

IDRISSA LY

DIARAF SECK

**Optimisation de forme et problème à frontière libre : cas du  $p$ -laplacien**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 12, n° 1 (2003), p. 103-126

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_2003\\_6\\_12\\_1\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_2003_6_12_1_103_0)

© Université Paul Sabatier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Optimisation de forme et problème à frontière libre : cas du p-laplacien (\*)

IDRISSA LY (†) ET DIARAF SECK (‡)

---

**RÉSUMÉ.** — Dans ce travail, nous étudions l'existence et l'unicité de solution du problème extérieur à frontière libre de type Bernoulli avec l'opérateur p-laplacien,  $1 < p < \infty$ . À partir de l'optimisation forme et de la notion de dérivée par rapport au domaine, nous établissons une méthode séquentielle pour obtenir un résultat d'existence au sens classique avec des domaines non nécessairement convexes. Nous prouvons au préalable un résultat de monotonie qui est la clef pour cette méthode séquentielle.

**ABSTRACT.** — In this paper, we study an existence and uniqueness results of the Bernoulli-type free boundary problem for the p-laplace equation,  $1 < p < \infty$ . Using the shape optimisation theory, the derivative with respect to the domain, we prove the existence an uniqueness results by a successive approximation method in the classical sense with non convex domains. Before proving the existence and uniqueness results, we state a monotony result which is the basis of existence theorem.

---

### 1. Introduction

Dans ce papier, nous étudions le problème extérieur à frontière libre avec l'opérateur p-laplacien.

Soient  $K$  un domaine connexe compact de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , une constante  $c$  strictement positive, le problème est de trouver un domaine  $\Omega$  contenant

---

(\*) Reçu le 14 novembre 2002, accepté le 15 mai 2003

(†) Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique, Université Gaston Berger, B.P 234, Saint-Louis, Sénégal.  
E-mail : ndirkaly@ugb.sn

(‡) Faculté des Sciences Economiques et de Gestion, Université Cheikh Anta Diop, B.P 5683, Dakar, Sénégal.  
E-mail : dseck@ucad.sn

$K$  et une fonction  $u_\Omega$  tels que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega \setminus K, \quad 1 < p < \infty \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\Omega = 1 & \text{sur } \partial K \\ -\frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = c & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\nu$  est la normale extérieure.

Ce problème a déjà été étudié tout d'abord par A. Acker et A. Meyer [1]. Sous les hypothèses géométriques naturelles, c'est-à-dire  $K$  étoilé par rapport à la boule  $B(o, \delta)$ , ils ont montré l'unicité de la solution. La convexité aussi a fait l'objet d'une étude. Ils ont montré en plus des résultats de convergence de leur méthode appelée méthode des approximations. Mais le résultat d'existence n'a été obtenu que pour  $p = 2$ .

A. Henrot et H. Shahgholian [16] ont montré l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où l'ensemble admissible de domaine n'est composé que de domaines convexes. Ils ont utilisé la technique des sous-solutions et sur-solutions de A. Beurling [4].

Ces types de problèmes ont plusieurs interprétations physiques et industrielles. On en citera quelques uns, mais pour une bibliographie complète cf [10] pour  $p = 2$ . Les interprétations les plus citées sont la loi de Darcy pour un écoulement d'un fluide dans un milieu poreux, la loi d'Ohm pour le courant électrique et la loi de Fourier pour le transfert de la chaleur cf [1].

Dans ce travail, nous établissons un résultat d'existence de domaine non nécessairement convexe pour  $p \in ]1, \infty[$  à partir du problème d'optimisation de forme que nous allons étudier en premier. En effet habituellement, on n'arrive pas, pour une constante quelconque donnée  $c$  strictement positive, à établir la solution du problème à frontière libre à partir du problème d'optimisation de forme.

Ce qu'on rencontre dans la littérature est la formulation suivante :

Soit  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme  $\min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$ ,  $\mathcal{O}$ , étant un ensemble admissible de domaines et  $J$  une fonctionnelle de forme, si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathcal{C}^2$ , alors  $\Omega$  est solution d'un problème à frontière libre où la condition surdéterminée est vérifiée pour une constante qu'on calcule explicitement qui s'écrit en fonction d'un multiplicateur de Lagrange. Mais il faut noter que cette constante n'est pas forcément égale à la constante  $c$  mentionnée dans le problème (1.1).

En combinant une approche variationnelle et une méthode séquentielle, nous arrivons à donner une réponse positive au problème (1.1).

Le travail est scindé en deux parties.

- Dans la première partie nous étudions un problème d'optimisation de forme associé au problème aux limites de (1.1) sous plusieurs hypothèses en rappelant quelques résultats connus que nous adaptons au p-laplacien.
- En deuxième lieu nous établissons un résultat de monotonie qui est la clef pour la démonstration du résultat d'existence du problème extérieur à frontière libre.

## 2. Résultats d'optimisation de forme

On fixe une boule  $D$  de  $\mathbb{R}^N$  et tous les domaines ouverts  $w$  avec lesquels on travaille seront contenus dans  $D$ . Soit  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^2$  contenu dans  $D$ .

Soit  $G$  une fonction définie par

$$\begin{aligned} G(x, s) &= \int_0^s g(x, t) dt, \\ g : w \times \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R} \text{ et} \\ g(\cdot, 0) &= 0, \end{aligned}$$

$g$  est une fonction continue en  $s$  et croissante sur  $\mathbb{R}$ . On définit l'ensemble fonctionnel noté  $U_0$  par

$$U_0 = \{v \in W_0^{1,p}(w); G(\cdot, v(\cdot)) \in L^1(w)\}.$$

Soit  $\mathcal{O}$  un ensemble admissible de domaines ouverts vérifiant soit la propriété du  $\epsilon$ -cône soit la propriété géométrique de la normale.

On considère l'opérateur p-laplacien :  $\Delta_p : W_0^{1,p}(D) \longmapsto W^{-1,p'}(D)$  avec  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ .

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème d'optimisation de forme

$$\min\{J(w), w \in \mathcal{O}\},$$

où  $J$  est une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{O}$  par

$$J(w) := \frac{1}{p} \int_w \|\nabla u_w\|^p dx + \int_w G(x, u_w(x)) dx, \quad 1 < p < \infty$$

où  $u_w$  étant la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_w + g(\cdot, u_w) = 0 & \text{dans } w \setminus K, 1 < p < \infty \\ u_w = 0 & \text{sur } \partial w \\ u_w = 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (2.1)$$

## 2.1. Étude de l'existence de solutions sous la contrainte de la propriété du $\epsilon$ -cône

Tout d'abord définissons quelques notions

**DÉFINITION 2.1.** — *On dit qu'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  possède la propriété de  $\epsilon$ -cône si pour tout  $x$  appartenant à  $\partial\Omega$ , il existe une direction  $\zeta$  appartenant à  $\mathbb{R}^N$  telle que  $C(y, \zeta, \epsilon, \epsilon) \subset \Omega$ , pour tout  $y$  appartenant à  $B(x, \epsilon) \cap \bar{\Omega}$ . Soient  $\epsilon, m_0 > 0$ , on note par  $\mathcal{O}$  l'ensemble :*

$$\mathcal{O} = \{w \subset D, K \subset w, w \text{ ouvert vérifiant la propriété du } \epsilon\text{-cône} \\ \text{et } \text{vol}(w) = m_0.\}$$

**DÉFINITION 2.2.** — *Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux compacts inclus dans  $D$ . On pose :*

$$\begin{aligned} d(x, K_1) &= \inf_{y \in K_1} d(x, y) \\ d(x, K_2) &= \inf_{y \in K_2} d(x, y). \end{aligned}$$

*On note :*

$$\begin{aligned} \rho(K_1, K_2) &= \sup_{x \in K_2} d(x, K_1) \\ \rho(K_2, K_1) &= \sup_{x \in K_1} d(x, K_2) \end{aligned}$$

*On pose :  $d_H(K_1, K_2) = \max[\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)]$ .*

*On appelle distance de Hausdorff, une distance sur l'ensemble des compacts de  $D$  qu'on note  $d_H(K_1, K_2)$ .*

**DÉFINITION 2.3.** — *Soient  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\Omega$  des ouverts inclus dans  $D$ . On dit que la suite d'ouverts  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de Hausdorff vers  $\Omega$  si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(\bar{D} \setminus \Omega_n, \bar{D} \setminus \Omega) = 0.$$

*On notera  $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$ .*

DÉFINITION 2.4. — Soient  $(\Omega_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  une suite d'ouverts et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On dit que la suite d'ouverts  $(\Omega_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  converge au sens de  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  si  $\chi_{\Omega_n}$  converge vers  $\Omega$ .

DÉFINITION 2.5. — Soient  $(\Omega_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  une suite d'ouverts de  $D$  et  $\Omega$  un ouvert inclus dans  $D$ . On dit que la suite d'ouverts  $(\Omega_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  converge au sens des compacts vers  $\Omega$  si

1. Pour tout compact  $G$  inclus dans  $\Omega$ , on a  $G \subset \Omega_n$  à partir d'un certain rang ;
2. Pour tout compact  $Q$  inclus dans  $\bar{\Omega}^c$ , on a  $Q \subset \bar{\Omega}_n^c$  à partir d'un certain rang.

DÉFINITION 2.6. — On dit que  $h$  est une fonction de type Carathéodory si pour tout  $s$  appartenant à  $\mathbb{R}$  la fonction  $h(\cdot, s)$  est mesurable sur  $\Omega$  p.p en  $x$  qui appartient à  $\Omega$  et la fonction  $h(x, \cdot)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Énonçons tout d'abord quelques résultats préliminaires très utiles dans ce domaine et qui peuvent être retrouvés dans [8], [5] et [24].

LEMMA 2.7. — Soient  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts et  $\Omega$  inclus dans  $D$  tels que  $\Omega_n$  converge au sens de Hausdorff vers  $\Omega$  alors :  
 Pour tout compact  $Q$  inclus dans  $\Omega$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $Q$  inclus dans  $\Omega_n$ .  
 En particulier si  $\phi$  appartient à  $\mathcal{D}(\Omega)$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $\phi$  appartient à  $\mathcal{D}(\Omega_n)$ .

LEMMA 2.8. — Soit  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts inclus un compact  $F$  de  $\mathbb{R}^N$  alors il existe  $n_k$ ,  $\Omega_{n_k}$ , et  $\Omega$  inclus dans  $F$  tels que  $\Omega_{n_k}$  converge au sens de Hausdorff vers  $\Omega$ .

LEMMA 2.9. —  $\Omega$  a la propriété du  $\epsilon$ -cône si et seulement si  $\Omega$  est à bord lipschitzien avec une constante de Lipschitz uniforme.

LEMMA 2.10. — Soit  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts de  $\mathbb{R}^N$  possédant la propriété du  $\epsilon$ -cône, avec  $\bar{\Omega}_n \subset F \subset D$ ,  $F$  un compact. Alors il existe  $\Omega$  vérifiant la propriété du  $\frac{\epsilon}{2}$ -cône et une suite extraite  $\Omega_{n_k}$  tels que

$$\begin{array}{ccc} \chi_{\Omega_{n_k}} & \xrightarrow{L^1} & \chi_{\Omega}, \quad \Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega \\ \partial\Omega_{n_k} & \xrightarrow{H} & \partial\Omega, \quad \bar{\Omega}_{n_k} \xrightarrow{H} \bar{\Omega}. \end{array}$$

LEMMA 2.11. — Soit  $\Omega$  un domaine lipschitzien avec  $u$  appartenant à  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , si  $u = 0$  p.p sur  $\Omega^c$  alors  $u$  appartient à  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Énonçons à présent le théorème d'existence du problème d'optimisation de forme.

THÉORÈME 2.12. — Le problème : « trouver  $\Omega$  appartenant à  $\mathcal{O}$  tel que

$$J(\Omega) = \min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$$

possède une solution.

Si de plus, il existe une fonction de Carathéodory  $h$  croissante en  $s$  appartenant à  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $s, t$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on a  $|g(x, s+t) - g(s, t)| \leq h(x, t)$  p.p sur  $\Omega$  et que pour tout  $s$  appartenant à  $\mathbb{R}$ ,  $h(\cdot, s)$  appartient à  $L_{loc}^1$  alors il existe  $u_\Omega$  appartenant à  $U_0$  et qui est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega + g(\cdot, u_\Omega) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K) \\ u_\Omega = 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (2.2)$$

Preuve du théorème 2.12

$$J(w) := \frac{1}{p} \int_w \|\nabla u_w\|^p dx + \int_w G(x, u_w(x)) dx, \quad 1 < p < \infty$$

Soit  $\alpha = \inf\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$ , remarquons comme  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $g(x, \cdot) = 0$ , on a  $G(x, s)$  est convexe et positive par conséquent  $U_0$  est convexe et  $U_0 \neq \emptyset$  car  $\mathcal{D}(w) \subset U_0$ .

On a  $\inf\{J(w), w \in \mathcal{O}\} > -\infty$  donc il existera une suite minimisante telle que

$(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}$  telle que  $J(\Omega_n)$  converge vers  $\inf\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$ .

$(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}$ , donc bornée, il existera un compact  $F$  tel que

$\Omega_n \subset F \subset D$ , d'après le lemme (2.10), il existe  $n_k$ ,  $\Omega$  qui vérifie l'hypothèse du  $\epsilon$ -cône tel que  $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$  et  $\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{p.p} \chi_\Omega$ .

On note  $\tilde{u}$  (resp  $\tilde{\phi}$ ) la fonction  $u$  (resp  $\phi$ ) prolongée par 0 dans  $D$ .

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

$$\tilde{\nabla} u = \begin{cases} \nabla u & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} \phi & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

Comme  $G$  est positive, il est facile de voir qu'il existe  $c > 0$  tel que  $\int_D \|\nabla \tilde{u}_n\|^p dx \leq c$  pour tout  $n$ .

Sinon pour tout  $s$ , il existe  $\tilde{u}_n^s \in W_0^{1,p}(D)$  telle que  $\int_D \|\nabla \tilde{u}_n^s\|^p dx > s$

$$\begin{aligned} \int_D \|\nabla \tilde{u}_n^s\|^p dx &= \int_{\Omega_n} \|\nabla \tilde{u}_n^s\|^p dx + \int_{D \setminus \Omega_n} \|\nabla \tilde{u}_n^s\|^p dx \\ \int_D \|\nabla \tilde{u}_n^s\|^p dx &= \int_{\Omega_n} \|\nabla \tilde{u}_n^s\|^p dx \quad \text{car } \nabla \tilde{u}_n^s = 0 \text{ sur } D \setminus \Omega_n \\ \int_{\Omega_n} \|\nabla \tilde{u}_n^s\|^p dx &> s \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $J(\Omega_n)$  convergerait vers  $+\infty$  donc  $\inf\{J(w), w \in \mathcal{O}\} = +\infty$  ce qui est absurde.

$W_0^{1,p}(D)$  réflexif donc il existe  $u^*$  et  $u_{n_k}$  tels que  $u_{n_k}$  converge faiblement vers  $u^*$  dans  $W_0^{1,p}(D)$ .

Montrons que  $u^*$  appartient à  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Comme  $u_{n_k}$  converge faiblement vers  $u^*$  dans  $W_0^{1,p}(D)$  donc il existe une sous suite de  $u_{n_k}$  quitte à la noter encore  $u_{n_k}$  telle que  $u_{n_k}$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^p(D)$  cf [5] et  $u_{n_k}$  converge p.p vers  $u^*$ .

Or on sait que

$$\begin{aligned} \chi_{\Omega_{n_k}} &\xrightarrow{p.p} \chi_{\Omega} \quad \text{donc} \\ \chi_{D \setminus K} - \chi_{\Omega_{n_k} \setminus K} &\xrightarrow{p.p} \chi_{D \setminus K} - \chi_{\Omega \setminus K} \quad \text{or} \\ u_{n_k} &\xrightarrow{p.p} u^* \quad \text{donc} \\ (\chi_{D \setminus K} - \chi_{\Omega_{n_k} \setminus K})u_{n_k} &\xrightarrow{p.p} (\chi_{D \setminus K} - \chi_{\Omega \setminus K})u^* \quad p.p. \end{aligned}$$

Si  $x \in D$  alors  $x \in \Omega$  ou  $x \in \Omega^c$  donc

si  $x \in \Omega$  alors  $(\chi_{D \setminus K} - \chi_{\Omega \setminus K})u^* = 0$  p.p. et si  $x \in \Omega^c$  on a  $u^*(x) = 0$  dans tout les cas  $(\chi_{D \setminus K} - \chi_{\Omega \setminus K})u^* = 0$  p.p.

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} u^* &= 0 \text{ sur } D \setminus K \setminus (\Omega \setminus K) \\ u^* &= 0 \text{ sur } D \cap K^c \cap (\Omega^c \cup K^c) \\ u^* &= 0 \text{ sur } D \cap K^c \cap \Omega^c \cup D \cap K^c \cap K \\ u^* &= 0 \text{ sur } D \cap K^c \cap \Omega^c, \end{aligned}$$



Or  $K \subset \Omega$  donc  $K^c \cap \Omega^c = \Omega^c$ . D'où

$$\begin{aligned} u^* &= 0 \text{ sur } D \setminus \Omega \\ u^* &= 0 \text{ sur } \Omega^c \text{ p.p.} \end{aligned}$$

Puis que  $\Omega$  possède la propriété du  $\epsilon$ -cône et d'après le lemme (2.11) donc  $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

La norme est semi-continue inférieurement pour la convergence faible dans  $W_0^{1,p}(D)$ , on a

$$\int_{\Omega} \|\nabla u^*\|^p dx \leq \liminf \int_{\Omega} \|\nabla u_{n_k}\|^p dx,$$

Par le lemme de Fatou on a :

$$\int_D \chi_{\Omega} G(x, u^*(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\Omega_{n_k}} G(x, u_{n_k}(x)) dx \leq 1 + \alpha, \text{ donc}$$

on a  $u^* \in U_0$ .

On a

$$\int_{\Omega} \|\nabla u^*\|^p dx + \int_D G(x, u^*(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_D G(x, u_{n_k}(x)) + \int_{\Omega_{n_k}} \|\nabla u_{n_k}\|^p dx \right)$$

On a  $J(\Omega) \leq \alpha$  d'où  $J(\Omega) = \alpha$ .

Montrons à présent que  $u^*$  est solution du problème (2.1) avec l'hypothèse supplémentaire sur  $g$ , c'est un exercice classique cf [17] de montrer que  $-\Delta_p u^* + g(x, u^*) = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega \setminus K)$ .

Montrons que  $u^* = 1$  sur  $\partial K$ . On sait que  $u_{n_k}$  converge vers  $u^*$  dans  $W_0^{1,p}(D)$  donc  $u_{n_k}$  converge vers  $u^*$  p.p.

On sait que la convergence p.p n'est pas suffisante pour passer à la limite car le bord  $\partial K$  est de mesure nulle, on va prendre un ouvert  $\Omega'$  de classe  $C^2$  contenant  $K$  dont le bord  $\partial\Omega'$  est de classe  $C^2$ .

On a  $u_{n_k}$  est une suite appartenant à  $W_0^{1,p}(\Omega')$  donc il existe  $\beta > 0$  tel que  $u_{n_k}$  appartient à  $C^{1,\beta}(\bar{\Omega}')$  cf [20].

On applique le théorème d'Ascoli, on obtient  $u_{n_k}$  converge uniformément vers  $u^*$  sur  $\partial K$ , or  $u_{n_k} = 1$  sur  $\partial K$  donc  $u^* = 1$  sur  $\partial K$ .

La question qui se pose est : peut-on affirmer que  $u_{\Omega} = u^*$  ?

Comme  $J$  est strictement convexe pour  $\Omega$  fixé, elle atteint son minimum en un point unique, donc  $J(u_{\Omega}) = J(u^*) = \min\{J(v), v \in U_0\}$ .  $\square$

Étudions le même problème d'optimisation de forme sous l'hypothèse de la propriété géométrique de la normale.

## 2.2. Étude de l'existence de solutions sous la contrainte de la propriété géométrique de la normale

Tout d'abord nous signalons que la propriété géométrique de la normale n'est pas due aux auteurs ; pour des informations exhaustives cf [13], [2] et [3].

Dans le souci d'être complet donnons la définition de ce concept. Soient  $D$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $C$  un ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On définit

$$\mathcal{N}_\Omega = \{x \in \partial\Omega : \nu(x) \text{ existe}\}$$

où  $\nu$  désigne la normale extérieure définie en  $x$  si elle existe.

$D(x, \nu(x))$  désigne la demi droite issue de  $x$  et de vecteur directeur  $\nu(x)$ .

$$CN_x = \{y \in \mathbb{R}^N, (y - x) \cdot (z - x) \leq 0, \forall z \in C\}$$

est le cône normal à  $C$  en  $x$ . On appellera demi normale à  $C$  en  $x$  toute demi droite issue de  $x$  et contenue dans le cône normal  $CN_x$ .

On appellera normale à  $C$  en  $x$  une droite contenant une demi normale.

On supposera dans toute la suite de ce paragraphe qu'on fixe une bonne fois pour toutes, pour tout  $x$  appartenant à  $\partial C$ , une normale particulière qu'on note  $\Delta_x$ . On appelle ces normales, les normales sélectionnées.

**DÉFINITION 2.13.** — *On dit qu'un ouvert  $\Omega$  vérifie la propriété géométrique de la normale relativement à  $C$  (ou plus brièvement possède la C-PGN) si :*

1.  $\partial\Omega \setminus C$  est lipschitzien
2.  $\forall x \in \mathcal{N}_\Omega \setminus C, D(x, \nu(x)) \cap C \neq \emptyset$
3. Pour toute normale  $\Delta$  sélectionnée à  $C$  :  $\Delta \cap \Omega$  est connexe.

Dans toute la suite on considérera que  $D$  est la boule dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $B(O, R)$ , avec  $R$  aussi grand que l'on veut et  $K$  un compact de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Soit  $\mathcal{O}_0 = \{w \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N \text{ vérifiant la C-PGN, inclus dans } D, \text{ connexe}\}$ .

Soit  $m_0$  un réel strictement positif. On définit maintenant  $\mathcal{O}$  par :

$$\mathcal{O} = \{w \in \mathcal{O}_0; K \subset w \text{ et l'intérieur de } C \text{ est inclus dans } w \text{ avec } vol(w) = m_0\}.$$

Il s'agit dans ce paragraphe d'étudier l'existence d'un ouvert  $\Omega$  appartenant à  $\mathcal{O}$  tel que

$$J(\Omega) = \min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}.$$

Tout d'abord signalons que les auteurs ne sont pas au courant de la généralisation des résultats sur la propriété géométrique de la normale. Rappelons une série de résultats très intéressants obtenus par M. Barkatou et A. Henrot cf [2], [3].

- a) Le bord d'un ouvert qui possède la C-PGN est composé de deux parties  $\partial\Omega \setminus C$  et  $\partial\Omega \cap C$ .
  - $\partial\Omega \setminus C$  est uniformément lipschitzien.
  - $\partial\Omega \cap C$  peut comporter des points de rebroussements.
- b) Soit  $(\Omega_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  une suite d'ouvert de  $D$ , on suppose que  $\Omega_n$  possède la C-PGN. Soit  $\Omega$  un ouvert inclus dans  $D$ .  
Si  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  au sens de Hausdorff alors  $\Omega$  possède la C-PGN.
- c) Si la classe des ouverts vérifie la propriété géométrique de la normale, les convergences de domaines au sens de Hausdorff, des fonctions caractéristiques et au sens des compacts sont équivalentes.

Le résultat d'optimisation de forme dû à M. Barkatou et A. Henrot se généralise dans notre cas de la manière suivante :

**THÉORÈME 2.14.** — *Soit la fonctionnelle définie par :*

$$J(w) := \frac{1}{p} \int_w |\nabla u_w|^p dx + \int_w G(x, u_w(x)) dx, \text{ pour tout, } w \in \mathcal{O}.$$

*On définit l'ensemble fonctionnel*

$$U_0 = \{v \in W_0^{1,p}(w), G(\cdot, v(\cdot)) \in L^1(w)\}.$$

*Alors il existe  $\Omega$  appartenant à  $\mathcal{O}$  tel que  $J(\Omega) = \min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$  possède une solution.*

*Si de plus, il existe une fonction de Carathéodory  $h$  croissante en  $s$  appartenant à  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $s, r$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on a  $|g(x, s + t) - g(x, t)| \leq h(x, t)$  p.p sur  $\Omega$  et que pour tout  $s$  appartenant à  $\mathbb{R}$ ,*

$h(\cdot, s)$  appartenant à  $L^1_{loc}$  alors il existe  $u_\Omega$  appartenant à  $W^{1,p}(D)$  qui est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega + g(\cdot, u_\Omega) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K) \\ u_\Omega = 0 & \text{dans } \bar{\Omega}^c \text{ q.p.} \\ u_\Omega = 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (2.3)$$

*Preuve du théorème 2.14.* — La démarche de la preuve est identique à celle du théorème 2.12. Nous insistons seulement sur les particularités. Soit  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}$  telle que  $J(w_n)$  converge vers  $\alpha = \inf\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$ .

Il existe  $\Omega$  et une suite extraite  $\Omega_{n_k}$  contenus dans  $D$  tels que  $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$ . On a  $\Omega_{n_k}$  appartenant à  $\mathcal{O}$  et  $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$  donc  $\Omega \in \mathcal{O}$ .

On a  $\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)} \chi_\Omega$ .

On a  $\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{p.p} \chi_\Omega$  p.p et donc  $J(\Omega) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} J(\Omega_{n_k}) = \alpha$ .

On a aussi  $u_{\Omega_{n_k}}$  converge faiblement vers  $u^*$  qui appartient à  $W^{1,p}_0(D)$  et

$$\begin{cases} -\Delta_p u^* + g(\cdot, u^*) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K) \\ u^* = 1 & \text{sur } \partial K \\ u^* = 0 & \text{dans } \Omega^c \text{ p.p.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Comme  $\Omega_{n_k}$  converge vers  $\Omega$  au sens des compacts, on a :

soit  $L$  un compact quelconque de  $\bar{\Omega}^c$ , la convergence au sens des compacts entraîne que  $L$  est dans  $\bar{\Omega}_{n_k}^c$  et par suite  $u_{\Omega_{n_k}} = 0$  sur  $L$  à partir d'un certain rang. Donc toute combinaison convexe des  $u_{\Omega_{n_k}}$  sera nulle sur  $L$ . Or le lemme de Mazur entraîne l'existence d'une suite de combinaison convexe de la suite  $u_{\Omega_{n_k}}$  qui converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^p(D)$  et donc quitte à en extraire une sous suite, on a  $u_{\Omega_{n_k}}$  converge quasi partout vers  $u^*$  et donc  $u^* = 0$  q.p sur  $\bar{\Omega}^c$ .

On montre de la même manière qu'au théorème 2.12 que  $u^* = 1$  sur  $\partial K$  et que  $u_\Omega = u^*$ .  $\square$

*Remarque 2.15.* — La difficulté dans le théorème 2.14 est de montrer que  $u^* = 0$  q.p sur  $\Omega^c$  en vue d'obtenir la stabilité de  $\Omega$ . c'est-à-dire  $u^*$  appartenant à  $W^{1,p}_0(\Omega)$ . En effet, comme  $\partial\Omega \cap C$  peut contenir des points de rebroussements on ne peut se prononcer de façon systématique sur la stabilité du domaine  $\Omega$  c'est-à-dire  $u_\Omega$  appartient à  $W^{1,p}_0(\Omega)$ . Pour plus d'informations sur la stabilité nous renvoyons le lecteur à [14].

### 2.2.1 Un cas d'existence de solution de classe $C^2$ du problème d'optimisation de forme

THÉORÈME 2.16. — Soit  $L$  un compact de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $(f_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  une suite de fonctions de classe  $C^3$  sur  $L$  avec :

$$\left| \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq M \text{ et } \left| \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| \leq M,$$

où  $M$  est une constante indépendante de  $n$  et strictement positive.

On définit une suite  $(\Omega_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ ,  $\Omega_n = \{x \in L / f_n(x) > 0\}$ .  
On suppose qu'il existe  $\alpha > 0 : |f_n(x)| + |\nabla f_n(x)| \geq \alpha$  pour tout  $x$  appartenant à  $L$ .

On suppose en plus  $\Omega_n$  vérifie la propriété géométrique de la normale et contient  $K$  le compact. Alors il existe  $\Omega$  de classe  $C^2$  tel que  $\Omega_{n_k}$  converge vers  $\Omega$  au sens des compacts et  $J(\Omega) = \min\{J(w) / w \in \mathcal{O}\}$ .

On montre d'abord le lemme suivant :

LEMME 2.17. — Soit  $(f_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  une suite de fonctions définie comme dans le théorème (2.16). On suppose que  $\Omega$  est un ouvert définie par

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in L / f(x) > 0\} \quad \text{avec de plus} \\ \partial\Omega &= \{x \in L / f(x) = 0\} \end{aligned}$$

où  $f$  est un fonction continue sur  $L$  et  $L$  est un compact de  $\mathbb{R}^N$ .

Alors si  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $L$ , on a  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  au sens des compact.

Preuve du lemme 2.17

1. Soit  $K$  un compact contenu dans  $\Omega$ , on pose  $\alpha = \inf_K f$  et on a  $\alpha > 0$ . Il existe  $n_0$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  entraîne que  $|f_n - f|_{L^\infty(K)} < \alpha$  donc pour tout  $x$  appartenant à  $K$  on a  $f_n(x) > f(x) - \alpha \geq 0$  donc  $K$  est contenu  $\Omega_n$ .
2. Soit  $L_0$  un compact de  $\bar{\Omega}^c$  par hypothèse on a  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{x \in L / f(x) \geq 0\}$  donc  $\beta := \max_{L_0} f < 0$ , par conséquent il existe  $n_1$  appartenant à  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_1$  entraîne que  $|f_n - f|_{L^\infty(L_0)} < -\beta$ .  
On a  $f_n(x) \leq f(x) - \beta$  pour tout  $x$  appartenant à  $L_0$  donc  $f(x) - \beta \leq 0$  ceci entraîne que  $f_n(x) \leq 0$  donc  $L_0$  est contenu dans  $\bar{\Omega}_n^c$  car  $\{x \in L / f(x) < 0\} \subset \bar{\Omega}_n^c$ .  $\square$

*Preuve du théorème 2.16.* — Pour ce faire, on applique le théorème d'Ascoli dans  $\mathcal{C}^2(L)$  pour l'ensemble  $\mathcal{B} = \overline{\{f_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$ .  
On munit  $\mathcal{C}^2(L)$  de la norme

$$|g| := |g|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{L^\infty} + \sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{L^\infty}.$$

On vérifie facilement que  $\overline{\{f_n\}}$  est bornée et fermée. Par l'inégalité des accroissements finis, on montre que  $\mathcal{B}$  est équicontinue de même que pour  $\left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left\{ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

$\mathcal{B}$  est compact donc il existe  $n_k \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{C}^2(L)$  :  $f_{n_k}$  converge vers  $f$ . Soit  $\Omega = \{x \in L / f(x) > 0\}$ , on a  $\Omega \subset L_0$ . On a  $|f_n(x)| + |\nabla f_n(x)| \geq \alpha$  pour tout  $x$  appartenant à  $L$ .

Montrons à présent que  $\partial\Omega = \{x \in L / f(x) = 0\}$ .

Soit  $x \in L$  tel que  $f(x) = 0$  on a donc  $|\nabla f(x)| \geq \alpha > 0$ .

On considère

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x + t\nabla f(x)) \quad \text{avec} \\ \phi(0) &= 0, \phi'(0) = |\nabla f(x)|^2 > 0. \end{aligned}$$

Pour  $x_n = x + \frac{1}{n}\nabla f(x)$ ,  $\phi(\frac{1}{n}) > 0$  à partir d'un certain rang donc  $x_n \in \Omega_n$  à partir d'un certain rang et  $x_n$  converge vers  $x$  donc  $x \in \bar{\Omega}$  et par suite  $x \in \partial\Omega$ , c'est-à-dire  $\{x \in L / f(x) = 0\} \subset \partial\Omega$ , et  $\partial\Omega \subset \{x \in L / f(x) = 0\}$  est toujours vrai. Il est évident que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

D'après le lemme (2.17), on a  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  au sens des compacts et avec l'hypothèse de la C-PGN, on a  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  au sens de Hausdorff. Par un raisonnement identique à celui du théorème (2.12), on a  $J(\Omega) = \min\{J(w) / w \in \mathcal{O}\}$ .  $\square$

L'intérêt de ce théorème est de pouvoir faire une hypothèse sur la régularité  $\mathcal{C}^2$  de  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme en vue de procéder à la dérivation par rapport au domaine et de montrer un résultat de monotonie qui nous sera très utile dans la démonstration du résultat d'existence du problème extérieur à frontière libre (1.1).

### 3. Existence du problème extérieur à frontière libre

#### 3.1. Résultats de monotonie

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons d'abord à l'étude de la monotonie de la relation qui à  $\Omega$  associe  $\lambda_\Omega$  où  $\lambda_\Omega$  est un multiplicateur de Lagrange qui apparaît en recherchant une condition d'optimalité vérifiée par le domaine réalisant le minimum de la fonctionnelle  $J$ .

On suppose une bonne fois pour toute que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\mathcal{O}$  représente les ensembles admissibles déjà considérés.

On suppose de plus que  $-\frac{\partial}{\partial u}g(\cdot, u) \leq 0$  dans  $\Omega$ .

*Remarque 3.1.* — Par un résultat du principe de comparaison du maximum dû à Peter Tolksdorf cf [27], on a  $0 \leq u \leq 1$ .

**PROPOSITION 3.2.** — *Si  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et solution du problème d'optimisation de forme  $\min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$  alors il existe un multiplicateur de Lagrange strictement négatif noté  $\lambda_\Omega$  tel que  $-\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_\Omega\right)^{\frac{1}{p}}$  sur  $\partial\Omega$ .*

*Preuve de la proposition 3.2.* — La technique utilisée pour démontrer cette proposition est la méthode des vitesses qui est un des principes de dérivation par rapport au domaine développé par J.P. Zolésio et J. Sokolowski cf [26]. Pour les calculs cf [21].  $\square$

À l'équilibre le domaine  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme  $\min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$  vérifie le problème à frontière libre.

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(\cdot, u) & = 0 & \text{dans } \Omega \setminus K \\ u & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u & = 1 & \text{sur } \partial K \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} & = \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_\Omega\right)^{\frac{1}{p}} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

**PROPOSITION 3.3.** — *Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux domaines bornés, distincts, étoilés par rapport à l'origine, si  $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2$  alors il existe  $t_0 < 1$  tel que  $t_0\Omega_2 \subset \Omega_1$  et  $t_0\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1 \neq \emptyset$ .*

*Preuve de la proposition 3.3.* — cf [21].  $\square$

On a le résultat de monotonie suivant.

PROPOSITION 3.4. — *Supposons que nous avons deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , de classe  $C^2$ , étoilés par rapport à l'origine solutions du problème d'optimisation de forme  $J(\Omega) = \min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$  tels que  $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2$ . On suppose que le compact  $K$  est étoilé par rapport à l'origine alors l'application qui à  $\Omega$  associe  $\lambda_\Omega$  est strictement croissante, c'est-à-dire que  $\lambda_{\Omega_2} > \lambda_{\Omega_1}$ .*

*Preuve de la proposition 3.3. —  $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2$  donc par la proposition (2.1) il existe  $t_0 < 1$  tel que  $x_0 \in t_0\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1$ .*

*On pose  $u_{t_0}(x) = u_2(\frac{x}{t_0})$ ,  $\frac{x}{t_0} \in \Omega_2 \setminus K$  et  $\Omega_{t_0} = t_0\Omega_2$ .  $u_{t_0}$  vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{t_0} + g(x, u_{t_0}) &= 0 & \text{dans } t_0(\Omega_2 \setminus K) \\ u_{t_0} &= 0 & \text{sur } t_0\partial\Omega_2 \\ u_{t_0} &= 1 & \text{sur } t_0\partial K. \end{cases} \quad (3.2)$$

*Or on a  $t_0\Omega_2 \subset \Omega_1$ , on pose  $w_2 = u_{1|_{t_0\Omega_2}}$  donc  $w_2$  vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta_p w_2 + g(x, w_2) &= 0 & \text{dans } t_0\Omega_2 \setminus K \\ w_2 &= u_{1|_{t_0\partial\Omega_2}} & \text{sur } t_0\partial\Omega_2 \\ w_2 &= 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (3.3)$$

*Considérons le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p v + g(x, v) &= 0 & \text{dans } t_0\Omega_2 \setminus K \\ v &= 0 & \text{sur } t_0\partial\Omega_2 \\ v &= u_{t_0} & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (3.4)$$

*On voit que  $u_{t_0}$  est solution du problème (3.4). Par le principe de comparaison [27], on a  $0 \leq u_1 \leq 1$  et  $0 \leq u_{t_0} \leq 1$  donc on a  $u_1 \geq u_{t_0}$  sur  $t_0\partial\Omega_2 \setminus K$ .*

*On applique le principe de comparaison [27] à  $u_1$  et  $u_{t_0}$  donc  $u_1 \geq u_{t_0}$  dans  $\Omega_{t_0} \setminus K$ .  $x_0 \in \partial\Omega_{t_0} \cap \partial\Omega_1$ , on a*

$$\begin{aligned} \frac{u_1(x_0 - \nu h) - u_1(x_0)}{h} &\geq \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h}, \text{ donc on a} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1(x_0 - \nu h) - u_1(x_0)}{h} &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h}, \text{ ceci donne} \\ -\frac{\partial u_1}{\partial \nu} &\geq -\frac{\partial u_{t_0}}{\partial \nu} \end{aligned}$$

*Or  $u_1$  et  $u_2$  sont solutions (3.1) donc il existe  $\lambda_{\Omega_1}$  et  $\lambda_{\Omega_2}$  tels que*

$$-\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \left(\frac{-p}{p-1} \lambda_{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ sur } \partial\Omega_1$$



$$-\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_2}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ sur } \partial\Omega_2.$$

Posons

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{p}} \\ \lambda_2 &= \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_2}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

D'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u_{t_0}(x_0)}{\partial \nu} &= -\frac{\partial u_2\left(\frac{x_0}{t_0}\right)}{\partial \nu} \\ &= -\frac{1}{t_0}\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\left(\frac{x_0}{t_0}\right) \\ &= \frac{1}{t_0}\lambda_2.\end{aligned}$$

Donc  $\lambda_1 \geq \frac{\lambda_2}{t_0}$  ce qui entraîne  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  sinon  $t_0 \geq 1$  ce qui est impossible.

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ \lambda_2 &= \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_2}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ sur } \partial\Omega_2 \\ \lambda_1 &> \frac{\lambda_2}{t_0} \\ \frac{\lambda_2}{t_0} &> \lambda_2 \text{ car } t_0 < 1\end{aligned}$$

donc  $\lambda_1 > \lambda_2$ , c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\left(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{p}} &> \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_2}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ donc} \\ \lambda_{\Omega_2} &> \lambda_{\Omega_1}\end{aligned}$$

donc l'application qui à  $\Omega$  associe  $\lambda_{\Omega}$  est strictement croissante.  $\square$

C'est cette partie qui nous permet de nous prononcer sur l'existence de solutions du problème à frontière libre. Dans toute la suite on prend  $g$  identiquement nulle.

La question qu'on se pose est de savoir s'il existe  $(u_\Omega, \Omega)$  tel que  $\Omega$  appartienne à un ensemble admissible que l'on définira, solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega \setminus K \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\Omega = 1 & \text{sur } \partial K \\ -\frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = c & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $c$  est une constante quelconque strictement positive.

### 3.2. Résultat d'existence du problème à frontière libre

Partant des résultats d'existence d'optimisation de forme et du résultat de monotonie, nous étudions dans ce paragraphe le problème à frontière libre (3.5). Mais avant d'énoncer le théorème d'existence, on a besoin d'une définition qu'on peut retrouver dans [1].

**DÉFINITION 3.5.** — Un ouvert  $\Omega$  est une solution classique du problème (3.5) si  $u_\Omega$  appartient à  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  et vérifie la condition surdéterminée du problème (3.5).

**THÉORÈME 3.6 (CONDITION SUFFISANTE D'EXISTENCE).** — Si  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme  $J(\Omega) = \min\{J(w), w \in \mathcal{O}\}$  est de classe  $C^2$  alors le problème à frontière libre (3.5) admet une solution classique, unique  $\Omega$  contenant  $K$  où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^2$ , étoilé par rapport à l'origine.

*Preuve du théorème 3.6.* — On choisit  $B(0, R)$  contenant  $K$  et  $B(0, r)$  où  $R$  est assez grand,  $r < R$ , avec  $K$ , contenant  $B(0, r)$ .

On cherche une solution  $u_0$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = 0 & \text{dans } B_R \setminus B_r \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ u_0 = 1 & \text{sur } \partial B_r \end{cases}$$

$u_0$  est déterminé explicitement par

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{\ln ||x|| - \ln R}{\ln r - \ln R} & \text{si } p = N \\ \frac{||x||^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}}{r^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}} & \text{si } p \neq N. \end{cases}$$

On a

$$\nabla u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|^2(\ln r - \ln R)} & \text{si } p = N \\ \frac{\frac{p-N}{p-1} \|x\|^{-\frac{N-p+2}{p-1}}}{r^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}} x & \text{si } p \neq N. \end{cases}$$

En particulier on a  $\|\nabla u_0\| < c$  sur  $\partial B_R$  pour  $R$  suffisamment grand. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{dans } B_R \setminus K \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ u = 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (3.6)$$

L'existence de solution du problème (3.6) s'obtient en minimisant la fonctionnelle

$$J : \min\{J(v), v \in V'\} \text{ où } V' = \{v \in W_0^{1,p}(B_R), v = 1 \text{ sur } \partial K\},$$

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla v\|^p dx.$$

D'après la première partie, il existe  $u_R$  solution du problème (3.6).

Considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = 0 & \text{dans } B_R \setminus K \\ v = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ v = u_0 & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (3.7)$$

On voit que pour  $v = u_0$  est solution du problème (3.7). Par le principe de comparaison [27], on a  $0 \leq u_0 \leq 1$  et  $0 \leq u_R \leq 1$  donc sur  $\partial(B_R \setminus K)$  on a  $u_R \geq u_0$  et d'après le principe de comparaison [27], on a  $u_R \geq u_0$  dans  $B_R \setminus K$ , d'où  $\|\nabla u_R\| \geq \|\nabla u_0\|$  sur  $\partial B_R$ .

### Cas où $p = N$

Si  $R_1 < R_0$ , on a  $\|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_1}} \geq \|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_0}}$  donc l'application qui à tout  $R$  associe  $\|\nabla u_0\|_{\partial B_R}$  est décroissante.

Pour initialiser on prend un rayon très grand  $R_0$  ensuite on calcule  $\|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_0}}$  et si  $|c - \|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_0}}| > \delta$ ,  $\delta > 0$  fixé et très petit, on continue en prenant  $R_1 < R_0$  jusqu'à ce qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$|\|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_N}} - c| < \delta, \delta \text{ fixé, très petit.}$$

Soit  $V_0$  un réel strictement positif tel que  $V_0 \leq \text{vol}(B_{R_N}) = \int_{B_{R_N}} dx$ .

Posons

$$\mathcal{O}_N = \{w, w \in \mathcal{O}, w \subset B_{R_N}, \text{vol}(w) = V_0\}.$$

On cherche  $\Omega \in \mathcal{O}_N$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega \setminus K \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\Omega = 1 & \text{sur } \partial K \\ -\frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = c_\Omega & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où  $c_\Omega = \left(\frac{-p}{p-1}\lambda_\Omega\right)^{\frac{1}{p}}$ .

Le problème d'optimisation  $\min\{J(w), w \in \mathcal{O}_N\}$  admet une solution  $\Omega$  et vérifie la condition surdéterminée  $-\frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = c_\Omega$ .

On pose  $u = u_\Omega$ .

$\Omega \in \mathcal{O}_N$  donc  $\Omega \subset B_{R_N}$ , d'après la proposition (2.1), il existe  $t_0 < 1$  tel que  $t_0 B_{R_N} \subset \Omega$  alors on a  $\partial\Omega \cap t_0 \partial B_{R_N} \neq \emptyset$ .

Soit  $x_0 \in \partial\Omega \cap t_0 \partial B_{R_N}$ , on pose  $u_{t_0}(x) = u_{R_N}(\frac{x}{t_0})$ ,  $\frac{x}{t_0} \in B_{R_N} \setminus K$ .  $u_{t_0}$  vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{t_0} = 0 & \text{dans } t_0(B_{R_N} \setminus K) \\ u_{t_0} = 0 & \text{sur } t_0 \partial B_{R_N} \\ u_{t_0} = 1 & \text{sur } t_0 \partial K. \end{cases}$$

Or on a  $t_0 B_{R_N} \subset \Omega$ , on pose  $w_3 = u|_{t_0 B_{R_N}}$  donc  $w_3$  vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p w_3 = 0 & \text{dans } t_0 B_{R_N} \setminus K \\ w_3 = u|_{t_0 \partial B_{R_N}} & \text{sur } t_0 \partial B_{R_N} \\ w_3 = 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p z = 0 & \text{dans } t_0 B_{R_N} \setminus K \\ z = u_1|_{t_0 \partial B_{R_N}} & \text{sur } t_0 \partial B_{R_N} \\ z = u_{t_0}|_{\partial K} & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (3.8)$$

On voit que  $u_{t_0}$  est solution du problème (3.8).

Par le principe de comparaison [27], on a  $0 \leq u_{t_0} \leq 1$  et  $0 \leq u \leq 1$  donc sur  $\partial(t_0 B_{R_N} \setminus K)$  on a  $u \geq u_{t_0}$  et d'après le principe de comparaison [27], on a  $u_1 \geq u_{t_0}$  dans  $t_0 B_{R_N} \setminus K$ .

$x_0 \in \partial\Omega \cap t_0\partial B_{R_N}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{u(x_0 - \nu h) - u(x_0)}{h} &\geq \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h} \quad \text{donc} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 - \nu h) - u(x_0)}{h} &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h} \quad \text{donc} \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &\geq -\frac{\partial u_{t_0}}{\partial \nu} \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &\geq \|\nabla u_{R_N}\|. \end{aligned}$$

Donc on a  $-\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq \|\nabla u_{R_N}\|$  sur  $\partial B_{R_N}$ .

Posons  $\Omega = \Omega_0$ , nous allons itérer avec  $\Omega_1 \in \mathcal{O}_N^1$  où

$$\mathcal{O}_N^1 = \{w, w \in \mathcal{O}, w \subset \Omega_0 \subset B_{R_N}, \text{vol}(w) = V_1\}$$

où  $V_1$  un réel strictement positif.

On cherche  $\Omega_1 \in \mathcal{O}_N^1$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\Omega_1} = 0 & \text{dans } \Omega_1 \setminus K \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ u_{\Omega_1} = 1 & \text{sur } \partial K \\ -\frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial \nu} = c_{\Omega_1} & \text{sur } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

$$\text{où } c_{\Omega_1} = \left(\frac{-p}{p-1} \lambda_{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose  $u_1 = u_{\Omega_1}$ .

Le problème d'optimisation  $\min\{J(w), w \in \mathcal{O}_N^1\}$  admet une solution  $\Omega$  et vérifie la condition surdéterminée  $-\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = c_{\Omega_1}$ .

$\Omega_1 \in \mathcal{O}_N^1$  donc  $\Omega_1 \subset B_{R_N}$ , d'après la proposition (2.1), il existe  $t_1 < 1$  tel que  $t_1 B_{R_N} \subset \Omega_1$  alors on a  $\partial\Omega_1 \cap t_1\partial B_{R_N} \neq \emptyset$ .

Soit  $x_1 \in \partial\Omega_1 \cap t_1\partial B_{R_N}$ .

On pose  $u_{t_1}(x) = u_{R_N}(\frac{x}{t_1})$ ,  $\frac{x}{t_1} \in B_{R_N} \setminus K$ ,  $u_{t_1}$  vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{t_1} = 0 & \text{dans } t_1(B_{R_N} \setminus K) \\ u_{t_1} = 0 & \text{sur } t_1\partial B_{R_N} \\ u_{t_1} = 1 & \text{sur } t_1\partial K. \end{cases}$$

Or on a  $t_1 B_{R_N} \subset \Omega$ , on pose  $w_4 = u_{1|_{t_1 B_{R_N}}}$  donc  $w$  vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p w_4 = 0 & \text{dans } t_1 B_{R_N} \setminus K \\ w_4 = u_{1|_{t_1 \partial B_{R_N}}} & \text{sur } t_1 \partial B_{R_N} \\ w_4 = 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p z = 0 & \text{dans } t_1 B_{R_N} \setminus K \\ z = u_{1|_{t_1 \partial B_{R_N}}} & \text{sur } t_1 \partial B_{R_N} \\ z = u_{t_1|_{\partial K}} & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (3.9)$$

On voit que  $u_{t_1}$  est solution du problème (3.9).

Par le principe de comparaison [27], on a  $0 \leq u_{t_1} \leq 1$  et  $0 \leq u_1 \leq 1$  donc sur  $\partial(t_1 B_{R_N} \setminus K)$ , on a  $u_1 \geq u_{t_1}$  et d'après le principe de comparaison [27], on a  $u_1 \geq u_{t_1}$  dans  $t_1 B_{R_N} \setminus K$ .

$x_1 \in \partial\Omega \cap t_1 \partial B_{R_N}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{u_1(x_1 - \nu h) - u_1(x_1)}{h} &\geq \frac{u_{t_1}(x_1 - \nu h) - u_{t_1}(x_1)}{h} \quad \text{donc} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 - \nu h) - u_1(x_1)}{h} &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{t_1}(x_1 - \nu h) - u_{t_1}(x_1)}{h} \quad \text{donc} \\ -\frac{\partial u_1(x_1)}{\partial \nu} &\geq -\frac{\partial u_{t_1}(x_1)}{\partial \nu} \\ -\frac{\partial u_1(x_1)}{\partial \nu} &\geq \|\nabla u_{R_N}(\frac{x_1}{t_1})\|. \end{aligned}$$

Donc on a  $-\frac{\partial u_1(x_1)}{\partial \nu} \geq \|\nabla u_{R_N}(\frac{x_1}{t_1})\|$ ,  $\frac{x_1}{t_1} \in \partial B_{R_N}$ .

On continue le même principe jusqu'au rang  $k$  tel que  $c_{\Omega_k} < \|\nabla u_{R_N}(\frac{x_k}{t_k})\|$  avec  $\frac{x_k}{t_k} \in \partial B_{R_N}$ .

Or pour tout  $s$  appartenant à  $\partial B_{R_N}$ , on a  $\|\nabla u_0(s)\|_{\partial B_{R_N}} \leq \|\nabla u_{R_N}(s)\|_{\partial B_{R_N}}$  donc, soit il existe  $s_0$  appartenant à  $\partial B_{R_N}$  tel que  $c_{\Omega_k} < \|\nabla u_0(s_0)\|$ , soit  $c_{\Omega_k} \geq \|\nabla u_0(s)\|$ , pour tout  $s$  appartenant à  $\partial B_{R_N}$ .

La suite  $(c_{\Omega_j})_{0 \leq j \leq k}$  est strictement décroissante car  $c_{\Omega_j} = (\frac{-p}{p-1} \lambda_{\Omega_j})^{\frac{1}{p}}$  et que la suite  $(\lambda_{\Omega_j})_{0 \leq j \leq k}$  est strictement croissante. La suite  $(c_{\Omega_j})_{0 \leq j \leq k}$  est minorée et strictement décroissante donc converge vers  $l$ .

a - Si  $c_{\Omega_k} < \|\nabla u_0(s_0)\|$  donc, on a  $c_{\Omega_k} - c < \|\nabla u_0(s_0)\| - c \leq c_{\Omega_{k-1}} - c$  car la monotonie de la suite est stricte.

On a donc à la limite  $l - c \leq \|\nabla u_0(s_0)\| - c \leq l - c$  donc  $l = \|\nabla u_0(s_0)\|$  d'où  $l \approx c$ .

b - Si  $c_{\Omega_k} \geq \|\nabla u_0(s)\|$  pour tout  $s$  appartenant à  $\partial B_{R_N}$ , donc on a  $c_{\Omega_{k-1}} - c \leq \|\nabla u_0(s_0)\| - c \leq c_{\Omega_k} - c$ .  
On a donc à la limite  $l - c \leq \|\nabla u_0(s)\| - c \leq l - c$  donc  $l = \|\nabla u_0(s)\|$  d'où  $l \approx c$ .

Donc la suite  $(\Omega_k)_{0 \leq k \leq N}$  approxime mieux  $\Omega$  solution du problème à frontière libre (3.5).

### Cas où $p \neq N$

Si  $R_1 < R_0$ , on a  $\|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_0}} \leq \|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_1}}$  donc l'application qui à tout  $R$  associe  $\|\nabla u_0\|_{\partial B_R}$  est décroissante.

Pour initialiser, on prend un rayon très grand  $R_0$  ensuite, on calcule  $\|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_0}}$  et si  $|c - \|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_0}}| > \delta$ ,  $\delta > 0$  fixé et très petit, on continue en prenant  $R_1 < R_0$  jusqu'à ce qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$|\|\nabla u_0\|_{\partial B_{R_N}} - c| < \delta, \delta \text{ fixé, très petit.}$$

On reprend la même chose que précédemment.

L'unicité découle du résultat de monotonie, c'est-à-dire de la stricte croissance de l'application qui à  $\Omega$  associe  $\lambda_\Omega$ .  $\square$

### Remerciements

Les auteurs remercient les Professeurs Antoine Henrot de l'Université Henri Poincaré de Nancy I et de Gerard Philippin de l'Université Laval pour les critiques fructueuses.

### Bibliographie

- [1] ACKER (A.) et MEYER (R.A.). — *A free boundary problem for the  $p$ -Laplacian: uniqueness, convexity, and successive approximation of solutions*, Electronic Journal of Differential Equations, 1995(1995), 1-20.
- [2] BARKATOU (M.). — *Un nouveau résultat d'existence en optimisation de forme application à un problème à frontière libre de type Bernoulli*, Thèse de l'Université de Franche-Comté 1997 numéro d'ordre 591.

- [3] BARKATOU (M.) et HENROT (A.). — *Un résultat d'existence optimisation de forme en utilisant la propriété géométrique de la normale*, ESAIM-COCV: Contrôle, Optimisation et Calcul des Variations, (2)1997, 105-123.
- [4] BEURLING (A.). — *On the free boundary problems for Laplace equation*, Seminars on Analytic Functions I, Institute Advance Studies Seminars(1957), Princeton, 248-263.
- [5] BRÉZIS (H.). — *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, Paris, 1993.
- [6] BOCCARDO (L.) et MURAT (F.). — *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations*, Nonlinear analysis, theory, methods and applications, (6), 19, 581-597.
- [7] BUCUR (D.) et ZOLÉSIO (J.P.). —  *$N$ -dimensional shape optimisation under capacity constraint*, J. of Diff.Eq., 123-2(1995), 504-522.
- [8] CHENAIS (D.). — *On the existence of a solution in a domain identification problem*, J.Math.Anal.Appl., 52(1975), 189-289
- [9] DIBENEDETTO (E.). —  *$C^{1+\alpha}$  local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, 7(1983), 827-850.
- [10] FLUCHER (M.) and RUMPF (M.). — *Bernoulli's free boundary problem, qualitative theory and numerical approximation*, J.Reine Angew.Math, 486(1997), 165-204.
- [11] GILBARG (D.) et TRUDINGER (N.S.). — *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [12] GRISVARD (P.). — *Elliptic Problems in non smooth domains*, Pitman Publishing Inc., 1985.
- [13] GUSTAFSSON (B.) et SHAHGHOIAN (H.). — *Existence and geometric properties of solutions of a free boundary problem in potential theory*, J.fur die Reine und Ang.Math., 473(1996), 137-179.
- [14] HEDBERG (L.I.). — *Spectral synthesis and stability in Sobolev spaces*, Euclidean Harmonic Analysis, Lecture Notes in Mathematics, J.J.Benedetto ed., 779, Springer, Berlin 1980.
- [15] HENROT (A.). — *Subsolutions and supersolutions in a free boundary problem*, Arkiv for Math, 32-1(1994), 79-98.
- [16] HENROT (A.) et SHAHGHOIAN (H.). — *Existence of classical solutions to a free boundary problem for the  $p$ -Laplace operator : the exterior convex case*, J.Reine Angew.Math, 521(200), 85-97.
- [17] KAVIAN (O.). — *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, France, Paris, 1993.
- [18] LAVRENT'EV (M.A.). — *Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations*, Noordhoff, 1963.
- [19] LEWIS (J. L.). — *Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations*, Indiana Univ . Math. J., 32(1983), 849-858.
- [20] LIEBERMAN (G. M.). — *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, 12(1988), 1203-1219.
- [21] LY (I.). — *Thèse de doctorat de troisième cycle : Résultats d'existence en optimisation de forme et étude d'un problème extérieur à frontière libre : cas du  $p$ -laplacien*, Soutenue le 20 juin 2002, UGB, Sénégal.
- [22] LY (I.) et SECK (D.). — *Étude d'un problème à frontière libre pour le  $p$ -laplacien*, CRAS, Paris 332(2001), Série I, 899-902.
- [23] MEYER (R. A.). — *Approximation of the solutions of free boundary problems for  $p$ -Laplace equations*, Ph.D. Dissertation, Wichita State University, 1993.
- [24] PIRONNEAU (O.). — *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer Series in Computational Physics, Springer, New York 1984.



- [25] SECK (D.). — *Étude d'un problème à frontière libre de type Bernoulli*, Thèse d'Université Franche-Comté numéro d'ordre 505, 1996.
- [26] SOKOLOWSKI (J.) et ZOLESIO (J.P.). — *Introduction to Shape Optimization*, Springer-Verlag, Paris, 1992.
- [27] TOLKSDORF (P.). — *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. Partial Differential Equations, 8(1983), 773-817.
- [28] TOLKSDORF (P.). — *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J.Differential Equations, 52(1984), 126-150.