

MICHÈLE AUDIN

La réduction symplectique appliquée à la non-intégrabilité du problème du satellite

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 12, n° 1 (2003), p. 25-46

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2003_6_12_1_25_0

© Université Paul Sabatier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La réduction symplectique appliquée à la non-intégrabilité du problème du satellite (*)

MICHÈLE AUDIN (†)

RÉSUMÉ. — Le problème du satellite, système hamiltonien à trois degrés de liberté possède sous certaines hypothèses de symétrie deux intégrales premières en involution, qu'on utilise pour démontrer qu'il n'en a pas de troisième.

ABSTRACT. — The Hamiltonian system describing the attitude of a satellite admits, under a symmetry assumption, two commuting first integrals. We use them to prove that it is not integrable.

On considère ici l'«attitude» d'un satellite en orbite (supposée circulaire), son mouvement propre d'oscillations autour de son centre de gravité. Ce «problème du satellite», est un problème classique de mécanique hamiltonienne (voir [4] et les références contenues dans ledit article). Les auteurs de [7] l'utilisent pour illustrer leur théorème de non-intégrabilité [6], une application au parfum de calcul formel du théorème de Morales et Ramis [11] (voir aussi [3], [10], [1]).

Le théorème de Morales et Ramis est un critère puissant de non-intégrabilité. Pour pouvoir l'appliquer, il faut être capable d'évaluer un certain groupe de Galois différentiel, assez précisément en tout cas pour montrer

(*) Reçu le 22 octobre 2002, accepté le 27 mars 2003

(†) Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>

que sa composante neutre n'est pas un groupe commutatif. Comme l'ordre de l'équation différentielle linéaire à laquelle appartient ce groupe est le double du nombre de degrés de liberté du système, cette évaluation est en général assez difficile. Il est donc souhaitable de savoir abaisser, quand c'est possible, l'ordre de cette équation.

Comment réduire l'ordre de l'équation aux variations ?

Deux moyens se présentent :

- un procédé géométrique, la réduction symplectique (voir par exemple [1, § III.4]). Si le système hamiltonien a n degrés de liberté et si on connaît k intégrales premières indépendantes en involution, on peut abaisser l'ordre de l'équation à $2n - 2k$,
- un procédé algébrique : si on sait factoriser l'opérateur différentiel considéré D en $D = D_2 \circ D_1$, on peut se contenter de l'équation $D_1 Y = 0$.

D'une manière ou de l'autre, la non-commutativité virtuelle⁽¹⁾ du « petit » groupe de Galois implique celle du « gros » et suffit donc à donner la non-intégrabilité du système.

Les deux méthodes sont en fait deux aspects d'une même propriété, l'existence d'un sous-espace de l'espace des solutions invariant par le groupe de Galois.

Dans [5] et [6], la factorisation est utilisée pour montrer la non-intégrabilité méromorphe du problème plan à trois corps (déjà obtenue dans [12]).

Application au problème du satellite. Le système considéré ici est un système à trois degrés de liberté — système hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 6, difféomorphe à $SO(3) \times \mathbf{R}^3$ (voir le § 1 ci-dessous). Comme tout système hamiltonien, il accepte une première réduction et donne naissance, le long d'une trajectoire, à un système différentiel linéaire d'ordre 4 ($= 2 \times 3 - 2$). La démarche de [7] consiste à

- (1) (après avoir choisi une trajectoire du système hamiltonien)
- (2) écrire le système linéarisé dans des coordonnées convenables

(1) C'est-à-dire la non-commutativité de sa composante neutre.

- (3) factoriser l'opérateur obtenu
- (4) montrer que le groupe de Galois du système d'ordre 2 donné par l'étape précédente n'est pas virtuellement abélien.

... Ce qui laisse quelques raisons d'être au présent article :

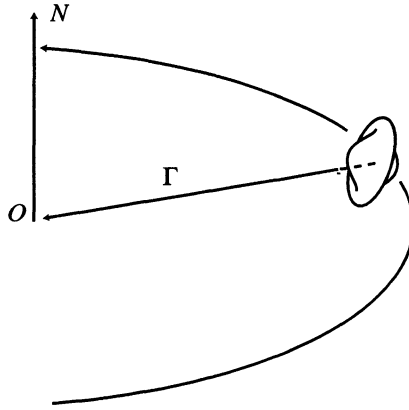
- D'abord le point (2) de ce programme. Les calculs qui mènent au système différentiel linéaire utilisé dans [7] (calculs sans doute issus de [9], mais qui ne sont pas complètement explicités dans [7]) m'ont semblé trop compliqués pour que je les fisse, ou au moins pour que je susse les vérifier. Je présente donc ici un argument géométrique (et des calculs simples mais complets) : si le satellite a un axe de révolution (c'est le cas considéré dans [7]), le moment par rapport à cet axe doit être (est, de fait) une intégrale première supplémentaire, ce qui permet, par le procédé de réduction symplectique, de se ramener à une équation linéaire d'ordre 2.
- L'équation linéaire du second ordre obtenue est du même type que celle que produit l'étape (3) ci-dessus. Il est alors possible (c'est l'étape (4)) de conclure à la non-intégrabilité du système.

Ces résultats sont complexes au sens où ce qu'on démontre, c'est qu'il n'existe pas assez d'intégrales premières méromorphes *complexes*. Je démontrerai qu'on peut raffiner la méthode pour obtenir, comme dans [2], un résultat de non-intégrabilité réelle : il n'existe pas d'intégrale première méromorphe *réelle* (pour la définition de la non-intégrabilité réelle et les résultats de base à ce sujet, je renvoie à [2]).

Je remercie Delphine Boucher de m'avoir fait découvrir ce problème en me communiquant des versions préliminaires de [7] et [6], ainsi qu'un brouillon de [9], Viatcheslav Kharlamov et Nguyen Tien Zung pour leurs questions et suggestions, Jean-Yves Mérindol, pour qui j'ai précisé la différence entre les structures symplectiques (une remarque de l'appendice 2) et surtout Andrzej Maciejewski qui a relu très attentivement une version de cet article. Tous m'ont aidée à améliorer significativement la rédaction, les démonstrations et les résultats de diverses versions préliminaires de cet article.

1. Le problème du satellite

On considère un satellite tournant autour de la Terre sur une orbite circulaire (voir [4]). On appelle N un vecteur unitaire orthogonal au plan de l'orbite, O le centre de cette orbite (c'est le centre de la Terre), G le centre de gravité du satellite, Γ le vecteur radial $\Gamma = \overline{GO}$, M le moment angulaire, lié à la vitesse angulaire Ω par la relation $M = \mathcal{J}\Omega$ où \mathcal{J} , la matrice d'inertie, est une matrice symétrique définie positive, sur laquelle je ne suppose rien pour le moment (autrement dit, la forme du satellite est quelconque, même si j'ai préféré en dessiner un joli sur la figure ci-dessous).



Écrites dans un repère lié au satellite dans lequel la matrice \mathcal{J} est diagonale, les équations du mouvement sont (voir l'appendice 1) :

$$\begin{cases} \dot{N} = N \wedge \Omega \\ \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge (\Omega - N) \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + 3\Gamma \wedge \mathcal{J}\Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

L'énergie totale est

$$H(N, \Gamma, M) = \frac{1}{2} \langle M, \mathcal{J}^{-1}M \rangle - \langle M, N \rangle + \frac{3}{2} \langle \Gamma, \mathcal{J}\Gamma \rangle.$$

On démontre :

PROPOSITION 1.1. — *Le système (1.1) est le système hamiltonien associé à H sur la variété de Poisson*

$$\mathfrak{g}^* = ((\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \rtimes \mathfrak{so}(3))^*.$$

Voir une démonstration dans l'appendice 2, où les structures de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \rtimes \mathfrak{so}(3)$ et de son dual sont décrites.

On se place désormais sur la sous-variété

$$W = \left\{ (N, \Gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \mid \|N\|^2 = 1, \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ et } N \cdot \Gamma = 0 \right\}.$$

C'est une orbite coadjointe (voir, toujours, l'appendice 2) et, comme telle, c'est une variété symplectique, de dimension 6, difféomorphe à $SO(3) \times \mathbf{R}^3$. Notre système est donc un système hamiltonien à trois degrés de liberté.

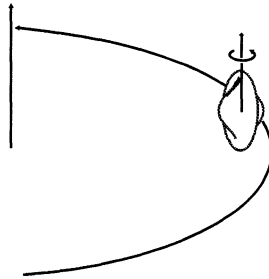
Le résultat principal de cet article est :

THÉORÈME 1.2. — *Le système hamiltonien décrivant le mouvement d'un satellite symétrique est un système hamiltonien à trois degrés de liberté qui admet deux intégrales premières indépendantes polynomiales en involution, mais ne possède pas de troisième intégrale première méromorphe réelle.*

2. Des solutions particulières

On choisit maintenant une sous-variété invariante de W en fixant, comme dans [9] et [7], $N = e_3$ et en imposant à M de rester dans la direction de N . Ce n'est pas seulement fixer N , le vecteur e_3 est un vecteur propre de \mathcal{J} , qui doit donc rester orthogonal au plan de l'orbite, le satellite étant seulement animé, en plus de son mouvement de rotation sur l'orbite circulaire, d'un mouvement d'oscillations autour de cette direction, repérée par une petite flèche sur le satellite sur la figure ci-dessous. On considère donc le cylindre

$$V = \{(e_3, (x, y, 0), \lambda e_3) \in W\}.$$



Cette sous-variété symplectique de W (vérification immédiate avec les formules données dans l'appendice 2) est invariante par X_H :

$$X_H(e_3, \Gamma, \lambda e_3) = \left(0, \underbrace{\left(\frac{\lambda}{c} - 1\right) \Gamma \wedge e_3}_{\text{horizontal}}, \underbrace{3\Gamma \wedge \beta\Gamma}_{\text{vertical}} \right) \in T_{(e_3, \Gamma, \lambda e_3)} V.$$

Les trajectoires de X_H sur le cylindre V sont supportées par les intersections

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{c} - \lambda + \frac{3}{2} (ax^2 + by^2) = h. \end{cases}$$

Comme intersections de deux quadriques (de l'espace \mathbf{R}^3 , ou \mathbf{C}^3 , des (x, y, λ)), ce sont en général des courbes elliptiques, auxquelles manquent quatre points (imaginaires) à l'infini, dans les directions $(1, \pm i, \pm \sqrt{3 \frac{b-a}{c}})$.

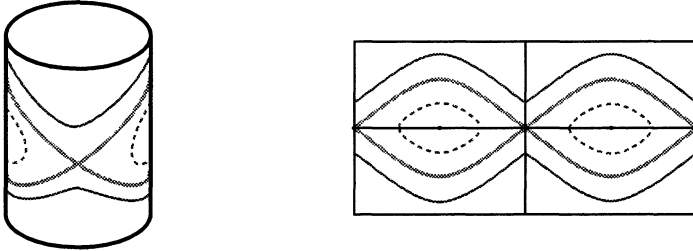


Figure 1. — Niveaux de H sur V .

Il est raisonnable de poser $z = \frac{\lambda}{c} - 1$, de sorte que les équations s'écrivent

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 3(ax^2 + by^2) + cz^2 = 2h + c. \end{cases}$$

Les trajectoires sont, en général, des courbes elliptiques lisses. Supposons ici que $a < b$, de sorte que les trajectoires singulières sont

- celle correspondant à la valeur $h = \frac{3a - c}{2}$ de H , dont la partie réelle est formée des deux points $(\pm 1, 0, 0)$

– et celle correspondant à la valeur $h = \frac{3b-c}{2}$ de H , qui joint deux points singuliers de X_H sur V .

Cette dernière trajectoire, qui a pour équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ cz^2 - 3(b-a)x^2 = 0, \end{cases}$$

est la réunion des deux ellipses

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \pm \sqrt{3 \frac{b-a}{c}} x \end{cases}$$

se coupant aux points singuliers $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$ et à chacune desquelles manquent deux points (imaginaires) à l'infini, dans les directions $(1, \pm i, \pm \sqrt{3 \frac{b-a}{c}})$ (ce sont les courbes représentées en gras sur les figures). J'appellerai γ une des deux composantes, correspondant au choix d'un α tel que

$$\alpha^2 = 3 \frac{b-a}{c}.$$

La courbe γ est donc une courbe rationnelle, un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, auquel manquent quatre points, deux imaginaires conjugués et à l'infini, et deux sur la partie réelle (et affine), qui est une ellipse (voir la figure 2 ci-dessous). C'est la trajectoire utilisée dans [9] et [7].

Les trajectoires lisses. Décrivons aussi les courbes elliptiques lisses correspondant aux valeurs

$$\frac{3a-c}{2} < h < \frac{3b-c}{2}$$

de H . Ce sont des courbes elliptiques auxquelles manquent quatre points à l'infini. Leur partie réelle est formée de deux ovales (ce sont les courbes représentées en pointillés sur les figures).

Du point de vue dynamique, chacun des ovales est une trajectoire, qui correspond à des oscillations autour de l'axe vertical qui sont périodiques et limitées (par les valeurs possibles de (x, y) sur l'ovale). Les deux cas limites (trajectoire formée d'un point isolé, trajectoire formée d'un arc d'ellipse) correspondent, pour le premier, à un satellite qui n'oscille pas du tout et se contente de faire le tour de la Terre en lui présentant toujours la même

face (comme la Lune), pour le second à un satellite qui tente de se retourner (les orbites régulières restantes correspondent à un satellite qui tourne complètement et périodiquement autour de lui-même pendant sa rotation autour de la Terre).

Paramétrage temporel de ces trajectoires. Le système hamiltonien (1.1) s'écrit, sur ces trajectoires

$$\begin{cases} \dot{x} = zy \\ \dot{y} = -zx \\ \dot{z} = \frac{3(b-a)}{c}xy. \end{cases} \quad (2.1)$$

Une solution de ce système supportée par une des courbes considérées ici est appelée un « paramétrage temporel » de cette courbe.

Par exemple, dans le cas de la trajectoire rationnelle, pour résoudre le système différentiel (2.1), le plus malin est de paramétrer le cercle rationnellement, par

$$x = \frac{1-s^2}{1+s^2} \text{ et } y = \frac{2s}{1+s^2}$$

de sorte que le système se réduit à

$$\dot{s} = -\frac{\alpha}{2}(1-s^2).$$

Posons $\beta = -\frac{\alpha}{2}$, de sorte que $s = \text{th}(\beta t)$ est solution. On obtient ainsi

$$x = \frac{1}{\text{ch}(2\beta t)}, \quad y = \text{th}(2\beta t), \quad z = -\frac{2\beta}{\text{ch}(2\beta t)}.$$

Dans ce paramétrage (dit « temporel »), les points singuliers $(0, \pm 1, c)$ sont atteints comme il se doit pour $t \rightarrow \pm\infty$ et les points à l'infini $(1, \pm i, -\alpha)$ pour des valeurs finies (mais imaginaires) de t . Dans le paramétrage par s , les points singuliers correspondent à $s = \pm 1$ et les points à l'infini à $s = \pm i$.

3. Le cas symétrique. Équation aux variations normales

Supposons maintenant, comme le font les auteurs de [7], que le satellite ait un axe de révolution, en d'autres termes que la matrice \mathcal{J} soit de la forme⁽²⁾

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire que } a = 1 \text{ et } b = c.$$

Alors le moment par rapport à l'axe de révolution (l'axe des e_1) doit être une intégrale première. Et, en effet, si $K(N, \Gamma, M) = M \cdot e_1$, on a :

$$\frac{dK}{dt} = \dot{M} \cdot e_1 = \langle M \wedge \mathcal{J}^{-1}M + 3\Gamma \wedge \mathcal{J}\Gamma, e_1 \rangle$$

avec

$$M \wedge \mathcal{J}^{-1}M + 3\Gamma \wedge \mathcal{J}\Gamma = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2/c \\ \zeta_3/c \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ cy \\ cz \end{pmatrix},$$

un vecteur dont la première composante est nulle.

Ce qui nous laisse avec un système hamiltonien à trois degrés de liberté qui a deux intégrales premières. Notre objectif est, rappelons-le, de montrer qu'il n'est pas complètement intégrable en

- le linéarisant le long d'une des trajectoires décrites au §2,
- nous débrouillant pour montrer que le groupe de Galois du système linéaire n'est pas virtuellement abélien.

Cet objectif, s'il pouvait sembler assez lointain, s'est considérablement rapproché : grâce à nos deux intégrales premières H et K et au procédé de réduction symplectique, il suffira de considérer un système (réduit) d'ordre 2.

La réduction. Nous devons donc considérer la trajectoire, son application naturelle j dans W , le fibré (symplectique de rang 6) j^*TW , le sous-fibré \mathcal{F} (isotrope de rang 2) engendré par les champs de vecteurs hamiltoniens X_H et X_K , son orthogonal symplectique \mathcal{F}° (un sous-fibré de rang 4) et enfin le quotient $\mathcal{F}^\circ/\mathcal{F}$. Les calculs présentés dans l'appendice 2 montrent qu'on peut identifier ce fibré au sous-fibré de $\gamma \times \mathbf{R}^9$ dont la fibre en $(e_3, \Gamma, \lambda e_3)$ est le plan des vecteurs de la forme $(U, V, W) = (ue_1, -xue_3, we_2)$.

⁽²⁾ Nous supposons toujours $b > a$, c'est-à-dire ici $c > 1$.

L'équation linéarisée

Le système (1.1), linéarisé en un point $(e_3, \Gamma, \lambda e_3)$ de γ , devient :

$$\begin{cases} \dot{U} = e_3 \wedge \mathcal{J}^{-1}W + \frac{\lambda}{c}U \wedge e_3 \\ \dot{V} = \Gamma \wedge (\mathcal{J}^{-1}W - U) + \left(\frac{\lambda}{c} - 1\right)V \wedge e_3 \\ \dot{W} = \lambda e_3 \wedge \mathcal{J}^{-1}W + \frac{\lambda}{c}W \wedge e_3 + 3(\Gamma \wedge \mathcal{J}V + V \wedge \mathcal{J}\Gamma). \end{cases}$$

Le système réduit (ce qu'on appelle aussi l'«équation aux variations normales») s'obtient en prenant $(U, V, W) = (ue_1, -xue_3, we_2)$ et en calculant modulo les vecteurs X_H et X_K . On obtient

$$(\dot{u}e_1, -(\dot{x}u + x\dot{u})e_3, \dot{w}e_2) \equiv \left(-\frac{w}{c}e_1 - \frac{\lambda}{c}e_2, \left(\frac{xw}{c} + yu\right)e_3, 3(c-1)x^2ue_2\right) \pmod{\langle X_H, X_K \rangle}.$$

Il suffit d'ajouter $\frac{\lambda u}{c}X_K$ au membre de droite pour se débarrasser du superflu et obtenir

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{w}{c} \\ -(\dot{x}u + x\dot{u}) = \frac{xw}{c} + yu - \frac{\lambda y u}{c} \\ \dot{w} = \left(3(c-1)x^2 + \frac{\lambda^2}{c}\right)u. \end{cases}$$

Notons que, grâce à la première équation, il ne reste de la deuxième que

$$\dot{x} = \left(\frac{\lambda}{c} - 1\right)y = zy,$$

ce qui est automatiquement satisfait sur notre courbe, qui est une solution de (2.1). On peut donc supprimer cette équation sans remord.

Voici donc le système linéaire réduit (ou «équation aux variations normales») :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ 3(c-1)x^2 + \frac{\lambda^2}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Ce système est équivalent à l'équation du second ordre

$$\ddot{u} = -\frac{1}{c} \left(3(c-1)x^2 + \frac{\lambda^2}{c}\right)u,$$

expression dans laquelle x et λ sont des fonctions de t solutions du système (2.1).
 Pour alléger les notations, écrivons

$$A(t) = -\frac{1}{c} \left(3(c-1)x^2 + \frac{\lambda^2}{c} \right),$$

de sorte que notre équation linéaire est simplement

$$\ddot{u} = A(t)u. \quad (3.2)$$

Si l'on se place la trajectoire rationnelle, on peut préférer utiliser le paramètre $s = \text{th}(\beta t)$. Le système différentiel, dont les singularités sont à distance finie, est alors :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c\beta(1-s^2)} \\ \frac{P(s)}{\beta(1+s^2)^2(1-s^2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

où P est le polynôme de degré 4 donné par

$$\begin{aligned} P(s) &= (1-s^2)^2(3(c-1) + 4\beta^2c) - 4c\beta(1-s^2)(1+s^2) + c(1+s^2)^2 \\ &= 6(c-1)(1-s^2)^2 - 4c\beta(1-s^2)(1+s^2) + c(1+s^2)^2 \end{aligned}$$

(en utilisant la définition de β).

4. La non-intégrabilité du système

Montrons maintenant que le groupe de Galois du système (3.1) n'est pas virtuellement abélien. On a plus précisément :

PROPOSITION 4.1. — *Le groupe de monodromie du système (3.1) le long de la trajectoire rationnelle γ est un sous-groupe de $\text{SL}(2; \mathbf{C})$ qui contient un sous-groupe diagonalisable infini et un élément unipotent non trivial.*

La liste des sous-groupes algébriques de $\text{SL}(2; \mathbf{C})$ est assez courte (voir par exemple [10, p. 9]). Les seules possibilités pour l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie sont ici le groupe $\text{SL}(2; \mathbf{C})$ tout entier et un sous-groupe résoluble conjugué à celui des matrices $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ ($\lambda \in \mathbf{C}^*$, $\mu \in \mathbf{C}$), dont aucun n'est (virtuellement) abélien.

Démonstration de la proposition. — Je vais mettre en évidence les deux sous-groupes en question comme engendrés,

- pour le premier, par la monodromie le long d'un lacet entourant l'un des points singuliers réels,
- pour le second par celle autour d'un de ses points à l'infini.

Écrivons le système (3.3) sous la forme

$$\begin{cases} u' = fw \\ w' = gu \end{cases}$$

avec $f, g \in \mathbf{C}(s)$ (' désigne la dérivation par rapport à s) et remplaçons-le par l'équation du second ordre

$$u'' - \frac{f'}{f}u' - fgu = 0.$$

On a

$$-\frac{f'}{f} = -\frac{2s}{1-s^2} \text{ et } -fg = \frac{P(s)}{\beta^2 c(1-s^2)^2(1+s^2)^2}$$

de sorte que le système (3.3) est équivalent à

$$u'' - \frac{2s}{1-s^2}u' + \frac{P(s)}{\beta^2 c(1-s^2)^2(1+s^2)^2}u = 0. \quad (4.1)$$

Remarquons au passage que les singularités en ± 1 , $\pm i$, sont régulières. Le groupe de monodromie engendre donc (topologiquement) tout le groupe de Galois. D'autre part, seul s^2 intervient, de sorte qu'il suffit d'étudier les situations en 1 et en i .

Autour des points singuliers. L'équation (4.1) s'écrit

$$(s-1)^2 u'' + (s-1) \frac{2s}{s+1} u' + \frac{P(s)}{\beta^2 c(1+s)^2(1+s^2)^2} u = 0,$$

l'équation indicelle en 1 est donc

$$r^2 + \frac{P(1)}{16\beta^2 c} = 0,$$

ce qui donne, avec $P(1) = 4c$, $r = \pm \frac{i}{2\beta}$. Ainsi les valeurs propres de la monodromie le long d'un lacet autour de 1 sont les deux nombres réels positifs distincts $\exp\left(\mp \frac{\pi}{\beta}\right)$. Le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ engendré par cette monodromie est un sous-groupe multiplicatif (diagonalisable) infini.

Autour des points à l'infini. Pour étudier ce qui se passe à l'infini, commençons par quelques remarques générales sur les pôles des solutions⁽³⁾ du système (2.1), dans la paramétrisation temporelle, sur l'une quelconque des courbes (elliptiques ou rationnelles). D'abord, les trois fonctions x , y et z ont des pôles pour les mêmes valeurs t_0 de t et ces pôles sont simples : il suffit d'écrire $x = (t - t_0)^\alpha \tilde{x}(t)$, etc et de reporter dans les équations (2.1). Le système permet ensuite d'évaluer les résidus de x , y et z en ces pôles, ils s'écrivent respectivement $-\varepsilon\eta i/\alpha$, η/α , εi , avec $\varepsilon^2 = \eta^2 = 1$ et α une racine carrée de $3(c - 1)/c$.

Remarque 4.2. — Dans le cas de la trajectoire rationnelle γ choisie, on détermine facilement le début du développement des solutions x , y et z au voisinage de t_0

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\varepsilon i}{\alpha} \left[\frac{1}{t - t_0} - \frac{\alpha^2}{2}(t - t_0) + o(t - t_0)^2 \right] \\ y(t) = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{t - t_0} - \alpha^2(t - t_0) + o(t - t_0)^2 \right] \\ z(t) = \alpha x(t). \end{cases}$$

Voyons maintenant ce que serait l'équation indiciale en un tel pôle t_0 . Il s'agit d'évaluer

$$-\frac{1}{c} \left(3(c - 1)x^2 + \frac{\lambda^2}{c} \right) (t - t_0)^2 \text{ en } t_0.$$

On trouve

$$(t - t_0)^2 (-\alpha^2 x^2 - (z + 1)^2) |_{t=t_0} = -\alpha^2 \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) + 1 = 2.$$

L'équation indiciale est donc

$$r^2 - r - 2 = 0, \text{ ses racines sont } 2 \text{ et } -1.$$

La différence des deux racines est un nombre entier (il est remarquable que ce résultat ne dépende pas de la valeur h de H choisie). On en déduit que l'équation différentielle linéaire possède une solution de la forme

$$u_1(t) = (t - t_0)^2 \tilde{u}(t)$$

⁽³⁾ Ces solutions peuvent s'exprimer rationnellement, comme on l'a déjà utilisé pour paramétrer la courbe γ , ou, si l'on veut étudier aussi les trajectoires « elliptiques », à l'aide des fonctions elliptiques sn , cn et dn de Jacobi. Il n'est pas utile de le faire explicitement ici.

où f est holomorphe au voisinage de t_0 (et $\tilde{u}(t_0) = 1$). Cette solution est analytique au voisinage de t_0 , donc invariante par la monodromie, dont la seule valeur propre est 1.

On cherche alors, classiquement (voir [8, 15 · 311] ou [13, 10 · 32]), une deuxième solution sous la forme

$$u(t) = u_1(t)V(t)$$

ce qui impose à $v = \dot{V}$ de satisfaire à

$$2\dot{u}_1 v + u_1 \dot{v} = 0,$$

de sorte que $v = C/u_1^2$ et que notre « deuxième » solution serait

$$u_2 = C u_1 \int \frac{dt}{u_1^2} = C u_1 \int (t - t_0)^{-4} g(t) dt \text{ avec } g(t) = \frac{1}{\tilde{u}(t)^2}.$$

Pour pouvoir affirmer que la monodromie autour du point t_0 n'est pas diagonalisable, il suffit de démontrer que le coefficient de $(t - t_0)^3$ dans le développement de g n'est pas nul (de sorte que cette solution comporte un logarithme).

Évaluons donc ce coefficient. À un facteur non nul près, c'est $g'''(t_0)$. Avec $g = \tilde{u}^{-2}$ et $\tilde{u}(t_0) = 1$, on obtient

$$g'''(t_0) = -2\tilde{u}'''(t_0) + 24\tilde{u}''(t_0)\tilde{u}'(t_0) - 40\tilde{u}'(t_0)^3 = -4(3a_3 - 16a_1a_2 + 10a_1^3)$$

où les a_i sont les coefficients du développement de \tilde{u} :

$$\tilde{u}(t) = 1 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + o(t - t_0)^3$$

que l'on calcule par identification dans l'équation (3.2), obtenant, avec les valeurs de $x(t)$ et $z(t)$ données dans la remarque 4.2,

$$a_1 = -\frac{\varepsilon i}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{5}(1 + \alpha^2), \quad a_3 = \frac{\varepsilon i}{90} \left(\frac{9}{2} + 4\alpha^2 \right)$$

... et

$$g'''(t_0) = \frac{\varepsilon i}{5}(6 + \alpha^2) \neq 0.$$

Donc la monodromie autour de t_0 n'est pas diagonalisable...

... ce qui finit la démonstration de la proposition. \square

En appliquant le théorème de Morales et Ramis⁽⁴⁾, on a donc démontré les aspects complexes du théorème 1.2.

(4) L'adhérence de Zariski du groupe de monodromie est le groupe de Galois tout entier ici, les singularités de (3.1) étant régulières en application du critère de Fuchs.

Remarque 4.3. — Dans l'évaluation de la monodromie autour des points à l'infini ci-dessus, seul le calcul du coefficient $g'''(t_0)$ fait intervenir le choix de la courbe rationnelle, ce qui fait qu'en vertu de la dépendance des solutions en fonction des paramètres, on a démontré la proposition suivante. Malheureusement, je n'ai pas été capable d'écrire une démonstration complète (juste) de la non-intégrabilité utilisant les courbes elliptiques lisses.

PROPOSITION 4.4. — *Pour toute valeur de h dans un voisinage de c , la monodromie le long d'un lacet autour d'un point à l'infini de l'équation aux variations normales associée à la courbe $H = h$ sur le cylindre V est un élément unipotent non diagonalisable de $SL(2; \mathbf{C})$.*

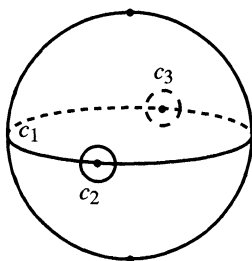


Figure 2. — Le groupe fondamental de la courbe rationnelle.

Le problème de la non-intégrabilité réelle. Notre courbe γ est un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ auquel manquent quatre points. Elle est représentée sur la figure 2, où la courbe équatoriale représente la partie réelle et les quatre points sont marqués. Les lacets le long desquels nous avons calculé la monodromie ci-dessus sont homotopes

- pour celui autour d'un des points à l'infini, à un lacet c_1 suivant la partie réelle en évitant ses points singuliers par un demi-cercle du même côté que le point à l'infini en question
- pour celui autour d'un des points singuliers, à un petit cercle évitant ce point (comme le lacet c_2 de la figure 2).

Le groupe fondamental de γ est engendré par les classes des lacets c_1 , c_2 , c_3 (avec le même point base). Il est clair que ces lacets peuvent être choisis arbitrairement proches de la partie réelle de la courbe. Les méthodes répertoriées dans [2] montrent donc la non-intégrabilité réelle du système.

Appendice 1 : les équations du mouvement

On utilise les notations du § 1 : les vecteurs N , Γ et M sont écrits dans un repère lié au satellite. Désignons par des lettres minuscules n , γ , m les mêmes vecteurs, dans un repère galiléen (d'origine le centre de gravité G du satellite) et par $t \mapsto R(t)$ la matrice (orthogonale) du changement de base, de sorte que $n = RN$, etc.

Les deux premières équations du système (1.1) traduisent simplement et respectivement

- le fait que n est constant ($\dot{n} = 0$) :

$$\dot{R}N + R\dot{N} = 0, \text{ ou } \dot{N} = -{}^tR\dot{R}N = N \wedge \Omega$$

(le vecteur instantané de rotation Ω est défini par $X \wedge \Omega = -{}^tR\dot{R}X$),

- le fait que γ est radial ($\dot{\gamma} = -\gamma \wedge n$) :

$$\dot{R}\Gamma + R\dot{\Gamma} = -R\Gamma \wedge RN, \text{ ou } \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega - \Gamma \wedge N.$$

La troisième équation exprime le fait que la dérivée du moment cinétique est égale au moment résultant des forces exercées sur le satellite. Le moment cinétique total M est

$$M = \int_S \vec{r} \wedge \vec{v} d\mu = \int_S \vec{r} \wedge (\Omega \wedge \vec{r}) d\mu = \mathcal{J}\Omega$$

(cette dernière relation définit l'opérateur symétrique « d'inertie » \mathcal{J}). Le moment résultant est, lui,

$$\int_S \vec{GM} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} d\mu = \Gamma \wedge \int_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\mu$$

et on vérifie que la dernière intégrale est égale à 3Γ .

Appendice 2 : la variété de Poisson $((\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \times \mathfrak{so}(3))^*$

L'espace vectoriel euclidien \mathbf{R}^3 est muni de l'opération de $\text{SO}(3)$ par rotations. Comme toujours, l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ des matrices anti-symétriques 3×3 (avec le crochet des matrices) est identifiée, quand le besoin s'en fait sentir, à \mathbf{R}^3 (avec le produit vectoriel). L'opération adjointe (conjugaison) de g sur Z s'écrit alors gZg^{-1} (si on pense que Z est une matrice) ou $g \cdot Z$ (si on pense que Z est un vecteur).

La métrique euclidienne (que je note $U \cdot V$ ou $\langle U, V \rangle$, en espérant qu'il n'y aura pas de confusion) déjà largement utilisée autorise en outre à identifier

\mathbf{R}^3 et son dual, $\mathfrak{so}(3)$ et son dual. Pour simplifier la lecture, j'utilise les caractères grecs pour les éléments du dual d'un espace dont les éléments sont en caractères latins. L'inconvénient est que ce qui s'appelle (classiquement) (N, Γ, M) dans le problème du satellite s'appelle (ξ, η, ζ) dans cet appendice.

Le groupe de Lie. On part du produit semi-direct

$$G = (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \rtimes \text{SO}(3)$$

défini par l'opération de $\text{SO}(3)$ par rotations sur les deux facteurs \mathbf{R}^3 . La multiplication du groupe est donc

$$(u, v, g) \cdot (u', v', g') = (u + g(u'), v + g(v'), gg').$$

L'algèbre de Lie. Elle est notée

$$\mathfrak{g} = (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \rtimes \mathfrak{so}(3),$$

le crochet est

$$[(X, Y, Z), (X', Y', Z')] = (Z \cdot X' - Z' \cdot X, Z \cdot Y' - Z' \cdot Y, [Z, Z'])$$

(le point désigne ici l'application d'une matrice anti-symétrique à un vecteur). L'opération adjointe est

$$\text{Ad}_{(u,v,g)}(X, Y, Z) = (g \cdot X - (gZg^{-1}) \cdot u, g \cdot Y - (gZg^{-1}) \cdot v, gZg^{-1}).$$

Le dual et les orbites coadjointes. L'espace dual \mathfrak{g}^* , encore un \mathbf{R}^9 , est celui des (ξ, η, ζ) , $\xi \in (\mathbf{R}^3)^*$, $\eta \in (\mathbf{R}^3)^*$, $\zeta \in (\mathfrak{so}(3))^*$. L'opération coadjointe est donnée par

$$\text{Ad}_{(u,v,g)}^*(\xi, \eta, \zeta) = (g \cdot \xi, g \cdot \eta, u \wedge g \cdot \xi + v \wedge g \cdot \eta + g \cdot \zeta).$$

Les invariants orbitaux sont donc $\|\xi\|^2$, $\|\eta\|^2$ et $\xi \cdot \eta$. Les orbites coadjointes génériques sont de dimension 6, on considère ici plus particulièrement l'orbite

$$W = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \mid \|\xi\|^2 = 1, \|\eta\|^2 = 1 \text{ et } \xi \cdot \eta = 0 \right\}.$$

Cette sous-variété de \mathbf{R}^9 est difféomorphe à $\text{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$: les deux premiers vecteurs, ξ et η , se complètent uniquement en une base orthonormée directe et parcourent donc un $\text{SO}(3)$, le troisième, ζ , est libre.

Les champs fondamentaux et la structure de Poisson. En dérivant la formule pour « Ad », on obtient

$$\text{ad}_{(X,Y,Z)}^*(\xi, \eta, \zeta) = (Z \wedge \xi, Z \wedge \eta, X \wedge \xi + Y \wedge \eta + Z \wedge \zeta),$$

formule qui donne la valeur en $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathfrak{g}^*$ du champ fondamental associé au vecteur (X, Y, Z) de \mathfrak{g} pour l'opération coadjointe, que l'on notera aussi, si besoin est

$$(X, \widetilde{Y}, Z)_{(\xi, \eta, \zeta)}.$$

La structure de Poisson est définie par la formule de Kirillov. On a donc

$$\begin{aligned} \omega_{(\xi, \eta, \zeta)}((X, \widetilde{Y}, Z)_{(\xi, \eta, \zeta)}, (X', \widetilde{Y}', Z')_{(\xi, \eta, \zeta)}) \\ &= \omega_{(\xi, \eta, \zeta)}((Z \wedge \xi, Z \wedge \eta, X \wedge \xi + Y \wedge \eta + Z \wedge \zeta), \\ &\quad (Z' \wedge \xi, Z' \wedge \eta, X' \wedge \xi + Y' \wedge \eta + Z' \wedge \zeta)) \\ &= \langle (\xi, \eta, \zeta), [(X, Y, Z), (X', Y', Z')] \rangle \\ &= \langle \xi, Z \wedge X' - Z' \wedge X \rangle + \langle \eta, Z \wedge Y' - Z' \wedge Y \rangle + \langle \zeta, [Z, Z'] \rangle, \end{aligned}$$

de sorte que la forme symplectique sur W est, avec des notations évidentes

$$\omega = \langle \xi, d\zeta \wedge d\xi \rangle + \langle \eta, d\zeta \wedge d\eta \rangle + \langle \zeta, d\zeta \wedge d\zeta \rangle.$$

Remarque. Si la variété W est bien difféomorphe à $\text{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$, cette forme symplectique n'est pas celle induite par la structure symplectique canonique ω_0 de $T^*\text{SO}(3)$ (identifié à $T\text{SO}(3)$ par la métrique) et le difféomorphisme évident

$$\begin{aligned} W &\xrightarrow{F} T\text{SO}(3) \subset (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \times (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \\ (\xi, \eta, \zeta) &\longmapsto ((\xi, \eta), \underbrace{(\zeta \wedge \xi)}_X, \underbrace{(\zeta \wedge \eta)}_Y). \end{aligned}$$

En effet

$$\omega_0 = \sum (dX_i \wedge d\xi_i + dY_i \wedge d\eta_i)$$

de sorte que

$$F^*\omega_0 = \sum (d(\zeta \wedge \xi)_i \wedge d\xi_i + d(\zeta \wedge \eta)_i \wedge d\eta_i)$$

et ne peut contenir de terme $d\zeta_i \wedge d\zeta_j$, contrairement à ω .

Le champ hamiltonien associé à H . On considère la fonction H définie sur \mathfrak{g}^* comme plus haut par

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \langle \zeta, \mathcal{J}^{-1}\zeta \rangle - \langle \zeta, \xi \rangle + \frac{3}{2} \langle \eta, \mathcal{J}\eta \rangle.$$

On a d'une part

$$(dH)_{(\xi, \eta, \zeta)}(U, V, W) = \langle \mathcal{J}^{-1}\zeta, W \rangle - \langle \zeta, U \rangle - \langle W, \xi \rangle + 3\langle \mathcal{J}\eta, V \rangle,$$

et de l'autre, si le champ hamiltonien X_H est écrit (A, \widetilde{B}, C) ,

$$\begin{aligned} (dH)_{(\xi, \eta, \zeta)}((X, \widetilde{Y}, Z)) &= \omega_{(\xi, \eta, \zeta)}((X, \widetilde{Y}, Z), (A, \widetilde{B}, C)) \\ &= \langle \xi, Z \wedge A - C \wedge X \rangle + \langle \eta, Z \wedge B - C \wedge Y \rangle \\ &\quad + \langle \zeta, Z \wedge C \rangle. \end{aligned}$$

En écrivant $(U, V, W) = (X, \widetilde{Y}, Z)_{(\xi, \eta, \zeta)}$ et en identifiant, on obtient

$$(A, B, C) = (\zeta, -3\mathcal{J}\eta, -\mathcal{J}^{-1}\zeta + \xi)$$

et finalement

$$X_H(\xi, \eta, \zeta) = (\xi \wedge \mathcal{J}^{-1}\zeta, \eta \wedge (\mathcal{J}^{-1}\zeta - \xi), 3\eta \wedge \mathcal{J}\eta + \zeta \wedge \mathcal{J}^{-1}\zeta).$$

Le système différentiel (1.1) est donc bien le système hamiltonien associé à H , comme l'affirme la proposition 1.1.

Le champ hamiltonien associé à K . Mettons-nous maintenant dans l'hypothèse, faite au § 3, d'un satellite symétrique. La fonction $K(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \cdot e_1$ satisfait à

$$(dK)_{(\xi, \eta, \zeta)}(U, V, W) = \langle W, e_1 \rangle$$

et donc à

$$(dK)_{(\xi, \eta, \zeta)}((X, \widetilde{Y}, Z)) = \langle X \wedge \xi + Y \wedge \eta + Z \wedge \zeta, e_1 \rangle$$

d'une part et, si $X_K = (A, \widetilde{B}, C)$, à

$$(dK)_{(\xi, \eta, \zeta)}((X, \widetilde{Y}, Z)) = \langle \xi, Z \wedge A - C \wedge X \rangle + \langle \eta, Z \wedge B - C \wedge Y \rangle + \langle \zeta, Z \wedge C \rangle$$

de l'autre, ce dont on déduit que

$$X_K(\xi, \eta, \zeta) = (0, \widetilde{0}, -e_1) = (\xi \wedge e_1, \eta \wedge e_1, \zeta \wedge e_1)$$

comme on pouvait s'y attendre (il s'agit du champ fondamental de l'opération du groupe des rotations d'axe e_1).

La réduction symplectique. Plaçons-nous en un point $(e_3, \eta, \lambda e_3)$ de $V \subset W$. Le vecteur X_H est, en ces points, le champ fondamental associé à

$$\left(\lambda e_3, -3\mathcal{J}\eta, \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) e_3 \right).$$

Le sous-espace $(X_H(e_3, \eta, \lambda e_3))^\circ$ de $T_{(e_3, \eta, \lambda e_3)}W$ est formé des vecteurs $(\widetilde{A, B, C})_{(e_3, \eta, \lambda e_3)}$ tels que

$$\omega_{(e_3, \eta, \lambda e_3)}(X_H(e_3, \eta, \lambda e_3), (\widetilde{A, B, C})) = 0,$$

plus concrètement, tels que

$$\begin{aligned} \left\langle e_3, \lambda C \wedge e_3 - \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) e_3 \wedge A \right\rangle + \left\langle \eta, -3C \wedge \mathcal{J}\eta - \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) e_3 \wedge B \right\rangle \\ + \lambda \left\langle e_3, \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) C \wedge e_3 \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

ou, plus simplement, tels que

$$\left\langle \eta, -3C \wedge \mathcal{J}\eta - \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) e_3 \wedge B \right\rangle = 0,$$

ou encore, en appelant $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, etc. les coordonnées des vecteurs A, B et C , tels que

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, 3 \begin{pmatrix} x \\ cy \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \\ \beta'' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

ou même, et je m'arrêterai là, tels que

$$3(c-1)xy\gamma'' + \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)(\beta'x - \beta y) = 0.$$

De même, le vecteur X_K est, en ces points, le champ fondamental associé à $(0, 0, -e_1)$; le sous-espace $(X_K(e_3, \eta, \lambda e_3))^\circ$ de $T_{(e_3, \eta, \lambda e_3)}W$ est formé des vecteurs $(\widetilde{A, B, C})_{(e_3, \eta, \lambda e_3)}$ tels que

$$\omega_{(e_3, \eta, \lambda e_3)}((0, 0, -e_1), (\widetilde{A, B, C})) = 0,$$

c'est-à-dire tels que

$$\langle e_1, e_1 \wedge A \rangle + \langle \eta, e_1 \wedge B \rangle + \lambda \langle e_3, e_1 \wedge C \rangle = 0$$

ou encore tels que

$$\langle e_1, A \wedge e_3 + B \wedge \eta + \lambda C \wedge e_3 \rangle = 0$$

et pour finir tels que

$$\alpha' - \beta''y + \lambda\gamma' = 0.$$

Le sous-espace $\langle X_H, H_K \rangle^\circ$ est donc celui des vecteurs

$$(C \wedge e_3, C \wedge \eta, A \wedge e_3 + B \wedge \eta + \lambda C \wedge e_3)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha' - \beta''y - \lambda\gamma' = 0 \\ 3(c-1)xy\gamma'' + (1 - \frac{\lambda}{c})(\beta'x - \beta y) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire celui des vecteurs de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} \gamma' \\ -\gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\gamma''y \\ \gamma''x \\ \gamma y - \gamma'x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha + \beta''x - \lambda\gamma \\ \beta y - \beta'x \end{pmatrix} \right).$$

L'espace qui nous intéresse est l'espace réduit, quotient par le sous-espace engendré par X_H et X_K , on doit donc considérer ces vecteurs modulo

- le vecteur X_K , c'est-à-dire modulo les multiples de $(e_2, -ye_3, \lambda e_2)$
- et le vecteur X_H , c'est-à-dire modulo les multiples de

$$\left(0, \left(\frac{\lambda}{c} - 1 \right) \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, 3(c-1)xye_3 \right).$$

On peut donc identifier l'espace quotient à l'espace des vecteurs de la forme $(\gamma'e_1, -\gamma'xe_3, (-\alpha + \beta''x)e_2)$. Encore un petit changement de notations et nos vecteurs sont les $(U, V, W) = (ue_1, -xue_3, we_2)$.

Bibliographie

- [1] AUDIN (M.). — *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.
- [2] AUDIN (M.). — « Exemples de hamiltoniens non intégrables en mécanique analytique réelle », *ce volume*.
- [3] AUDIN (M.). — « Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...] », *Séminaire Bourbaki, 2000-2001, Astérisque*, 282 (2002), 113-135.
- [4] BOGOYAVLENSKII (O. I.). — « Euler equations on finite-dimensional Lie coalgebras arising in problems of mathematical physics », *Russian Math. Surveys*, 47 (1992), 117-189.
- [5] BOUCHER (D.). — « Sur les équations différentielles linéaires paramétrées, une application aux systèmes hamiltoniens », *Thèse, Université de Limoges* (2000).

- [6] BOUCHER (D.), WEIL (J.-A.). — « A non-integrability criterion for Hamiltonian systems illustrated on the planar three-body problem », *preprint* (2001).
- [7] BOUCHER (D.), WEIL (J.-A.). — « On the applicability of the Morales-Ramis criteria for testing the non-integrability of Hamiltonian systems », *preprint* (2002).
- [8] INCE (E. L.). — *Ordinary differential Equations*, Dover, 1956.
- [9] MACIEJEWSKI (A.). — « Non integrability of rotational motion of symmetric satellite in circular orbit », *preprint* (2001).
- [10] MORALES-RUIZ (J.). — *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.
- [11] MORALES-RUIZ (J.), RAMIS (J.-P.). — « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems », *Methods Appl. Anal.*, 8 (2001).
- [12] TSYGVINTSEV (A.). — « La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331 (2000), 241–244.
- [13] WHITTAKER (E. T.), WATSON (G. N.). — *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.