

IVAN PAN

MARCOS SEBASTIANI

Classification des feuilletages turbulents

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 12,
n° 3 (2003), p. 395-413

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2003_6_12_3_395_0>

© Université Paul Sabatier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Classification des feuilletages turbulents (*)IVAN PAN⁽¹⁾, MARCOS SEBASTIANI⁽²⁾

RÉSUMÉ. — Soit $h : X \rightarrow B$ une fibration elliptique relativement minimale. On démontre que l'ensemble des feuilletages turbulents sur X (dans le sens de Brunella) dont le diviseur de tangence avec la fibration est donné, possède une structure naturelle de variété analytique connexe ; on calcule la dimension de cette variété.

ABSTRACT. — Let $h : X \rightarrow B$ be a relatively minimal elliptic fibration. We proof that the set of turbulent foliations on X (on Brunella's sense) which has a fixed tangence divisor with the fibration is, in a natural way, a connected analytic variety ; we also calculate its dimension.

1. Introduction

Soit $h : X \rightarrow B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe X . Soit Λ un feuilletage turbulent de X avec fibration adaptée h (cette notion a été introduite par M. Brunella dans [3, chap. 4, §3] ; voir aussi [2, §5]). Notons D le diviseur de tangence de Λ avec le feuilletage Γ défini par la fibration h (voir [2, §1]).

On considère la famille \mathcal{F}_Λ des feuilletages analytiques à singularités isolées de X dont le diviseur de tangence avec Γ est encore D (ces feuilletages sont aussi turbulents avec fibration adaptée h).

Soient T le fibré tangent à Λ ([5, §2]) et T_X le fibré tangent à X . Alors \mathcal{F}_Λ s'identifie de façon naturelle avec un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathbb{P}(\text{Hom}(T, T_X))$ associé à l'espace vectoriel des homomorphismes de T

(*) Reçu le 2 décembre 2002, accepté le 8 janvier 2003

(1) Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre, RS, Brasil.

E-mail: pan@mat.ufrgs.br

(2) Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre, RS, Brasil.

E-mail: sebast@mat.ufrgs.br

dans T_X ([5, §2] et lemme 3.5 plus bas). Dans ce qui suit on démontre, en introduisant un invariant qui classe les éléments de \mathcal{F}_Λ , que l'adhérence de \mathcal{F}_Λ dans $\mathbb{P}(\text{Hom}(T, T_X))$ est un sous-espace linéaire dont on calcule explicitement la dimension en termes de D (théorème 5.4, corollaire 5.5 et propositions 6.5 et 6.6).

Cela généralise [4] en suivant les orientations d'Étienne Ghys à qui nous exprimons ici notre reconnaissance.

2. Notations

Soit X une variété analytique complexe et soit \mathcal{O}_X son faisceau structural. Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X , on note $\mathcal{O}_X(E)$ le \mathcal{O}_X -module de ses sections holomorphes. Si D est un diviseur de X , on note $\mathcal{O}_X(D)$ le \mathcal{O}_X -module dont les sections sur un ouvert $U \subset X$ sont les fonctions méromorphes f sur U telles que $\text{div } f + D|_U \geq 0$. On peut associer à D un fibré vectoriel holomorphe E_D de rang 1 tel que $\mathcal{O}_X(E_D) \cong \mathcal{O}_X(D)$. Si \mathcal{A} est un \mathcal{O}_X -module et D un diviseur de X on note

$$\mathcal{A}(D) := \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D).$$

La *caractéristique d'Euler-Poincaré arithmétique* de X est

$$\chi(X) := \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} H^j(X, \mathcal{O}_X), \quad (X \text{ compacte}).$$

On désigne par K_X le fibré canonique de X . Si E est un fibré vectoriel sur X , on dénote E_x la fibre sur $x \in X$. Si Z est un espace analytique irréductible, $\mathbb{C}[Z]$ et $\mathbb{C}(Z)$ désignent l'anneau des fonctions holomorphes et le corps des fonctions méromorphes sur Z respectivement.

Finalement, si $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ et V est un \mathbb{C} -espace vectoriel on note $\mathbb{P}(V) := (V - \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace projectif associé à V .

Le foncteur « image réciproque » sera considéré dans le sens de [1, chap. I, §8].

3. Feuilletages analytiques des surfaces

Soit X une surface analytique complexe connexe. Un *feuilletage analytique* Λ de X est défini par un couple (T, φ) où T est un fibré vectoriel holomorphe de dimension 1 sur X et $\varphi : T \rightarrow T_X$ est un homomorphisme non-nul. Un autre couple (T', φ') définit aussi Λ si et seulement s'il existe un isomorphisme $\theta : T \rightarrow T'$ tel que $\varphi = \varphi' \circ \theta$. C'est-à-dire, dans le cas

où $T = T'$, si et seulement s'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe telle que $\varphi|_{T_x} = g(x)\varphi'|_{T_x}$ pour tout $x \in X$.

L'ensemble singulier de Λ est l'ensemble

$$\text{Sing } \Lambda := \{x \in X : \varphi|_{T_x} = 0\}.$$

C'est un sous-ensemble analytique de dimension ≤ 1 . Si $\dim \text{Sing } \Lambda = 0$ ou $\text{Sing } \Lambda = \emptyset$, on dit que Λ est à singularités isolées (voir [5, §1]).

LEMME 3.1. — *Supposons que X est compacte et soient $\Lambda = (T, \varphi), \Lambda' = (T, \varphi')$ deux feuilletages de X . Supposons de plus que :*

- a) Λ est à singularités isolées ;
- b) il existe un ouvert non-vide $U \subset X$ tel que $\varphi(T_x) = \varphi'(T_x)$ pour tout $x \in U$.
Alors $\Lambda = \Lambda'$.

Preuve. — Considérons l'ouvert

$$V := X - [(\text{Sing } \Lambda) \cup \text{Sing } \Lambda'].$$

On peut supposer $U \subset V$. Les images des homomorphismes φ, φ' définissent deux sections holomorphes du fibré en droites projectives associé à T_V . Comme ces sections coïncident au-dessus de U , elles sont identiques. Donc, il existe $g : V \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe telle que

$$\varphi'|_{T_x} = g(x)\varphi|_{T_x}, \quad x \in V.$$

Soit $a \in X - V$. Si U_a est un voisinage ouvert de a tel qu'il existe une section holomorphe et jamais nulle s de T sur U_a , alors

$$\varphi'(s(x)) = g(x)\varphi(s(x)), \quad x \in U_a \cap V.$$

L'hypothèse a) implique que la restriction de g à $U_a \cap V$ se prolonge à une fonction holomorphe sur U_a . On en déduit que g se prolonge à une fonction holomorphe sur X tout entier. Donc g est constante. \square

DÉFINITION 3.2. — *Soit $\Lambda = (T, \varphi)$ un feuilletage analytique de X . Notons*

$$\varphi_* : \mathcal{O}_X(T) \rightarrow \mathcal{O}_X(T_X) =: \xi_X, \quad \varphi^* : \Omega_X := \mathcal{O}_X(T_X^\vee) \rightarrow \mathcal{O}_X(T^\vee)$$

les homomorphismes des faisceau induits par φ . On appelle

$$T_\Lambda := \text{Im } \varphi_* \subset \xi_X \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\Lambda^\vee := \text{Ker } \varphi^* \subset \Omega_X$$

les faisceaux tangent et conormal à Λ respectivement. (Ce sont des \mathcal{O}_X -modules localement libres de rang 1. Comme φ_* est injectif, on peut supposer $T_\Lambda = \mathcal{O}_X(T)$). Les faisceaux cotangent et normal à Λ sont T_Λ^\vee et $\mathcal{N}_\Lambda := (\mathcal{N}_\Lambda^\vee)^\vee$ respectivement.

LEMME 3.3. — Si Λ est à singularités isolées, alors

$$T_\Lambda^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Lambda^\vee \cong \mathcal{O}_X(K_X)$$

en tant que \mathcal{O}_X -modules.

Preuve. — Voir [3, chap. 2, §1]. \square

Dans ce qui suit, si Λ, Γ sont deux feuilletages de X , on dira qu'ils sont différents ($\Lambda \neq \Gamma$) si leur restrictions à $X - (\text{Sing } \Lambda \cup \text{Sing } \Gamma)$ ne sont pas identiques (comparer avec 3.1).

Soient $\Lambda \neq \Gamma$ deux feuilletages de X . On a une application évidente

$$T_\Lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Gamma^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

C'est un homomorphisme injectif de \mathcal{O}_X -modules. Donc, son image est de la forme $\mathcal{O}_X(-D)$ où D est un diviseur effectif.

DÉFINITION 3.4. — $D =: \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$ est le diviseur de tangence de Λ et Γ ([2, §1]).

LEMME 3.5. — On a les assertions suivantes :

- a) Si Λ et Γ sont à singularités isolées, alors $\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = \text{tang}(\Gamma, \Lambda)$.
- b) $\mathcal{O}_X(\text{tang}(\Lambda, \Gamma)) = T_\Lambda^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Gamma$.
- c) Si $\Lambda_1 = (T_1, \varphi_1)$ et $\Lambda_2 = (T_2, \varphi_2)$ sont des feuilletages différents de Γ tels que $\text{tang}(\Lambda_1, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda_2, \Gamma)$, alors $T_1 \cong T_2$.

Preuve. — L'assertion c) suit de b) tandis que celle-ci suit de la définition 3.4. Pour a) voir [2, §1]. \square

4. Fibrations elliptiques

Soit $h : X \rightarrow B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe X . Pour chaque $y \in B$, on désigne par $h^{-1}(y)$ l'ensemble analytique réduit, support de la fibre X_y de h sur y ; on pose

$$X_y = \sum_j k_{yj} C_{yj},$$

où les C_{yj} dénotent les composantes irréductibles de $h^{-1}(y)$. Notons $m_y := \text{pgdc}_j\{k_{yj}\}$ la multiplicité de X_y ; posons $k'_{yj} := k_{yj}/m_y$.

DÉFINITION 4.1. — On définit le diviseur effectif

$$M := \sum_y \sum_j (k'_{yj} - 1)C_{yj}$$

de X (voir [3, chap.2, §3]).

Par la suite Γ désignera le feuilletage défini par la fibration h .

LEMME 4.2. — On a un isomorphismes de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{T}_\Gamma \cong h^*[h_{*1}(\mathcal{O}_X)] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M).$$

Preuve. — Voir [3, chap. 2, §3]. \square

LEMME 4.3. — $h_{*1}(\mathcal{O}_X)$ est un \mathcal{O}_B -module localement libre de rang 1.

Preuve. — Il suit de [1, cor. III, (11.2)] compte tenu du fait que la fibre générique est elliptique. \square

LEMME 4.4. — L'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_B \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X(M))$ obtenu par composition avec h est un isomorphisme de \mathcal{O}_B -modules.

Preuve. — Soit $U \subset B$ un ouvert ; posons $V := h^{-1}(U)$. Comme h est propre et à fibres connexes, toute $f \in \mathbb{C}(V)$ dont les pôles sont des composantes des fibres est de la forme $f = g \circ h$ pour une $g \in \mathbb{C}(U)$. Si g a un pôle en $y \in U$, alors f a un pôle d'ordre $\geq k_{yj}$ en C_{yj} . Puisque $k_{yj} > k'_{yj} - 1$, on voit que $f \in H^0(V, \mathcal{O}_X(M))$ si et seulement si $g \in H^0(U, \mathcal{O}_B)$. \square

LEMME 4.5. — Soit $y \in B$. Alors il existe un ouvert $U \subset B$ tel que $y \in U$ et $\mathcal{T}_\Gamma|_V \cong \mathcal{O}_X(M)|_V$ en tant que \mathcal{O}_V -modules, où $V := h^{-1}(U)$.

Preuve. — Soit $U \ni y$ un ouvert de B tel que $h_{*1}(\mathcal{O}_X)|_U \cong \mathcal{O}_U$ (lemme). Alors

$$h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X))|_V \cong \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V,$$

et on applique le lemme 4.2. \square

LEMME 4.6. — On a un isomorphisme de \mathcal{O}_B -modules

$$h_*(\mathcal{T}_\Gamma) \cong h_{*1}(\mathcal{O}_X).$$

Preuve. — Soit $U \subset B$ un ouvert ; posons $V := h^{-1}(U)$. L'application

$$H^0(U, h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \rightarrow H^0(V, h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M)))$$

définie par $s \mapsto h^*(s) \otimes 1$ induit un homomorphisme de \mathcal{O}_B -modules

$$h_{*1}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow h_*(h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M))$$

qui est un isomorphisme d'après les lemmes 4.3 et 4.4.

L'assertion suit du lemme 4.2. \square

LEMME 4.7. — *Pour tout $y \in B$ il existe un voisinage ouvert $U \subset B$ de y et un champ de vecteurs holomorphe v sur $V := h^{-1}(U)$ tangent aux fibres de h tel que :*

- a) v s'annule sur C_{y_j} avec multiplicité $k'_{y_j} - 1$;
- b) si w est un champ de vecteurs holomorphe sur V tangent aux fibres de h , alors $w = (g \circ h)v$ pour une $g \in \mathbb{C}[U]$;
- c) v ne s'annule pas sur $V - h^{-1}(y)$.

Preuve. — On choisit U comme dans le lemme 4.5 ; on a $\mathcal{T}_\Gamma|_V \cong \mathcal{O}_X(M)|_V$. D'après le lemme 4.4, $H^0(V, \mathcal{O}_V(M))$ est engendré par 1 comme $H^0(U, \mathcal{O}_B) = \mathbb{C}[U]$ -module. En tant que section de $\mathcal{O}_X(M)$ sur V , l'élément 1 s'annule sur C_{y_j} avec multiplicité $k'_{y_j} - 1$. Donc $H^0(V, \mathcal{T}_\Gamma)$ est engendré, en tant que $\mathbb{C}[U]$ -module, par une section qui s'annule sur C_{y_j} avec cette multiplicité. \square

5. Feuilletages turbulents

Soit $h : X \rightarrow B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe X ; désignons par Γ le feuilletage associé à h . Soit $\Lambda = (T, \varphi)$ un feuilletage turbulent de X avec fibration adaptée h (dans le sens de [3, chap. 4, §3] ; en particulier Λ est à singularités isolées). Alors le diviseur de tangence $D := \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$ est de la forme

$$D = \sum_{y,j} t_{y_j} C_{y_j}$$

où les t_{y_j} sont des entiers ≥ 0 (on garde les notations du §4).

DÉFINITION 5.1. — *On définit le diviseur effectif*

$$R := \sum_{y \in B} r_y \cdot y$$

de B par

$$r_y := \inf_j \left[\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet dénote la « partie entière » d'un nombre rationnel.

Observons que R ne dépend que de D .

Considérons maintenant l'homomorphisme de \mathcal{O}_X -modules

$$\mu : h^*(\Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) = (\mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma)(D)$$

défini par

$$h^*(\omega \otimes v) \mapsto h^*(\omega) \otimes v \otimes 1,$$

où $\omega \in H^0(U, \Omega_B(R))$ et $v \in H^0(V, \mathcal{T}_\Gamma)$ avec U un ouvert de B et $V = h^{-1}(U)$. Observons que ω a, au plus, un pôle d'ordre $\leq r_y$ en $y \in U$. Alors $h^*(\omega)$ a un pôle d'ordre $\leq k_{yj}r_y - (k_{yj} - 1)$ le long de C_{yj} . Donc, d'après le lemme 4.7, $h^*(\omega) \otimes v$ a un pôle le long de C_{yj} d'ordre, au plus

$$\begin{aligned} k_{yj}r_y - (k_{yj} - 1) - (k'_{yj} - 1) &= k_{yj}r_y - (k_{yj} + k'_{yj} - 2) \\ &\leq t_{yj}. \end{aligned}$$

Du fait que tous les faisceaux en question sont localement libres on déduit tout de suite que μ est injectif.

D'autre part, considérons l'homomorphisme de \mathcal{O}_X -modules

$$\lambda : (\mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma)(D) \longrightarrow \mathcal{H}om(T, T_X)$$

défini par

$$\lambda(\eta \otimes v)(s) = \eta(\varphi(s)) \cdot v,$$

où η est une 1-forme méromorphe sur un ouvert $V \subset X$ nulle sur les fibres de h et telle que $f\eta$ est holomorphe si $f \in H^0(V, \mathcal{O}_X(-D))$, v est un champ de vecteurs holomorphe sur V tangent aux fibres de h et s est une section holomorphe de T au-dessus de V . Observons que $\eta(\varphi(s))$ est holomorphe par définition de D .

Comme $\Lambda \neq \Gamma$, le lemme 3.1 nous dit que λ est injectif.

Finalement, $\lambda \circ \mu$ induit une application \mathbb{C} -linéaire injective au niveau des sections globales

$$(\lambda \circ \mu)_* : H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{H}om(T, T_X).$$

DÉFINITION 5.2. — Posons $E(D) := H^0(B, \Omega_B(R) \otimes h_*(T_\Gamma))$. Pour chaque $\alpha \in E(D)$ on définit le feuilletage de X suivant :

$$\Lambda_\alpha := (T, \varphi_\alpha), \text{ où } \varphi_\alpha := \varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha).$$

Remarque 5.3. — Comme Λ est génériquement transverse aux fibres de h , on voit tout de suite que $\varphi_\alpha \neq 0$ et que $\Lambda_\alpha \neq \Gamma$. En effet, par définition, pour tout $\alpha \in E(D)$ l'image de l'homomorphisme $(\lambda \circ \mu)_*(\alpha) : T \rightarrow T_X$ est engendré par des vecteurs tangents aux fibres de h .

THÉORÈME 5.4. — On a les assertions suivantes :

- a) Pour tout $\alpha \in E(D)$ on a $\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = D$; en particulier si Λ_α est à singularités isolées, alors Λ_α est turbulent avec fibration adaptée h .
- b) Si $\alpha, \beta \in E(D)$ avec $\alpha \neq \beta$, alors $\Lambda_\alpha \neq \Lambda_\beta$.
- c) Si Λ' est un feuilletage turbulent de X avec fibration adaptée h tel que $\text{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$, alors il existe $\alpha \in E(D)$ tel que $\Lambda_\alpha = \Lambda'$.
- d) L'ensemble des $\alpha \in E(D)$ tels que Λ_α est à singularités isolées est le complémentaire de la réunion d'un nombre fini de sous-variétés linéaires propres.

Preuve. — a) Soit $U \subset X$ un ouvert et soient s et ω des sections holomorphes de T et \mathcal{N}_Γ^\vee au-dessus de U respectivement. Comme $(\lambda \circ \mu)_*(\alpha)(s)$ est un champ de vecteurs sur U tangent aux fibres de h , on a $\omega(\varphi(s)) = \omega(\varphi_\alpha(s))$. Alors

$$\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

- b) Si $\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta$, alors il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha) = c(\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\beta)),$$

d'où suit

$$(1 - c)\varphi = (\lambda \circ \mu)_*(c\beta - \alpha).$$

Or, prenons $y \in B$ en sorte que X_y soit une fibre régulière transverse à Λ . Si $x \in h^{-1}(y)$, alors pour tout $u \in T_x$ le vecteur $(1 - c)\varphi(u)$ est au même temps transverse et tangent à $h^{-1}(y)$, d'après la dernière égalité. Donc $c = 1$. Puisque $(\lambda \circ \mu)_*$ est injectif, on en déduit $\alpha = \beta$.

- c) On va définir α localement au voisinage, disons U , d'un point $y \in B$. On peut supposer qu'il existe sur $V := h^{-1}(U)$ un champ de vecteurs holomorphe v qui s'annule sur C_{y_j} avec multiplicité $k'_{y_j} - 1$ et qui est tangent aux fibres de h (lemme 4.7a).

Soit u un champ de vecteurs holomorphe et jamais nul sur U . Si U est suffisamment petit, $u|(U - \{y\})$ se relève à deux champs de vecteurs holomorphes w, w' sur $V - h^{-1}(y)$ tangents à Λ, Λ' respectivement. Il en résulte

$$w' - w = f \cdot v|(V - h^{-1}(y)), f \in \mathbb{C}(V).$$

Comme h est propre et f holomorphe sur $V - h^{-1}(y)$ on peut écrire $f = g \circ h$ pour une fonction méromorphe $g \in \mathbb{C}(U)$. On définit une 1-forme méromorphe ω sur U par

$$\omega(u) = g.$$

C'est-à-dire :

$$w' = w + h^*(\omega)(w) \cdot v,$$

sur $V - h^{-1}(y)$.

Affirmation. — Supposons que g a un pôle d'ordre r en y . Alors $r \leq r_y$.

On définit

$$\alpha|U := \omega \otimes v.$$

Il découle du lemme 4.7 et de l'affirmation ci-dessus que α est bien définie comme section de $\Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$.

On va prouver que $\Lambda_\alpha = \Lambda'$. Par le lemme 3.5c on peut supposer $\Lambda' = (T, \varphi')$. D'après le lemme 3.1, il suffit de prouver que $\varphi_\alpha(T_x) = \varphi'(T_x)$ pour tout $x \in V - h^{-1}(y)$ dans le cas où X_y est une fibre régulière transverse à Λ et Λ' . Dans ce cas w et w' sont holomorphes sur V et ω est holomorphe sur U . Le champ w définit une section holomorphe jamais nulle s de $T|V$ telle que $\varphi(s) = w$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(s) &= \varphi(s) + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha)(s) \\ &= w + \lambda_*(\mu_*(\alpha))(s) \\ &= w + h^*(\omega)(\varphi(s)) \cdot v \\ &= w + h^*(\omega)(w) \cdot v \\ &= w'. \end{aligned}$$

On en déduit l'assertion.

Preuve de l'affirmation. — Soient ξ, η des coordonnées locales de X centrées en un point générique de C_{y_j} ; pour simplifier écrivons $C = C_{y_j}$ et $k = k_{y_j}, k' = k'_{y_j}, t = t_{y_j}$ et $r' = r_y$; on va montrer $r \leq r'$. Soit z une coordonnée locale de B centrée en y . On peut supposer que h s'exprime en coordonnées locales par $z = \xi^k$.

Par ailleurs on prend $u = \partial/\partial z$. On a

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{dz}{d\xi} \frac{\partial}{\partial z} = k\xi^{k-1} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Donc on peut écrire

$$w = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + c(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

et

$$w' = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + c'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

où c, c' sont holomorphes si $\xi \neq 0$ avec, au plus, un pôle en $\xi = 0$.

D'autre part,

$$v = \epsilon \xi^{k'-1} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

où ϵ est holomorphe et non-nulle. Nous devons prouver

$$kr \leq t + k + k' - 2.$$

Supposons d'abord que $t = 0$. Comme par hypothèse Λ et Λ' ont le même diviseur de tangence avec Γ , ces deux feuilletages sont transverses à C au voisinage du point considéré. Cela implique que c et c' ont, au plus, un pôle d'ordre $k - 1$ en $\xi = 0$. Puisque

$$\begin{aligned} w' - w &= (c'(\xi, \eta) - c(\xi, \eta)) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \left[(c'(\xi, \eta) - c(\xi, \eta)) \xi^{1-k'} \epsilon^{-1} \right] \cdot v, \end{aligned}$$

on a que f a, au plus, un pôle d'ordre $k + k' - 2$ le long de C ; mais l'ordre de ce pôle est kr .

Supposons maintenant $t \neq 0$. Donc, ni Λ ni Λ' ne sont transverses à C au voisinage du point considéré ; d'où qu'il existe des entiers $p, q \geq k - 1$ tels que

$$w = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^{-p} b(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

et

$$w' = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^{-q} b'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

pour des fonctions holomorphes b, b' qui ne s'annulent pas sur $\xi = 0$. Alors $\xi^p w$ et $\xi^q w'$ sont des champs de vecteurs tangents à Λ et Λ' respectivement, qui ne s'annulent pas sur C . Comme Γ est localement défini par $d\xi = 0$ et

$$d\xi(\xi^p w) = k^{-1} \xi^{1-k+p}, \quad d\xi(\xi^q w') = k^{-1} \xi^{1-k+q},$$

l'hypothèse $\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$, entraîne

$$t = 1 - k + p = 1 - k + q,$$

d'où $p = q$. Alors

$$\begin{aligned} w' - w &= \xi^{-q}(b'(\xi, \eta) - b(\xi, \eta)) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \left[\xi^{-q}(b'(\xi, \eta) - b(\xi, \eta)) \epsilon^{-1} \xi^{1-k'} \right] \cdot v. \end{aligned}$$

Donc f a, au plus, un pôle d'ordre $k' - 1 + q$ sur C . Comme ce pôle est d'ordre rk on en déduit

$$rk \leq k' - 1 + q = k + k' + t - 2.$$

d) Puisque $\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = D$, on a que $\text{Sing } \Lambda_\alpha \subset \text{Supp}(D)$. Il suffit, donc, de prouver que si Y est une composante irréductible de $\text{Supp}(D)$, alors l'ensemble

$$A_Y := \{\alpha \in E(D) : Y \subset \text{Sing } \Lambda_\alpha\}$$

est une sous-variété linéaire de $E(D)$ ($\Lambda \notin A_Y$).

Supposons A_Y non-vide et soit $\alpha_0 \in A_Y$. Alors $\alpha \in A_Y$ si et seulement si

$$((\lambda \circ \mu)_*(\alpha) - (\lambda \circ \mu)_*(\alpha_0))|_Y = 0.$$

C'est-à-dire $A_Y = \alpha_0 + E_Y$ où

$$E_Y := \{\alpha \in E(D) : (\lambda \circ \mu)_*(\alpha)|_Y = 0\},$$

est un sous-espace vectoriel de $E(D)$. \square

COROLLAIRE 5.5. — *L'ensemble des feuilletages à singularités isolées Λ' de X tels que $\Lambda' \neq \Gamma$ et $\text{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$ s'identifie naturellement à un sous-ensemble $\mathcal{F}_\Lambda \subset \mathbb{P}(\text{Hom}(T, T_X))$ dont l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}_\Lambda$ est un sous-espace linéaire de dimension égale à $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$. En plus, les éléments de $\overline{\mathcal{F}}_\Lambda$ différents de Γ qui n'appartiennent pas à \mathcal{F}_Λ sont des feuilletages à singularités non-isolées et $\overline{\mathcal{F}}_\Lambda$ est le complémentaire d'un nombre fini de sous-variétés linéaires dans $\overline{\mathcal{F}}_\Lambda$.*

Preuve. — D'une part d'après le théorème 5.4 on sait que

$$\overline{\mathcal{F}}_\Lambda = \mathbb{P}(\mathbb{C}\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(E(D))) ;$$

d'autre part, de l'injectivité de $(\lambda \circ \mu)_*$ suit

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(E(D))) = 1 + \dim_{\mathbb{C}} E(D) ;$$

La première assertion du corollaire en résulte.

Si $\Lambda' \in \overline{\mathcal{F}}_\Lambda$ alors, par ce qui précède, ou bien $\Lambda' = (T, \varphi_\alpha)$ ou bien $\Lambda' = (T, (\lambda \circ \mu)_*(\alpha))$, pour un $\alpha \in E(D)$ convenable. Dans le premier cas, si Λ' est à singularités isolées, $\Lambda' \in \mathcal{F}_\Lambda$ par le théorème 5.4a. Dans le deuxième cas, Λ' laisse invariante les fibres de h . Alors si $\Lambda' \neq \Gamma$, on a que Λ' est à singularités non-isolées. La dernière assertion découle de ceci et du théorème 5.4d. \square

Exemple 5.6. — Soit E une courbe elliptique et soit $u \neq 0$ un champ de vecteurs holomorphe sur E . Considérons $X := E \times E$ et dénotons $p_1, p_2 : X \rightarrow E$ les projections canoniques ; posons $B = E$, $h = p_1$. Finalement désignons par Λ le feuilletage défini par p_2 . Si on considère la famille des feuilletages de X définis par les champs de vecteurs $((1-t)u, tu)$ pour $0 \leq t \leq 1$, on constate que $\Gamma \in \overline{\mathcal{F}}_\Lambda$.

Exemple 5.7. — Considérons la même fibration de l'exemple 5.6. Soient $v_1 = (u, 0)$, $v_2 = (0, u)$, des champs de vecteurs holomorphes sur X .

Fixons $q \in B$ et soit $F = h^{-1}(q)$. Soit $f \in \mathbb{C}(X)$, $f \notin \mathbb{C}$, avec $\text{div}_\infty f = 2q$. Soit Λ le feuilletage à singularités isolées défini par le champ méromorphe $v_1 + fv_2$ (sur X). Alors $\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = 2F$. On voit que tout $\Lambda' \in \mathcal{F}_\Lambda$ est défini par un champ de la forme $v_1 + gv_2$, $g \in \mathbb{C}(B) \setminus \mathbb{C}$, avec $\text{div}_\infty g = 2q$. On en déduit que

$$\dim \mathcal{F}_\Lambda = \dim \overline{\mathcal{F}}_\Lambda = 2.$$

On vérifie que $\overline{\mathcal{F}}_\Lambda - \mathcal{F}_\Lambda$ est la réunion de deux droites dont l'une est formée par des feuilletages proportionnels à Γ et l'autre est l'adhérence d'une famille de feuilletages transverses à Γ en dehors de F , qui ont F comme ensemble singulier.

6. Calcul de $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$

On considère une fibration elliptique relativement minimale $h : X \rightarrow B$ de la surface analytique compacte et connexe X . On suppose que les fibres

génériques de h sont isomorphes, ce qui est bien le cas lorsqu'il existe sur X un feuilletage turbulent de fibration adaptée h .

Comme au §4, pour tout $y \in B$ on note $X_y := \sum_j k_{yj} C_{yj}$ la fibre de y , où les C_{yj} sont les composantes irréductibles du support $h^{-1}(y)$ de X_y . De même m_y est la multiplicité de X_y et $k'_{yj} := k_{yj}/m_y$.

On se donne aussi un feuilletage turbulent Λ de X avec fibration adaptée h et on note $D := \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$ où Γ est le feuilletage défini par h . Comme au §5 on écrit $D = \sum_{y,j} t_{yj} C_{yj}$ et on définit le diviseur effectif de B

$$R := \sum_{y \in B} r_y y, \quad r_y = \inf_j \left[\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet indique la partie entière. Finalement on pose

$$E(D) = H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma))$$

(voir définitions 5.1 et 5.2).

Le problème est de calculer $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$.

Dans le résultat suivant on se sert de la classification de Kodaira des fibrations elliptiques relativement minimales (voir [1, chap. V, §7])

LEMME 6.1. — *Les fibres singulières de h ne sont jamais du type I_b, I_b^* ou mI_b .*

Preuve. — Il suit du fait que les fibres régulières de h sont toutes isomorphes ([3, chap. 4, §3]). \square

COROLLAIRE 6.2. — *Soit σ le cardinal de l'ensemble S des $y \in B$ tels que $h^{-1}(y)$ est une courbe singulière. Alors*

$$\chi(X) \leq \frac{5}{6} \sigma.$$

Preuve. — Soit $e(X)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de X . Puisque $K_X \cdot K_X = 0$, d'après la formule de Kodaira ([1, chap. V, thm. (12.1)]), on a que $\chi(X) = e(X)/12$ par la formule de Nöther ([1, chap. I, thm. (5.4)]). Si $h^{-1}(y)$ est une courbe non-singulière, alors $e(h^{-1}(y)) = 0$ ([1, chap. V, §7]). On en déduit

$$e(X) = \sum_{y \in S} e(h^{-1}(y)).$$

Par ailleurs, si $y \in S$, de la classification de Kodaira suit que $e(h^{-1}(y)) \leq 10$ en tenant compte du lemme 6.1. Donc $e(X) \leq 10\sigma$, ce qui complète la preuve. \square

LEMME 6.3. — Soit $y \in B$. Si $h^{-1}(y)$ est une courbe singulière, alors $r_y > 0$.

Preuve. — Supposons d'abord $m_y > 1$. On est dans le cas mI_1 de la classification de Kodaira. Comme $h^{-1}(y)$ est irréductible et contient un point singulier, elle est contenue dans le support de D . Donc $t_{y1} > 0$, d'où

$$\frac{t_{y1} + k_{y1} + 1 - 2}{k_{y1}} \geq 1.$$

Supposons maintenant $m_y = 1$. Si $k_{yj} > 1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} &= \frac{t_{yj} + 2k_{yj} - 2}{k_{yj}} \\ &\geq 2 \frac{k_{yj} - 1}{k_{yj}} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Si $k_{yj} = 1$, il résulte des considérations de [3, chap. 4, §3] que C_{yj} est invariante par Λ . Donc $t_{yj} \geq 1$, d'où

$$\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} = t_{yj} \geq 1.$$

\square

LEMME 6.4. — On a $0 \leq \chi(X) \leq \deg R$ avec $\chi(X) = \deg R$ si et seulement si $\chi(X) = \deg R = 0$.

Preuve. — En effet

$$\deg R \geq \sigma \geq \frac{6}{5}\chi(X).$$

Les deux premières inégalités suivent du corollaire et du lemme ; la dernière résulte de la proposition (12.2) et remarque précédente de [1, chap. V] et de [1, chap. III, thm. (18.2)]. \square

Notons g le genre de B .

PROPOSITION 6.5. — On a

$$\dim_{\mathbb{C}} E(D) = \deg R + g - 1 - \chi(X),$$

à moins que $\deg R = \chi(X) = 0$.

Preuve. — D'après le lemme 4.5 et le théorème de Riemann-Roch

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} E(D) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Omega_B \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \\ &= g - 1 + \deg R - \chi(X) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \mathcal{O}_B(-R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)^\vee), \end{aligned}$$

compte tenu du fait que $\deg h_{*1}(\mathcal{O}_X)^\vee = \chi(X)$ ([1, chap. V, Prop. (12.2)]).

Or, par le corollaire

$$\deg(\mathcal{O}_B(-R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)^\vee) = \chi(X) - \deg R < 0,$$

à moins que $\deg R = \chi(X) = 0$, d'où l'assertion. \square

PROPOSITION 6.6. — *Supposons $\deg R = \chi(X) = 0$. Alors $\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g$ ou $g - 1$ selon que sur X il existe ou pas de champ holomorphe de vecteurs tangents aux fibres de h et jamais nul.*

Preuve. — On observe que $R = 0$ et on fait un calcul analogue à celui de la preuve de la proposition 6.5 ; on en déduit que $\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g$ ou $g - 1$ selon que $h_{*1}(\mathcal{O}_X)$ soit ou ne soit pas isomorphe à \mathcal{O}_B . Mais $h_{*1}(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_B$ équivaut à l'existence d'un champ holomorphe de vecteurs sur X tangent aux fibres de h et jamais nul, d'après les lemmes 4.5 et 4.7. \square

Remarque 6.7. — a) Rappelons que $\chi(X) = 0$ implique que toutes les fibres de h sont non-singulières (proposition (12.2) et remarque précédente de [1, chap. V] et [1, chap. III, Thm. (18.2)]).

b) $\chi(X) = 0$ implique $\deg h_{*1}(\mathcal{O}_X) = 0$ ([1, chap. V, Prop. (12.2)]). Donc, si $g = 0$ l'égalité $\chi(X) = 0$ implique $h_{*1}(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_B$. C'est-à-dire, si $g = \chi(X) = 0$ il existe un champ de vecteurs holomorphe sur X jamais nul et tangent aux fibres de h .

Exemple 6.8. — Soit E un tore de dimension 1. Fixons une involution sans points fixes ι de E . Considérons le quotient X de $E \times E$ par l'opération de $(e_1, e_2) \mapsto (\iota(e_1), -e_2)$. La première projection $E \times E \rightarrow E$ passe au quotient et définit une fibration elliptique localement triviale $h : X \rightarrow B$. Le feuilletage de $E \times E$ défini par la deuxième projection $E \times E \rightarrow E$ passe au quotient et définit un feuilletage Λ de X transverse à h . Par la proposition 6.6

$$\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g - 1 = 0 ;$$

c'est-à-dire, Λ est le seul feuilletage de X transverse à h .

Exemple 6.9. — (voir [3, chap. 4, §3]) Soit E un tore de dimension 1. Notons X une désingularisation minimale du quotient de $E \times E$ par l'involution $(e_1, e_2) \mapsto (-e_1, -e_2)$. La première projection $E \times E \rightarrow E$ passe au quotient et définit une fibration elliptique $h : X \rightarrow B$, qui contient quatre fibres singulières X_{y_k} , pour $k = 1, 2, 3, 4$, toutes du type I_0^* dans la classification de Kodaira, et dont la base est rationnelle. Il en résulte que $e(X) = 24$ et $\chi(X) = 2$. On note Λ un feuilletage de X avec fibration adaptée h .

Fixons un y_k et écrivons

$$X_{y_k} = 2C_5 + \sum_{j=1}^4 C_j ;$$

posons $t_j := t_{y_k j}$. Par construction chaque C_j est invariante par Λ ([3, chap. 4, §3]). Donc (voir [3, chap. 2, Prop. 3])

$$c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C_j = -2 + Z(\Lambda, C_j) \geq -1, \quad 1 \leq j \leq 4,$$

car $Z(\Lambda, C_j) \geq 1$ par la formule de Camacho-Sad.

Si C_5 est invariante par Λ on a de même

$$c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C_5 = -2 + Z(\Lambda, C_5) \geq 2,$$

car chaque point d'intersection de C_5 avec l'une des C_j est un point singulier de Λ .

D'autre part, si C est une courbe irréductible contenue dans une fibre de h on a

$$\begin{aligned} D \cdot C &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{N}_\Gamma) \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{T}_\Gamma^\vee) \cdot C - K_X \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{T}_\Gamma^\vee) \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C - M \cdot C, \end{aligned}$$

d'après les lemmes 3.5b et 3.3, le lemme de Zariski ([1, chap. V, Thm. (12.1)]), le lemme 4.2 et la définition 4.1.

On en déduit

$$t_5 - 2t_j = D \cdot C_j \geq -2, \quad 1 \leq j \leq 4$$

et, lorsque C_5 est invariante,

$$\sum_{j=1}^4 t_j - 2t_5 = D \cdot C_5 \geq 4.$$

Alors, si C_5 n'est pas invariante : $t_5 = 0$ et $t_j = 1, 1 \leq j \leq 4$. Si, en revanche, C_5 est invariante, on obtient toute de suite que $t_5 = 2t_j - 2, 1 \leq j \leq 4$. Donc, en tous les cas

$$t_5 = 2t_j - 2, 1 \leq j \leq 4.$$

Finalement

$$r_{y_k} = \frac{t_5 + 2}{2}.$$

Supposons Λ transverse à toutes les fibres régulières de h . On obtient

$$\dim \overline{\mathcal{F}_\Lambda} = \frac{a + 2}{2},$$

où on a posé $a := \sum_{j=1}^4 t_{y_j, 5}$.

Observons que les $t_{y_k, 5}$ ($1 \leq j \leq 4$) sont forcément pairs. Le cas où ceux-ci sont tous nuls résulte du feuilletage de $E \times E$ défini par la deuxième projection canonique.

7. Existence de feuillets turbulents

Soit $h : X \rightarrow B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte et connexe X ; comme avant X_y désigne la fibre de h au-dessus du point $y \in B$. On suppose donnés $y_1, \dots, y_n \in B$ et, pour chaque $i = 1, \dots, n$, un voisinage ouvert U_i de y_i et un feuilletage à singularités isolées Λ_i de $V_i := h^{-1}(U_i)$, avec les conditions suivantes :

- a) $U_1 \cup \dots \cup U_n = B$;
- b) X_y est régulière est transverse à Λ_i pour tout $y \in U_i - \{y_i\}, 1 \leq i \leq n$;
- c) si X_{y_i} n'est pas régulière ou n'est pas transverse à Λ_i , alors $y_i \notin U_k$ pour $k \neq i$.

Posons

$$X_i = X_{y_i} = \sum_j k_{ij} C_{ij},$$

où les C_{ij} sont les composantes irréductibles de $h^{-1}(y_i)$.

Soit Γ le feuilletage associé à h et soit $\Gamma_i = \Gamma|V_i$ ($1 \leq i \leq n$). On peut écrire alors

$$\text{tang}(\Lambda_i, \Gamma_i) = \sum_j t_{ij} C_{ij}.$$

Considérons le diviseur effectif de X

$$D = \sum_{i,j} t_{ij} C_{ij}.$$

Soit m_i la multiplicité de X_i et posons $k'_{ij} := k_{ij}/m_i$. On définit le diviseur effectif $R := \sum_{i=1}^n r_i y_i$ de B avec

$$r_y := \inf_j \left[\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet indique la partie entière.

THÉORÈME 7.1. — *Supposons que $\deg R > 1 + \chi(X)$. Alors, il existe un feuilletage turbulent Λ de X , avec fibration adaptée h , tel que*

$$\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

Preuve. — Soit $y \in U_i \cap U_k$ avec $i \neq k$. Soit u un champ de vecteurs holomorphe sur un voisinage $U \subset U_i \cap U_k$ de y . Alors u se relève à des champs holomorphes w_i, w_k sur $h^{-1}(U)$ tangents à Λ_i, Λ_k respectivement. Donc, $w_k - w_i$ est tangent à Γ . On voit toute de suite que ceci définit un 1-cocycle $\{\xi_{ik}\}_{1 \leq i, k \leq n}$ du recouvrement $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ à valeurs dans $\Omega_B \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$. On peut aussi le supposer à valeurs dans $\mathcal{G} := \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$ par l'inclusion naturelle.

D'autre part, par hypothèse le degré du faisceau \mathcal{G} est $> 2g - 2$ ([1, chap. V, Pro. 12.2]) ; d'où $H^1(B, \mathcal{G}) = 0$, par la dualité de Serre.

On en déduit que, pour un choix convenable du recouvrement $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ il existe, pour chaque $i = 1, \dots, n$, une 1-forme méromorphe ω_i sur U_i , ayant, au plus, un pôle d'ordre r_i en y_i , avec la propriété

$$(\omega_i \otimes v_i - \omega_k \otimes v_k)|_{(U_i \cap U_k)} = \xi_{ik},$$

où v_i est un champ holomorphe sur V_i tangent à $\Gamma_i := \Gamma|_{V_i}$ et s'annulant sur C_{ij} avec multiplicité $k'_{ij} - 1$ ($1 \leq i \leq n$) ; on a utilisé le lemme 4.7.

Maintenant nous allons définir un nouveau feuilletage Λ'_i de V_i pour $1 \leq i \leq n$. Soit w un champ de vecteurs holomorphe sur l'ouvert $V \subset V_i$ et tangent à Λ_i . Alors $\Lambda'_i|_V$ est défini par le champ de vecteurs

$$w + h^*(\omega_i)(w) \cdot (v_i|_V).$$

Un calcul direct montre que, d'après la définition de r_i , le champ de vecteurs $\omega_i(w) \cdot (v|V)$ est holomorphe. On en déduit que Λ'_i est bien défini et tel que

$$\text{tang}(\Lambda'_i, \Gamma_i) = \text{tang}(\Lambda_i, \Gamma_i),$$

car v_i est tangent à Γ_i .

Par ailleurs, soit $U \subset U_i \cap U_k$ ($i \neq k$) et soit u un champ de vecteurs holomorphe sur U . Soient w_i, w_k des relèvements de u holomorphes sur $h^{-1}(U)$ et tangents à Λ_i, Λ_k respectivement. Alors

$$\begin{aligned} w_k - w_i &= \omega_i(u)v_i - \omega_k(u)v_k \\ &= h^*(\omega_i)(w_i)v_i - h^*(\omega_k)(w_k)v_k \end{aligned}$$

sur $h^{-1}(U)$. Donc

$$w_i + h^*(\omega_i)(w_i)v_i = w_k + h^*(\omega_k)(w_k)v_k,$$

sur $h^{-1}(U)$ d'où suit que Λ'_i et Λ'_k coïncident sur $U_i \cap U_k$. On en conclut que les Λ'_i se recollent et définissent un feuilletage Λ de X tel que

$$\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

Si Λ est à singularités isolées, on a fini. Sinon, observons que

$$E(D) = \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma) \neq 0$$

(proposition 6.5). Alors, comme dans le théorème 5.4, on peut associer à chaque $\alpha \in E(D)$ un feuilletage Λ_α de X tel que $\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$; le feuilletage Λ_α est à singularités isolées pour α convenable (théorème 5.4d).

□

Bibliographie

- [1] BARTH (W.), PETERS (C.), VAN DE VEN (A.). — *Compact Complex Surfaces*, Springer Verlag, (1984).
- [2] BRUNELLA (M.). — Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, *Ann. Norm. Sup.*, 4^a sér., t. 30, p. 569-594 (1997).
- [3] BRUNELLA (M.). — *Birational Geometry of Surfaces*, First Latin-American Congress, IMPA, (2000).
- [4] PAN (I.), SEBASTIANI (M.). — Feuilletages tourbillonnés sur les fibrés principaux elliptiques, pré-publication.
- [5] GOMEZ-MONT (X.). — Universal families of foliations by curves, *Astérisque*, 150-151, 109-129 (1987).