbf{1}_j^d$ désigne le multiindice $(0,\,\dots,\,0,\,1,\,0,\,\dots,\,0)\in\mathbb{N}^d$, où l'entier 1 se situe à la j-ième place et où 0 se trouve aux autres places. En appliquant la dérivation $\partial_{w_j}\partial_w^{\delta_1}$ à (6.14), en utilisant la « règle de la chaîne » pour la différentiation de séries entières composées et en utilisant la formule de Leibniz pour la différentiation des divers produits qui apparaissent, nous pourrions écrire sous forme développée une formule (compliquée) qui généraliserait (6.15), mais un tel travail formel n'est pas réellement nécessaire. En effet, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence, nous affirmons qu'il existe des séries entières convergentes $b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_1)\in\mathbb{C}\{z_1\}$ telles que l'application des dérivations $\partial_{w_j}\partial_w^{\delta_1}$ à (6.14) fournit les identités formelles suivantes :

$$\begin{aligned}0\equiv{}& b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_1) \\ &+\sum_{i'_1=1}^{n'}\frac{\partial R'_{i'}}{\partial t'_{i'_1}}\left(\Gamma_1(z_1),\,J_\tau^{\ell_0}\overline{h}(0)\,:h\,(\Gamma_1(z_1))\right)\cdot\left[\Upsilon_j\Upsilon^{\delta_1}h_{i'_1}\right](\Gamma_1(z_1)),\end{aligned} \tag{6.19}$$

pour $i'=1,\,\dots,\,n'$, et pour $j=1,\,\dots,\,d$. En effet, le terme $b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_1)$ collecte toutes les dérivées partielles de $R'_{i'}$ (par rapport aux trois groupes de variables $(t,\,\tau)$; $J^{\ell_0}\overline{h}$; et t') autres que celles écrites dans (6.19) ; ces dérivées partielles peuvent être multipliées par des coefficients entiers et par des termes de la forme $\Upsilon^{\delta_2} h_{i_2'}(\Gamma_1(z_1))$, pour $i_2' = 1, \ldots, n'$ et pour $|\delta_2| \leqslant \ell$. Tous ces termes convergent, grâce à l'hypothèse de récurrence : c'est pourquoi $b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_1) \in \mathbb{C}\{z_1\}$.

Pour terminer, réécrivons (6.19) sous la forme suivante

$$0 \equiv b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_1) + \sum_{i_1'=1}^{n'} r_{i',\,i_1',\,j}(z_1) \cdot \left[\Upsilon_j \Upsilon^{\delta_1} h_{i_1'}\right](\Gamma_1(z_1)), \tag{6.20}$$

qui est analogue à (6.16), avec les mêmes coefficients convergents $r_{i',\,i_1',\,j}(z_1) \in \mathbb{C}\{z_1\}$. Une application directe du Lemme 6.4 permet de conclure que $\left[\Upsilon_j \Upsilon^{\delta_1} h_{i_1'}\right](\Gamma_1(z_1)) \in \mathbb{C}\{z_1\}$ pour tout $j = 1, \ldots, d$, tout $|\delta_1| = \ell$ et tout $i_1' = 1, \ldots, n'$. Ceci complète la démonstration de (6.11) par récurrence sur $|\delta|$. Le Lemme 6.3 est démontré. □

6.5. Convergence des jets de h et de $\overline{h}$ sur la seconde chaîne de Segre

Dans le précédent paragraphe, nous n'avons pas insisté sur le fait que les jets de $\overline{h}$ convergent sur la première chaîne de Segre, parce que cette propriété est triviale : en effet, grâce à (6.4), le jet $J_\tau^\ell \overline{h}(\Gamma_1(z_1)) \equiv J_\tau^\ell \overline{h}(0)$ est constant, donc convergent. Un phénomène analogue prévaut sur la deuxième chaîne de Segre : puisque l'on a $J_t^\ell h\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \equiv J_t^\ell h(\Gamma_1(z_1))$ grâce à (6.4), il découle du Lemme 6.3 démontré précédemment que les jets de h convergent (gratuitement) sur la deuxième chaîne de Segre.

Pour démontrer que la série entière $\overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)$ converge par rapport à $z_{(2)} \in \mathbb{C}^{2m}$, écrivons la seconde ligne de (6.2) en y remplaçant (t, τ) par $\Gamma_2(z_{(2)})$, ce qui nous donne les n' identités formelles :

$$0 \equiv \overline{R}'_{i'}\left(\sigma\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right),\, J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_1(z_1)\right) \,:\, \overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)\right), \tag{6.21}$$

pour $i' = 1, \ldots, n'$. Ici, puisque le premier groupe (τ, t) d'arguments de $\overline{R}'_{i'}$ dans (6.2) est écrit dans l'ordre inverse de l'ordre habituel (t, τ), pour être rigoureux sur le plan notationnel, nous avons composé la chaîne $\Gamma_2(z_{(2)})$ avec l'involution holomorphe $\sigma(t, \tau) := (\tau, t)$ introduite juste avant le §3.7. Mais dans la Section 7 ci-dessous, nous admettrons le léger écart de notation qui consiste à sous-entendre σ. Bien entendu, nous avons utilisé (6.4) pour simplifier $J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \equiv J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_1(z_1)\right)$. Grâce au Lemme 6.11, le terme $J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_1(z_1)\right)$ est convergent : c'est bien parce qu'il apparaît dans (6.21) que nous avions besoin de démontrer à l'avance que les jets de h convergent sur

$\Gamma_1(z_1)$, au moins jusqu'à l'ordre ℓ_0. Par conséquent, les équations (6.21) sont convergentes par rapport à leurs deux premiers groupes de variables. Pour appliquer le Corollaire 2.2, il suffit à présent de vérifier que le déterminant suivant :

$$\det\left(\frac{\partial \overline{R}'_{i'}}{\partial \overline{t}'_{i'_1}}\left(\sigma\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right),\, J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_1(z_1)\right)\,:\overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)\right)\right)_{1\leqslant i',\, i'_1 \leqslant n'} \tag{6.22}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z_{(2)}]\!] = \mathbb{C}[\![z_1, z_2]\!]$. Or, en posant $z_1 = 0$ et en tenant compte de la relation $\Gamma_2(0, z_2) = \underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_{z_1}(0))|_{z_1=0} = \underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_0(0)) = \underline{\Gamma}_1(z_2)$, ce déterminant se simplifie comme suit :

$$\left\{\begin{aligned} &\det\left(\frac{\partial \overline{R}'_{i'}}{\partial \overline{t}'_{i'_1}}\left(\sigma\left(\underline{\Gamma}_1(z_2)\right),\, J_t^{\ell_0} h(0)\,:\overline{h}\left(\underline{\Gamma}_1(z_2)\right)\right)\right)_{1\leqslant i',\, i'_1 \leqslant n'} \\ \equiv\, &\det\left(\frac{\partial \overline{R}'_{i'}}{\partial \overline{t}'_{i'_1}}\left(z_2,\, \Theta(z_2, 0),\, 0,\, 0,\, J_t^{\ell_0} h(0)\,:\overline{h}\left(z_2, \Theta(z_2, 0)\right)\right)\right)_{1\leqslant i',\, i'_1 \leqslant n'}. \end{aligned}\right. \tag{6.23}$$

Grâce à l'hypothèse principale (6.3) (retrouvée ici à une conjugaison près), ce dernier déterminant ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z_2]\!]$, donc le déterminant (6.22) ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z_{(2)}]\!]$ et le corollaire 2.2 nous permet de conclure que $\overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(2)}\}^{n'}$ converge.

Nous pourrions poursuivre le raisonnement et établir une version du Lemme 6.3 sur la deuxième chaîne de Segre, *i.e.* démontrer que $J_\tau^\ell \overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(2)}\}^{N_{n',\,n\,\ell}}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Mais puisque nous avons maintenant passé en revue et commenté en détail tous les points techniques délicats, nous pouvons d'ores et déjà entamer la démonstration finale de la Proposition 6.1 en raisonnant par double récurrence sur la longueur k des chaînes de Segre et sur l'ordre ℓ des jets de h.

6.6. Démonstration finale

Pour conclure la Proposition 6.1, nous savons qu'il suffit d'établir le lemme suivant, qui généralise le Lemme 6.3.

LEMME 6.5. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left\{\begin{aligned} &J_t^\ell h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{n',\,n,\,\ell}}, && \text{si } k \text{ est impair ;} \\ &J_\tau^\ell \overline{h}\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{n',\,n,\,\ell}}, && \text{si } k \text{ est pair.} \end{aligned}\right. \tag{6.24}$$

Démonstration. — Pour $k = 1$, ce lemme est déjà démontré. Supposons que la propriété (6.24) est satisfaite au niveau k et démontrons-la au niveau

$k+1$. Pour fixer les idées, nous supposerons k impair – le cas où k est pair se traitant de manière similaire.

L'objectif est de démontrer que $J_\tau^\ell \overline{h}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k+1)}\}^{N_{n',n,\ell}}$ converge. Grâce au Lemme 6.2, il suffit de démontrer que

$$\left[\underline{\Upsilon}^\delta \overline{h}\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \in \mathbb{C}[\![z_{(k)}]\!]^{n'}, \tag{6.25}$$

pour tout $\delta \in \mathbb{N}^d$. Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier $|\delta|$.

Traitons d'abord le cas $\delta = 0$, déjà vu ci-dessus pour $k+1 = 2$. Pour cela, posons $(t, \tau) := \Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})$ dans la seconde ligne de (6.2), ce qui nous donne :

$$0 \equiv \overline{R}'_{i'}\left(\sigma\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right),\, J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \,:\, \overline{h}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right), \tag{6.26}$$

pour $i' = 1, \ldots, n'$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, le deuxième argument de $\overline{R}'_{i'}$ est convergent. Pour appliquer le Corollaire 2.2, il suffit donc de vérifier que le déterminant suivant :

$$\det\left(\frac{\partial \overline{R}'_{i'}}{\partial \overline{t}'_{i'_1}}\left(\sigma\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right),\, J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_k(z_k)\right) \,:\, \overline{h}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right)\right)_{1\leqslant i',\, i'_1 \leqslant n'} \tag{6.27}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z_{(k+1)}]\!] = \mathbb{C}[\![z_{(k)},\, z_{k+1}]\!]$. Or, en posant $z_{(k)} = 0$ et en tenant compte de la relation $\Gamma_{k+1}(0,\, z_{k+1}) = \underline{\Gamma}_1(z_{k+1})$, ce déterminant se simplifie et coïncide avec le déterminant (6.23) dans lequel z_2 est remplaçé par z_{k+1}. Grâce à l'hypothèse principale (6.3), il ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z_{k+1}]\!]$, donc le déterminant (6.27) ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z_{(k+1)}]\!]$ et le corollaire (2.2) nous permet de conclure que $\overline{h}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k+1)}\}^{n'}$ converge.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell \geqslant 0$; supposons la propriété (6.25) vraie pour tout multiindice $\delta_2 \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\delta_2| \leqslant \ell$. Soit $\delta_1 \in \mathbb{N}^d$ un multiindice arbitraire tel que $|\delta_1| = \ell$. Considérons le multiindice $\delta_1 + \mathbf{1}_j^d$.

En remplaçant (t, τ) par $\underline{\Upsilon}_\xi\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)$ dans la deuxième ligne de (6.2), où $\xi \in \mathbb{C}^d$, nous obtenons les identités formelles :

$$0 \equiv \overline{R}'_{i'}\left(\sigma\left(\underline{\Upsilon}_\xi\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right), J_t^{\ell_0} h\left(\underline{\Upsilon}_\xi\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right) : \overline{h}\left(\underline{\Upsilon}_\xi\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right)\right), \tag{6.28}$$

dans $\mathbb{C}[\![z_{(k+1)},\, \xi]\!]$ pour $i' = 1, \ldots, n'$. Appliquons la dérivation $\partial_{\xi_j} \partial_\xi^{\delta_1}(\cdot)\big|_{\xi=0}$ à (6.28), ce qui revient à appliquer $\underline{\Upsilon}_j \underline{\Upsilon}^{\delta_1}(\cdot)|_{\xi=0}$. Nous obtenons un polynôme (compliqué) dont nous extrayons seulement le terme que nous considérons comme principal ; ainsi nous résumons le résultat du calcul sous la forme :

$$\left\{\begin{aligned} 0 \equiv b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_{(k+1)}) & \\ + \sum_{i'_1=1}^{n'} \frac{\partial \overline{R}_{i'}}{\partial \overline{t}'_{i'_1}} & \Big(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)}),\, J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\, :\overline{h}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\Big)\cdot \\ & \cdot \left[\Upsilon_j \Upsilon^{\delta_1}\overline{h}\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right), \end{aligned}\right. \tag{6.29}$$

pour $i' = 1, \ldots, n'$, où le terme $b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_{(k+1)})$ est le « reste » qui incorpore tous les termes qui apparaissent, excepté celui qui est écrit à droite du signe « + ». Nous affirmons que $b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_{(k+1)})$ est convergent.

En effet, le terme $b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_{(k+1)})$ est un polynôme à coefficients entiers qui contient comme monômes deux catégories de termes. La première catégorie est constituée des dérivées « transversales » suivantes :

$$\left[\underline{\Upsilon}^{\delta_2} h_{i'_2}\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right), \tag{6.30}$$

où $i'_2 = 1, \ldots, n'$ et où, de manière cruciale, la longueur de δ_2 satisfait l'inégalité $|\delta_2| \leqslant \ell$: en effet, le seul terme qui incorpore une dérivée « transversale » d'ordre $\ell+1$ est celui qui est écrit à droite du signe « + » dans (6.29). Grâce à l'hypothèse de récurrence, tous les termes (6.30) convergent. La deuxième catégorie de termes est consitutée des dérivées partielles suivantes de $\overline{R}_{i'}$:

$$\left\{\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^{\eta_2}}{\partial t'_{i''(1)} \cdots \partial t'_{i''(\eta_2)}} \, \frac{\partial^{\varepsilon_2}}{\partial\left(\partial_t^{\alpha(1)} h_{i'(1)}\right)\cdots\partial\left(\partial_t^{\alpha(\varepsilon_2)} h_{i'(\varepsilon_2)}\right)} \underline{\Upsilon}^{\delta_2}\left(\overline{R}_{i'}\right)\right] \\ & \qquad \Big(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)}),\, J_t^{\ell_0} h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\, :\overline{h}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\Big) \end{aligned}\right. \tag{6.31}$$

(dans cette expression, la deuxième ligne désigne l'argument de la première ligne), où $1 \leqslant i''(1), \ldots, i''(\eta_2) \leqslant n'$, où $\alpha(1), \ldots, \alpha(\varepsilon_2) \in \mathbb{N}^n$, où $1 \leqslant i'(1), \ldots, i'(\varepsilon_2) \leqslant n'$ et où $\eta_2 + \varepsilon_2 + \delta_2 + \leqslant \ell + 1$. Grâce à l'hypothèse de récurrence (il s'agit en fait de l'hypothèse de récurrence qui porte sur k et non sur ℓ), les termes (6.31) convergent aussi.

Puisque $b'_{i',\,\delta_1,\,j}(z_{(k+1)})$ converge et puisque le déterminant (6.27) est convergent et ne s'annule pas identiquement, le Lemme (6.4) s'applique. Nous en déduisons que $\underline{\Upsilon}_j \underline{\Upsilon}^{\delta_1} \overline{h}_{i'_1}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k+1)}\}$ pour $j = 1, \ldots, d$, $|\delta_1| \leqslant \ell$ et $i' = 1, \ldots, n'$: c'est la propriété (6.25) au niveau $|\delta| = \ell + 1$.

Ceci complète la démonstration du Lemme 6.5. □

La Proposition 6.1 est démontrée. □

7. Convergence de l'application de réflexion CR formelle

7.1. Préliminaire

Cette dernière section est consacrée à démontrer le Théorème 1.2. Contrairement aux deux précédentes démonstrations, nous ne pourrons pas ramener les raisonnements à la seule considération des composantes de h : il nous faudra étudier simultanément le nombre *infini* des composantes $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion (1.16). Avertissons dès maintenant le lecteur : la démonstration du Théorème 1.2 *n'est ni courte ni simple* ; ce théorème constitue en effet une avancée substantielle par rapport aux travaux de S.M. Baouendi, P. Ebenfelt et L.-P. Rothschild, dont le principe élémentaire a été exposé dans le §5 ; comme nous l'avons expliqué dans l'Introduction, cette avancée ne se limite pas à la simple greffe de techniques connues. Pour toutes ces raisons, nous devrons faire preuve dans cette section d'un réel souci d'exposition, afin de présenter nos calculs majeurs de la manière la plus accessible qui soit.

Soit $\chi(t)$ une application formelle et soit $\ell \in \mathbb{N}$. Rappelons que nous notons $J_t^\ell \chi(t)$ son jet d'ordre ℓ. Par exemple, le jet d'ordre ℓ de l'application formelle $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{d'}$ est constitué de toutes les dérivées partielles par rapport à t de l'application formelle composée $t \longmapsto_{\mathcal{F}} \Theta'_{\gamma'}(h(t))$. De même, le jet $J_t^\ell \mathcal{R}'_h(\tau', t)$ s'identifie à : $J_t^\ell \xi' - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \, J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h(t))$; ici, pour $\alpha = 0$, la dérivée partielle $\partial_t^\alpha \xi'$ s'identifie à ξ', mais disparaît pour $|\alpha| \geqslant 1$.

Pour commencer, énonçons ce que fournit la différentiation de l'application formelle composée $t \longmapsto_{\mathcal{F}} \Theta'_{\gamma'}(h(t))$.

Lemme 7.1. — *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Il existe une application polynomiale universelle Q_α à valeurs dans $\mathbb{C}^{d'}$, linéaire par rapport à son second groupe de variables et ne dépendant que du jet strict d'ordre $|\alpha|$ de h, qui satisfait :*

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t^\alpha \left[\Theta'_{\gamma'}(h(t))\right] &\equiv Q_\alpha \left(J_t^{|\alpha|} h(t), \; \left[J_{t'}^{|\alpha|} \Theta'_{\gamma'}\right](h(t)) \right), \\ 0 &\equiv Q_\alpha \left(J_t^{|\alpha|} h(t), \; 0 \right). \end{aligned} \right. \tag{7.1}$$

La propriété d'annulation écrite à la seconde ligne découle de la linéarité par rapport au second groupe de variables ; elle sera utilisée dans la démonstration du Lemme 7.2 ci-dessous. Pour établir cet énoncé, on procède en raisonnant par récurrence ; la démonstration est élémentaire, puisqu'on ne demande pas l'expression explicite des applications Q_α, inutile pour la suite.

Mentionnons toutefois qu'une application de la formule de Faà di Bruno à plusieurs variables fournirait cette expression.

7.2. Estimées de Cauchy

Dans la conclusion du Théorème 1.2, la convergence de l'application de réflexion (1.16) équivaut à deux propriétés bien distinctes :

(i) pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, la série formelle vectorielle $\Theta'_{\gamma'}(h(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^{d'}$ converge ;

(ii) il existe des constantes $\sigma > 0$, $C' >$ et $\rho' > 0$ telles que

$$|t| < \sigma \Longrightarrow \left|\Theta'_{\gamma'}(h(t))\right| < C'\,(\rho')^{-|\gamma'|}, \tag{7.2}$$

pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

La seconde propriété est une *estimée de Cauchy*. Nous souhaitons énoncer dès maintenant qu'elle découle de la première (Lemme 7.2 *infra*). Grâce à cette remarque, nous pourrons nous dispenser dans la suite de toute considération au sujet des estimées de croissance et nous contenter d'établir seulement des propriétés de convergence (*voir* la Proposition principale 7.3 ci-dessous).

Comme dans la Section 6, nous travaillerons avec la chaîne de Segre Γ_k, sans utiliser la chaîne conjuguée $\underline{\Gamma}_k$. Soit une série formelle $\Psi'(t') \in \mathbb{C}[\![t']\!]$ sans terme constant. Nous noterons

$$\left[J_t^\ell \Psi'(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) := \left(\partial_t^\alpha \left[\Psi'(h(t))\right]\big|_{t=\Gamma_k(z_{(k)})}\right)_{|\alpha|\leqslant \ell} \tag{7.3}$$

le jet de l'application formelle composée $t \longmapsto \Psi'(h(t))$, dans lequel on remplace l'argument t par $\Gamma_k(z_{(k)})$. Dans la suite, nous utiliserons régulièrement des crochets et des grandes parenthèses, en vue d'une clarté maximale ; en effet, loin d'alourdir les calculs, le respect d'un parenthésage rigoureux permettra d'éliminer toute ambiguïté notationnelle. Voici donc l'énoncé qui nous dispensera de mentionner les estimées de Cauchy. Nous travaillerons avec une chaîne de Segre de longueur k arbitraire et avec des jets d'ordre ℓ arbitraire.

LEMME 7.2. — *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}$. Si k est* impair, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\left[J_t^\ell \mathcal{R}'_h\right]\left(\tau', \Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{\tau', z_{(k)}\}^{N_{d', n, \ell}}$;

(2) *pour tout* $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, *on a :* $\left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}}$, *et il existe des constantes* $\sigma > 0$, $C' > 0$ *et* $\rho' > 0$ *telles que*

$$|z_{(k)}| < \sigma \Longrightarrow \left|J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}\left(h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\right)\right| < C'\,(\rho')^{-|\gamma'|}\ ; \tag{7.4}$$

(3) *pour tout* $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, *on a :* $\left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}}$.

Si k *est* pair, *on a trois propriétés équivalentes analogues conjuguées, obtenues en rempaçant* t *par* τ, h *par* $\overline{h}$, $\Theta'_{\gamma'}$ *par* $\overline{\Theta}'_{\gamma'}$ *et* $\mathcal{R}'_h(\tau', t)$ *par* $\overline{\mathcal{R}}'_h(t', \tau) := w' - \overline{\Theta}'\left(z', \overline{h}(\tau)\right)$.

La troisième propriété exprime seulement que le jet d'ordre ℓ de chaque composante $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion converge sur la k-ième chaîne de Segre, sans estimation de Cauchy.

Démonstration. — Puisque

$$J_t^\ell \mathcal{R}'_h\left(\tau', \Gamma_k(z_{(k)})\right) = J_t^\ell \xi' - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'}\left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right), \tag{7.5}$$

l'équivalence entre les propriétés **(1)** et **(2)** provient de la théorie élémentaire des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

L'implication **(2)** $\Rightarrow$ **(3)** est triviale. Réciproquement, supposons que la propriété de convergence $\left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}}$ est satisfaite pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Notons $\theta'_{\gamma',\ell}(z_{(k)}) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}}$ ces séries vectorielles convergentes. L'objectif est d'établir qu'elles satisfont une estimée de Cauchy.

Pour cela, partons des identités formelles vectorielles :

$$0 \equiv \left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) - \theta'_{\gamma',\ell}(z_{(k)}), \tag{7.6}$$

valables dans $\mathbb{C}[\![z_{(k)}]\!]^{N_{d',n,\ell}}$. Grâce au Lemme 7.1, nous pouvons développer le premier terme :

$$0 \equiv Q_\ell\left(J_t^\ell h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right),\ \left[J_{t'}^\ell \Theta'_{\gamma'}\right]\left(h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\right)\right) - \theta'_{\gamma',\ell}(z_{(k)}). \tag{7.7}$$

Ces identités sont satisfaites par l'application formelle $J_t^\ell h\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}[\![z_{(k)}]\!]^{N_{n',n,\ell}}$. Notons que les identités (7.7) sont en nombre infini, puisque γ' varie dans $\mathbb{N}^{m'}$; heureusement, le Théorème d'approximation 2.3 s'applique dans une telle situation, grâce à la remarque qui suit son énoncé. Dans le Théorème 2.3, on suppose aussi que toutes les séries formelles considérées s'annulent à l'origine. Ici, $h(0) = 0$, mais le *jet strict* de h d'ordre ℓ à l'origine (*i.e.* toutes les dérivées partielles $\partial_t^{\alpha_1} h_{i_1'}(0)$, pour $1 \leqslant |\alpha_1| \leqslant \ell$ et pour $1 \leqslant i_1 \leqslant n'$) ne s'annule pas forcément. Heureusement, en soustrayant de l'équation vectorielle (7.7) l'équation vectorielle (7.7) prise en $z_{(k)} = 0$, on se ramène à des séries formelles qui sont toutes sans terme constant.

En appliquant donc le Théorème 2.3 à (7.7) avec l'ordre d'approximation $N = 1$, nous déduisons qu'il existe une application convergente $\mathsf{H}_\ell\left(z_{(k)}\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{n',\,n,\,\ell}}$, que nous écrirons sous forme développée comme suit : $\mathsf{H}_\ell\left(z_{(k)}\right) = \left(\mathsf{H}_\alpha\left(z_{(k)}\right)\right)_{|\alpha| \leqslant \ell}$, telle que $\mathsf{H}_\ell(0) = J_t^\ell h(0)$ et telle que les équations formelles suivantes sont satisfaites :

$$0 \equiv Q_\ell\left(\mathsf{H}_\ell\left(z_{(k)}\right),\ \left[J_{t'}^\ell \Theta'_{\gamma'}\right]\left(\mathsf{H}_0\left(z_{(k)}\right)\right)\right) - \theta'_{\gamma',\,\ell}(z_{(k)}). \tag{7.8}$$

Utilisons maintenant les estimées de Cauchy satisfaites par le jet d'ordre ℓ, par rapport à t', de la série définissante $\Theta'(\zeta',\, t') = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'}\, \Theta'_{\gamma'}(t')$: il existe des constantes $\sigma' > 0$, $\widetilde{C}' > 0$ et $\rho' > 0$ telles que

$$|t'| < \sigma' \Longrightarrow \left|J_{t'}^\ell \Theta'_{\gamma'}(t')\right| < \widetilde{C}'\,(\rho')^{-|\gamma'|}. \tag{7.9}$$

Soit $\sigma > 0$ suffisamment petit pour que $\mathsf{H}_\ell\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)$ converge dans le cube $\square_\sigma^{km} = \{z_{(k)} \in \mathbb{C}^{km} : \left|z_{(k)}\right| < \sigma$, et pour que $\left|z_{(k)}\right| < \sigma$ implique $\left|\mathsf{H}_\ell\left(z_{(k)}\right) - J_t^\ell h(0)\right| < \sigma'$, et en particulier $\left|\mathsf{H}_0\left(z_{(k)}\right)\right| < \sigma'$. On en déduit :

$$|z_{(k)}| < \sigma \Longrightarrow \left|\left[J_{t'}^\ell \Theta'_{\gamma'}\right]\left(\mathsf{H}_0\left(z_{(k)}\right)\right)\right| < \widetilde{C}'\,(\rho')^{-|\gamma'|}. \tag{7.10}$$

Enfin, en utilisant le fait que l'application polynomiale Q_ℓ est linéaire par rapport à son second groupe de variables et en majorant les coefficients de cette expression linéaire, qui sont des polynômes par rapport aux variables $\mathsf{H}_{i_1',\,\alpha_1}\left(z_{(k)}\right)$, pour $1 \leqslant |\alpha_1| \leqslant |\alpha|$ et pour $i_1' = 1, \ldots, n'$, on vérifie qu'il existe une constante $C' \geqslant \widetilde{C}'$ telle que

$$|z_{(k)}| < \sigma \Longrightarrow \left|Q_\ell\left(\mathsf{H}_\ell\left(z_{(k)}\right),\ \left[J_{t'}^\ell \Theta'_{\gamma'}\right]\left(\mathsf{H}_0\left(z_{(k)}\right)\right)\right)\right| < C'\,(\rho')^{-|\gamma'|}. \tag{7.11}$$

Grâce à l'identité (7.8), on en déduit l'estimation de Cauchy désirée :

$$|z_{(k)}| < \sigma \Longrightarrow \left|\theta'_{\gamma',\,\ell}(z_{(k)})\right| < C'\,(\rho')^{-|\gamma'|}. \tag{7.12}$$

Ceci complète la démonstration du Lemme 7.2. $\square$

7.3. Énoncé de la proposition principale

Grâce au Lemme 7.2, nous ramenons la démonstration du Théorème 1.2 à des énoncés de convergence pour les jets des composantes de l'application de réflexion.

PROPOSITION 7.3. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $\ell \in \mathbb{N}$, les propriétés de convergence suivantes sont satisfaites :*

(1) si k est impair, *pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, on a :*

$$\left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k\left(z_{(k)}\right)\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}} ; \tag{7.13}$$

(2) si k pair, *pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, on a :*

$$\left[J_\tau^\ell \overline{\Theta}'_{\gamma'}(\overline{h})\right]\left(\Gamma_k\left(z_{(k)}\right)\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}}. \tag{7.14}$$

Cette proposition implique le Théorème 1.2, grâce au Lemme 7.2 et grâce au Lemme 3.5. Notons que pour k et ℓ fixés, il y a une infinité de propriétés de convergence dans (7.13) et dans (7.14) (*cf.* le §1.13). De plus, rappelons qu'en vertu de (6.4), on a :

$$\begin{cases} \left[J_\tau^\ell \overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_k\left(z_{(k)}\right)\right) \equiv \left[J_\tau^\ell \overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_{k-1}\left(z_{(k-1)}\right)\right), & \text{si } k \text{ est impair ;} \\ \left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}\left(h\right)\right]\left(\Gamma_k\left(z_{(k)}\right)\right) \equiv \left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}\left(h\right)\right]\left(\Gamma_{k-1}\left(z_{(k-1)}\right)\right), & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \tag{7.15}$$

Par conséquent, il n'est pas restrictif de supposer k impair dans (7.13) et k pair dans (7.14).

Nous allons d'abord établir la Proposition 7.3 dans le cas $k = 1$, $\ell = 0$ (§7.12), puis dans le cas $k = 1$, ℓ quelconque (§7.14) et puis dans le cas $k = 2$, $\ell = 0$ (§7.16). Ensuite, dans le §7.17 *infra*, nous écrirons la démonstration finale, pour k et ℓ quelconques. Pour commencer, en guise de préliminaire, formulons deux énoncés cruciaux : un principe d'unicité relié à la CR-transversalité de h (§7.4 juste ci-dessous) et un principe de symétrie entre les identités de réflexion conjuguées (*cf.* le §1.10 *supra* et le Lemme 7.6 *infra*).

7.4. CR-transversalité

Rappelons que l'application CR formelle h est supposée CR-transversale à l'origine. D'après (1.12), cela signifie que si une série formelle $\overline{F}'(\zeta') \in \mathbb{C}[\![\zeta']\!]$ satisfait l'identité

$$\overline{F}'\left(\overline{f}_1\left(\zeta, \Theta(\zeta, 0)\right), \ldots, \overline{f}_{m'}\left(\zeta, \Theta(\zeta, 0)\right)\right) \equiv 0, \tag{7.16}$$

dans $\mathbb{C}[\![\zeta]\!]$, elle doit s'annuler identiquement. Analysons cette hypothèse.

Pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, développons la puissance $\overline{f}^{\gamma'}$, restreinte à la première chaîne de Segre conjuguée $\underline{\Gamma}_1(\zeta) = (0, 0, \zeta, \Theta(\zeta, 0))$, par rapport aux puissances de ζ, ce qui nous donne :

$$\overline{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta, 0)) =: \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \overline{f}_{\gamma', \beta} \frac{\zeta^\beta}{\beta!}, \tag{7.17}$$

avec certains coefficients $\overline{f}_{\gamma', \beta} \in \mathbb{C}$. Puisque $\overline{f}(0) = 0$, la puissance $\overline{f}^{\gamma'}$ s'annule à l'ordre $|\gamma'|$ à l'origine ; nous en déduisons :

$$\overline{f}_{\gamma', \beta} = 0, \qquad \text{pour tout } \gamma' \text{ tel que } |\gamma'| > |\beta|. \tag{7.18}$$

Développons aussi la série $\overline{F}'(\zeta') =: \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{F}'_{\gamma'} \cdot (\zeta')^{\gamma'}$, où $\overline{F}'_{\gamma'} \in \mathbb{C}$. Remplaçons $(\zeta')^{\gamma'}$ par (7.17) dans le développement de $\overline{F}'(\zeta')$, ce qui donne la double somme :

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \frac{\zeta^\beta}{\beta!} \left(\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{F}'_{\gamma'} \overline{f}_{\gamma', \beta} \right). \tag{7.19}$$

Grâce à la propriété (7.18), pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, la somme entre parenthèses dans (7.19) est finie : ces coefficients existent et la double somme a un sens. Nous en déduisons que l'hypothèse de CR-transversalité se traduit par l'implication concrète :

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\forall \beta \in \mathbb{N}^m \ : \quad \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{F}'_{\gamma'} \overline{f}'_{\gamma', \beta} = 0 \right) \\ \Downarrow \\ \left(\overline{F}'_{\gamma'} = 0, \quad \forall \gamma' \in \mathbb{N}^{m'} \right). \end{array} \right. \tag{7.20}$$

Cette implication peut s'interpréter en disant que le système linéaire homogène infini écrit à la première ligne de (7.20) est de noyau nul.

7.5. Notation pour les dérivations CR

Soit $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ la dérivation CR définie par (1.18). Rappelons que différentier (7.17) par rapport à ζ_k revient à appliquer la dérivation $\underline{\mathcal{L}}_k$, prise en $(\zeta, t) = (\zeta, 0)$. En posant $\zeta = 0$, nous en déduisons :

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}(0) = \overline{f}_{\gamma', \beta}. \tag{7.21}$$

Avant de poursuivre, effectuons une remarque importante. L'application formelle $\overline{f}(\tau)$ ne dépend que de τ. Mais lorsqu'on lui applique la dérivation $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}$, dont les coefficients dépendent de t et de τ (*voir* (3.7)), on obtient une expression qui dépend de t et de τ, à moins que $\beta = 0$. Aussi, pour être précis et seulement lorsque cela sera nécessaire, nous n'écrirons pas $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}(\tau)$, mais $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}(t, \tau)$, ou, de manière équivalente $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}(z, w, \zeta, \xi)$. Voici l'information utile concernant le développement de ces expressions.

LEMME 7.4. — *Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, il existe un polynôme universel $\overline{Q}_{\beta}$, linéaire par rapport à son second groupe de variables, tel que l'identité formelle suivante est satisfaite :*

$$\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}(t, \tau) \equiv \overline{Q}_{\beta}\left(J_{\zeta}^{|\beta|}\Theta(\zeta, t),\ J_{\tau}^{|\beta|}\overline{f}^{\gamma'}(\tau)\right), \tag{7.22}$$

dans $\mathbb{C}[\![t, \tau]\!]$, pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

On établit ce lemme grâce à une récurrence élémentaire sur le multiindice $\beta \in \mathbb{N}^m$.

7.6. Principe d'unicité

Restreignons (7.22) à la première chaîne de Segre $\Gamma_1(z_1) = \left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right)$, où $z_1 \in \mathbb{C}^m$, ce qui donne :

$$\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \equiv \overline{Q}_{\beta}\left(J_{\zeta}^{|\beta|}\Theta\left(0, z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0)\right),\ J_{\tau}^{|\beta|}\overline{f}^{\gamma'}(0)\right). \tag{7.23}$$

Puisque le polynôme $\overline{Q}_{\beta}$ est linéaire par rapport à son second groupe de variables, on a : $\overline{Q}_{\beta}\left(J_{\zeta}^{|\beta|}\Theta,\ 0\right) = 0$. En outre, puisque $\overline{f}(0) = 0$, on a : $J_{\tau}^{|\beta|}\overline{f}^{\gamma'}(0) = 0$ pour tout γ' tel que $|\gamma'| > |\beta|$. Il découle de ces deux observations et de (7.23) que :

$$\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \equiv 0, \qquad \text{pour tout } \gamma' \text{ tel que } |\gamma'| > |\beta|. \tag{7.24}$$

Pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, supposons donnée une série formelle arbitraire $\overline{F}_{\gamma'}(z_1) \in \mathbb{C}[\![z_1]\!]$. Grâce à (7.24), pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, la somme infinie de produits de séries formelles définie par :

$$\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \cdot \overline{F}_{\gamma'}(z_1), \tag{7.25}$$

est en fait une somme finie ; par conséquent, elle possède un sens en tant que série formelle. Nous pouvons maintenant formuler le principe d'unicité qui nous sera précieux pour la démonstration de la Proposition 7.3. Rappelons que h est CR-transversale à l'origine, ce qui se traduit par l'implication (7.20).

LEMME 7.5. — *L'implication plus générale suivante est satisfaite :*

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\forall \beta \in \mathbb{N}^m \ : \quad 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'} \left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \cdot \overline{F}_{\gamma'}(z_1)\right) \\ & \qquad \Downarrow \\ & \left(\overline{F}'_{\gamma'}(z_1) \equiv 0, \qquad \forall\, \gamma' \in \mathbb{N}^{m'}\right). \end{aligned} \right. \tag{7.26}$$

Démonstration. — Les arguments sont élémentaires. En revenant à (7.21), observons que $\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}(0, 0, 0, 0) = \overline{f}_{\gamma', \beta}$. Par conséquent, on peut écrire

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'} \left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) = \overline{f}_{\gamma', \beta} + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m,\, |\gamma| \geqslant 1} \overline{f}_{\gamma', \beta, \gamma}\, z_1^\gamma, \tag{7.27}$$

avec certains coefficients $\overline{f}_{\gamma', \beta, \gamma} \in \mathbb{C}$. De même, développons chaque série formelle

$$\overline{F}_{\gamma'}(z_1) =: \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \overline{F}_{\gamma', \gamma}\, z_1^\gamma, \tag{7.28}$$

où $\overline{F}_{\gamma', \gamma} \in \mathbb{C}$, et réécrivons la première ligne de (7.26) :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^m \ : \ 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left(\overline{f}_{\gamma',\beta} + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m, |\gamma| \geqslant 1} \overline{f}_{\gamma',\beta,\gamma}\, z_1^\gamma\right) \cdot \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \overline{F}_{\gamma',\gamma}\, z_1^\gamma\right). \tag{7.29}$$

En posant tout d'abord $z_1 = 0$, on obtient les équations linéaires :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^m \ : \qquad 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}_{\gamma', \beta} \cdot \overline{F}_{\gamma', 0}, \tag{7.30}$$

qui impliquent immédiatement que $\overline{F}_{\gamma', 0} = 0$, pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, grâce à l'implication (7.20). Soit $\ell \in \mathbb{N}$. En raisonnant par récurrence sur la longueur des multiindices γ, supposons que l'on a : $\overline{F}_{\gamma', \gamma_2} = 0$, pour tout multiindice $\gamma_2 \in \mathbb{N}^m$ tel que $|\gamma_2| \leqslant \ell$ et pour tout multindice $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Dans (7.29), la somme du second terme du produit commence alors pour $|\gamma| \geqslant \ell$. Soit $\gamma_1 \in \mathbb{N}^m$ un multiindice arbitraire de longueur $\ell + 1$. En annulant le coefficient de $z_1^{\gamma_1}$ dans (7.29), on trouve les équations linéaires

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^m \ : \qquad 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}_{\gamma', \beta} \cdot \overline{F}_{\gamma', \gamma_1}, \tag{7.31}$$

qui impliquent immédiatement que $\overline{F}_{\gamma',\gamma_1} = 0$, pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, en utilisant de nouveau (7.20). Ceci complète la démonstration. $\square$

7.7. Combinatoire d'identités conjuguées

Avant d'amorcer la démonstration de la Proposition 7.3, notre objectif sera d'analyser le lien qui existe entre les quatre identités de réflexion (1.19) et (1.20). À partir de maintenant, nous devrons en effet utiliser de manière exhaustive les relations qui existent entre les objets analytico-géométriques introduits jusqu'à présent, et leurs conjugués.

Comme dans le §1.8, posons $r(t,\tau) := \xi - \Theta(\zeta,t)$ et $\overline{r}(\tau,t) := w - \overline{\Theta}(z,\tau)$. De même, posons $r'(t',\tau') := \xi' - \Theta'(\zeta',t')$ et $\overline{r}'(\tau',t') := w' - \overline{\Theta}'(z',\tau')$. Rappelons (*cf.* (3.4)) qu'il existe deux matrices inversibles $a(t,\tau)$ et $a'(t',\tau')$ de séries formelles convergentes, de taille $d \times d$ et $d' \times d'$, telles qu'on a les quatre identités formelles vectorielles suivantes, conjuguées par paires verticales :

$$\begin{cases} \overline{r}(\tau,t) \equiv a(t,\tau)\, r(t,\tau), & \overline{r}'(\tau',t') \equiv a'(t',\tau')\, r'(t',\tau'), \\ r(t,\tau) \equiv \overline{a}(\tau,t)\, \overline{r}(\tau,t), & r'(t',\tau') \equiv \overline{a}'(\tau',t')\, \overline{r}'(\tau',t'), \end{cases} \tag{7.32}$$

dans $\mathbb{C}[\![t,\tau]\!]^d$ et dans $\mathbb{C}[\![t',\tau']\!]^{d'}$. Par hypothèse (*cf.* le §1.8), il existe une matrice $b(t,\tau)$ de taille $d' \times d$ de séries formelles telle que $r'\left(h(t),\overline{h}(\tau)\right) \equiv b(t,\tau)\, r(t,\tau)$. Respectons la combinatoire sous-jacente : ce n'est pas une, mais quatre identités fondamentales, toutes équivalentes entre elles, qu'il nous faut écrire :

$$\begin{cases} r'\left(h(t),\overline{h}(\tau)\right) \equiv b(t,\tau)\, r(t,\tau), & \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),h(t)\right) \equiv c(t,\tau)\, r(t,\tau), \\ \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),h(t)\right) \equiv \overline{b}(\tau,t)\, \overline{r}(\tau,t), & r'\left(h(t),\overline{h}(\tau)\right) \equiv \overline{c}(\tau,t)\, \overline{r}(\tau,t). \end{cases} \tag{7.33}$$

Ici, nous avons posé $c(t,\tau) := \overline{b}(\tau,t)a(t,\tau)$. Pour $(t,\tau) \in \mathcal{M}$, on a $r(t,\tau) = 0$ et $\overline{r}(\tau,t) = 0$. En partant des quatre identités (7.33), on pourrait penser qu'il ne reste alors que deux égalités

$$r'\left(h(t),\overline{h}(\tau)\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),h(t),\right) = 0. \tag{7.34}$$

lorsque $(t,\tau) \in \mathcal{M}$, mais on se méprendrait alors sur la véritable nature des choses : en effet, dire que $(t,\tau) \in \mathcal{M}$ revient à dire que $w = \overline{\Theta}(z,\tau)$ ou que $\xi = \Theta(\zeta,t)$, et par conséquent, en remplaçant w et ξ par ces deux valeurs possibles dans les deux égalités (7.34), on obtient quatre identités formelles vectorielles :

$$\begin{cases} r'\left(h(t),\overline{h}(\zeta,\Theta(\zeta,t))\right) \equiv 0, & \overline{r}'\left(\overline{h}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t)\right) \equiv 0, \\ \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),h\left(z,\overline{\Theta}(z,\tau)\right)\right) \equiv 0, & r'\left(h\left(z,\overline{\Theta}(z,\tau)\right),\overline{h}(\tau)\right) \equiv 0, \end{cases} \tag{7.35}$$

qui ne sont autres, dans le même ordre, que les quatre relations (7.33) restreintes à $\mathcal{M}$. À nouveau, elles sont conjuguées par paires verticales.

Venons-en maintenant aux identités de réflexion. Rappelons que les champs de vecteurs $\mathcal{L}_k$ et $\underline{\mathcal{L}}_k$ définis par (3.7) satisfont $\mathcal{L}_k\,\overline{r}(\tau,\,t) \equiv 0$ et $\underline{\mathcal{L}}_k\,r(t,\,\tau) \equiv 0$. En appliquant ces dérivations à la première colonne de (7.32), nous en déduisons que $\underline{\mathcal{L}}_k\,\overline{r}(\tau,\,t) \equiv \underline{\mathcal{L}}_k\,a(t,\,\tau)\cdot r(t,\,\tau)$ et que $\mathcal{L}_k\,r(t,\,\tau) \equiv \mathcal{L}_k\,\overline{a}(\tau,\,t)\cdot\overline{r}(\tau,\,t)$. Par conséquent, nous avons $\underline{\mathcal{L}}_k\,\overline{r}(\tau,\,t) = 0$ et $\mathcal{L}_k\,r(t,\,\tau) = 0$, pour $(t,\,\tau)\in\mathcal{M}$, mais pas d'identité formelle dans $\mathbb{C}[\![t,\,\tau]\!]^d$. Plus généralement, pour tout multindice $\beta\in\mathbb{N}^m$ et pour $(t,\,\tau)\in\mathcal{M}$, nous avons les quatre relations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\beta\,r(t,\,\tau) = 0, & \mathcal{L}^\beta\,\overline{r}(\tau,\,t) = \ 0, \\ \underline{\mathcal{L}}^\beta\,\overline{r}(\tau,\,t) = 0, & \underline{\mathcal{L}}^\beta\,r(t,\,\tau) = \ 0, \end{cases} \tag{7.36}$$

satisfaites pour $(t,\,\tau)\in\mathcal{M}$. Lorsque le multiindice β est de longueur strictement positive, les relations de la deuxième colonne sont des identités formelles vectorielles dans $\mathbb{C}[\![t,\,\tau]\!]^d$. Cette remarque ne sera pas utilisée dans la suite.

En appliquant les dérivations $\mathcal{L}^\beta$ et $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ aux deux relations (7.34), nous obtenons les quatre identités de réflexion (1.19) et (1.20) de l'Introduction :

$$\begin{cases} 0 = \underline{\mathcal{L}}^\beta\,r'\left(h(t),\,\overline{h}(\tau)\right), & 0 = \underline{\mathcal{L}}^\beta\,\overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\,h(t)\right), \\ 0 = \mathcal{L}^\beta\,\overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\,h(t)\right), & 0 = \mathcal{L}^\beta\,r'\left(h(t),\,\overline{h}(\tau)\right), \end{cases} \tag{7.37}$$

où β parcourt $\mathbb{N}^m$, avec $(t,\,\tau)\in\mathcal{M}$, comme à l'accoutumée. La première ligne de (7.37) coïncide avec (1.19) ; la deuxième ligne, avec (1.20).

Pour obtenir ces quatre identités de réflexion, on peut procéder d'une manière très légèrement différente en partant des quatre identités formelles (7.35). En effet, rappelons que le fait de différentier une série $\overline{\psi}\left(z,\,\overline{\Theta}(z,\,\tau)\right)$ par rapport à z^β revient à appliquer la dérivation $\mathcal{L}^\beta$ à $\overline{\psi}$ (*cf.* aussi (4.8)). Ainsi, en différentiant les quatre identités formelles (7.35) par rapport à z^β ou par rapport à ζ^β, nous obtenons quatre familles infinies d'identités formelles :

$$\begin{cases} 0 \equiv \underline{\mathcal{L}}^\beta\,r'\left(h(t),\,\overline{h}(\zeta,\,\Theta(\zeta,\,t))\right), & 0 \equiv \underline{\mathcal{L}}^\beta\,\overline{r}'\left(\overline{h}(\zeta,\,\Theta(\zeta,\,t)),\,h(t)\right), \\ 0 \equiv \mathcal{L}^\beta\,\overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\,h\left(z,\,\overline{\Theta}(z,\,0)\right)\right), & 0 \equiv \mathcal{L}^\beta\,r'\left(h\left(z,\,\overline{\Theta}(z,\,0)\right),\,\overline{h}(\tau)\right), \end{cases} \tag{7.38}$$

satisfaites pour tout $\beta\in\mathbb{N}^m$. Elles coïncident avec (7.37).

7.8. Équivalence entre les identités de réflexion

Maintenant, vérifions que ces quatre familles infinies d'identités sont équivalentes entre elles. Les deux membres de chaque colonne de (7.37) (ou de (7.38)) sont conjugués entre eux, donc équivalents. Pour démontrer que les deux familles infinies écrites à la première ligne de (7.37) (ou de (7.38)) sont équivalentes, partons des deux identités formelles :

$$\left\{\begin{aligned} & r'\left(h(t),\, \overline{h}(\tau)\right) \equiv \overline{a}'\left(\overline{h}(\tau),\, h(t)\right)\, \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\, h(t)\right), \\ & \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\, h(t)\right) \equiv a'\left(h(t),\, \overline{h}(\tau)\right)\, r'\left(h(t),\, \overline{h}(\tau)\right), \end{aligned}\right. \tag{7.39}$$

obtenues en remplaçant les variables t' et τ' par $h(t)$ et par $\overline{h}(\tau)$ dans la deuxième colonne de (7.32). Si β et γ sont deux multiindices de $\mathbb{N}^m$, on notera $\gamma \leqslant \beta$ si $\gamma_k \leqslant \beta_k$ pour $k = 1, \ldots, m$. Appliquons aux deux identités (7.39) la dérivation $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ en tenant compte de la formule de Leibniz, ce qui donne, en n'écrivant pas les arguments $(t,\, \tau)$ pour alléger les formules :

$$\left\{\begin{aligned} & \underline{\mathcal{L}}^\beta\, r'\left(h,\, \overline{h}\right) \equiv \sum_{\gamma \leqslant \beta} \frac{\beta!}{\gamma!\,(\beta-\gamma)!} \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\beta-\gamma}\left(\overline{a}'\left(\overline{h},\, h\right)\right) \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\gamma}\left(\overline{r}'\left(\overline{h},\, h\right)\right), \\ & \underline{\mathcal{L}}^\beta\, \overline{r}'\left(\overline{h},\, h\right) \equiv \sum_{\gamma \leqslant \beta} \frac{\beta!}{\gamma!\,(\beta-\gamma)!} \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\beta-\gamma}\left(a'\left(h,\, \overline{h}\right)\right) \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\gamma}\left(r'\left(h,\, \overline{h}\right)\right). \end{aligned}\right. \tag{7.40}$$

Grâce à ces relations, nous déduisons immédiatement l'équivalence désirée :

$$\left\{\begin{aligned} & \left(\forall\, \beta \in \mathbb{N}^m \ : \underline{\mathcal{L}}^\beta\, r'\left(h(t),\, \overline{h}(\tau)\right) = 0\right) \\ & \qquad\qquad \Updownarrow \\ & \left(\forall\, \beta \in \mathbb{N}^m \ : \underline{\mathcal{L}}^\beta\, \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\, h(t)\right) = 0\right). \end{aligned}\right. \tag{7.41}$$

Ainsi, les quatre familles infinies d'identités de réflexions (7.37) sont équivalentes à une seule d'entre elles.

7.9. Spéculation cruciale

Une telle observation semble maintenant contredire notre affirmation au sujet de la nécessité d'utiliser réellement les deux familles infinies d'identités de réflexion (1.19) (ou leurs conjuguées (1.20)), comme nous l'avons avancé dans le §1.10. En effet, grâce à l'équivalence (7.41), on peut fort bien soutenir qu'il est redondant de mentionner plus d'une famille infinie d'identités de réflexion, les trois autres n'ajoutant aucune relation nouvelle. C'est le point de vue qui est adopté dans toutes les références citées après l'équation (1.18), bien que dans aucun de ces articles, on ne puisse déceler le moindre souci d'établir de telles équivalences. Nous admettrons bien sûr que le point de vue classique est justifié lorsque des hypothèses de finitude telles que **(h1)**, **(h2)**, **(h3)** ou **(h4)**, ou encore, telles que l'algébricité de M', sont ajoutées au problème pour en simplifier l'étude. Mais en revanche, lorsqu'aucune hypothèse particulière de finitude n'est supposée sur la sous-variété générique image M', le fait que l'on différentie $\overline{g}$ et les puissances $\overline{f}^{\gamma'}$ dans la première ligne de (1.19), alors qu'on différentie les composantes $\overline{\Theta}'_{\gamma'}(\overline{h})$ de l'application de réflexion CR conjuguée dans la deuxième ligne de (1.19), constitue une différence formelle que nous considérons comme majeure, bien qu'elle soit occultée par l'équivalence (7.41) et qu'on puisse, pour cette raison, la juger comme infime et négligeable. Mentionnons qu'à ce jour, nous ne sommes pas parvenu à construire une seconde démonstration du Théorème 1.2 qui n'utilise pas un jeu alternatif permanent entre chaque couple d'identités de réflexions (1.19) et (1.20)[7]. Le reste de cette section est consacré à expliquer comment doit fonctionner ce jeu alternatif, afin d'établir la Proposition 7.3.

7.10. Principe d'équivalence polarisée

Commençons par polariser l'équivalence (7.41). Soit $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 1$, soit $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^\nu$ et soient $\mathsf{H}(\mathsf{x}) \in \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]^n$ et $\mathsf{Q}(\mathsf{x}) \in \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]^{2n}$ deux applications formelles sans terme constant.

LEMME 7.6. — *L'équivalence suivante est satisfaite :*

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\forall \beta \in \mathbb{N}^m \ : \underline{\mathcal{L}}^\beta \left[\overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\, \mathsf{H}(\mathsf{x})\right)\right]\Big|_{(t,\,\tau)=\mathsf{Q}(\mathsf{x})} \equiv 0, \quad \text{dans } \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]^{d'}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow \\ &\left(\forall \beta \in \mathbb{N}^m \ : \underline{\mathcal{L}}^\beta \left[r'\left(\mathsf{H}(\mathsf{x}),\, \overline{h}(\tau)\right)\right]\Big|_{(t,\,\tau)=\mathsf{Q}(\mathsf{x})} \equiv 0, \quad \text{dans } \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]^{d'}\right). \end{aligned}\right. \tag{7.42}$$

Puisque les coefficients des dérivations $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ dépendent de t et de τ, et que l'on remplace $(t,\,\tau)$ par $\mathsf{Q}(\mathsf{x})$, ces identités formelles sont à interpréter dans $\mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]^{d'}$. Une équivalence analogue est vérifiée, en remplaçant $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ par $\mathcal{L}^\beta$ et $\overline{h}(\tau)$ par $h(t)$.

---

(7) Dans l'article [BMR2002], cette stratégie est empruntée librement, sans référence à nos travaux antérieurs [Me2000], [Me2001b] et [Me2001c]. Cependant, dans ledit article, l'approche originale que nous exposons ici est submergée par une technicité quasi-cryptique ; il en découle un manque certain de clarté conceptuelle qui rend cet article hermétique, même du point de vue d'un spécialiste rompu au calcul formel.

Démonstration. — En adaptant l'argument du §7.8 ci-dessus, partons des deux identités formelles conjuguées :

$$\begin{cases} \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\, \mathsf{H}(\mathsf{x})\right) \equiv a'\left(\mathsf{H}(\mathsf{x}),\, \overline{h}(\tau)\right)\, r'\left(\mathsf{H}(\mathsf{x}),\, \overline{h}(\tau)\right), \\ r'\left(\mathsf{H}(\mathsf{x}),\, \overline{h}(\tau)\right) \equiv \overline{a}'\left(\overline{h}(\tau),\, \mathsf{H}(\mathsf{x})\right)\, \overline{r}'\left(\overline{h}(\tau),\, \mathsf{H}(\mathsf{x})\right), \end{cases} \tag{7.43}$$

valables dans $\mathbb{C}[\![\tau,\, \mathsf{x}]\!]^{d'}$, que nous obtenons en remplaçant les variables t' et τ' par $\mathsf{H}(\mathsf{x})$ et par $\overline{h}(\tau)$ dans la deuxième colonne de (7.32). Appliquons les dérivations $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}$ et la formule de Leibniz, ce qui donne les identités suivantes, dans $\mathbb{C}[\![t,\, \tau,\, \mathsf{x}]\!]^{d'}$:

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{L}}^{\beta}\, \overline{r}'\left(\overline{h},\, \mathsf{H}\right) \equiv \displaystyle\sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \frac{\beta!}{\beta_1!\, (\beta-\beta_1)!} \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\beta-\beta_1}\left(a'\left(\mathsf{H},\, \overline{h}\right)\right) \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}\left(r'\left(\mathsf{H},\, \overline{h}\right)\right), \\ \underline{\mathcal{L}}^{\beta}\, r'\left(\mathsf{H},\, \overline{h}\right) \equiv \displaystyle\sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \frac{\beta!}{\beta_1!\, (\beta-\beta_1)!} \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\beta-\beta_1}\left(\overline{a}'\left(\overline{h},\, \mathsf{H}\right)\right) \cdot \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}\left(\overline{r}'\left(\overline{h},\, \mathsf{H}\right)\right). \end{cases} \tag{7.44}$$

Grâce à ces relations, nous déduisons immédiatement l'équivalence désirée. □

7.11. Écriture définitive des quatre familles d'identités de réflexion

Dorénavant, pour écrire les identités de réflexion (1.6) et (1.20), nous adopterons le principe de notation qui est expliqué au §7.5. Plus précisément, nous les écrirons en respectant un parenthésage rigoureux, en utilisant le signe « · » pour la multiplication, et en faisant apparaître les deux arguments $(t,\, \tau)$ des termes auxquels s'appliquent les différentiations $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}$ et $\mathcal{L}^{\beta}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\, \overline{g}_{j'}\right](\tau,\, t) & = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{f}^{\gamma'}\right](\tau,\, t) \cdot \Theta'_{j',\gamma'}(h(t)), \\ 0 & = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \cdot \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right](\tau,\, t), \\ \left[\mathcal{L}^{\beta} g_{j'}\right](t,\, \tau) & = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\mathcal{L}^{\beta} f^{\gamma'}\right](t,\, \tau) \cdot \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right), \\ 0 & = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}(\tau)^{\gamma'} \cdot \left[\mathcal{L}^{\beta} \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right](t,\, \tau). \end{cases} \tag{7.45}$$

Ici : $(t,\, \tau) \in \mathcal{M}$; j' satisfait $1 \leqslant j' \leqslant d'$; β varie dans $\mathbb{N}^m$. Nous sous-entendons que pour $\beta = 0$, la deuxième ligne de (7.45) coïncide avec la relation non différentiée $g_{j'}(t) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \, \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(h(t))$; de même, nous sous-entendrons que la quatrième ligne de (7.45) coïncide avec $\overline{g}_{j'}(\tau) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}^{\gamma'}(\tau)\, \Theta'_{j',\gamma'}(h(t))$ pour $\beta = 0$.

Le Lemme 7.4 fournit l'expression développée de $\left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{f}^{\gamma'}\right](t,\, \tau)$. En raisonnant par récurrence, on établit aussi l'énoncé suivant, utilse dans le §7.12 ci-dessous.

LEMME 7.7. — *Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, il existe un polynôme universel $\overline{P}'_{\beta}$, linéaire par rapport à son second groupe de variables, tel que l'identité formelle suivante est satisfaite :*

$$\left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right](t,\, \tau) \equiv \overline{P}'_{\beta}\left(J_{\zeta}^{|\beta|}\Theta(\zeta,\, t),\; J_{\tau}^{|\beta|}\left[\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right)\right]\right), \qquad (7.46)$$

dans $\mathbb{C}[\![t,\, \tau]\!]^{d'}$, pour tout $j' = 1,\, \ldots,\, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

Pour prévenir une confusion possible, notons que le second argument de $\overline{P}'_{\beta}$ dans (7.46) n'est pas le jet $\left[J_{\tau'}^{|\beta|} \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\right]\left(\overline{h}(\tau)\right)$, mais le jet d'ordre $|\beta|$ de l'application formelle composée $\tau \longmapsto_{\mathcal{F}} \overline{\Theta}_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right)$.

7.12. Convergence des composantes l'application de réflexion sur la première chaîne de Segre

Après ces préliminaires étendus, nous pouvons enfin débuter la démonstration de la Proposition 7.3. Nous allons d'abord établir (7.13) dans le cas $k = 1$, $\ell = 0$. Nous affirmons en effet que pour tout $j' = 1,\, \ldots,\, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, on a :

$$\Theta'_{j',\gamma'}\left(h\left(z_1,\, \overline{\Theta}(z_1,\, 0)\right)\right) \in \mathbb{C}\{z_1\}. \qquad (7.47)$$

Démonstration. — Pour cela, posons $(t,\, \tau) = \left(z_1,\, \overline{\Theta}_1,\, 0,\, 0\right)$ dans la seconde ligne de (7.45), où $|\beta| \geqslant 1$, ainsi que dans l'identité qui est sous-entendue pour $\beta = 0$, ce qui nous donne :

$$\left\{\begin{aligned} g_{j'}\left(z_1,\, \overline{\Theta}(z_1,\, 0)\right) \;&\equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[f^{\gamma'}\right]\left(z_1,\, \overline{\Theta}(z_1,\, 0)\right) \cdot \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(0)\right), \\ 0 \;&\equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[f^{\gamma'}\right]\left(z_1,\, \overline{\Theta}(z_1,\, 0)\right) \cdot \\ &\quad \cdot \overline{P}'_{\beta}\left(J_{\zeta}^{|\beta|}\Theta\left(0,\, z_1,\, \overline{\Theta}(z_1,\, 0)\right),\; J_{\tau}^{|\beta|}\, \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)(0)\right). \end{aligned}\right. \qquad (7.48)$$

Ces équations sont analytiques par rapport à z_1, puisque le second groupe d'arguments de $\overline{P}'_\beta$ est constant. Elles sont satisfaites par l'application formelle $z_1 \longmapsto_{\mathcal{F}} h\big(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0)\big)$. En appliquant le Théorème 2.3 avec l'ordre d'approximation $N = 1$, nous déduisons qu'il existe une application convergente $\mathsf{H}(z_1) =: (\mathsf{F}(z_1), \mathsf{G}(z_1)) \in \mathbb{C}\{z_1\}^{m'} \times \mathbb{C}\{z_1\}^{d'}$, avec $\mathsf{H}(0) = 0$, qui satisfait les mêmes équations analytiques, *i.e.* :

$$\begin{cases} \mathsf{G}_{j'}(z_1) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathsf{F}^{\gamma'}(z_1) \cdot \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(0)\right), \\ \quad 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathsf{F}^{\gamma'}(z_1) \cdot \overline{P}'_\beta \left(J_\zeta^{|\beta|}\Theta\left(0, z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0)\right),\ J_\tau^{|\beta|}\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)(0)\right). \end{cases} \tag{7.49}$$

Notons que ces dernières identités (7.49) coïncident avec les identités de la première ligne de (7.42), si on les écrit avec $\mathsf{x} := z_1$, avec $\mathsf{Q}(\mathsf{x}) := \big(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\big)$ et avec $\mathsf{H}(\mathsf{x}) := \mathsf{H}(z_1)$.

Grâce au principe d'équivalence (7.42), nous pouvons donc faire basculer ces identités vers la seconde ligne de (7.42), ce qui nous donne, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^{m'}$:

$$\begin{cases} \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{g}_{j'}\right]\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right]\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}(z_1)). \end{cases} \tag{7.50}$$

Presque miraculeusement, nous voyons apparaître dans (7.50) les applications convergentes $\Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}(z_1)) \in \mathbb{C}\{z_1\}$. Puisque ces termes constituent la seule différence par rapport aux identités de réflexion écrites à la première ligne de (7.45) et prises en $(t, \tau) = \big(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\big)$, que nous explicitons comme suit :

$$\begin{cases} \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{g}_{j'}\right]\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right]\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \Theta'_{j',\gamma'}\left(h\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0)\right)\right), \end{cases} \tag{7.51}$$

soustrayons immédiatement (7.50) de (7.51) :

$$\begin{cases} 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right]\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0\right) \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \left\{\Theta'_{j',\gamma'}\left(h\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0)\right)\right) - \Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}(z_1))\right\}. \end{cases} \tag{7.52}$$

Pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à appliquer le principe d'unicité (7.26) (pour chaque j') à ces dernières identités, ce qui fournit les relations :

$$\Theta'_{j',\gamma'}\left(h\left(z_1,\,\overline{\Theta}(z_1,\,0)\right)\right) \equiv \Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}(z_1)). \tag{7.53}$$

Elles établissent la propriété de convergence annoncée (7.47), pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. □

Ainsi, en passant de (7.49) à (7.50), nous avons initié un jeu alternatif entre deux familles d'identités de réflexion, et ce jeu crucial se poursuivra ultérieurement. Puisque les composantes $\Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}(z_1))$ n'étaient pas visibles dans (7.49), alors qu'elles sont visibles dans (7.50), nous voyons bien qu'il était nécessaire d'utiliser les deux familles infinies d'identités de réflexion (7.48) et (7.51), bien qu'elles soient « équivalentes » d'après le §7.8. Dans la suite de la démonstration de la Proposition 7.3, nous aurons besoin de généraliser encore l'équivalence (7.42) (*voir* le Lemme 7.11 ci-dessous).

7.13. Convergence des jets des composantes de l'application de réflexion sur la première chaîne de Segre

Cette propriété de convergence constitue le point technique le plus complexe de toute la démonstration. Pour l'expliquer soigneusement, nous ferons alterner l'étude spécifique des calculs formels effectués sur la première chaîne de Segre avec l'énonciation de propriétés formelles générales, valables sur une chaîne de Segre de longueur arbitraire. Ces dernières seront utilisées dans la démonstration finale de la Proposition 7.3, où nous raisonnerons par récurrence sur la longueur des chaînes (*voir* le §7.17), ce qui se fera sans mal, grâce à tous nos préparatifs.

Commençons par énoncer un critère pour la convergence des jets de toutes les composantes de l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h$ ou de sa conjuguée $\overline{\mathcal{R}}'_h$ sur les chaînes de Segre. La démonstration, analogue à celle du Lemme 6.2, ne sera pas détaillée.

LEMME 7.8. — *Soit $\ell \in \mathbb{N}$, soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $\Gamma_k(z_{(k)})$ la k-ième chaîne de Segre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le jet d'ordre ℓ de chaque composante de l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h$ ou de sa conjuguée $\overline{\mathcal{R}}'_h$ converge sur la k-ième chaîne de Segre, i.e., en tenant compte des simplifications (7.15), on a pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$:*

$$\begin{cases} \left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',\,n,\,\ell}} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \left[J_\tau^\ell \overline{\Theta}'_{\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',\,n,\,\ell}} & \text{si } k \text{ est pair ;} \end{cases} \tag{7.54}$$

(ii) *pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ et tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ satisfaisant $|\beta| + |\delta| \leqslant \ell$, les dérivées suivantes de $\Theta'_{\gamma'}(h)$ ou de $\overline{\Theta}'_{\gamma'}(\overline{h})$ convergent pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$:*

$$\begin{cases} \left[\mathcal{L}^\beta \Upsilon^\delta \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{d'} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \underline{\Upsilon}^\delta \overline{\Theta}'_{\gamma'}(\overline{h})\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{d'} & \text{si } k \text{ est pair ;} \end{cases} \tag{7.55}$$

(iii) *pour tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ satisfaisant $|\delta| \leqslant \ell$, les dérivées suivantes de $\Theta'_{\gamma'}(h)$ ou de $\overline{\Theta}'_{\gamma'}(\overline{h})$ convergent pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$:*

$$\begin{cases} \left[\Upsilon^\delta \Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{d'} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \left[\underline{\Upsilon}^\delta \overline{\Theta}'_{\gamma'}(\overline{h})\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{d'} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \tag{7.56}$$

Ainsi, notre objectif est de généraliser la propriété de convergence (7.47) aux jets des composantes de l'application de réflexion. Soit $w_1 \in \mathbb{C}^d$. En nous inspirant de la preuve du Lemme 6.3, remplaçons (t, τ) dans la seconde ligne de (7.45) par la composition de flots $(z_1, w_1) \longmapsto \Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))$, ce qui donne :

$$\begin{cases} g_{j'}\left(\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))\right) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[f^{\gamma'}\right]\left(\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))\right) \\ \qquad\qquad \cdot \overline{\Theta}_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\left(\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))\right)\right), \\ 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[f^{\gamma'}\right]\left(\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))\right) \\ \qquad\qquad \cdot \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right]\left(\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))\right). \end{cases} \tag{7.57}$$

La seconde ligne est valable pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ satisfaisant $|\beta| \geqslant 1$. Soit $\delta \in \mathbb{N}^d$. Appliquons la différentiation $\partial_{w_1}^\delta\big|_{w_1=0}$ à ces identités. Grâce à la propriété $\Upsilon_0 = \mathrm{Id}$, grâce aux relations (6.13) et grâce à la formule de Leibniz, nous obtenons :

$$\begin{cases} \left[\Upsilon^\delta g_{j'}\right](\Gamma_1(z_1)) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!} \left[\Upsilon^{\delta-\delta_1} f^{\gamma'}\right](\Gamma_1(z_1)) \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \left[\Upsilon^{\delta_1} \overline{\Theta}_{j',\gamma'}(\overline{h})\right](\Gamma_1(z_1)), \\ 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!} \left[\Upsilon^{\delta-\delta_1} f^{\gamma'}\right](\Gamma_1(z_1)) \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \left[\Upsilon^{\delta_1} \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{\Theta}_{j',\gamma'}(\overline{h})\right](\Gamma_1(z_1)). \end{cases} \tag{7.58}$$

Dans la deuxième identité, on suppose $|\beta| \geqslant 1$. Pour développer les termes qui apparaissent à la deuxième et à la quatrième ligne de (7.58), voici une généralisation du Lemme 7.7. Nous formulons aussi quatre autres développements, qui seront utiles par la suite.

LEMME 7.9. — *Pour tout tout $\delta \in \mathbb{N}^d$, tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, il existe cinq polynômes scalaires universels $N_{\gamma',\delta}$, $\overline{Q}_{\gamma',\beta,\delta}$, $\overline{P}'_{\beta,\delta}$, M'_δ et $\overline{K}_{\beta,\delta}$ tels que les quatre identités formelles suivantes sont satisfaites :*

$$\left\{\begin{aligned}
\left[\Upsilon^\delta f^{\gamma'}\right](t) &\equiv N_{\gamma',\delta}\left(\left(\Upsilon^{\delta_1} f_{k'}(t)\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_1\leqslant\delta}\right), \\
\left[\Upsilon^\delta \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right](t,\tau) &\equiv \overline{Q}_{\gamma',\beta,\delta}\left(J^{|\beta|+|\delta|}_{\zeta,t}\Theta(\zeta,t), J^{|\beta|+|\delta|}_{\tau}\overline{f}(\tau)\right), \\
\left[\Upsilon^\delta \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right](t,\tau) &\equiv \overline{P}'_{\beta,\delta}\left(J^{|\beta|+|\delta|}_{\zeta,t}\Theta(\zeta,t), J^{|\beta|+|\delta|}_{\tau}\left[\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right)\right]\right), \\
\left[\Upsilon^\delta \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right](t) &\equiv M'_\delta\left(\left(\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}(t)\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_1\leqslant\delta}, \left[J^{|\delta|}_{t'}\Theta'_{j',\gamma'}\right](h(t))\right), \\
\left[\Upsilon^\delta \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{g}_{j'}\right](t,\tau) &\equiv \overline{K}_{\beta,\delta}\left(J^{|\beta|+|\delta|}_{\zeta,t}\Theta(\zeta,t), J^{|\beta|+|\delta|}_{\tau}\overline{g}_{j'}(\tau)\right),
\end{aligned}\right. \tag{7.59}$$

dans $\mathbb{C}[\![t,\,\tau]\!]$, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

Les démonstrations, analogues à celle du Lemme 5.1, seront omises. Cependant, formulons quelques commentaires explicatifs. Bien que l'on ait $\Upsilon^\delta\phi(t) \equiv \partial^\delta_w\phi(t)$, pour toute série formelle $\phi(t)$ de la seule variable t (*cf.* (5.12)), nous utiliserons exclusivement la notation Υ^δ par souci d'uniformité. Les coefficients des champs de vecteurs Υ_j font intervenir des dérivées partielles des séries définissantes $\Theta_{j_2}(\zeta,\, t)$ par rapport aux variables w_{j_1}. Pour cette raison, nous écrivons dans la deuxième, dans la troisième et dans la cinquième ligne de (7.59) que le premier groupe d'arguments de $\overline{Q}_{\gamma',\beta,\delta}$, de $\overline{P}'_{\beta,\delta}$ et de $\overline{K}_{\beta,\delta}$ fait intervenir le jet d'ordre $|\beta|+|\delta|$ de l'application $\Theta(\zeta,\, t)$ par rapport à toutes les variables $(\zeta,\, t)$. Remarquons que les polynômes $\overline{P}'_{\beta,\delta}$ et M'_δ sont indépendants de j' et de γ'. Enfin, notons que le deuxième groupe d'arguments de M'_δ est le jet d'ordre $|\delta|$ par rapport à t' de l'application convergente $t' \longmapsto \Theta'_{j',\gamma'}(t')$, dans lequel on remplace t' par $h(t)$.

Revenons maintenant aux termes de la deuxième et de la quatrième ligne de (7.58). Plus généralement, soit $k \in \mathbb{N}$ et considérons la k-ième chaîne de Segre $\Gamma_k(z_{(k)})$. Grâce au développement donné par la troisième ligne de (7.59) et surtout, grâce aux relations cruciales (7.15), nous obtenons un abaissement d'un cran sur les chaînes de Segre dans le deuxième groupe de variables de $\overline{P}'_{\beta,\delta_1}$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\text{si } k \text{ est impair :} \qquad \left[\Upsilon^{\delta_1}\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \equiv \\
&\quad \equiv \overline{P}'_{\beta,\delta_1}\left(J^{|\beta|+|\delta_1|}_{\zeta,t}\Theta\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right), J^{|\beta|+|\delta_1|}_{\tau}\left[\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\right), \\
&\quad \equiv \overline{P}'_{\beta,\delta_1}\left(J^{|\beta|+|\delta_1|}_{\zeta,t}\Theta\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right), J^{|\beta|+|\delta_1|}_{\tau}\left[\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_{k-1}(z_{(k-1)})\right)\right); \\
&\text{si } k \text{ est pair :} \qquad \left[\underline{\Upsilon}^{\delta_1}\mathcal{L}^{\beta}\Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \equiv \\
&\quad \equiv P'_{\beta,\delta_1}\left(J^{|\beta|+|\delta_1|}_{z,\tau}\overline{\Theta}\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right), J^{|\beta|+|\delta_1|}_{t}\left[\Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\right), \\
&\quad \equiv P'_{\beta,\delta_1}\left(J^{|\beta|+|\delta_1|}_{z,\tau}\overline{\Theta}\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right), J^{|\beta|+|\delta_1|}_{t}\left[\Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_{k-1}(z_{(k-1)})\right)\right).
\end{aligned}\right. \tag{7.60}$$

En particulier, pour $k = 1$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\left[\Upsilon^{\delta_1}\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right) \equiv \\
&\qquad \equiv \overline{P}'_{\beta,\delta_1}\left(J^{|\beta|+|\delta_1|}_{\zeta,t}\Theta\left(\Gamma_1(z_1)\right),\ J^{|\beta|+|\delta_1|}_{\tau}\left[\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right](0))\right),
\end{aligned}\right. \tag{7.61}$$

et puisque le deuxième groupe d'arguments est *constant*, nous en déduisons que ces termes sont tous des séries *convergentes* par rapport à z_1. Utilisons alors la première ligne de (7.59) et interprétons le résultat ci-après :

$$\left\{\begin{aligned}
\left[\Upsilon^{\delta}g_{j'}\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right) \equiv &\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!}\left[\Upsilon^{\delta_1}\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right)\cdot \\
&\qquad\cdot N_{\gamma',\delta-\delta_1}\left(\left(\Upsilon^{\delta_2}f_{k'}(\Gamma_1(z_1))\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right), \\
0 \equiv &\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!}\left[\Upsilon^{\delta_1}\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right)\cdot \\
&\qquad\cdot N_{\gamma',\delta-\delta_1}\left(\left(\Upsilon^{\delta_2}f_{k'}(\Gamma_1(z_1))\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right).
\end{aligned}\right. \tag{7.62}$$

Nous obtenons des équations analytiques satisfaites par l'application formelle

$$z_1 \longmapsto_{\mathcal{F}} \left(\Upsilon^{\delta_1}h_{i'_1}\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_1\leqslant\delta}. \tag{7.63}$$

Cette application formelle ne s'annule pas forcément en $z_1 = 0$. Heureusement, puisque $h(0) = 0$ et puisque ces équations sont relativement polynomiales par rapport à toutes les variables $\Upsilon^{\delta_1}h_{i'_1}$, telles que $|\delta_1| \geqslant 1$, nous pouvons appliquer le Théorème d'approximation (2.3) avec l'ordre d'approximation $N = 1$ (*cf.* la démonstration du Lemme 7.2). Nous en déduisons qu'il existe une application convergente

$$\left\{\begin{aligned}
z_1 \longmapsto\ &\left(\mathsf{H}_{i'_1,\delta_1}(z_1)\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_1\leqslant\delta} \\
&=: \left(\left(\mathsf{F}_{k',\delta_1}(z_1)\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_1\leqslant\delta},\ \left(\mathsf{G}_{j',\delta_1}(z_1)\right)_{1\leqslant j'\leqslant d',\,\delta_1\leqslant\delta}\right),
\end{aligned}\right. \tag{7.64}$$

avec $\mathsf{H}_{i'_1,\delta_1}(0) = \Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}(0)$, qui satisfait les équations analytiques (7.62), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathsf{G}_{j',\delta}(z_1) & \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!} \left[\Upsilon^{\delta_1} \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right](\Gamma_1(z_1)) \cdot \\ & \qquad \cdot N_{\gamma',\delta-\delta_1}\left(\left(\mathsf{F}_{k',\delta_2}(z_1)\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right), \\ 0 & \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!} \left[\Upsilon^{\delta_1} \underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right](\Gamma_1(z_1)) \cdot \\ & \qquad \cdot N_{\gamma',\delta-\delta_1}\left(\left(\mathsf{F}_{k',\delta_2}(z_1)\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right), \end{cases} \tag{7.65}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ satisfaisant $|\beta| \geqslant 1$. Reportons-nous maintenant à la démonstration de la propriété (7.47). Grâce à l'équivalence (7.42), nous avons pu faire basculer les identités (7.49) satisfaites par l'application convergente $\mathsf{H}(z_1)$, dans lesquelles on ne voit pas formellement apparaître les composantes de l'application de réflexion, vers les « meilleures » identités (7.50), dans lesquelles on voit apparaître les modifications convergentes $\Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}(z_1))$ des composantes de l'application de réflexion. Nous affirmons qu'il est aussi possible de *transformer les identités (7.65), satisfaites par l'application convergente (7.64), en des identités qui font apparaître les dérivées* $\left[\Upsilon^{\delta_1}\Theta'_{j',\gamma'}\right]\left(\left(\mathsf{H}_{i'_1,\delta_2}(z_1)\right)_{1\leqslant i'_1,\,\delta_2\leqslant\delta_1}\right)$: expliquons soigneusement ce point-clé.

7.14. Comparaison avec la seconde famille d'identités de réflexion

Au lieu de considérer les identités de réflexion écrites à la seconde ligne de (7.45), considérons celles qui sont écrites à la première ligne et remplaçons-y les variables $(t,\tau) \in \mathcal{M}$ par $\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{g}_{j'}\right](\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))) \equiv \\ \qquad \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{f}^{\gamma'}\right](\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))) \cdot \Theta'_{j',\gamma'}\left(h\left(\Upsilon_{w_1}(\Gamma_1(z_1))\right)\right). \end{cases} \tag{7.66}$$

Appliquons l'opérateur $\partial_{w_1}^{\delta}\big|\, w_1 = 0$, en tenant compte de la formule de Leibniz :

$$\begin{cases} \left[\Upsilon^{\delta} \underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{g}_{j'}\right](\Gamma_1(z_1)) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!} \left[\Upsilon^{\delta-\delta_1} \underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{f}^{\gamma'}\right](\Gamma_1(z_1)) \cdot \\ \qquad \cdot \left[\Upsilon^{\delta_1} \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right](\Gamma_1(z_1)). \end{cases} \tag{7.67}$$

Grâce aux développements de la deuxième et de la cinquième ligne de (7.59), en utilisant au passage la relation cruciale (6.4), nous voyons que les termes $\left[\Upsilon^\delta \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{g}_{j'}\right](\Gamma_1(z_1))$ et $\left[\Upsilon^{\delta-\delta_1} \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right](\Gamma_1(z_1))$ sont des séries convergentes par rapport à z_1. Enfin, utilisons la quatrième ligne de (7.68), pour développer la deuxième ligne de (7.67), ce qui donne :

$$\begin{cases} \left[\Upsilon^\delta \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{g}_{j'}\right](\Gamma_1(z_1)) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!} \left[\Upsilon^{\delta-\delta_1} \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right](\Gamma_1(z_1)) \cdot \\ \qquad \cdot M'_{\delta_1}\left(\left(\Upsilon^{\delta_2} h_{i'_1}(\Gamma_1(z_1))\right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_2 \leqslant \delta_1}, \left[J_{t'}^{|\delta_1|} \Theta'_{j',\gamma'}\right](h(\Gamma_1(z_1)))\right), \end{cases} \tag{7.68}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. La même application formelle (7.63) est donc solution des équations analytiques (7.68), qui sont visiblement distinctes des équations (7.62). Or nous avons introduit l'application *convergente* (7.64) qui satisfait les équations (7.65). *Il nous faut maintenant généraliser l'équivalence (7.42) pour vérifier que cette même application convergente (7.64) est aussi solution des équations (7.68)*, c'est-à-dire qu'il nous faut établir que :

$$\begin{cases} \left[\Upsilon^\delta \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{g}_{j'}\right](\Gamma_1(z_1)) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!} \left[\Upsilon^{\delta-\delta_1} \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right](\Gamma_1(z_1)) \cdot \\ \qquad \cdot M'_{\delta_1}\left(\left(\mathsf{H}_{i'_1,\delta_2}(z_1)\right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_2 \leqslant \delta_1}, \left[J_{t'}^{|\delta|} \Theta'_{j',\gamma'}\right](\mathsf{H}_0(z_1))\right), \end{cases} \tag{7.69}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, où nous avons posé $\mathsf{H}_0 := \left(\mathsf{H}_{i'_1,0}\right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n'}$. Dans le §7.15 ci-dessous, nous établirons en effet le Lemme 7.85, qui implique l'assertion suivante.

LEMME 7.10. — *Fixons $\ell \in \mathbb{N}$ et supposons qu'une application convergente*

$$z_1 \longmapsto \left(\mathsf{H}_{i'_1,\delta}(z_1)\right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, |\delta| \leqslant \ell} \tag{7.70}$$

telle que $\mathsf{H}_{i'_1,\delta}(0) = \Upsilon^\delta h_{i'_1}(0)$, $i'_1 = 1, \ldots, n'$, $|\delta| \leqslant \ell$, satisfait les équations (7.65), pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout δ tel que $|\delta| \leqslant \ell$. Alors elle satisfait les équations (7.69), pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout δ tel que $|\delta| \leqslant \ell$.

Grâce à ce lemme, nous pouvons enfin établir que pour tout $j' = 1, \ldots, d'$, tout $\delta \in \mathbb{N}^d$, et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, on a la propriété de convergence :

$$\left[\Upsilon^\delta \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0)\right) \in \mathbb{C}\{z_1\}, \tag{7.71}$$

qui généralise (7.47).

Démonstration. — Soit $\ell \in \mathbb{N}$ arbitraire. Démontrons que la propriété (7.71) est vraie pour tout δ tel que $|\delta| \leqslant \ell$. En appliquant le Théorème d'approximation 2.3 aux équations (7.62), écrites pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout δ tel que $|\delta| \leqslant \ell$, et en appliquant le Lemme 7.10, on trouve une application convergente (7.70) qui satisfait les équations (7.69) pout tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout δ tel que $|\delta| \leqslant \ell$. Nous allons démontrer par récurrence que pour tout δ tel que $|\delta| \leqslant \ell$, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} & M'_\delta \left(\left(\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}(\Gamma_1(z_1)) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_1 \leqslant \delta},\ \left[J_{t'}^{|\delta|} \Theta_{j',\gamma'} \right] (h(\Gamma_1(z_1))) \right) \equiv \\ & \qquad \equiv M'_\delta \left(\left(\mathsf{H}_{i'_1,\,\delta_1}(z_1) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_1 \leqslant \delta},\ \left[J_{t'}^{|\delta|} \Theta_{j',\gamma'} \right] (\mathsf{H}_0(z_1)) \right), \end{aligned} \right. \tag{7.72}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, ce qui établira la convergence désirée, puisque l'application (7.70) converge.

Pour $\delta = 0$, les relations (7.72) ont déjà été démontrées en (7.53). Soit $\ell_1 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant \ell_1 \leqslant \ell - 1$ et supposons les identités (7.72) vraies pour tout δ tel que $|\delta| \leqslant \ell_1$, et bien sûr, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Soit $\delta \in \mathbb{N}^d$ un multiindice arbitraire tel que $|\delta| = \ell_1 + 1$. Soustrayons alors les identités (7.69) des identités (7.68), écrites avec ce multiindice δ. Dans la somme $\sum_{\delta_1 \leqslant \delta}$, on a ou bien $\delta_1 = \delta$ ou bien $|\delta_1| \leqslant \ell_1$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, il ne reste donc que le terme $\delta_1 = \delta$ dans cette somme après soustraction, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{aligned} 0 \equiv & \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{f}^{\gamma'} \right] (z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0), 0, 0) \cdot \\ & \cdot \left(\begin{aligned} & M'_\delta \left(\left(\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}(\Gamma_1(z_1)) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_1 \leqslant \delta_1},\ \left[J_{t'}^{|\delta_1|} \Theta'_{j',\gamma'} \right] (h(\Gamma_1(z_1))) \right) \\ & - M'_\delta \left(\left(\mathsf{H}_{i'_1,\,\delta_1}(z_1) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_1 \leqslant \delta_1},\ \left[J_{t'}^{|\delta|} \Theta'_{j',\gamma'} \right] (\mathsf{H}_0(z_1)) \right) \end{aligned} \right). \end{aligned} \right. \tag{7.73}$$

Grâce au principe d'unicité (7.26), nous déduisons que les identités (7.72) sont satisfaites pour ce multiindice δ de longueur $\ell_1 + 1$, ce qui achève la démonstration du Lemme 7.10. □

7.15. Transformation des identités de réflexion

Pour formuler la généralisation de l'équivalence (7.42), quittons provisoirement la première chaîne de Segre et travaillons avec des variables $(t, \tau) \in \mathcal{M}$ quelconques, ce qui sera utile pour la démonstration finale de la Proposition 7.3 (*voir* le §7.17 ci-dessous). Soit $w_1 \in \mathbb{C}^d$. Puisque le multiflot de Υ stabilise $\mathcal{M}$, on a $\Upsilon_{w_1}(t, \tau) \in \mathcal{M}$ et :

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{r}'_{j'} \left(\overline{h}\left(\Upsilon_{w_1}(t, \tau) \right), h\left(\Upsilon_{w_1}(t, \tau) \right) \right), \\ 0 &= \underline{\mathcal{L}}^\beta r'_{j'} \left(h\left(\Upsilon_{w_1}(t, \tau) \right), \overline{h}\left(\Upsilon_{w_1}(t, \tau) \right) \right), \end{aligned} \right. \tag{7.74}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. Polarisons ces identités en y remplaçant h par t' et définissons ainsi deux familles infinies de séries comme suit :

$$\begin{cases} \overline{R}'_{j',0}(w_1, t, \tau : t') := & \overline{r}'_{j'}\left(\overline{h}(\Upsilon_{w_1}(t,\tau)), t'\right) \\ = & w'_{j'} - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} z'^{\gamma'} \cdot \left[\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right](\Upsilon_{w_1}(t,\tau)); \\ \overline{R}'_{j',\beta}(w_1, t, \tau : t') := & \underline{\mathcal{L}}^{\beta} \overline{r}_{j'}\left(\overline{h}(\Upsilon_{w_1}(t,\tau)), t'\right) \\ = & -\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} z'^{\gamma'} \cdot \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right](\Upsilon_{w_1}(t,\tau)); \\ S'_{j',\beta}(w_1, t, \tau : t') := & \underline{\mathcal{L}}^{\beta} r'_{j'}\left(t', \overline{h}(\Upsilon_{w_1}(t,\tau))\right) \\ = & \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{g}_{j'}\right](\Upsilon_{w_1}(t,\tau)) - \\ & - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\overline{f}^{\gamma'}\right](\Upsilon_{w_1}(t,\tau)) \cdot \Theta'_{j',\gamma'}(t'). \end{cases} \tag{7.75}$$

À la troisième ligne, on suppose $|\beta| \geqslant 1$. Avec ces notations, les égalités (7.74) s'écrivent maintenant :

$$\begin{cases} 0 = \overline{R}'_{j',\beta}(w_1, t, \tau : h(\Upsilon_{w_1}(t,\tau))), \\ 0 = S'_{j',\beta}(w_1, t, \tau : h(\Upsilon_{w_1}(t,\tau))), \end{cases} \tag{7.76}$$

toujours avec $(t, \tau) \in \mathcal{M}$ et $w_1 \in \mathbb{C}^d$. Dans la suite, on remplacera (t, τ) par $\Gamma_k(z_{(k)})$, et alors ces égalités deviendront des identités formelles dans $\mathbb{C}[\![w_1, z_{(k)}]\!]$.

Notons que $\overline{R}_{j',0}$ s'identifie avec $\overline{r}'_{j'}\left(\overline{h}(\Upsilon_{w_1}(t,\tau)), t'\right)$ et que $S_{j',0}$ s'identifie avec $r_{j'}\left(t', \overline{h}(\Upsilon_{w_1}(t,\tau))\right)$. En posant $\tau' = \overline{h}(\Upsilon_{w_1}(t,\tau))$ dans la deuxième colonne de (7.32), nous obtenons les identités suivantes :

$$\begin{cases} \overline{R}'_{j',0}(w_1, t, \tau : t') \equiv \sum_{j'_1=1}^{d'} A_{j'}^{j'_1}(w_1, t, \tau : t') \cdot S'_{j'_1,0}(w_1, t, \tau : t'), \\ S'_{j',0}(w_1, t, \tau : t') \equiv \sum_{j'_1=1}^{d'} B_{j'}^{j'_1}(w_1, t, \tau : t') \cdot \overline{R}'_{j'_1,0}(w_1, t, \tau : t'), \end{cases} \tag{7.77}$$

où nous avons posé $A_{j'}^{j'_1} := a'^{j'_1}_{j'}(t', h(\Upsilon_{w_1}(t,\tau)))$
et $B_{j'}^{j'_1} := \overline{a}'^{j'_1}_{j'}(h(\Upsilon_{w_1}(t,\tau)), t')$. En appliquant les dérivations $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}$ à ce

couple d'identités, nous obtenons les combinaisons linéaires suivantes, que nous écrivons sans les arguments $(w_1,\, t,\, \tau \,:\, t')$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\underline{\mathcal{L}}^\beta \overline{R}'_{j',0} &\equiv \overline{R}'_{j',\beta} \equiv \sum_{j'_1=1}^{d'} \sum_{\beta_1\leqslant\beta} A_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1} \cdot S'_{j'_1,\beta_1},\\
\underline{\mathcal{L}}^\beta S'_{j',0} &\equiv S'_{j',\beta} \equiv \sum_{j'_1=1}^{d'} \sum_{\beta_1\leqslant\beta} B_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1} \cdot \overline{R}'_{j'_1,\beta_1},
\end{aligned}
\right.
\tag{7.78}
$$

où nous avons posé :

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1} &:= \frac{\beta!}{\beta_1!\,(\beta-\beta_1)!}\,\underline{\mathcal{L}}^{\beta-\beta_1}\left(A_{j'}^{j'_1}\right),\\
B_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1} &:= \frac{\beta!}{\beta_1!\,(\beta-\beta_1)!}\,\underline{\mathcal{L}}^{\beta-\beta_1}\left(B_{j'}^{j'_1}\right).
\end{aligned}
\right.
\tag{7.79}
$$

Rappelons que les identités (7.78) nous ont servi pour établir l'équivalence (7.42). Pour généraliser cette équivalence (et obtenir la preuve du Lemme 7.10), nous allons les différentier par rapport à w_1.

Pour cela, écrivons $w_1 = (w_{1;1},\, \dots,\, w_{1;d}) \in \mathbb{C}^d$, choisissons un entier j compris entre 1 et d, et appliquons la dérivation $\frac{\partial}{\partial_{w_{1,j}}}$ aux identités (7.76), sans écrire les arguments, ce qui nous donne :

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \overline{R}'_{j',\beta}}{\partial w_{1;j}} + \sum_{i'_1=1}^{n'} \frac{\partial \overline{R}'_{j',\beta}}{\partial t'_{i'_1}} \cdot \left[\Upsilon_j h_{i'_1}\right],\\
0 &= \frac{\partial S'_{j',\beta}}{\partial w_{1;j}} + \sum_{i'_1=1}^{n'} \frac{\partial S'_{j',\beta}}{\partial t'_{i'_1}} \cdot \left[\Upsilon_j h_{i'_1}\right].
\end{aligned}
\right.
\tag{7.80}
$$

Introduisons de nouvelles variables indépendantes $T'_{i'_1,j}$, qui correspondent aux dérivées $\left[\Upsilon_j h_{i'_1}\right]$ apparaissant dans (7.80), et définissons :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\overline{R}'_{j',\beta,j}\left(w_1,\, t,\, \tau : t',\, \left(T'_{i'_1,j}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n'}\right) &:= \frac{\partial \overline{R}'_{j',\beta}}{\partial w_{1;j}} + \sum_{i'_1=1}^{n'} \frac{\partial \overline{R}'_{j',\beta}}{\partial t'_{i'_1}} \cdot T'_{i'_1,j},\\
S'_{j',\beta,j}\left(w_1,\, t,\, \tau : t',\, \left(T'_{i'_1,j}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n'}\right) &:= \frac{\partial S'_{j',\beta}}{\partial w_{1;j}} + \sum_{i'_1=1}^{n'} \frac{\partial S'_{j',\beta}}{\partial t'_{i'_1}} \cdot T'_{i'_1,j}.
\end{aligned}
\right.
\tag{7.81}
$$

Plus généralement, soit $\delta \in \mathbb{N}^d$ un multiindice arbitraire. En appliquant l'opérateur ∂_w^δ aux identités (7.76), nous obtenons des égalités qui impliquent deux familles infinies de séries $\overline{R}'_{j',\beta,\delta}$ et $S'_{j',\beta,\delta}$, qui sont polynomiales par rapport aux variables différentiées strictement $\left[\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}\right]$, où $1 \leqslant i'_1 \leqslant n'$ et $0 \neq \delta_1 \leqslant \delta$, que nous écrirons :

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \overline{R}'_{j',\beta,\delta}\left(w_1,\, t,\, \tau : \left(\left[\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}\right]\left(\Upsilon_{w_1}(t,\, \tau)\right)\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_1\leqslant\delta}\right), \\ 0 &= S'_{j',\beta,\delta}\left(w_1,\, t,\, \tau : \left(\left[\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}\right]\left(\Upsilon_{w_1}(t,\, \tau)\right)\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_1\leqslant\delta}\right). \end{aligned}\right. \tag{7.82}$$

Introduisons des variables indépendantes $\left(T'_{i'_1,\,\delta_1}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_1\leqslant\delta}$ correspondant à ces dérivées $\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}$, en convenant que $T'_{i'_1,\,0}$ s'identifie à $t'_{i'_1}$, et définissons les nouvelles séries :

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{R}'_{j',\beta,\delta}\left(w_1,\, t,\, \tau : \left(T'_{i'_1,\,\delta_1}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_1\leqslant\delta}\right), \\ &S'_{j',\beta,\delta}\left(w_1,\, t,\, \tau : \left(T'_{i'_1,\,\delta_1}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_1\leqslant\delta}\right). \end{aligned}\right. \tag{7.83}$$

Alors les identités (7.58) et (7.67) (où $\delta \in \mathbb{N}^d$ est fixé et où $j' = 1, \ldots, d'$ et $\beta \in \mathbb{N}^m$ varient) coïncident avec les deux familles d'identités :

$$\left\{\begin{aligned} 0 &\equiv \overline{R}'_{j',\beta,\delta}\left(0,\, \Gamma_1(z_1) : \left(\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_1\leqslant\delta}\right), \\ 0 &\equiv S'_{j',\beta,\delta}\left(0,\, \Gamma_1(z_1) : \left(\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_1\leqslant\delta}\right). \end{aligned}\right. \tag{7.84}$$

Après ces préliminaires, nous pouvons enfin énoncer la généralisation attendue du Lemme 7.42. Rappelons que nous avons posé $w_1 = 0$ dans (7.58) et dans (7.67) ; c'est pourquoi nous poserons aussi $w_1 = 0$ dans le lemme suivant.

LEMME 7.11. — *Soit* $\nu \in \mathbb{N}$, *soit* $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^\nu$, *soit* $\mathsf{Q}(\mathsf{x}) \in \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!]^{2n}$ *avec* $\mathsf{Q}(0) = 0$, *soit* $\delta \in \mathbb{N}^d$, *et soit* $\mathsf{x} \longmapsto_{\mathcal{F}} \left(\mathsf{T}'_{i'_1,\,\delta_1}(\mathsf{x})\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_1\leqslant\delta}$ *une application formelle telle que* $\mathsf{T}'_{i'_1,\,\delta_1}(0) = \left[\Upsilon^{\delta_1} h_{i'_1}\right](0)$. *L'équivalence suivante est satisfaite :*

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &\forall\, j' = 1, \ldots, d',\ \forall\, \beta \in \mathbb{N}^m,\ \forall\, \delta_1 \leqslant \delta, \text{ on a dans } \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!] \ : \\ &\overline{R}'_{j',\beta,\delta_1}\left(0,\, t,\, \tau :\, \left(\mathsf{T}'_{i'_1,\,\delta_2}(\mathsf{x})\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_2\leqslant\delta_1}\right)\bigg|_{(t,\,\tau)=\mathsf{Q}(\mathsf{x})} \equiv 0 \end{aligned}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\Updownarrow \\ &\left(\begin{aligned} &\forall\, j' = 1, \ldots, d',\ \forall\, \beta \in \mathbb{N}^m,\ \forall\, \delta_1 \leqslant \delta, \text{ on a dans } \mathbb{C}[\![\mathsf{x}]\!] \ : \\ &S'_{j',\beta,\delta_1}\left(0,\, t,\, \tau :\, \left(\mathsf{T}'_{i'_1,\,\delta_2}(\mathsf{x})\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\, \delta_2\leqslant\delta_1}\right)\bigg|_{(t,\,\tau)=\mathsf{Q}(\mathsf{x})} \equiv 0 \end{aligned}\right). \end{aligned}\right. \tag{7.85}$$

Grâce à l'équivalence (7.85) ci-dessus, le Lemme 7.10 est démontré : il suffit de poser $\mathsf{x} = z_1$, $\mathsf{Q}(\mathsf{x}) := \Gamma_1(z_1)$ et $\mathsf{T}_{i_1', \delta_1}(\mathsf{x}) := \mathsf{H}_{i_1', \delta_1}(\mathsf{x})$.

Démonstration. — Nous affirmons que les séries (7.83) peuvent être définies par récurrence de la manière suivante. En effet, si l'on note $\mathbf{1}_j^d$ le multi-indice $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^d$, avec 1 à la j-ième place et 0 aux autres places, on a les relations :

$$\begin{cases} \overline{R}'_{j', \beta, \delta+\mathbf{1}_j^d} := \dfrac{\partial \overline{R}'_{j', \beta, \delta}}{\partial w_{1;j}} + \displaystyle\sum_{i_1'=1}^{n'} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \dfrac{\partial \overline{R}'_{j', \beta, \delta}}{\partial T'_{i_1', \delta_1}} \cdot T'_{i_1', \delta+\mathbf{1}_j^d}, \\ S'_{j', \beta, \delta+\mathbf{1}_j^d} := \dfrac{\partial S'_{j', \beta, \delta}}{\partial w_{1;j}} + \displaystyle\sum_{i_1'=1}^{n'} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \dfrac{\partial S'_{j', \beta, \delta}}{\partial T'_{i_1', \delta_1}} \cdot T'_{i_1', \delta+\mathbf{1}_j^d}, \end{cases} \tag{7.86}$$

de telle sorte que

$$\begin{cases} \partial_{w_1}^{\delta} \left[\overline{R}'_{j', \beta}(w_1, t, \tau : h(\Upsilon_{w_1}(t, \tau)))\right] \equiv \\ \qquad \equiv \overline{R}'_{j', \beta, \delta}\left(w_1, t, \tau : \left(\Upsilon^{\delta_1} h_{i_1'}(\Upsilon_{w_1}(t, \tau))\right)_{1 \leqslant i_1' \leqslant n', \delta_1 \leqslant \delta}\right), \\ \partial_{w_1}^{\delta} \left[S'_{j', \beta}(w_1, t, \tau : h(\Upsilon_{w_1}(t, \tau)))\right] \equiv \\ \qquad \equiv S'_{j', \beta, \delta}\left(w_1, t, \tau : \left(\Upsilon^{\delta_1} h_{i_1'}(\Upsilon_{w_1}(t, \tau))\right)_{1 \leqslant i_1' \leqslant n', \delta_1 \leqslant \delta}\right). \end{cases} \tag{7.87}$$

Nous affirmons que pour tout $\delta \in \mathbb{N}^d$, il existe deux collections de séries formelles :

$$\begin{cases} A_{j', \beta, \delta}^{j_1', \beta_1, \delta_1}\left(w_1, t, \tau : \left(T'_{i_1', \delta_2}\right)_{1 \leqslant i_1' \leqslant n', \delta_2 \leqslant \delta - \delta_1}\right), \\ B_{j', \beta, \delta}^{j_1', \beta_1, \delta_1}\left(w_1, t, \tau : \left(T'_{i_1', \delta_2}\right)_{1 \leqslant i_1' \leqslant n', \delta_2 \leqslant \delta - \delta_1}\right), \end{cases} \tag{7.88}$$

telles que les identités formelles suivantes, que nous écrivons d'abord sans les arguments, sont satisfaites :

$$\begin{cases} \overline{R}'_{j', \beta, \delta} \equiv \displaystyle\sum_{j_1'=1}^{d'} \sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} A_{j', \beta, \delta}^{j_1', \beta_1, \delta_1} \cdot S'_{j_1', \beta_1, \delta_1}, \\ S'_{j', \beta, \delta} \equiv \displaystyle\sum_{j_1'=1}^{d'} \sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} B_{j', \beta, \delta}^{j_1', \beta_1, \delta_1} \cdot \overline{R}'_{j_1', \beta_1, \delta_1}; \end{cases} \tag{7.89}$$

par souci de complétude, écrivons-les ensuite avec leurs arguments :

$$\left\{\begin{aligned}
&\overline{R}'_{j',\beta,\delta}\left(w_1,\,t,\,\tau:\,\left(T'_{i'_1,\delta_1}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_1\leqslant\delta}\right)\equiv\sum_{j'_1=1}^{d'}\sum_{\beta_1\leqslant\beta}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\\
&\qquad\qquad A_{j',\beta,\delta}^{j'_1,\beta_1,\delta_1}\left(w_1,\,t,\,\tau:\,\left(T'_{i'_1,\delta_2}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot S'_{j'_1,\beta_1,\delta_1}\left(w_1,\,t,\,\tau:\,\left(T'_{i'_1,\delta_2}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_2\leqslant\delta_1}\right),\\
&S'_{j',\beta,\delta}\left(w_1,\,t,\,\tau:\,\left(T'_{i'_1,\delta_1}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_1\leqslant\delta}\right)\equiv\sum_{j'_1=1}^{d'}\sum_{\beta_1\leqslant\beta}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\\
&\qquad\qquad B_{j',\beta,\delta}^{j'_1,\beta_1,\delta_1}\left(w_1,\,t,\,\tau:\,\left(T'_{i'_1,\delta_2}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\overline{R}'_{j'_1,\beta_1,\delta_1}\left(w_1,\,t,\,\tau:\,\left(T'_{i'_1,\delta_2}\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,\delta_2\leqslant\delta_1}\right).
\end{aligned}\right.\tag{7.90}$$

Avant d'établir cette affirmation, notons que les identités (7.90) impliquent immédiatement l'équivalence désirée (7.85) : il suffit de poser $w_1 = 0$, de remplacer $(t,\,\tau)$ par $\mathsf{Q}(\mathsf{x})$ et de remplacer $T'_{i'_1,\delta_1}$ par $\mathsf{T}'_{i'_1,\delta_1}(\mathsf{x})$ dans (7.90).

Pour $\delta = 0$, les identités (7.89) ont déjà été vues dans (7.78). Établissons les identités (7.89) pour $\delta = \mathbf{1}^d_j$. Pour cela, partons de (7.78), que nous réécrivons :

$$\left\{\begin{aligned}
&\overline{R}'_{j',\beta}\equiv\sum_{j'_1=1}^{d'}\sum_{\beta_1\leqslant\beta}A_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1}\cdot S'_{j'_1,\beta_1},\\
&S'_{j',\beta}\equiv\sum_{j'_1=1}^{d'}\sum_{\beta_1\leqslant\beta}B_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1}\cdot\overline{R}'_{j'_1,\beta_1}.
\end{aligned}\right.\tag{7.91}$$

Appliquons tout d'abord l'opérateur $\partial_{w_{1;j}}$ de part et d'autre de (7.91), ce qui donne :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{R}'_{j',\beta}}{\partial w_{1;j}}\equiv\sum_{j'_1=1}^{d'}\sum_{\beta_1\leqslant\beta}\left(\frac{\partial A_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1}}{\partial w_{1;j}}\cdot S'_{j'_1,\beta_1}+A_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1}\cdot\frac{\partial S'_{j'_1,\beta_1}}{\partial w_{1;j}}\right),\\
&\frac{\partial S'_{j',\beta}}{\partial w_{1;j}}\equiv\sum_{j'_1=1}^{d'}\sum_{\beta_1\leqslant\beta}\left(\frac{\partial B_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1}}{\partial w_{1;j}}\cdot\overline{R}'_{j'_1,\beta_1}+B_{j',\beta}^{j'_1,\beta_1}\cdot\frac{\partial\overline{R}'_{j'_1,\beta_1}}{\partial w_{1;j}}\right).
\end{aligned}\right.\tag{7.92}$$

Ensuite, appliquons l'opérateur $\sum_{i'_1=1}^{n'}\partial_{t'_{i'_1}}(\cdot)\,T'_{i'_1,j}$ de part et d'autre de (7.91), ce qui donne :

$$\begin{cases} \sum_{i_1'=1}^{n'} \frac{\partial \overline{R}'_{j',\beta}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j} \equiv \sum_{i_1'=1}^{n'} \sum_{j_1'=1}^{d'} \sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \left(\frac{\partial A_{j',\beta}^{j_1',\beta_1}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j} \cdot S'_{j_1',\beta_1} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + A_{j',\beta}^{j_1',\beta_1} \cdot \frac{\partial S'_{j_1',\beta_1}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j} \right) \\ \sum_{i_1'=1}^{n'} \frac{\partial S'_{j',\beta}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j} \equiv \sum_{i_1'=1}^{n'} \sum_{j_1'=1}^{d'} \sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \left(\frac{\partial B_{j',\beta}^{j_1',\beta_1}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j} \cdot \overline{R}'_{j_1',\beta_1} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + B_{j',\beta}^{j_1',\beta_1} \cdot \frac{\partial \overline{R}'_{j_1',\beta_1}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j} \right). \end{cases} \tag{7.93}$$

Additionnons maintenant (7.92) avec (7.93) ; en tenant compte de la définition (7.81), nous obtenons l'expression désirée (7.89), pour $\delta = \mathbf{1}_j^d$:

$$\begin{cases} \overline{R}'_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d} \equiv \sum_{j_1'=1}^{d'} \sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \left(A_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d}^{j_1',\beta_1,\mathbf{1}_j^d} \cdot S'_{j_1',\beta_1,\mathbf{1}_j^d} + A_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d}^{j_1',\beta_1,0} \cdot S'_{j_1',\beta_1,0} \right), \\ S'_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d} \equiv \sum_{j_1'=1}^{d'} \sum_{\beta_1 \leqslant \beta} \left(B_{j',\beta}^{j_1',\beta_1} \cdot \overline{R}'_{j_1',\beta_1,\mathbf{1}_j^d} + B_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d}^{j_1',\beta_1,0} \cdot \overline{R}'_{j_1',\beta_1,0} \right), \end{cases} \tag{7.94}$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} A_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d}^{j_1',\beta_1,\mathbf{1}_j^d} := A_{j',\beta}^{j_1',\beta_1}, \\ A_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d}^{j_1',\beta_1,0} := \frac{\partial A_{j',\beta}^{j_1',\beta_1}}{\partial w_{1;j}} + \sum_{i_1'=1}^{n'} \frac{\partial A_{j',\beta}^{j_1,\beta_1}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j}, \\ B_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d}^{j_1',\beta_1,\mathbf{1}_j^d} := B_{j',\beta}^{j_1',\beta_1}, \\ B_{j',\beta,\mathbf{1}_j^d}^{j_1',\beta_1,0} := \frac{\partial B_{j',\beta}^{j_1',\beta_1}}{\partial w_{1;j}} + \sum_{i_1'=1}^{n'} \frac{\partial B_{j',\beta}^{j_1,\beta_1}}{\partial t'_{i_1'}} \cdot T'_{i_1',j}. \end{cases} \tag{7.95}$$

En appliquant des dérivations d'ordre arbitraire par rapport à w_1, en utilisant les formules (7.86) et en raisonnant par récurrence, on établit les identités (7.89). Puisque nous avons expliqué le principe de la démonstration pour $\delta = \mathbf{1}_j^d$, nous ne croyons pas utile de développer ces calculs formels supplémentaires.

Le Lemme 7.11 est démontré. □

7.16. Convergence des composantes de l'application de réflexion conjuguée sur la deuxième chaîne de Segre

Nous savons maintenant que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, les propriétés de convergence :

$$\left[J_t^\ell \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right](\Gamma_1(z_1)) \in \mathbb{C}\{z_1\}^{N_{d',n,\ell}}, \tag{7.96}$$

sont satisfaites, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Grâce à cette propriété, nous pouvons établir le Lemme 7.3 pour $k = 2$ et $\ell = 0$, c'est-à-dire :

$$\left[\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right](\Gamma_2(z_{(2)})) \in \mathbb{C}\{z_{(2)}\}^{d'}, \tag{7.97}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

Démonstration. — Posons $(t, \tau) = \Gamma_2(z_{(2)})$ dans la quatrième famille d'identités de réflexion (7.45) :

$$\left\{\begin{aligned} \overline{g}_{j'}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) &\equiv \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{f}^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \cdot \left[\Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right), \\ 0 &\equiv \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{f}^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \cdot \left[\mathcal{L}^\beta \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right). \end{aligned}\right. \tag{7.98}$$

Dans la deuxième ligne, on suppose $|\beta| \geqslant 1$. D'après l'identité conjuguée de la troisième ligne de (7.59), écrite pour $\delta = 0$ et $\beta \in \mathbb{N}^m$ arbitraire, nous voyons que tous les termes

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\mathcal{L}^\beta \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right](\Gamma_2(z_{(2)})) \\ &\qquad \equiv P'_{\beta,0}\left(J_{z,\tau}^{|\beta|}\overline{\Theta}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right), \left[J_t^{|\beta|}\Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)\right) \\ &\qquad \equiv P'_{\beta,0}\left(J_{z,\tau}^{|\beta|}\overline{\Theta}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right), \left[J_t^{|\beta|}\Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_1(z_1)\right)\right). \end{aligned}\right. \tag{7.99}$$

sont convergents par rapport à $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{2m}$, grâce à (7.15) et grâce ce que nous venons d'établir en (7.96). Par conséquent, les équations (7.98) sont analytiques par rapport à $(z_{(2)}, \tau')$, et l'application formelle $z_{(2)} \longmapsto_{\mathcal{F}} \overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)$ les satisfait formellement. Appliquons le Théorème d'approximation (2.3) avec l'ordre d'approximation $N = 1$. Nous en déduisons l'existence d'une application convergente $z_{(2)} \longmapsto \overline{\mathsf{H}}(z_{(2)}) = \left(\overline{\mathsf{F}}(z_{(2)}), \overline{\mathsf{G}}(z_{(2)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(2)}\}^{m'} \times \mathbb{C}\{z_{(2)}\}^{d'}$ telle que

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\mathsf{G}}_{j'}(z_{(2)}) &\equiv \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{\mathsf{F}}^{\gamma'}\right](z_{(2)}) \cdot \Theta'_{j',\gamma'}(h(\Gamma_1(z_1)), \\ 0 &\equiv \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{\mathsf{F}}^{\gamma'}\right](z_{(2)}) \cdot \left[\mathcal{L}^\beta \Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right). \end{aligned}\right. \tag{7.100}$$

Les équations (7.100) coïncident avec $\mathcal{L}^\beta r'_{j'}\left(h\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right), \overline{\mathsf{H}}(z_{(2)})\right) \equiv 0$, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. En appliquant la conjugaison de l'équivalence (7.42), nous pouvons faire basculer ces identités vers $\mathcal{L}^\beta \overline{r}'_{j'}\left(\overline{\mathsf{H}}(z_{(2)}), h\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)\right) \equiv 0$, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, ou, de manière développée :

$$\left[\mathcal{L}^\beta g_{j'}\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\mathcal{L}^\beta f^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \cdot \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{\mathsf{H}}(z_{(2)})\right), \quad (7.101)$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. Soustrayons ces identités des identités de réflexion écrites à la troisième ligne de (7.45) avec $(t, \tau) = \Gamma_2(z_{(2)})$; nous obtenons :

$$0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\mathcal{L}^\beta f^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right) \cdot \left(\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)\right) - \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{\mathsf{H}}(z_{(2)})\right)\right). \quad (7.102)$$

Généralisons maintenant le principe d'unicité (7.26). Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, supposons donnée une série formelle vectorielle $\overline{F}_{\gamma'}(z_{(k)}) \in \mathbb{C}[\![z_{(k)}]\!]^{d'}$ et supposons que l'application formelle h est CR-transversale, ce qui se traduit par l'implication (7.20).

LEMME 7.12. — *Supposons que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$, l'identité formelle suivante est satisfaite :*

$$\begin{cases} 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\mathcal{L}^\beta \overline{f}^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \cdot \overline{F}_{\gamma'}(z_{(k)}) & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\mathcal{L}^\beta f^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \cdot \overline{F}_{\gamma'}(z_{(k)}) & \text{si } k \text{ est pair,} \end{cases} \quad (7.103)$$

dans $\mathbb{C}[\![z_{(k)}]\!]$. Alors :

$$\overline{F}_{\gamma'}(z_{(k)}) \equiv 0, \qquad \forall \gamma' \in \mathbb{N}^{m'}. \quad (7.104)$$

Démonstration. — Traitons seulement le cas où k est pair. Puisque $\left[\mathcal{L}^\beta f^{\gamma'}\right](0) = f_{\gamma',\beta}$ d'après (7.21), et puisque $\Gamma_k(0) = 0$, il existe des coefficients $f_{\gamma',\beta,\gamma_k} \in \mathbb{C}$ tels que l'on peut écrire :

$$\left[\mathcal{L}^\beta f^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \equiv f_{\gamma',\beta} + \sum_{\gamma_k \in \mathbb{N}^{km},\, |\gamma_k| \geqslant 1} f_{\gamma',\beta,\gamma_k} \cdot z_{(k)}^{\gamma_k}. \quad (7.105)$$

Développons aussi $\overline{F}_{\gamma'}(z_{(k)}) = \sum_{\gamma_k \in \mathbb{N}^{km}} \overline{F}_{\gamma',\gamma_k} \cdot z_{(k)}^{\gamma_k}$. En raisonnant exactement comme dans la démonstration du Lemme 7.5, on obtient l'annulation de tous les coefficients $\overline{F}_{\gamma',\gamma_k}$, ce qui achève la preuve. □

Une application directe de ce lemme aux identités (7.102) fournit les identités

$$\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\left(\Gamma_2(z_{(2)})\right)\right) \equiv \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{\mathsf{H}}(z_{(2)})\right), \tag{7.106}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, où le membre de droite est convergent, ce qui achève la démonstration de (7.97). □

7.17. Démonstration finale

Grâce à tous ces préparatifs, nous pouvons enfin présenter la démonstration de la Proposition 7.3, en raisonnant par récurrence sur la longueur k des chaînes de Segre. Nous traiterons seulement le cas où k est impair – le cas où k est pair étant similaire.

Ainsi, nous supposons que pout tout $\ell \in \mathbb{N}$, les propriétés de convergence :

$$\left[J_t^{\ell}\Theta'_{\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',\,n,\,\ell}}, \tag{7.107}$$

sont satisfaites, pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. L'objectif est de démontrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, les propriétés de convergence au rang $k+1$:

$$\left[J_{\tau}^{\ell}\overline{\Theta}_{\gamma'}\left(\overline{h}\right)\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \in \mathbb{C}\{z_{(k+1)}\}^{N_{d',\,n,\,\ell}}, \tag{7.108}$$

sont satisfaites, pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

Pour cela, commençons par poser $(t, \tau) = \underline{\Upsilon}_{\xi}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)$ dans la quatrième ligne de (7.45), où $\xi \in \mathbb{C}^d$, sans oublier d'écrire l'identité qui est sous-entendue pour $\beta = 0$:

$$\left\{\begin{aligned} \overline{g}_{j'}\left(\underline{\Upsilon}_{\xi}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right) \equiv & \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{f}^{\gamma'}\right]\left(\underline{\Upsilon}_{\xi}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right)\cdot \\ & \qquad \cdot\Theta'_{j',\gamma'}\left(h\left(\underline{\Upsilon}_{\xi}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right)\right), \\ 0 \equiv & \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{f}^{\gamma'}\right]\left(\underline{\Upsilon}_{\xi}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right)\cdot \\ & \qquad \cdot\left[\mathcal{L}^{\beta}\Theta'_{j',\gamma'}(h)\right]\left(\underline{\Upsilon}_{\xi}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\right). \end{aligned}\right. \tag{7.109}$$

Dans la deuxième identité, on suppose $|\beta| \geqslant 1$.

Fixons maintenant $\ell \in \mathbb{N}$. Pour démontrer (7.108), appliquons les dérivations $\partial_{\xi}^{\delta}\big|_{\xi=0}$ aux identités (7.109) pour tout multiindice $\delta \in \mathbb{N}^d$ tel que

$|\delta| \leqslant \ell$, ce qui donne :

$$\left\{\begin{aligned} & \left[\underline{\Upsilon}^{\delta}\overline{g}_{j'}\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \\ & \qquad \equiv \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!}\left[\underline{\Upsilon}^{\delta-\delta_1}\overline{f}^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\cdot \\ & \qquad\qquad\qquad \cdot\left[\underline{\Upsilon}^{\delta_1}\Theta'_{j',\,\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right), \\ & \quad 0\equiv \sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\frac{\delta!}{\delta_1!\,(\delta-\delta_1)!}\left[\underline{\Upsilon}^{\delta-\delta_1}\overline{f}^{\gamma'}\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\cdot \\ & \qquad\qquad\qquad \cdot\left[\underline{\Upsilon}^{\delta_1}\mathcal{L}^{\beta}\Theta'_{j',\,\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right), \end{aligned}\right. \tag{7.110}$$

pour tout $j'=1,\,\ldots,\,d'$, tout $\beta\in\mathbb{N}^m$ tel que $|\beta|\geqslant 1$ et tout $\delta\in\mathbb{N}^d$ tel que $|\delta|\leqslant\ell$. Vérifions que tous les termes écrits à la deuxième et à la quatrième ligne de (7.110) sont des séries convergentes par rapport à $z_{(k+1)}$. En effet, en remplaçant $(t,\,\tau)$ par $\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})$ dans l'identité conjuguée de (7.60), nous obtenons :

$$\left\{\begin{aligned} & \left[\underline{\Upsilon}^{\delta_1}\mathcal{L}^{\beta}\Theta'_{j',\,\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\equiv P'_{\beta,\,\delta_1}\left(J_{z,\,\tau}^{|\beta|+|\delta_1|}\overline{\Theta}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right),\right. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\left[J_t^{|\beta|+|\delta_1|}\Theta'_{j',\,\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right)\right), \end{aligned}\right. \tag{7.111}$$

et tous ces termes sont convergents, grâce à l'hypothèse de récurrence (7.107). Appliquons maintenant le Théorème 2.3 avec l'ordre d'approximation $N=1$: nous en déduisons qu'il existe une application convergente

$$\left\{\begin{aligned} & z_{(k+1)}\longmapsto\left(\overline{\mathsf{H}}_{i'_1,\,\delta}(z_{(k+1)})\right)_{1\leqslant i'_1\leqslant n',\,|\delta|\leqslant\ell} \\ & \qquad =:\left(\left(\overline{\mathsf{F}}_{k',\,\delta}(z_{(k+1)})\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,|\delta|\leqslant\ell},\,\left(\overline{\mathsf{G}}_{j',\,\delta}(z_{(k+1)})\right)_{1\leqslant j'\leqslant d',\,|\delta|\leqslant\ell}\right), \end{aligned}\right. \tag{7.112}$$

avec $\mathsf{H}_{i'_1,\,\delta_1}(0)=\Upsilon^{\delta_1}h_{i'_1}(0)$, qui satisfait les équations analytiques (7.110), c'est-à-dire telle que :

$$\left\{\begin{aligned} & \overline{\mathsf{G}}_{j',\,\delta}(z_{(k+1)})\equiv\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\frac{\delta!}{\delta_1!(\delta-\delta_1)!}\left[\underline{\Upsilon}^{\delta_1}\Theta'_{j',\,\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\cdot \\ & \qquad\qquad \cdot\overline{N}_{\gamma',\,\delta-\delta_1}\left(\left(\overline{\mathsf{F}}_{k',\,\delta_2}(z_{(k+1)})\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right), \\ & \qquad 0\equiv\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\sum_{\delta_1\leqslant\delta}\frac{\delta!}{\delta_1!(\delta-\delta_1)!}\left[\underline{\Upsilon}^{\delta_1}\mathcal{L}^{\beta}\Theta'_{j',\,\gamma'}(h)\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)\cdot \\ & \qquad\qquad \cdot\overline{N}_{\gamma',\,\delta-\delta_1}\left(\left(\overline{\mathsf{F}}_{k',\,\delta_2}(z_{(k+1)})\right)_{1\leqslant k'\leqslant m',\,\delta_2\leqslant\delta-\delta_1}\right), \end{aligned}\right. \tag{7.113}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$, tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ satisfaisant $|\beta| \geqslant 1$ et tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\delta| \leqslant \ell$. Utilisons maintenant l'équivalence (7.85) avec $\mathsf{x} := z_{(k+1)}$, avec $\mathsf{Q}(\mathsf{x}) := \Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})$, avec $\mathsf{T}'_{i'_1,\,\delta_1}(\mathsf{x}) := \overline{\mathsf{H}}_{i'_1,\,\delta_1}(\mathsf{x})$ et pour tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\delta| \leqslant \ell$: nous en déduisons que la même application formelle (7.112) satisfait les équations analytiques développées suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\underline{\Upsilon}^{\delta} \mathcal{L}^{\beta} g_{j'}\right] (\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\, (\delta - \delta_1)!} \cdot \\ & \qquad \cdot \left[\underline{\Upsilon}^{\delta - \delta_1} \mathcal{L}^{\beta} f^{\gamma'}\right] (\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})) \cdot \\ & \qquad \cdot \overline{M}'_{\delta_1} \left(\left(\overline{\mathsf{H}}_{i'_1,\,\delta_2}(z_{(k+1)}) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_2 \leqslant \delta_1}, \right. \\ & \qquad \qquad \left. \left[J_{\tau'}^{|\delta_1|} \overline{\Theta}'_{j',\,\gamma'} \right] \left(\overline{\mathsf{H}}_0(z_{(k+1)}) \right) \right), \end{aligned} \right. \tag{7.114}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$, tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ et tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\delta| \leqslant \ell$, où nous avons posé $\overline{\mathsf{H}}_0 := \left(\overline{\mathsf{H}}_{i'_1,\,0}\right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n'}$. Comparons ces identités aux identités de la troisième ligne de (7.45) dans lesquelles on pose $(t, \tau) = \underline{\Upsilon}_{\xi}\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)$ et auxquelles on applique la dérivation $\partial_{\xi}^{\delta}(\cdot)\big|_{\xi=0}$, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\underline{\Upsilon}^{\delta} \mathcal{L}^{\beta} g_{j'}\right] (\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\, (\delta - \delta_1)!} \cdot \\ & \qquad \cdot \left[\underline{\Upsilon}^{\delta - \delta_1} \mathcal{L}^{\beta} f^{\gamma'}\right] (\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})) \cdot \\ & \qquad \cdot \overline{M}'_{\delta_1} \left(\left(\underline{\Upsilon}^{\delta_2} \overline{h}_{i'_1} \left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_2 \leqslant \delta_1}, \right. \\ & \qquad \qquad \left. \left[J_{\tau'}^{|\delta_1|} \overline{\Theta}'_{j',\,\gamma'} \left(\overline{h}\right) \right] \left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)}) \right) \right), \end{aligned} \right. \tag{7.115}$$

Soustrayons (7.114) de (7.115), ce qui donne :

$$\left\{ \begin{aligned} & 0 \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \sum_{\delta_1 \leqslant \delta} \frac{\delta!}{\delta_1!\, (\delta - \delta_1)!} \cdot \left[\underline{\Upsilon}^{\delta - \delta_1} \mathcal{L}^{\beta} f^{\gamma'}\right] (\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})) \cdot \\ & \qquad \left(\begin{aligned} & \overline{M}'_{\delta_1} \left(\left(\underline{\Upsilon}^{\delta_2} \overline{h}_{i'_1} \left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_2 \leqslant \delta_1}, \right. \\ & \qquad \qquad \left. \left[J_{\tau'}^{|\delta_1|} \overline{\Theta}'_{j',\,\gamma'} \left(\overline{h}\right) \right] \left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)}) \right) \right) \\ & - \overline{M}'_{\delta_1} \left(\left(\overline{\mathsf{H}}_{i'_1,\,\delta_2}(z_{(k+1)}) \right)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n',\, \delta_2 \leqslant \delta_1}, \right. \\ & \qquad \qquad \left. \left[J_{\tau'}^{|\delta_1|} \overline{\Theta}'_{j',\,\gamma'} \right] \left(\overline{\mathsf{H}}_0(z_{(k+1)}) \right) \right) \end{aligned} \right), \end{aligned} \right. \tag{7.116}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$, tout $\beta \in \mathbb{N}^m$ et tout $\delta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\delta| \leqslant \ell$. D'après la définition même de $\overline{M}'_{\delta_1}$ donnée à la quatrième ligne de (7.59)), le terme développé à la deuxième et à la troisième ligne de (7.116) s'identifie à $\left[\underline{\Upsilon}^{\delta_1}\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}(\overline{h})\right]\left(\Gamma_{k+1}(z_{(k+1)})\right)$. Notons que le terme développé à la quatrième et à la cinquième ligne de (7.116) est convergent. Ainsi, pour conclure que les propriétés de convergence (7.108) sont satisfaites (en utilisant au passage le Lemme 7.8), il ne nous reste plus qu'à établir que les termes contenus dans les grandes parentèses s'annulent tous identiquement.

Écrivons (7.16) pour $\delta = 0$: la somme $\sum_{\delta_1 \leqslant \delta}$ contient alors un seul terme et le Lemme 7.12 s'applique. En raisonnant par récurrence sur la longueur de δ, jusqu'à la longueur ℓ, en écrivant les identités (7.16) pour $|\delta|$ croissant, et en appliquant le Lemme 7.12 à chaque étape, nous vérifions que les termes contenus dans les grandes parentèses s'annulent tous identiquement.

Les démonstrations de la Proposition 7.3 et du Théorème 1.2 sont achevées. $\square$

7.18. Existence d'applications holomorphes

Pour terminer cet article, démontrons le corollaire suivant du Théorème 1.2, qui implique le Corollaire 1.5.

COROLLAIRE 7.13. — *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe une application convergente $\mathsf{H}^N(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ avec $\mathsf{H}^N(t) \equiv h(t) \bmod (m(t))^N$ (d'où $H(0) = 0$), qui induit une application holomorphe locale de M à valeurs dans M'.*

Démonstration. — D'après le Théorème 1.2, les composantes $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion s'identifient à des séries convergentes $\theta'_{j',\gamma'}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$ et tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Appliquons le Théorème d'approximation 2.3 aux équations analytiques

$$0 \equiv \Theta'_{j',\gamma'}(h(t)) - \theta'_{j',\gamma'}(t). \tag{7.117}$$

Nous en déduisons que pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe une application convergente $\mathsf{H}^N(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ avec $\mathsf{H}^N(t) \equiv h(t) \bmod (m(t))^N$ qui satisfait ces équations analytiques, *i.e.* :

$$0 \equiv \Theta'_{j',\gamma'}\left(\mathsf{H}^N(t)\right) - \theta'_{j',\gamma'}(t). \tag{7.118}$$

Nous affirmons que *toute telle H^N induit nécessairement une application holomorphe locale de M à valeurs dans M'*. En effet, il découle d'abord de (7.117) et de (7.118) que $\Theta'_{j',\gamma'}(h(t)) \equiv \Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}^N(t))$ et ensuite :

$$\begin{cases} \overline{g}_{j'}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{f}^{\gamma'}\right](\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)) \cdot \Theta'_{j',\gamma'}(h(t)) \\ \qquad \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left[\overline{f}^{\gamma'}\right](\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)) \cdot \Theta'_{j',\gamma'}(\mathsf{H}^N(t)), \end{cases} \tag{7.119}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$. Autrement dit, nous avons : $r'_{j'}\left(\mathsf{H}^N(t),\, \overline{h}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)\right) \equiv 0$, pour tout $j' = 1, \ldots, d'$. En remplaçant τ' par $\overline{h}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t))$ et t' par $\mathsf{H}^N(t)$ dans la première ligne de la deuxième colonne de (7.32), nous en déduisons :

$$\begin{cases} 0 \equiv \overline{r}'_{j'}\left(\overline{h}(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t)),\, \mathsf{H}^N(t)\right) \\ \quad \equiv \mathsf{G}^N_{j'}(t) - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathsf{F}^N(t)^{\gamma'} \cdot \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}\,(\zeta,\, \Theta(\zeta,\, t))\right), \end{cases} \tag{7.120}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$. Remplaçons alors w par $\overline{\Theta}(z,\, \tau)$ dans ces identités, en tenant compte de la relation $\xi \equiv \Theta\left(\zeta,\, z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau)\right)$, qui découle immédiatement de (3.4), ce qui donne :

$$\mathsf{G}^N_{j'}\left(z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau)\right) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathsf{F}^N\left(z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau)\right)^{\gamma'} \cdot \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right), \tag{7.121}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$.

Enfin, pour terminer, remplaçons $\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{h}(\tau)\right)$ par $\overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{H}^N(\tau)\right)$ dans ces identités (cela est possible, grâce aux conjuguées des relations (7.117) et (7.118)), ce qui donne :

$$\mathsf{G}_{j'}\left(z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau)\right) \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathsf{F}^N\left(z,\, \overline{\Theta}(z,\, \tau)\right)^{\gamma'} \cdot \overline{\Theta}'_{j',\gamma'}\left(\overline{\mathsf{H}}^N(\tau)\right), \tag{7.122}$$

pour tout $j' = 1, \ldots, d'$. Ces dernières identités démontrent clairement que H^N induit une application de M à valeurs dans M'. Le corollaire (7.13) est démontré. □

Bibliographie

[Ar1968] ARTIN (M.). — On the solutions of analytic equations, Invent. Math. 5, p. 277-291 (1968).

[Ar1969] ARTIN (M.). — Algebraic approximation of structures over complete local rings, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 36, p. 23-58 (1969).

[BR1988] BAOUENDI (M.S.), ROTHSCHILD (L.P.). — Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces, Invent. Math. 93, no. 3, p. 481-500 (1988).

[BR1990] BAOUENDI (M.S.), ROTHSCHILD (L.P.). — Geometric properties of mappings between hypersurfaces in complex space, J. Differential Geom. 31, p. 473-499 (1990).

[BR1995] BAOUENDI (M.S.), ROTHSCHILD (L.P.). — Mappings of real algebraic hypersurfaces, J. Amer. Math. Soc. 8, p. 997-1015 (1995).

[BER1996] BAOUENDI (M.S.), EBENFELT (P.), ROTHSCHILD (L.P.). — Algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets in $\mathbb{C}^n$, Acta Math. 177, no. 2, p. 225-273 (1996).

[BER1997] BAOUENDI (M.S.), EBENFELT (P.), ROTHSCHILD (L.P.). — Parametrization of local biholomorphisms of real analytic hypersurfaces, Asian J. Math. 1, no. 1, p. 1-16 (1997).

[BER1998] BAOUENDI (M.S.), EBENFELT (P.), ROTHSCHILD (L.P.). — CR automorphisms of real analytic manifolds in complex space, Comm. Anal. Geom. 6, p. 291-315 (1998).

[BER1999a] BAOUENDI (M.S.), EBENFELT (P.), ROTHSCHILD (L.P.). — Real submanifolds in complex space and their mappings. Princeton Mathematical Series, 47, Princeton University Press Princeton, NJ, xii+404 pp (1999).

[BER1999b] BAOUENDI (M.S.), EBENFELT (P.), ROTHSCHILD (L.P.). — Rational dependence of smooth and analytic CR mappings on their jets, Math. Ann. 315, p. 205-249 (1999).

[BER2000] BAOUENDI (M.S.), EBENFELT (P.), ROTHSCHILD (L.P.). — Convergence and finite determination of formal CR mappings, J. Amer. Math. Soc. 13, p. 697-723 (2000).

[BER2003] BAOUENDI (M.S.), EBENFELT (P.), ROTHSCHILD (L.P.). — Dynamics of the Segre varieties of a real submanifold in complex space, J. Algebraic Geom. 12, no. 1, p. 81-106 (2003).

[BJT1985] BAOUENDI (M.S.), JACOBOWITZ (H.), TREVES (F.). — On the analyticity of CR mappings, Ann. of Math. 122, no. 2, p. 365-400 (1985).

[BMR2002] BAOUENDI (M.S.), MIR (N.), ROTHSCHILD (L.P.). — Reflection ideals and mappings between generic submanifolds in complex space, J. Geom. Anal. 12, no. 4, p. 543-580 (2002). Preprint électronique : `arXiv/abs/math/0012243`.

[BRZ2001] BAOUENDI (M.S.), ROTHSCHILD (L.P.), ZAITSEV (D.). — Equivalences of real submanifolds in complex space, J. Differential Geom. 59, no. 2, p. 301-351 (2001).

[CM1974] CHERN (S.-S.), MOSER (J.K.). — Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133, p. 219-271(1974).

[CMS1999] COUPET (B.), MEYLAN (F.), SUKHOV (A.). — Holomorphic maps of algebraic CR manifolds, Internat. Math. Res. Notices, no.1, p. 1-29 (1999).

[CPS1999] COUPET (B.), PINCHUK (S.), SUKHOV (A.). — Analyticité des applications CR, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329, no. 6, p. 489-494 (1999).

[CPS2000] COUPET (B.), PINCHUK (S.), SUKHOV (A.). — On partial analyticity of CR mappings, Math. Z. 235, p. 541-557 (2000).

[CDMS2002] COUPET (B.), DAMOUR (S.), MERKER (J.), SUKHOV (A.). — Sur l'analyticité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 334, p. 953-956 (2002).

[Da2001] DAMOUR (S.). — On the analyticity of smooth CR mappings between real analytic CR manifolds, Michigan Math. J. 49, no. 3, p. 583-603 (2001).

[DM2002] DAMOUR (S.), MERKER (J.). — Sur la convergence d'applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles, Bull. Sci. Math. 126, p. 831-854 (2002).

[De1985] DERRIDJ (M.). — Le principe de réflexion en des points de faible pseudoconvexité pour des applications holomorphes propres, Invent. Math. 79, no. 1, p. 197-215 (1985).

[De1986] DERRIDJ (M.). — Sur le prolongement d'applications holomorphes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1985-1986, Exp. No. XVI, 10 pp., École Polytech., Palaiseau, 1986.

[DF1978] DIEDERICH (K.), FORNÆSS (J.E.). — Pseudoconvex domains with real analytic boundary, Ann. of Math. 107, no. 2, p. 371-384 (1978).

[DF1988] DIEDERICH (K.), FORNÆSS (J.E.). — Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 282, no. 4, p. 681-700 (1988).

[DW1980] DIEDERICH (K.), WEBSTER (S.M.). — A reflection principle for degenerate real hypersurfaces, Duke Math. J. 47, no. 4, p. 835-843 (1980).

[DFY1994] DIEDERICH (K.), FORNÆSS (J.E.), YE (Z.). — Biholomorphisms in dimension 2, J. Geom. Anal. 4, no. 4, p. 539-552 (1994).

[DP1995] DIEDERICH (K.), PINCHUK (S.). — Proper holomorphic maps in dimension 2 extend, Indiana Univ. Math. J. 44, no. 4, p. 1089-1126 (1995).

[DP1998] DIEDERICH (K.), PINCHUK (S.). — Reflection principle in higher dimensions, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol II (Berlin 1998), Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, p. 703-712.

[DP2003] DIEDERICH (K.), PINCHUK (S.). — Regularity of continuous CR-maps in arbitrary dimension, Michigan Math. J. 51, p. 111-140 (2003).

[Eb1998] EBENFELT (P.). — Normal forms and biholomorphic equivalence of real hypersurfaces in C^3, Indiana Univ. Math. J. 47, no. 2, p. 311-366 (1998).

[Eb2002] EBENFELT (P.). — On the analyticity of CR mappings between nonminimal hypersurfaces, Math. Ann. 322, no. 3, p. 583-602 (2002).

[Fo1991] FORSTNERIČ (F.). — Extending proper holomorphic mappings of positive codimension, Invent. Math. 95, no. 1, p. 31-62 (1989).

[GM2003] GAUSSIER (H.), MERKER (J.). — Symmetries of partial differential equations, J. Korean Math. Soc. 40, no. 3, p. 517-561 (2003).

[GM2004] GAUSSIER (H.), MERKER (J.). — Nonalgebraizable real analytic tubes in $\mathbb{C}^n$, Math. Z. 247, no. 2, p. 337-383 (2004).

[Go1996] GONG (X.). — Divergence of the normalization for real Lagrangian surfaces near complex tangents, Pacific Math. J. 176, p. 311-324 (1996).

[Ha1983] HAN (C.K.). — Analyticity of CR equivalences between some real analytic hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$ with degenerate Levi-forms, Invent. Math 73, no. 1, p. 51-69 (1983).

[Ha1990] HAN (C.K.). — Rigidity of CR submanifolds and analyticity of CR immersions, Math. Ann. 287, no. 2, p. 229-238 (1990).

[Hi1973] HIRONAKA (H.). — Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps, Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Istituto Matematico "L. Tonelli" dell'Università di Pisa, 1973, iii+162 pp.

[HK1995] HUANG (X.), KRANTZ (S.G.). — On a problem of Moser, Duke Math. J. 78, no. 1, p. 213-228 (1995).

[La2000] LAMEL (B.). — Holomorphic maps of real submanifolds in complex spaces of different dimensions, Pacific Math. J. 201, no. 2, p. 357-387 (2001).

[Le1977] LEWY (H.). — On the boundary behaviour of holomorphic mappings, Contrib. Centro Linceo Inter. Sc. Mat. e Loro Appl. No. 35, Accad. Naz. Lincei (1977), 1-8 ; reprint in the Hans Lewy Selecta, 2 vols, Contemporary mathematicians, Birkhäuser, Boston (2002).

[Ma1967] MALGRANGE (B.). — Ideals of Differentiable Functions, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 3, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London (1967), vii+106 pp.

[Me1994] MERKER (J.). — Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions, Internat. Math. Res. Notices, no. 8, p. 329-342 (1994).

[Me1997a] MERKER (J.). — On removable singularities for CR functions in higher codimension, Internat. Math. Res. Notices, no. 1, p. 21-56 (1997).

[Me1997b] MERKER (J.). — On the Schwarz symmetry principle in three-dimensional complex euclidean space, Prépublication de l'École Normale Supérieure, 25, 62 pp (1997).

[Me1998] MERKER (J.). — Vector field construction of Segre sets, Preprint 1998, augmented in 2000; downloadable at `arXiv.org/abs/math.CV/9901010`.

[Me1999] MERKER (J.). — On the convergence of S-nondegenerate formal CR maps between real analytic CR manifolds, Preprint, 1999; downloadable at: `arXiv.org/abs/math.CV/9901027`.

[Me2000] MERKER (J.). — Étude de la régularité analytique de l'application de symétrie CR formelle, Preprint, June 2000; downloadable at: `arXiv.org/math/abs/0005290`.

[Me2001a] MERKER (J.). — On the partial algebraicity of holomorphic mappings between two real algebraic sets in the complex euclidean spaces of different dimensions, Bull. Soc. Math. France 129, no. 4, p. 547-591 (2001).

[Me2001b] MERKER (J.). — Convergence of formal invertible CR mappings between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces, Int. J. Math. Sci., 26, no. 5, p. 281-302 (2001).

[Me2001c] MERKER (J.). — Étude de la régularité analytique de l'application de symétrie CR formelle, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333, no. 3, p. 165-168 (2001).

[Me2001d] MERKER (J.). — Note on double reflection and algebraicity of holomorphic mappings, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 9, no. 5, p. 689-721 (2001).

[Me2002] MERKER (J.). — On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle, Ann. Inst. Fourier Grenoble 52, no. 5, p. 1443-1523 (2002).

[Me2003] MERKER (J.). — On the local geometry of generic submanifolds of $\mathbb{C}^n$ and the analytic reflection principle (Part I), Viniti, Kluwer, to appear, 80 pp.

[Me2004] MERKER (J.). — Systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles analytiques : géométrie locale des sous-variétés des solutions, en préparation.

[MM1999] MERKER (J.), MEYLAN (F.). — On the Schwarz symmetry principle in a model case, Proc. Amer. Math. Soc. 127, no. 4, p. 1097-1102 (1999).

[MMZ2002] MEYLAN (F.), MIR (N.), ZAITSEV (D.). — Holomorphic extension of smooth CR-mappings between real-analytic and real-algebraic CR-manifolds, Asian J. Math. 7, no. 4, p. 493-509 (2003).

[MMZ2003] MEYLAN (F.), MIR (N.), ZAITSEV (D.). — Approximation and convergence of formal CR-mappings, Int. Math. Res. Not., no. 4, p. 211-242 (2003).

[Mi1998] MIR (N.). — Germs of holomorphic mappings between real algebraic hypersurfaces, Ann. Inst. Fourier Grenoble 48, no. 3, p. 1025-1043 (1998).

[Mi2002] MIR (N.). — On the convergence of formal mappings, Comm. Anal. Geom. 10, no. 1, p. 23-59 (2002).

[Mi2000] MIR (N.). — Formal biholomorphic maps of real analytic hypersurfaces, Math. Research Lett. 7, no. 2-3, p. 343-359 (2000).

[MW1983] MOSER (J.K.), WEBSTER (S.M.). — Normal forms for real surfaces in $\mathbb{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations, Acta Math. 150, no. 3-4, p. 255-296 (1983).

[Na1966] NAGANO (T.). — Linear differential systems with singularities and applications to transitive Lie algebras, J. Math. Soc. Japan 18, p. 398-404 (1966).

[Ne1997] NEELON (T.S.). — On solutions of real analytic equations, Proc. Amer. Math. Soc. 125, no. 3, p. 2531-2535 (1997).

[Pi1975] PINCHUK (S.). — On the analytic continuation of holomorphic mappings (Russian), Mat. Sb. (N.S.) 98(140) no. 3 (11), p. 375-392, p. 416-435, p. 495-496 (1975).

[Pi1978] PINCHUK (S.). — Holomorphic mappings of real-analytic hypersurfaces (Russian), Mat. Sb. (N.S.) 105(147), no. 4, p. 574-593, 640 (1978).

[PV2001] PINCHUK (S.), VERMA (K.). — Analytic sets and the boundary regularity of CR mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 129, no. 9, p. 2623-2632 (2001).

[Pu1990] PUSHNIKOV (Y.). — Holomorphicity of CR-mappings into a space of large dimension, Mat. Zametki 48, no. 3, p. 147-149 (1990).

[Sch1870] SCHWARZ (K.H.A.). — Ueber einige Abbildungsaufgaben, Journal für reine und angewandte Mathematik, p. 105-120 (1870).

[Se1931a] SEGRE (B.). — Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse, Bollettino della unione matematica italiana, 10, p. 269-274 (1931).

[Se1931b] SEGRE (B.). — Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme, Rend. Acc. Lincei, VI, Ser. 13, 676-683 (1931).

[Se1932] SEGRE (B.). — Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse, Rend. Sem. Mat. Roma, II (memorie), Ser. 7, no. 2, p. 59-107 (1932).

[Sh2000] SHAFIKOV (R.). — Analytic continuation of germs of holomorphic mappings between real hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$, Michigan Math. J. 47, no. 1, p. 133-149 (2000).

[Sh2003] SHAFIKOV (R.). — Analytic continuation of holomorphic correspondences and equivalence of domains in $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 152, no. 3, p. 665-682 (2003).

[SS1996] SHARIPOV (R.), SUKHOV (A.). — On CR mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and separate algebraicity for holomorphic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 348, no. 2, p. 767-780 (1996).

[St1995] STANTON (N.). — Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces of the space of n complex variables, Amer. J. Math. 117, no. 1, p. 141-167 (1995).

[St1996] STANTON (N.). — Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces, Amer. J. Math. 118, no. 1, p. 209-233 (1996).

[Su1973] SUSSMANN (H.J.). — Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, Trans. Amer. Math. Soc. 180, p. 171-188 (1973).

[Te1996] TEISSIER (B.). — Communication orale.

[Tr1986] TRÉPREAU (J.-M.). — Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 83, p. 583-592 (1986).

[Tr1990] TRÉPREAU (J.-M.). — Sur la propagation des singularités dans les variétés CR, Bull. Soc. Math. Fr. 118, no. 4, p. 403-450 (1990).

[Tr2000] TRÉPREAU (J.-M.). — Recension du livre [BER1999b], Gazette des mathématiciens 85, p. 82-84 (2000).

[Tu1988] TUMANOV (A.E.). — Extending CR functions on a manifold of finite type over a wedge (Russian), Mat. Sb. (N.S.) 136(178) (1988), no. 1, 128-139. English transl. in Math. USSR-Sb. 64, no. 1, p. 129-140 (1989).

[Tu1994] TUMANOV (A.E.). — Connections and propagation of analyticity for CR functions, Duke Math. J. 73, no. 1, p. 1-24 (1994).

[VdW1970] VAN DER WAERDEN (B.L.). — Algebra, Vol 1 and 2. Translated by Fred Blum and John R. Schulenberger Frederick Ungar Publishing Co., New York 1970 xiv+265 pp.

[We1977] WEBSTER (S.M.). — On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces, Invent. Math. 43, no. 1, p. 53-68 (1977).

[We1978] WEBSTER (S.M.). — On the reflection principle in several complex variables, Proc. Amer. Math. Soc. 71, no. 1, p. 26-28 (1978).

[We1982] WEBSTER (S.M.). — Holomorphic mappings of domains with generic corners, Proc. Amer. Math. Soc. 86, no. 2, p. 236-240 (1982).

[We1992] WEBSTER (S.M.). — Holomorphic symplectic normalization of a real function, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 19, no. 1, p. 69-86 (1992).

[Za1997] ZAITSEV (D.). — Germs of local automorphisms of real-analytic CR structures and analytic dependence on k-jets, Math. Research Lett. 4, no. 6, p. 823-842 (1997).

[ZS1960] ZARISKI (O.), SAMUEL (P.). — Commutative algebra, 2 vols, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., Toronto-London-New York, 1958, 1960.