ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T.J. RABEHERIMANANA

Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 11, nº 2 (2002), p. 201-224

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2002_6_11_2_201_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 2002
pp. 201–224

Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires (*)

T. J. RABEHERIMANANA (1)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous démontrons une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les équations d'évolution aléatoire, en utilisant la technique de grandes déviations. Le résultat que nous obtenons est alors une extension de celui de Strassen [14] pour le brownien et de celui de Baldi [5] pour les diffusions.

ABSTRACT. — In this paper, we prove a functional iterated law for random evolution equations similar to that of Strassen [14] for brownian motion and of Baldi [5] for diffusions using large deviations principle.

Introduction

L'étude des grandes déviations ou l'analyse du comportement asymptotique d'un certain processus perturbé particulier vers un processus limite permet de démontrer une loi fonctionnelle du logarithme itéré [1] à [5]. Parmi les processus aléatoires, solutions d'E.D.S., nous nous intéressons :

- aux équations d'évolutions aléatoires perturbées [6], [7]
- aux diffusions perturbées [8] à [13].

Notons que les problèmes de grandes déviations associés aux premières sont traités sous condition particulière : la matrice de diffusion est égale à l'indentité ; tandis que ceux associés aux dernières sont résolus sous certaines conditions [8] à [12] et en toute généralité [13].

(*) Reçu le 6 décembre 1999, accepté le 11 octobre 2002

(1) Département de Mathématique et Informatique, B.P. 906, Ankatso, 101, Antananarivo, Madagascar.

L'intérêt d'un résultat de G.D. pour un modèle contenant ces deux types d'équations est

- d'analyser des propriétés, quand $\varepsilon \to 0$, d'opérateurs différentiels du second ordre [6] à [13] (par exemple étude de problème de Dirichlet, ...)
- de déduire une loi fonctionnelle du logarithme itéré.

  Ce sont les raisons pour lesquelles nous étudions les processus aléatoires, solutions de l'équation de Stratonovich (1)

$$dX_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\varepsilon,j}(X_t^\varepsilon) \circ dW_t^j + c_\varepsilon(X_t^\varepsilon)dt + b_{\varepsilon,\nu(t)}(X_t^\varepsilon)dt; X_0^\varepsilon = x \in IR^d \qquad (1)$$

- $t \in [0,1]$;
- W est un mouvement brownien standard défini sur l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{J}, \mathcal{J}_t, P)$ où $\Omega = C_0([0,1], IR^r)$, espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^r$, issues de 0 à l'instant 0 ;
- ν est un processus markovien défini sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{F}, \widetilde{F}_t, \widetilde{P})$ indépendant du brownien W ;
- le champ de vecteurs $c_\varepsilon(x)$ est assez régulier sur $\mathbb{R}^d$;
- l'entrée $b_{\varepsilon,\nu(t)}(x)$ est assez régulière sur $\mathbb{R}^d$.

Plus précisément, dans cet article, nous nous proposons de démontrer un résultat de grandes déviations (voir le théorème 1) relatif à X^ε, solution de (1). C'est un résultat suffisant pour déterminer l'ensemble – limite, pour $u \to +\propto$ *p.s.*, de la famille $\{Z_u\}$, solution de l'équation de Stratonovich

$$dZ_u(t) = c_{1/u}\big(Z_u(t)\big)dt + \frac{1}{\sqrt{\log(\log u)}}\widetilde{\sigma}_u(Z_u(t)) \circ dW_t^{(u)} + b_{1/u,\nu(t)}\big(Z_u(t)\big)dt; Z_u(0) = x$$

considérée comme une v.a. à valeurs dans $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$, où $W_t^{(u)} = \dfrac{1}{\sqrt{u}}W_{ut}$. C'est notre théorème 5.

Cet article constitue une nouvelle application de la théorie des décompositions de flots (suivant Bismut [15] et Kunita [16]) et du principe des contractions (lemme 3).

Les résultats essentiels de ce travail sont donc le théorème 1, le corollaire 4 et le théorème 5.

Le théorème 1 est l'analogue des résultats de Ben Arous & Castell [13] ;

Le corollaire 4 est l'analogue des résultats de Doss & Stroock [9], de nous-même [10], [11] et de Ben Arous & Castell [13] ;

Le théorème 5 concerne la loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires, c'est l'analogue du théorème 2.2 de Baldi [5] pour les diffusions, à condition de se placer dans un espace approprié $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$ contenant, en un sens, l'espace $C_x\big([0,1], IR^d\big)$.

Cet article comporte deux sections.

Dans la section 1, nous adaptons aux petites perturbations d'équations d'évolution aléatoire (1) les résultats de G.D. de Ben Arous & Castell [13] concernant les diffusions, généralisant [8] à [12]. Signalons aussi le fait que dans [9] à [11], [13] une version de la loi conditionnelle de X^ε sachant εW est considérée.

Les résultats de la section 1 sont ensuite utilisés dans la section 2 pour démontrer une loi fonctionnelle du logarithme itéré semblable à celle de Strassen [14] pour le brownien et de Baldi [5] pour les diffusions (cf. théorème 5). Nous en déduisons comme application (cf. corollaire 13) l'ensemble – limite d'une certaine famille de processus à valeur mesure.

Dans toute la suite, le $\langle o \rangle$ désigne la différentielle au sens de Stratonovich. Nous noterons $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité $P \otimes \widetilde{P}$ définie sur $\Omega \times \widetilde{\Omega} \cdot E$ (resp. $\widetilde{E}$, $\mathbb{E}$) désignera l'espérance relative à P (resp. $\widetilde{P}$, $\mathbb{P}$). Nous désignerons le processus $\nu(t)$ et ses trajectoires de la même façon. $C_x\big([0,1], IR^d\big)$ désigne l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$, issues de x à l'instant 0, muni de la topologie de la convergence uniforme.

1. Petites perturbations d'équations d'évolutions aléatoires

Dans cette section, nous supposons vérifiées les conditions $C1$ et $C2$ suivantes

C 1.

- Les r-champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d \sigma_{\varepsilon,1}, \dots$ et $\sigma_{\varepsilon,r}$ sont de classe C_b^{m+2} pour $m \geqslant d+1$ et convergent uniformément vers $\sigma_1, \dots$ et σ_r lorsque ε tend vers 0.

C 2.

- Le champ de vecteurs c_ε sur $\mathbb{R}^d$ est de classe C_b^{m+2} et converge uniformément vers c lorsque ε tend vers 0 ;
- ν est un processus markovien indépendant du brownien W à valeurs dans $\mathbb{R}^r$;
- pour chaque $* \in \widetilde{\Omega}$, l'entrée $b_{\varepsilon,*}(x)$ est de classe C_b^{m+2} et $b_{\varepsilon,*}$ converge uniformément vers b_* lorsque ε tend vers 0.

Signalons le fait que notre situation contient les cas où

1) $\nu(t)$ est un processus markovien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas, on prendra $\widetilde{\Omega} = D\big([0,1], IN\big)$, l'espace des fonctions continues à droite de $[0,1]$ dans $\mathbb{N}$, muni de la topologie de Skorohod ou de la L^p-topologie ;

2) $\nu(t)$ est un processus gaussien indépendant du brownien W_t ; $b_{\varepsilon,\nu(t)}(x) = \sum_{i=1}^{l} \widetilde{\sigma}_{\varepsilon,i}(x) \cdot \nu_t^j$ où les $\widetilde{\sigma}_{\varepsilon,i}(x)$ sont l-champs de vecteurs réguliers sur $\mathbb{R}^d$. Ceci peut s'étendre dans le cas où $\nu(t) = \dot{\widetilde{W}}_t = \Big(\dot{\widetilde{W}}_t^i\Big)_{i\in[1,l]}$ est un « bruit blanc » indépendant du brownien $W_t; b_{\varepsilon,\nu(t)}(x) = \sum_{i=1}^{l} \widetilde{\sigma}_{\varepsilon,i}(x) \cdot \dot{\widetilde{W}}_t^j$ où les $\widetilde{\sigma}_{\varepsilon,i}(x)$ sont l-champs de vecteurs réguliers sur $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, on prendra $\widetilde{\Omega} = C_0\big([0,1], IR^l\big)$, $\widetilde{P}$ la mesure de Wiener correspondante et la formulation exacte de (1) est

$$dX_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\varepsilon,j}(X_t^\varepsilon) \circ dW_t^j + c_\varepsilon(X_t^\varepsilon)dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{l} \widetilde{\sigma}_{\varepsilon,i}(X_t^\varepsilon) \circ d\widetilde{W}_t^i; X_0^\varepsilon = x \in IR^d \qquad (1')$$

Considérons X^ε, solution de (1). Lorsque ε tend vers 0, bien évidemment X^ε converge vers X^0, solution du processus aléatoire

$$dX_t^0 = c(X_t^0)dt + b_{\nu(t)}(X_t^0)dt; X_0^0 = x \in IR^d \qquad (2)$$

En général, un principe classique de grandes déviations n'est pas atteint puisque les ensembles des niveaux ne sont pas compacts. Seulement, en considérant X^ε, solution de (1) comme une v.a. à valeurs dans $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$, un principe de grandes déviations est atteint. En effet, considérons l'application qui à $\omega \in C_0\big([0,1], IR^r\big)$ associe $X^\varepsilon(\omega,\bullet) \in L^p\Big(\widetilde{\Omega};$ $C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$, où p est un entier $\geqslant 1$. Ainsi, $X^\varepsilon(\omega,\bullet)$ est donc l'application qui à $\nu \in \widetilde{\Omega}$ associe X^ε, solution de (1).

Soit P^ε la loi de X^ε, considérée comme un v.a. à valeurs dans $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x$ $\big([0,1], IR^d\big)\Big)$; P^ε est une mesure de probabilités sur $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$. Nous avons alors le résultat suivant

THÉORÈME 1.— *Sous les conditions* **C 1** *et* **C 2**, P^ε *satisfait à un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action* λ *définie par la formule*

$$\lambda(g) = \inf\left\{\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds, \ \textit{lorsque}\ g = \beta(f)\right\}$$

$$\textit{pour chaque}\ g \in L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big) \qquad (3)$$

où

$$g = \beta(f) \Leftrightarrow dg_t = \left[\sum_{j=1}^r \sigma_j(g_t)\dot{f}_t^j + c(g_t) + b_{\nu(t)}(g_t)\right] dt; g_0 = x \qquad (4)$$

Avec la convention, $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Remarque.— Ce théorème est indépendant du processus ν et de ses propriétés.

Démonstration.— Le théorème se déduit des résultats de grandes déviations pour les flots stochastiques et du principe des contractions. Plus précisément, on considère la diffusion, solution de l'E.D.S.

$$d\xi_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{j=1}^r \sigma_{\varepsilon,j}(\xi_t^\varepsilon) \circ dW_t^j; \xi_0^\varepsilon = x \in IR^d \qquad (5)$$

Notons $\Psi_t^\varepsilon(x)$ la version essentiellement unique de $\xi_t^\varepsilon(x)$ qui est un flot de C^m-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^d$, i.e. un élément de $\mathbb{D}^d$, où

$$ID^d \equiv \left\{\begin{array}{l} \varphi : [0,1]\times IR^d \ \rightarrow \ IR^d, \quad \text{tel que} \\ \qquad (t;x) \qquad \rightarrow \ \varphi_t(x) \\ \forall\ t \in [0,1], \varphi_t \text{ est un } C^m\text{-difféomorphisme de } IR^d \\ \forall\ l \in IN^d, |l| \leqslant m, \dfrac{\partial^{|l|}\varphi_t}{\partial x^l}(x), \dfrac{\partial^{|l|}(\varphi_t)^{-1}}{\partial x^l}(x) \text{ sont continues en } (t,x) \end{array}\right\}$$

Notons H^r le sous-espace de Cameron-Martin sur $\mathbb{R}^r$.

$H^r = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}^r$, f absolument continue avec une dérivée de carrée intégrable telle que $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds < +\infty\}$. H^r est un espace d'Hilbert muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle_{H^r} = \int_0^1 \dot{f}_s \cdot \dot{g}_s ds.$$

Pour chaque $f \in H^r$, nous définissons une application $\mathcal{J}_x^\varepsilon$ de $H \to C_x\big([0,1], IR^d\big)$ par

$$g = \mathcal{J}_x^\varepsilon(f) \Leftrightarrow dg_t = \left[\sum_{j=1}^r \sigma_{\varepsilon j}(g_t)\dot{f}_t^j\right] dt; g(0) = x \tag{6}$$

Sous les hypothèses faites sur les coefficients, $\mathcal{J}^\varepsilon(f)$ est un élément de $\mathbb{D}^d$.

Donc, nous définissons une application $\mathcal{J}^\varepsilon$:

$$\begin{array}{ccc} H^r & \to & ID^d, \\ f & \to & \big(t, x \mapsto g_t(f)(x)\big) \end{array}$$

Suivant les idées de Bismut [15], $\mathcal{J}^\varepsilon$ admet une extension mesurable sur $C_0\big([0,1], IR^r\big)P-p.s.$ Cette extension sera encore notée $\mathcal{J}^\varepsilon \cdot \mathcal{J}_t^\varepsilon(\omega)(x)$ désignera la solution de l'E.D.S.

$$d\zeta_t^\varepsilon = \sum_{j=1}^r \sigma_{\varepsilon,j}(\zeta_t^\varepsilon) \circ dW_t^j; \zeta_0^\varepsilon = x \in IR^d \tag{7}$$

Nous définissons maintenant la fonctionnelle d'action associée à la loi de Ψ^ε. Soit $\Psi \in \mathbb{D}^d$,

$$I(\Psi) = \inf\left\{\frac{1}{2}\|f\|_{H^r}^2 / f \in H^r, \mathcal{J}(f) = \Psi\right\}, \tag{8}$$

$\mathcal{J}$ est définie dans (6) en faisant tendre ε vers 0.

$\mathbb{D}^d$ sera muni de la $C^{0,k}$ ou de la $\widetilde{C}^{0,k}$-topologie définie de la façon suivante pour tout $k \leqslant m$

- $\Psi^n \xrightarrow{C^{0,k}} \Psi$ si, et seulement si, $\forall$ K compact de $\mathbb{R}^d$

$$\sup_{x \in K; t \in [0,1]; |\alpha| \leqslant k} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}\Psi_t}{\partial x^\alpha}(x) - \frac{\partial^{|\alpha|}\Psi_t^n}{\partial x^\alpha}(x) \right\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

- $\Psi^n \overset{\widetilde{C}^{0,k}}{\longrightarrow} \Psi$ si, et seulement si, $\forall\, K$ compact de $\mathbb{R}^d$

$$\sup_{x\in K;t\in[0,1];|\alpha|\leqslant k}\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}\Psi_t}{\partial x^\alpha}(x)-\frac{\partial^{|\alpha|}\Psi_t^n}{\partial x^\alpha}(x)\right\| + \left\|\frac{\partial^{|\alpha|}(\Psi_t)^{-1}}{\partial x^\alpha}(x)-\frac{\partial^{|\alpha|}(\Psi_t^n)^{-1}}{\partial x^\alpha}(x)\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $A\subset \mathbb{D}^d$, soit

$$I(A)=\inf\{I(\Psi),\Psi\in A\}\,. \tag{9}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2 [13]. — *$\mathbb{D}^d$ est muni de la $C^{0,k}$ ou de la $\widetilde{C}^{0,k}$-topologie pour tout $k\leqslant m-1-\left[\frac{d}{2}\right]$.*

Alors

1) $\forall\, L>0$, $\{I\leqslant L\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{D}^d$.

2) $\forall\, A\subset\mathbb{D}^d$

$$-I(A^\circ)\leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log P(\Psi^\varepsilon\in A) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log P(\Psi^\varepsilon\in A)\leqslant -I(A^-) \tag{10}$$

où A° (resp. A^-) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A) dans $\mathbb{D}^d$.

La démonstration de ce théorème est une modification de la méthode d'Azencott [17], voir le théorème 3 de [13].

Pour chaque $\Psi\in\mathbb{D}^d$, nous associons deux champs vectoriels aléatoires sur $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} s^\Psi_{\varepsilon,\nu}(t,y) &= \Psi_t^{-1} * b_{\varepsilon,\nu(t)}(y)\\ &\overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial\Psi_t}{\partial x}(y)\right)^{-1} b_{\varepsilon,\nu(t)}\big(\Psi_t(y)\big)\\ \overline{s}^\Psi_\varepsilon(t,y) &= \Psi_t^{-1} * c_\varepsilon(y) \end{aligned} \tag{11}$$

Nous considérons alors l'équation différentielle ordinaire aléatoire

$$d\widetilde{z}^{\Psi,\varepsilon}_t = s^\Psi_{\varepsilon,\nu}(t,\widetilde{z}^{\Psi,\varepsilon}_t)dt+\overline{s}^\Psi_\varepsilon(t,\widetilde{z}^{\Psi,\varepsilon}_t)dt;\ \widetilde{z}^{\Psi,\varepsilon}_0 = x \tag{12}$$

Définissons

$$ID_b^d = \left\{ \begin{array}{ll} \Psi \in ID^d, \sup\limits_{x \in IR^d; t\in[0,1]} \left\| \dfrac{\partial^{|\alpha|}(\Psi_t)^{-1}}{\partial x^\alpha}(x) \right\| < +\infty |\alpha| = 1,2,3 \\ \sup\limits_{x \in IR^d; t\in[0,1]} \left\| \dfrac{\partial^{|\alpha|}\Psi_t}{\partial x^\alpha}(x) \right\| < +\infty |\alpha| = 1,2,3 \end{array} \right\} \tag{13}$$

ID_b^d est un ouvert de $\mathbb{D}^d$ pour la $\widetilde{C}^{0,3}$-topologie. Quand $\Psi \in ID_b^d$, grâce aux conditions **C 1** et **C 2**, l'équation (12) possède une solution.

Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^\varepsilon : ID_b^d & \to & L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big) \\ \varphi & \to & \Big(\nu \to \varphi_\bullet\big(\widetilde{z}_\bullet^{\varphi,\varepsilon}(\nu)\big)\Big) \end{array} \tag{14}$$

Introduisons la condition **C 2′**.

C 2′. — En plus des conditions **C 1** et **C 2**, nous supposons que :

- les v.a. $\sup\limits_{s\leqslant t;y} \left\| \dfrac{\partial s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}(s,y)}{\partial x} \right\|^p$ et $\displaystyle\int_0^t \left\| \widetilde{z}_s^{\phi^n,\varepsilon} - \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon} \right\|^p ds$ sont non corrélées, $\forall\, p \geqslant 1$;
- les v.a. $\sup\limits_{s\leqslant t;y} \left\| \dfrac{\partial s^{\phi}_{\varepsilon,\nu(s)}(s,y)}{\partial x} \right\|^p$ et $\displaystyle\int_0^t \left\| \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon} - \widetilde{z}_s^{\phi,0} \right\|^p ds$ sont non corrélées.

En particulier, cette condition est vérifiée si $b_{\varepsilon,\nu(t)}(x) = (-1)^{\nu(t)} b_\varepsilon(x)$ où

- l'entrée $b_\varepsilon(x)$ est assez régulière ;
- le processus markovien $\nu(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Nous avons alors le résultat suivant :

LEMME 3. — *Sous la condition* **C 2′**, *quand ID_b^d est muni de la $\widetilde{C}^{0,3}$-topologie, la famille d'applications $(\mathcal{D}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par (14) est continue et converge uniformément vers $\mathcal{D}$ sur tous les compacts de ID_b^d, lorsque ε tend vers 0, où $\mathcal{D}$ désigne l'application de*

$$\begin{array}{rcl} ID_b^d & \to & L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big) \\ \varphi & \to & \Big(\nu \to \varphi_\bullet\big(\widetilde{z}_\bullet^{\varphi,0}(\nu)\big)\Big) \end{array}$$

et $\widetilde{z}_t^{\varphi,0}$ *la solution de*

$$d\widetilde{z}_t^{\varphi,0} = s_{0,\nu}^{\varphi}\big(t, \widetilde{z}_t^{\varphi,0}\big)dt + \overline{s}_0^{\varphi}\big(t, \widetilde{z}_t^{\varphi,0}\big)dt; \widetilde{z}_0^{\varphi,0} = x$$

Démonstration du lemme 3.

- *Continuité de* $\mathcal{D}^{\underline{\varepsilon}}$.

Soient ϕ^n et ϕ des flots de difféomorphismes dans ID_b^d, tels que $\phi^n \xrightarrow{\widetilde{C}^{0,3}} \phi$ lorsque $n \to +\infty$.

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{D}^{\varepsilon}(\phi^n) - \mathcal{D}^{\varepsilon}(\phi)\|_{L^p(\widetilde{\Omega}, C_x)} \\
&= \widetilde{E}^{1/p}\left[\left\| \sup_{t\in[0,1]} \phi_t^n(\widetilde{z}_t^{\phi^n,\varepsilon}) - \phi_t(\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon})\right\|^p\right] \leqslant Q_1 + Q_2
\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad Q_1 = \sup_{t,y}\left\|\frac{\partial\phi_t^n}{\partial x}(y)\right\| \widetilde{E}^{1/p}\left[\sup_t \left\|\widetilde{z}_t^{\phi^n,\varepsilon} - \widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}\right\|^p\right]$$

$$Q_2 = \widetilde{E}^{1/p}\left[\left\|\sup_{t\in[0,1]} \phi_t^n(\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}) - \phi_t(\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon})\right\|^p\right].$$

Traitement de Q_1.

Les dérivées premières de ϕ_t^n convergent uniformément sur tous les compacts de $[0,1] \times IR^d$ vers les dérivées correspondantes de ϕ_t (qui sont bornées). Donc $\sup_{n,t,y}\left\|\frac{\partial\phi_t^n}{\partial x}(y)\right\| < +\infty$.

Démontrons maintenant que $\widetilde{E}\left[\sup_t \left\|\widetilde{z}_t^{\phi^n,\varepsilon} - \widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}\right\|^p\right] \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Pour $t \in [0,1]$, posons $f_n(t) = \widetilde{E}^{1/p}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\|\widetilde{z}_s^{\phi^n,\varepsilon} - \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\right\|^p\right]$. L'inégalité du triangle dans L^p et la convexité de $x \to x^p$ pour $p \geqslant 1$ impliquent

$$\begin{aligned}
f_n(t) \leqslant\ & \widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\overline{s}_{\varepsilon}^{\phi^n}\big(s, \widetilde{z}_s^{\phi^n,\varepsilon}\big) - \overline{s}_{\varepsilon}^{\phi^n}\big(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\big)\right\|^p ds\right] \\
&+ \widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\overline{s}_{\varepsilon}^{\phi^n}\big(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\big) - \overline{s}_{\varepsilon}^{\phi}\big(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\big)\right\|^p ds\right] \\
&+ \widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|s_{\varepsilon,\nu(s)}^{\phi^n}\big(s, \widetilde{z}_s^{\phi^n,\varepsilon}\big) - s_{\varepsilon,\nu(s)}^{\phi^n}\big(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\big)\right\|^p ds\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\| s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big) - s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big)\right\|^p ds\right]\\
&\leqslant \sup_{t,y}\left\|\frac{\partial \overline{s}^{\phi^n}_{\varepsilon}}{\partial x}(t,y)\right\| \cdot \widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\widetilde{z}^{\phi^n,\varepsilon}_s - \widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\right\|^p ds\right]\\
&+\widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\overline{s}^{\phi^n}_{\varepsilon}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big) - \overline{s}^{\phi}_{\varepsilon}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big)\right\|^p ds\right]\\
&+\widetilde{E}^{1/p}\left[\sup_{t,y}\left\|\frac{\partial s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(t)}}{\partial x}(t,y)\right\|^p \cdot \int_0^t \left\|\widetilde{z}^{\phi^n,\varepsilon}_s - \widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\right\|^p ds\right]\\
&+\widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\| s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big) - s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big)\right\|^p ds\right]
\end{aligned}
$$

grâce à la condition **C 2′**

$$
\begin{aligned}
f_n(t) \leqslant{}& \sup_{t,y}\left\|\frac{\partial \overline{s}^{\phi^n}_{\varepsilon}}{\partial x}(t,y)\right\| \cdot \widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\widetilde{z}^{\phi^n,\varepsilon}_s - \widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\right\|^p ds\right]\\
&+\widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\overline{s}^{\phi^n}_{\varepsilon}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big) - \overline{s}^{\phi}_{\varepsilon}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big)\right\|^p ds\right]\\
&+\widetilde{E}^{1/p}\left[\sup_{t,y}\left\|\frac{\partial s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(t)}}{\partial x}(t,y)\right\|^p\right] \cdot \widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\widetilde{z}^{\phi^n,\varepsilon}_s - \widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\right\|^p ds\right]\\
&+\widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\| s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big) - s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big)\right\|^p ds\right]
\end{aligned}
$$

Mais, $\widetilde{E}^{1/p}\left[\int_0^t \left\|\widetilde{z}^{\phi^n,\varepsilon}_s - \widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\right\|^p ds\right] \leqslant \left(\int_0^t f_n^p(u)du\right)^{1/p}$. De plus, comme $\phi^n \overset{\widetilde{C}^{0,3}}{\longrightarrow} \phi$, alors pour chaque $\bullet \in \widetilde{\Omega}$, $s^{\phi^n}_{\varepsilon,\bullet}$ (resp. $\overline{s}^{\phi^n}_{\varepsilon}$) converge uniformément sur tous les compacts de $[0,1]\times\mathbb{R}^d$ (resp. $\overline{s}^{\phi}_{\varepsilon}$) ainsi que ses premières dérivées. Donc,

$$
\widetilde{E}\left[\sup_{n,t,y}\left\|\frac{\partial s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(t)}}{\partial x}(t,y)\right\|^p\right] < +\infty,\ \forall\, p \geqslant 1 \text{ et } \sup_{n,t,y}\left\|\frac{\partial \overline{s}^{\phi^n}_{\varepsilon}}{\partial x}(t,y)\right\| < +\infty.
$$

Ainsi il existe une constante C telle que

$$
f_n^p(t) \leqslant C\left[\int_0^t f_n^p(s)ds + \widetilde{E}\left[\int_0^1 \left\|\overline{s}^{\phi^n}_{\varepsilon}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big) - \overline{s}^{\phi}_{\varepsilon}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big)\right\|^p ds\right]\right.
\left. + \widetilde{E}\left[\int_0^1 \left\| s^{\phi^n}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big) - s^{\phi}_{\varepsilon,\nu(s)}\big(s,\widetilde{z}^{\phi,\varepsilon}_s\big)\right\|^p ds\right]\right]
$$

Par le lemme de Gronwall, on a

$$\forall\, t \in [0,1],\, f_n^p(t) \leqslant C \begin{bmatrix} \widetilde{E}\left[\displaystyle\int_0^1 \left\|\overline{s}_\varepsilon^{\phi^n}\left(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\right) - \overline{s}_\varepsilon^{\phi}\left(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\right)\right\|^p ds\right] \\ +\widetilde{E}\left[\displaystyle\int_0^1 \left\|s_{\varepsilon,\nu(s)}^{\phi^n}\left(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\right) - s_{\varepsilon,\nu(s)}^{\phi}\left(s, \widetilde{z}_s^{\phi,\varepsilon}\right)\right\|^p ds\right] \end{bmatrix} \cdot e^{Ct} = \chi$$

et nous démontrons que le dernier membre tend vers 0.

Soit R un réel positif et notons $B(0,R)$ la boule de rayon R centrée en 0 dans $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned} \chi \leqslant & \sup_{t\in[0,1],y\in B(0,R)} \left\|\overline{s}_\varepsilon^{\phi^n}(t,y) - \overline{s}_\varepsilon^{\phi}(t,y)\right\|^p \\ & + C\widetilde{E}\left[1_{\sup_{t\in[0,1]} \|\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}\| \geqslant R}, \left\|\overline{s}_\varepsilon^{\phi^n}(t,y)\right\|^p + \left\|\overline{s}_\varepsilon^{\phi}(t,y)\right\|^p\right] \\ & + \widetilde{E}\left[\sup_{t\in[0,1],y\in B(0,R)} \left\|s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi^n}(t,y) - s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi}(t,y)\right\|^p\right] \\ & + C\widetilde{E}\left[1_{\sup_{t\in[0,1]} \|\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}\| \geqslant R}, \left\|s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi^n}(t,y)\right\|^p + \left\|s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi}(t,y)\right\|^p\right] \end{aligned}$$

La convergence de ϕ_n vers ϕ implique que

$$\begin{aligned} & \sup_{n,t,y} \left\|\overline{s}_\varepsilon^{\phi^n}(t,y)\right\|^{2p} + \left\|\overline{s}_\varepsilon^{\phi}(t,y)\right\|^{2p} \\ & \qquad + \widetilde{E}\left[\sup_{n,t,y} \left\|s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi^n}(t,y)\right\|^{2p} + \left\|s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi}(t,y)\right\|^{2p}\right] < +\infty\ ; \end{aligned}$$

donc en utilisant l'inégalité de Schwartz, il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned} \chi \leqslant & \sup_{t\in[0,1],y\in B(0,R)} \left\|\overline{s}_\varepsilon^{\phi^n}(t,y) - \overline{s}_\varepsilon^{\phi}(t,y)\right\|^p + C\widetilde{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \left\|\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}\right\| \geqslant R\right) \\ & + \widetilde{E}\left[\sup_{t\in[0,1],y\in B(0,R)} \left\|s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi^n}(t,y) - s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi}(t,y)\right\|^p\right]. \end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$. En utilisant l'inégalité de Tchébychev,

$$C\widetilde{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \left\|\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}\right\| \geqslant R\right) \leqslant \frac{C\widetilde{E}\left(\sup_{t\in[0,1]} \left\|\widetilde{z}_t^{\phi,\varepsilon}\right\|^p\right)}{R^2} \leqslant \frac{\eta}{2},$$

si R est bien choisi.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N$

$$\sup_{t\in[0,1],y\in B(0,R)} \left\|\overline{s}_{\varepsilon}^{\phi^n}(t,y) - \overline{s}_{\varepsilon}^{\phi}(t,y)\right\|^p + \widetilde{E}\left[\sup_{t\in[0,1],y\in B(0,R)} \left\|s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi^n}(t,y) - s_{\varepsilon,\nu(t)}^{\phi}(t,y)\right\|^p\right] < \frac{\eta}{2}.$$

Donc pour $n \geqslant N$, on a $\chi \leqslant \eta$.

Traitement de Q_2. — Voir [13] p. 43.

• La *convergence uniforme de* $\mathcal{D}^\varepsilon$ *vers* $\mathcal{D}$ sur tous les compacts de ID_b^d se démontre de la même façon en utilisant la condition **C 2′**.

Fin de la démonstration du théorème 1.

$\forall\ R > 0$, définissons des champs de vecteurs $\sigma_{\varepsilon,j}^R(y) = 0$ si $\|y\| \geqslant 2R$; $\sigma_{\varepsilon,j}^R(y) = \widetilde{\sigma}_{\varepsilon,j}(y)$ si $\|y\| \leqslant R$.

Considérons $X_t^{\varepsilon,R} = \left(X_t^{\varepsilon,R}\right)_{t\in[0,1]}$ solution de l'E.D.S.

$$dX_t^{\varepsilon,R} = c_\varepsilon\left(X_t^{\varepsilon,R}\right)dt + \varepsilon\sum_{i=1}^r \sigma_{\varepsilon,i}^R\left(X_t^{\varepsilon,R}\right) \circ dW_t^i + b_{\varepsilon,\nu(t)}\left(X_t^{\varepsilon,R}\right)dt\ ; X_0^{\varepsilon,R} = x \quad (15)$$

Quand X_t^ε reste dans $B(0,R)$, $X_t^{\varepsilon,R} = X_t^\varepsilon$. De plus, X^ε et $X^{\varepsilon,R}$ sont solutions d'E.D.S. à coefficients vérifiant les conditions **C 1** et **C 2**. Donc on peut trouver des constantes $C_0, R_0 > 0$ telles que pour $R \geqslant R_0$ et $\varepsilon \leqslant 1$,

$$\left.\begin{aligned} IP\left(\sup_t \|X_t^\varepsilon\| \geqslant R\right) &\leqslant C_0 \cdot \exp -\frac{R^2}{C_0} \\ IE\left(\sup_t \left\|X_t^{\varepsilon,R} - X_t^\varepsilon\right\|^p\right) &\leqslant C_0 \cdot \exp -\frac{R^2}{C_0} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

En notant $\phi^{\varepsilon,R}$ le flot stochastique associé à l'E.D.S.

$$d\xi_t^{\varepsilon,R} = \varepsilon\sum_{i=1}^r \sigma_{\varepsilon,i}^R\left(\xi_t^{\varepsilon,R}\right) \circ dW_t^i\ ; X_0^{\varepsilon,R} = x, \phi^{\varepsilon,R} \in ID_b^d,$$

$$\text{et } \phi^{\varepsilon,R}(x) = x, \text{ dès que } x \notin B(0,R).$$

Le fait que λ défini par (3) soit une bonne fonctionnelle d'action résulte d'une part de I qui en est une (cf. théorème 2) et d'autre part de la théorie des décompositions de flots (cf. proposition 6 de [13]).

Preuve de la majoration. — Soit A un fermé de $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$. Fixons $\eta > 0$, $L > 0$, $\varepsilon_0 = \dfrac{L}{R_0}$ (où R_0 est choisi de façon à avoir (16)). Notons A^η le η-voisinage fermé de A dans $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$. Alors,

$$\begin{aligned}
P_\varepsilon(A) &= P(X^\varepsilon \in A) \\
&\leqslant P\left(\mathcal{D}^\varepsilon(\phi^{\varepsilon,L/\varepsilon}) \in A^\eta\right) + P\left(\left\|\mathcal{D}^\varepsilon(\phi^{\varepsilon,L/\varepsilon}) - \mathcal{D}^\varepsilon(\phi^\varepsilon)\right\|_{L^p(\widetilde{\Omega}, C_x)} > \eta\right) \\
&\leqslant P\left(\mathcal{D}^\varepsilon(\phi^{\varepsilon,L/\varepsilon}) \in A^\eta\right) + \frac{1}{\eta^p} IE\Big(\left\|X_t^{\varepsilon,R} - X_t^\varepsilon\right\|^p\Big)
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \wedge 1, L/\varepsilon \geqslant R_0$, (16) implique que le second terme est majoré par $C_0 \exp\left(-\dfrac{L^2}{C_0\varepsilon^2}\right)$. À cause du théorème 2 et du lemme 3, le principe des contractions implique que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P\left(\mathcal{D}^\varepsilon(\phi^{\varepsilon,L/\varepsilon}) \in A^\eta\right) \leq -\lambda(A^\eta).$$

On a donc

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P_\varepsilon(A) \leqslant \max\left[-\lambda(A^\eta), -\frac{L^2}{C_0}\right].$$

En faisant tendre L vers $+\infty$ et η vers 0, on a la conclusion désirée car λ est s.c.i.

La *minoration* se démontre de la même façon en utilisant le théorème 2, le lemme 3 et (16), voir [13] pp. 46-47.

COROLLAIRE 4.

1) On peut étendre $\mathcal{D}^\varepsilon$ à $\mathcal{J}^\varepsilon\big(C_0[0,1], IR^r\big)$ où $\mathcal{J}^\varepsilon$ est définie par (7).

2) Quand $\varphi \in \mathcal{J}^\varepsilon\big(C_0[0,1], IR^r\big)$, soit $\mathbf{N}^{\varepsilon,\varphi}$ la loi du processus $\mathcal{D}^\varepsilon(\varphi)$. Définissons $\mathbf{R}^{\varepsilon,\varepsilon W}$ par $\mathbf{N}^{\varepsilon,\mathcal{J}^\varepsilon(\varepsilon W)}$. Alors $\mathbf{R}^{\varepsilon,\varepsilon W}$ est une version de la loi conditionnelle de X^ε sachant εW.

3) Notons $\mathbf{Q}_\varepsilon$ la loi de la v.a. $\omega \to \mathbf{R}^{\varepsilon,\varepsilon W(\omega)}$

Soit $A \subset \mathcal{M}_1\Big(C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$, espace de mesures de probabilités sur $C_x\big([0,1], IR^d\big)$. Alors nous avons

$$-\widetilde{\Lambda}(A^\circ) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{Q}_\varepsilon(A) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{Q}_\varepsilon(A) \leqslant -\widetilde{\Lambda}(A^-) \qquad (17)$$

où

- *A° (resp. A^-) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A) dans $\mathcal{M}_1\Big(C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$, muni de la topologie de la convergence faible des mesures ;*
- *$\widetilde{\Lambda}(\mu) = \inf\{\frac{1}{2} \cdot \|f\|^2_{H^r}$ lorsque $f \in H^r$ est telle que μ est la loi de $g = \beta(f)\}$*

  où $\beta(f)$ est définie dans (4).

Démonstration. — 1) et 2) sont des conséquences de la théorie de décomposition de flots (voir les théorèmes 1 et 2 de [13]) où il est prouvé que, quand $\varphi \in \mathcal{J}^\varepsilon\big(C_0[0,1], IR^r\big)$ l'équation (12) a une solution forte définie sur $[0,1]$ et que $\mathbb{P}p.s.$, $X^\varepsilon_t(\omega,\nu) = \mathcal{D}^\varepsilon\Big(\mathcal{J}^\varepsilon\big(\varepsilon B(\omega)\big)\Big)_t(\nu)$.

3) résulte du principe des contractions. En effet l'application ϕ : $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big) \longrightarrow \mathcal{M}_1\Big(C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$ qui a X associe la loi de X sous $\widetilde{P}$, est continue, lorsque $\mathcal{M}_1\Big(C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big)$ est muni de la topologie de la convergence faible. De plus, elle transforme P_ε en $\mathbf{Q}_\varepsilon$.

2. Loi fonctionnelle du logarithme itéré

Rappelons tout d'abord la définition d'un système de contractions centrées en un point x. Soit U un ouvert fixé de $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION [5]. — *Une famille $\Theta = (\Theta_\alpha)_{\alpha\in R^+}$ de transformation bijective continue de U vers U est appelée un système de contractions centrées en x si*

a) $\Theta_\alpha(X) = x$,

b) Si $\alpha \geqslant \beta$, alors on a $|\Theta_\alpha(y) - \Theta_\alpha(z)| \leqslant |\Theta_\beta(y) - \Theta_\beta(z)| \forall\ (y,z) \in U^2$, *c)* $\Theta_1 = Id_U$ *et* $\Theta_\alpha^{-1} = \Theta_{\alpha^{-1}}$. *De plus, pour tous compacts* K *de* U *et* ε *positif, il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $|\alpha\beta - 1| < \delta$, *alors* $|\Theta_\alpha \circ \Theta_\beta(y) - y| < \varepsilon$ $\forall\, y \in K$.

Soient maintenant $\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_r$ *r-champs de vecteurs sur* U.

Posons

$$L(t) = \log(\log t) \ \textit{et}\ \phi(t) = \sqrt{tL(t)} \tag{18}$$

$\forall\, \alpha > 0$, *définissons r-champs de vecteurs sur* U

$$\widetilde{\sigma}_{\alpha,i}(y) = \phi(\alpha) \cdot \widetilde{\sigma}_i \Theta_{\phi(\alpha)}\big(\Theta^{-1}_{\phi(\alpha)}(y)\big), \tag{19}$$

où Θ *est un système de contractions centrées en* x.

Condition C 3. — Nous dirons que les éléments σ_i, et Θ satisfont à la condition **C 3** si Θ_α est 2 fois différentiable $\forall\, \alpha > 0$ et qu'il existe des champs de vecteurs σ_i définis sur U tel que $\lim_{\alpha \to +\infty} \widetilde{\sigma}_\alpha(y) = \sigma(y)$, uniformément sur les sous-ensembles compacts de U. De plus si $\sigma_{\varepsilon,i} = \widetilde{\sigma}_{1/\varepsilon,i}$ alors les entrées $\sigma_{\varepsilon,i}$ satisfont à la condition **C 1**.

Nous dirons que $\widetilde{\sigma}$ est adapté au système de contractions Θ si $\widetilde{\sigma}^\alpha = \widetilde{\sigma}$ pour tout $\alpha > 0$. Dans ce cas, il suffit que l'application qui à x associe $\widetilde{\sigma}(x)$ soit lipschitzienne sur tous les compacts.

Pour tous $u > 0$, $W^{(u)}$ désignera le mouvement brownien

$$W_t^{(u)} = \frac{1}{\sqrt{u}} W_{ut}. \tag{20}$$

Soit y la diffusion sur U, solution de l'équation différentielle stochastique

$$dy_t = \widetilde{\sigma}(y_t) \circ dW_t \ ;\ y_0 = x \text{ et posons pour tout } u > 0\ y_t^u = y_{ut} \tag{21}$$

$z_u(t) = \Theta_{\phi(u)}(y_t^u)$, où Θ est un système de contractions centrées en x.

Par la formule d'Ito pour l'intégrale de Stratonovich et par changement de temps, z_u est solution de

$$dz_u(t) = \frac{1}{\sqrt{L(u)}} \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\sigma}_{u,i}(z_u(t)) \circ dW_t^{(u),i} ; z_u(0) = x, \tag{22}$$

où les entrées sont définies dans (19).

Nous notons $\Psi_{u,t}(X)$, une version de (22) qui est un flot de C^m-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^d$, i.e. un élément de $\mathbb{D}^d$.

Sous la condition **C 3**, nous pouvons appliquer les résultats du théorème 2 de la section 1 à $(\sigma_{1/u}) = (\widetilde{\sigma}_u)$ et nous avons $\forall\ A \subset \mathbb{D}^d$

$$\begin{aligned} -I(A^\circ) &\leqslant \liminf_{u\to+\infty} \cdot \frac{1}{L(u)} \log P(\Psi_u \in A) \\ &\leqslant \limsup_{u\to+\infty} \cdot \frac{1}{L(u)} \log P(\Psi_u \in A) \leqslant -I(A^-) \end{aligned} \tag{23}$$

Considérons maintenant Z_u, solution de

$$\begin{aligned} dZ_u(t) = c_{1/u}(z_u(t))dt + \frac{1}{\sqrt{L(u)}} \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\sigma}_{u,i}\big(z_u(t)\big) \circ dW_t^{(u),i} \\ +b_{1/u,\nu(t)}\big(z_u(t)\big)dt\ ;\ Z_u(0) = x \end{aligned} \tag{24}$$

où ν est un processus markovien indépendant de W. Considérons l'application Z_u qui à $\omega \in C_0\big([0,1], IR^r\big)$ associe $Z_u(\omega, \bullet) \in L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], U\big)\Big)$, où Z_u est solution de (24).

Nous voulons trouver l'ensemble-limite de la famille $\{Z_u\}$ pour $u \to + \propto$ *p.s.*

Plus précisément, nous avons

THÉORÈME 5.— *Sous les conditions* **C 2′** *et* **C 3**, *la famille* $\{Z_u\}_u$ *considérée comme une v.a. à valeurs dans* $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], U\big)\Big)$ *est relativement compacte ; de plus* $C = \{g; \lambda(g) \leqslant 1\}$ *est l'ensemble-limite pour* $u \to + \propto$ *p.s.*

De plus, si E *est un espace topologique et* ϕ *une application continue de* $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], U\big)\Big)$ *dans* E, *alors la famille* $\{\phi(Z_u)\}_u$ *est relativement compacte et admet* $\phi(C)$ *comme ensemble-limite pour* $u \to + \propto$ *p.s.*

Signalons que le théorème 5 reste valable dans la formulation d'Ito avec le même ensemble-limite car le principe de G.D. reste inchangé. Notre résultat est une extension de celui de Strassen [14] dans le cas où $U = \mathbb{R}^d$, $r = d, c_{1/u} = 0, b_{1/u,\nu} = 0, \widetilde{\sigma} = Id, \Theta_\alpha(y) = \alpha^{-1}y$ et de celui de Baldi [5] cas où $b_{1/u,\nu} = 0$. Dans ce dernier cas en prenant $c_{1/u}$ indépendant de u, on obtient une variante.

Ce théorème résulte de son analogue pour les flots stochastiques et de la continuité de l'application $\mathcal{D}^\varepsilon$ définie par (14).

Plus précisément, nous avons

THÉORÈME 6. — *Sous la condition* **C 3**, *la famille de v.a. dans* $\mathbb{D}^d\{\Psi_u\}_u$ *est relativement compacte ; de plus* $K = \{\Psi; I(\Psi) \leqslant 1\}$ *est l'ensemble-limite pour* $u \to +\propto$ *p.s.*

De plus, si E est un espace topologique et ϕ une application continue de $\mathbb{D}^d$ dans E, alors la famille $\{\phi(\Psi_u)\}_u$ est relativement compacte et admet $\phi(K)$ comme ensemble-limite pour $u \to +\propto$ p.s.

Pour démontrer ce résultat, nous suivrons la preuve introduite dans Baldi [5]. Posons

$$K_\varepsilon = \left\{\Psi \in ID^d,\ \inf_{\varphi \in K} \|\Psi - \varphi\|_{C^{0,k}} < \varepsilon\right\} \tag{25}$$

LEMME 7. — *$\forall\ c > 1$ et $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ p.s. un entier positif $j_0 = j_0(\omega)$ tel que $\forall\ j > j_0(\omega)\Psi_{c^j} \in K_\varepsilon$.*

Démonstration. — Le théorème 2 implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $I(K_\varepsilon^c) > 1 + 2\delta$ et

$$\limsup_{u\to+\infty} \cdot \frac{1}{L(u)} \log P\left\{\left(\Psi_u \in K_\varepsilon^c\right)\right\} \leqslant -(1+2\delta),$$

donc pour j assez grand

$$P\left(\Psi_{c^j} \in K_\varepsilon^c\right) \leqslant \exp\left[-(1+\delta)\cdot L(c^j)\right] \leqslant \frac{\text{const}}{j^{1+\delta}} \tag{26}$$

Et on applique le lemme de Borel-Cantelli pour conclure car le membre de droite est sommable.

Soit $V \subset\subset U$. Pour tout entier j positif et $c > 1$, posons

$$\begin{aligned}\chi_j &= \sup_{c^{j-1}\leqslant u \leqslant c^j} \left\|\Psi_u - \Theta_{\phi(u)} \circ \Theta_{\phi(c^j)}(\Psi_{c^j})\right\|_{C^{0,k}([0,1]\times V)} \\ &= \sup_{c^{j-1}\leqslant u \leqslant c^j} \left\|\Theta_{\phi(u)}(y^u) - \Theta_{\phi(u)}(y^{c^j})\right\|_{C^{0,k}([0,1]\times V)}\end{aligned} \tag{27}$$

LEMME 8. — *$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ c_\varepsilon > 1$ tel que si $1 < c < c_\varepsilon$, $P\{\exists\ j_0 = j_0(\omega)$ tel que $\chi_j \leqslant \varepsilon$ dès que $j \geqslant j_0\} = 1$.*

Démonstration. — Nous devons prouver que

$$P\left\{\limsup_{j\to+\infty}(\chi_j \geqslant \varepsilon)\right\} = 0.$$

Par le lemme 7, $\exists\ B > 0$ telle que pour presque tout ω, $\exists\ j_0(\omega)$ tel que $\|\Psi_{c^j}(\omega)\|_{C^{0,k}([0,1]\times V)} \leqslant B \forall |j \geqslant j_0(\omega)$. Il reste alors à prouver seulement que :

$$P\left\{\limsup_{j\to+\infty}\cdot\left(\chi_j \geqslant \varepsilon; \|\Psi_{c^j}(\omega)\|_{C^{0,k}([0,1]\times V)} \leqslant B\right)\right\} = 0.$$

Comme dans [5] p. 440, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left\{\chi_j \geqslant \varepsilon; \|\Psi_{c^j}(\omega)\|_{C^{0,k}([0,1]\times V)} \leqslant B\right\} \\
&\subset \left\{ \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1; x\in V\subset\subset U \\ s/c\leqslant t\leqslant s; |\alpha|\leqslant k}} \left|D^\alpha\big(\Psi_{c^j}(t,x)\big) - D^\alpha\big(\Psi_{c^j}(s,x)\big)\right| > \varepsilon/2\ ; \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \|\Psi_{c^j}(\omega)\|_{C^{0,k}} \leqslant B \right\}
\end{aligned} \tag{28}$$

$$= \{\Psi_{c^j} \in A_\varepsilon\}$$

où

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon = &\left\{ \Psi \in I\!D^u; \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1; x\in V\subset\subset U \\ s/c\leqslant t\leqslant s; |\alpha|\leqslant k}} \left|D^\alpha\big(\Psi_t(x)\big) - D^\alpha\big(\Psi_s(x)\big)\right| > \varepsilon/2\ ; \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \|\Psi\|_{C^{0,k}} \leqslant B \right\}.
\end{aligned}$$

Ici $\mathbb{D}^U$ désigne l'espace de flots de C^m-difféomorphisme dans U. Ainsi, nous avons besoin uniquement d'une borne inférieure pour $P\left\{\chi_j \geqslant \varepsilon; \|\Psi_{c^j}(\omega)\| \leqslant K\right\}$ en utilisant les résultats du théorème 2 car A_ε est fermé.

Soit $\Psi \in A_\varepsilon$ et $f \in H^r$ telles que

$$d\Psi_t(x) = \sigma\big(\Psi_t(x)\big)\dot{f}_t dt; \Psi_0(x) = x \tag{29}$$

Pour simplifier, nous écrivons la démonstration pour $k = 2$.

$$dD\Psi_t(x) = D\sigma\big(\Psi_t(x)\big)\cdot D\Psi_t(x)\dot{f}_t dt; D\Psi_0(x) = I \in I\!R^d \otimes I\!R^d \tag{30}$$

$$\begin{gathered}
dD^2\Psi_t(x) = D^2\sigma\big(\Psi_t(x)\big)\cdot\big(D\Psi_t(x), D\Psi_t(x)\big)\dot{f}_t dt + D\sigma\big(\Psi_t(x)\big)\cdot D^2\Psi_t(x)\dot{f}_t dt; \\
D^2\Psi_0(x) = 0 \in (I\!R^d \otimes I\!R^d) \otimes I\!R^d
\end{gathered}$$

Alors il existe $s, t \in [0,1]$ avec $0 \leqslant s \leqslant 1$, $s/c \leqslant t \leqslant s$ tel que

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{4} &= \sup\Big(\sup_{x\in V}\Big|\Psi_t(x)-\Psi_s(x)\Big|, \sup_{x\in V}\Big|D\big(\Psi_t(x)-\Psi_s(x)\big)\Big|,\\ &\qquad\qquad \sup_{x\in V}\Big|D^2\big(\Psi_t(x)-\Psi_s(x)\big)\Big|\Big)\\ &\leqslant \sup\Big(\sup_{x\in V}\int_t^s\Big|\sigma\big(\Psi_u(x)\big)\dot{f}_u\Big|du\ ;\sup_{x\in V}\int_t^s\Big|D\sigma\big(\Psi_u(x)\big)\cdot D\Psi_u(x)\dot{f}_u\Big|du\ ;\\ &\quad \sup_{x\in V}\int_t^s\Big|D^2\sigma\big(\Psi_u(x)\big)\cdot\big(D\Psi_u(x),D\Psi_u(x)\big)\dot{f}_u\Big|du\\ &\qquad\qquad +\int_t^s\Big|D\sigma\big(\Psi_u(x)\big)\cdot D^2\Psi_u(x)\dot{f}_u\Big|du\Big)\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\|\Psi\|_{C^{0,2}([0,1]\times V)} &= \sup\Big(\sup_{t\in[0,1]x\in V}|\Psi_t(x)|, \sup_{t\in[0,1]x\in V}|D\Psi_t(x)|,\\ &\qquad \sup_{t\in[0,1]x\in V}|D^2\Psi_t(x)|\Big)\leqslant B,\ D^\alpha\sigma\end{aligned}$$

localement borné, si nous supposons $c \leqslant 2$ par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{4} &\leqslant \sup\Big(\theta\cdot\Big(|t-s|^{\frac12}\cdot\|f\|_{H^r}\Big);\theta B\cdot\Big(|t-s|^{\frac12}\cdot\|f\|_{H^r}\Big);\\ &\qquad\qquad (\theta B+\theta B^2)\cdot\Big(|t-s|^{\frac12}\cdot\|f\|_{H^r}\Big)\Big)\\ &\leqslant K_1\Big(|t-s|^{\frac12}\cdot\|f\|_{H^r}\Big)\end{aligned}$$

où

$$\theta=\sup\Big(\sup_{x\in V}|D^\alpha\sigma|\Big),\ K_1=\theta\cdot(1+B+B^2),$$

alors

$$||f||_{H^r}\geqslant|t-s|^{-\frac12}\left(\frac{\varepsilon}{4K_1}-\cdot|t-s|\right). \tag{31}$$

Ceci implique qu'il existe $c_\varepsilon > 1$ tel que, si $1 < c < c_\varepsilon$, $\frac{1}{2}||f||^2_{H^r} > 2$, alors $I(A_\varepsilon) \geqslant 2$ et pour j assez grand, par le théorème 2,

$$P\Big\{\chi_j \geqslant \varepsilon; \|\Psi_{c^j}\|_{C^{0,k}} \leqslant B\Big\} \leqslant \exp\left[-\frac{3}{2}L(c^j)\right] = \frac{\text{const}}{j^{\frac{3}{2}}}. \tag{32}$$

On applique le lemme de Borel-Cantelli pour conclure.

Comme dans le cas classique voir la proposition 2.5 de Baldi [5], les lemmes 7 et 8 par l'inégalité du triangle et la définition des systèmes de contractions centrées en x impliquent la :

PROPOSITION 9. — *$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ p.s. un réel positif $u_0 = u_0(\omega)$ tel que $\forall\ u > u_0(\omega)\Psi_u \in K_\varepsilon$.*

Il est clair que le théorème 2 et la proposition 9 impliquent que la famille $\{\Psi_u\}_u$ est relativement compacte et que les points-limite restent dans K. Il reste à montrer que tout point de K est un point-limite de $\{\Psi_u\}_u$ pour $u \to +\propto$ p.s.

LEMME 10. — *Soit $g \in K$ tel que $I(g) < 1$. Alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $c_\varepsilon > 1$ tel que $\forall\ c > c_\varepsilon$.*

$$P\left\{\limsup_{j\to+\infty}\left(\|\Psi_{c^j} - g\|_{C^{0,k}} < \varepsilon\right)\right\} = 1$$

La démonstration n'est pas différente du cas classique (voir le lemme 2.6 de Baldi), elle résulte de la quasi-continuité de $\mathcal{J}^\varepsilon$ définie par (6) (cf. Ben Arous & Castell [13]).

Démonstration du théorème 5.

PROPOSITION 11. — *$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ p.s. un réel positif $u_0 = u_0(\omega)$ tel que $\forall\ u > u_0(\omega)$*

$$Z_u \in C_\varepsilon,\ \text{où}\ C_\varepsilon = \left\{\begin{array}{c} Z \in L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big) \\ \inf\limits_{\overline{Z}\in C} \|Z - \overline{Z}\|_{L^p\left(\widetilde{\Omega}; C_x\left([0,1], IR^d\right)\right)} < \varepsilon \end{array}\right\}$$

Démonstration.

Posons

$$\Xi = L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x\big([0,1], IR^d\big)\Big) \text{ et } \forall\ R > 0$$

$$\widetilde{\sigma}_u^R(y) = 0 \text{ si } \|y\| \geqslant 2R; \widetilde{\sigma}_u^R(y) = \widetilde{\sigma}_u(y) \text{ si } \|y\| \leqslant R \tag{33}$$

Considérons $Z_u^R = \big(Z_u^R(t)\big)_{t\in[0,1]}$ solution de l'E.D.S.

$$dZ_u^R(t) = c_{1/u}\big(Z_u^R(t)\big)dt + \frac{1}{\sqrt{L(u)}}\sum_{i=1}^{r}\widetilde{\sigma}_{u,i}^R\big(Z_u^R(t)\big)\circ dW_t^{(u),i}$$
$$+b_{1/u,\nu(t)}\big(Z_u^R(t)\big)dt; Z_u^R(0) = x \tag{34}$$

Quant $Z_u(t)$ reste dans $B(0,R)$, $Z_u^R(t) = Z_u(t)$. De plus, Z_u^R et Z_u sont solutions d'E.D.S. à coefficients bornés. Donc, on peut trouver des constantes C_0, R_0, telles que $\forall\ R \geqslant R_0$ et $u \geqslant 1$,

$$\left.\begin{aligned} IP\left(\sup_t \|Z_u(t)\| \geqslant R\right) &\leqslant C_0 \cdot \exp -\frac{R^2}{C_0} \\ IE\left(\sup_t \big\|Z_u(t) - Z_u^R(t)\big\|^p\right) &\leqslant C_0 \cdot \exp -\frac{R^2}{C_0} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Par l'inégalité du triangle, on a

$$d_\Xi(Z_u, C) \leqslant d_\Xi(Z_u, Z_u^R) + d_\Xi(Z_u^R, C^R) + d_\Xi(C^R, C) = I + II + III$$

où l'on a posé

$$C^R = \left\{\begin{aligned} &g \in \Xi \text{ tel qu'il existe } f \in H^r / \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant 1/ \\ &dg_t = \left[\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^R(g_t)\dot{f}_t^j + c(g_t) + b_{\nu(t)}(g_t)\right] dt \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Comme $\sup \widetilde{\sigma}_u^R$ est compact en notant Ψ_u^R le flot stochastique associé à l'E.D.S.

$$d\xi_t^{u,R} = \frac{1}{\sqrt{L(u)}}\sum_{i=1}^{r}\widetilde{\sigma}_{u,i}^R(\xi_t^{u,R}) \circ dW_t^{(u),i}; \xi_0^{u,R} = x \tag{37}$$

alors $\Psi_u^R \in ID_b^d$, car $\Psi_{u,\bullet}^R(x) = x$ dès que $x \notin B(0,2R)$. Comme $Z_u^R = \mathcal{D}^{\frac{1}{u}}(\Psi_u^R)$, par l'inégalité du triangle

$$II \leqslant d_\Xi\Big(\mathcal{D}^{\frac{1}{u}}(\Psi_u^R), \mathcal{D}(\Psi_u^R)\Big) + d_\Xi\big(\mathcal{D}(\Psi_u^R), C^R\big) = II' + II''.$$

Puisque $\mathcal{D}^{\frac{1}{u}} \to \mathcal{D}$ uniformément sur les compacts de ID_b^d, lorsque $u \to +\infty$, alors $\forall\, \varepsilon, R > 0,\ \exists\, u_1'(\omega)$ tel que $\forall\, u > u_1'(\omega),\ II' \leqslant \frac{\varepsilon}{6}$. Le lemme 3 et le théorème 6 impliquent que $\forall\, \varepsilon, R > 0,\ \exists\, u_1''(\omega)$ tel que $\forall\, u > u_1''(\omega),\ II'' \leqslant \frac{\varepsilon}{6} p.s.$ Soit en prenant $u_1 \geqslant \max(u_1', u_1'')$, on a $II \leqslant \frac{\varepsilon}{3} p.s.$ Posons $R = uL$. Comme

$$\left\{\|Z_u - Z_u^R\|_\Xi > \frac{\varepsilon}{3}\right\} \subset \left\{\widetilde{E}\left\{\sup_t \|Z_u(t) - Z_u^{uL}(t)\|^p > \frac{\varepsilon^p}{3^p}\right\}\right\},$$

fixons $L > 0$ et $u_0 = \dfrac{R_0}{L}$, où u_0 est choisi de telle façon que l'on ait (35), alors pour $u \geqslant u_2 = \sup(1, u_0)$

$$P\left\{\|Z_u - Z_u^R\|_\Xi > \frac{\varepsilon}{3}\right\} \leqslant C' \exp -\frac{L^2 u^2}{C'}.$$

Donc $\forall\, \varepsilon, L > 0,\ \exists\, u_2(\omega)$ tel que $\forall\, u > u_2(\omega),\ I \leqslant \frac{\varepsilon}{3} p.s.$

Du fait que $\widetilde{\sigma}^R$ converge uniformément vers σ sur tous les compacts de U, alors il est clair que $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, u_3(\omega)$ tel que $\forall\, u > u_3(\omega),\ d_\Xi(C^{uL}, C) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Il est clair que le théorème 1 et la proposition 11 impliquent que la famille $\{Z_u\}_u$ est relativement compacte et que les points-limite restent dans C. Il reste à montrer que tout point de C est un point-limite de $\{Z_u\}_u$ pour $u \to +\infty\ p.s.$ Ceci résulte du

LEMME 12. — *Soit $Z \in C$ tel que $\lambda(Z) < 1$. Alors $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, c_\varepsilon > 1$ tel que $\forall\, c > c_\varepsilon$.*

$$P\left\{\limsup_{i\to+\infty} \left(\|Z_{c^i} - Z\|_\Xi < \varepsilon\right)\right\} = 1$$

Démonstration. — Le théorème 1 est équivalent à la quasi-continuité de β, définie par (4). Plus précisément, on a : $\forall\, A, R, \rho > 0,\ \exists\, \varepsilon_0 \geqslant 0, \alpha, r > 0$ tels que si $\int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant A$, $\|z - x\| < r$, on a

$$P\big(\|\varepsilon W - f\| < \alpha; \|Z^\varepsilon - \beta_z(f)\|_\Xi > p\big) \leqslant \exp -\frac{R}{\varepsilon^2}.$$

Et l'on termine la démonstration comme dans Baldi.

COROLLAIRE 13. — *Nous supposons vérifiées les conditions du théorème 5.*

Pour presque tout $\omega \in C_0([0,1], IR^r)$, *considérons la v.a.* $\mathbf{R}^{u, \frac{W^{(u)}(\omega)}{\sqrt{\log(\log u)}}} \in \mathcal{M}_1\Big(C_x([0,1], IR^d)\Big)$, *où* $\mathbf{R}^{u,\bullet}$ *est une version de la loi conditionnelle de* Z_u *sachant* $\dfrac{W^{(u)}}{\sqrt{\log(\log u)}}$.

Posons $\mathcal{M} = \{\mu \in \mathcal{M}_1\Big(C_x([0,1], IR^d)\Big)/\widetilde{\Lambda}(\mu) \leqslant 1\}$ *où* $\widetilde{\Lambda}$ *est définie dans le corollaire 3.*

Alors nous avons

1) La famille $\mathbf{R}^{u,\bullet}$ *est relativement compacte.*

2) De plus, $\mathcal{M}$ *est l'ensemble-limite de la famille* $\{\mathbf{R}^{u,\bullet}\}$ *pour* $u \to +$*p.s.*

Démonstration. — L'assertion résulte du théorème 5. En effet, l'application $\phi : \Xi \to \mathcal{M}_1\Big(C_x([0,1], IR^d)\Big)$ qui à Z_u associe la loi de Z_u sous $\widetilde{P}$ est continue, lorsque $\mathcal{M}_1\Big(C_x([0,1], IR^d)\Big)$ est munie de la topologie de la convergence faible.

Conclusion

Dans cet article, nous avons déterminé l'ensemble-limite d'une certaine famille (Z_u), considérée comme un v.a. à valeurs dans $L^p\Big(\widetilde{\Omega}; C_x([0,1], IR^d)\Big)$ en utilisant la théorie de grandes déviations. De là, on peut aborder la question en toute généralité en supposant (Z_u) comme une v.a. à valeurs dans $C_x([0,1], I\widetilde{R}^d)$. Par ailleurs, le corollaire 13 permet de résoudre un nouveau problème d'ensemble-limite en théorie du filtrage non linéaire.

Remerciements

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance au referee.

Bibliographie

[1] DONSKER (M.D.) & VARADHAN (S.R.S.). — On laws of the iterated logarithm for local times, *Com. Pure Appl. Math.* **30** (1977), pp. 707-753.

[2] MOGUL'SKII (A.A.). — On the law of the iterated logarithm in Chung's form for functional spaces, *Prob. Th. Appl.* **24** (1979), pp. 405-412.

[3] MUELLER (C.). — Strassen's law for local time, *Z. Warsch. Verw. Gebiete.* **63** (1983), pp. 29-42.

[4] DEUSCHEL (D.) & STROOCK (D.W.). — "*Large deviations*", Academic Press. Inc (London) L.T.D., 1989.

[5] BALDI (P.). — Large deviations and functionnal iterated logarithm law for diffusion processes, *Prob. Th. Fields* **71** (1986), pp. 435-453.

[6] BEZUIDENHOUT (C.). — A large deviations principle for small random perturbations of random equations, *Ann. Probab.* **15** (1987), pp. 646-658.

[7] EIZENBERG (A.) & FREIDLIN (M.I.). — Large deviations of Markov processes corresponding to P.D.E. systems, *Ann. Probab.* Vol. **21**, N° 2 (1993), pp. 1015-1044.

[8] BEZUIDENHOUT (C.). — Singular perturbation of degenerate diffusion, *Ann. Probab.* Vol. **15**, N° 3 (1987), pp. 1014-1043.

[9] DOSS (H.) & STROOCK (D.W.). — Nouveaux résultats sur les petites perturbations de systèmes dynamiques, *Journal of Functional Analysis* Vol. **101**, N° 2 (1993), pp. 370-391.

[10] RABEHERIMANANA (T.J.). — « *Petites perturbations de systèmes dynamiques et Algèbre de Lie Nilpotentes* », Thèse de l'Université Paris 7, 1992.

[11] RABEHERIMANANA (T.J.) & SMIRNOV (S.N.). — Petites perturbations de systèmes dynamiques et Algèbre de Lie Nilpotentes. Une extension des estimations de Doss & Strook, *Séminaire de Probabilités XXVIII in Lecture Notes in Math.* **1583** (1994), pp. 49-72.

[12] RABEHERIMANANA (T.J.). — Principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire et algèbres de Lie nilpotentes, *Ann. Inst. Henri Poincaré* Vol. **30** (1994), pp. 331-352.

[13] BEN AROUS (G.) & CASTELL (F.). — Flow decomposition and large deviations, *J. of Funct. Analysis* Vol. **140**, N° 1, Août 25 (1995), pp. 23-67.

[14] STRASSEN (V.). — An invariance principle for the law of the iterated logarithm law, *Z. Warsch. Verw. Geb.* **3** (1965), pp. 211-226.

[15] BISMUT (J.M.). — A generalized formula of Ito and some other properties of stochastic flows, *Z. Warsch. Verw. Gebiete* Vol. **55** (1981), pp. 231-350.

[16] KUNITA (H.). — On the decompositions of solutions of stochastic differential equations, *in* "Stochastic integrals", (Red., D. Williams), *Lect. Notes Math.* **851** (1981), pp. 213-255, Springer-Verlag, Berlin.

[17] AZENCOTT (R.). — « *Grandes Déviations et Applications* » École d'Été de Proba. de Saint Flour VIII 1978, *Lect. Notes in Math.* **774** (1980), pp. 1-76, Springer-Verlag, Berlin.