ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T.J. RABEHERIMANANA

Résultats sur l'irréductibilité et la conservativité de la chaîne de différences absolues

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 11, nº 2 (2002), p. 177-199

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2002_6_11_2_177_0>

© Université Paul Sabatier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 2002
pp. 177–199

Résultats sur l'irréductibilité et la conservativité de la chaîne de différences absolues (*)

T. J. RABEHERIMANANA (1)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous donnons une condition suffisante (voir [9]) aussi bien qu'une condition nécessaire pour que la chaîne de différences absolues soit λ-irréductible. Ensuite nous donnons une condition suffisante pour qu'elle soit λ-conservative où λ désigne la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathbb{H} = R^+$.

ABSTRACT. — In this work, we give a sufficient condition (see [9]) as well as a necessary condition for the absolute difference chain to be λ-irreductible. Then, we give a sufficient condition for this chain to be λ-convervative where λ is Lebesgue measure restricted to $\mathbb{H} = R^+$.

1. Préliminaire

Dans toute la suite, N désignera l'ensemble des entiers naturels et E l'opérateur d'espérance mathématique par rapport à un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

1.1. Définition de la chaîne de différences absolues

On considère la chaîne de Markov X_n, $\mathbf{n} \in N$ avec l'espace des états de la chaîne $\mathbb{H} = R^+$ muni de la tribu borélienne B telle que : $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$, les Y_n sont des variables aléatoires positives indépendantes et équidistribuées selon la loi Q. La chaîne X_n est selon [3] la chaîne de différences absolues.

(*) Reçu le 17 septembre 1999, accepté le 11 octobre 2002

(1) Département de Mathématiques et Informatique, B.P. 906, Ankatso, 101, Antananarivo, Madagascar.

On définit la probabilité de transition par la formule

$$\begin{aligned} P(x, A) &= P(X_{n+1} \in A / X_n = x) = E 1_A(|x - Y|) \\ &= \int 1_A(|x - y|) Q(dy) \end{aligned}$$

où Y est une variable aléatoire ayant la distribution Q.

On peut associer à ce noyau un opérateur sur l'espace des fonctions mesurables et bornées, noté par ce même symbole P :

$$P(f)(x) = Ef(|x - Y|) = \int f(|x - y|) Q(dy).$$

On peut aussi définir un opérateur $\nu \to \nu P$ qui associe à une mesure sur $(R^+, \mathcal{B})$ une autre, définie par la relation

$$\nu P(A) = \int \nu(dx) P(x, A), \; A \in \mathcal{B}.$$

Il s'avère que pour la mesure de Lebesgue λ sur R^+, on a $\lambda P \ll \lambda$; ainsi on peut parler de l'endomorphisme induit par la probabilité de transition P, qui agit dans $L^1(\lambda)$ et est défini par la relation

$$\nu P(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{d(\lambda_\nu P)}{d\lambda}, \text{ pour } \nu \in L^1(\lambda), \text{ où } \lambda_\nu(dx) = \nu(x)\lambda(dx).$$

En d'autres termes, on peut définir un opérateur $\nu \to \nu P$ défini par la relation

$$\int \nu P g \, d\lambda = \int \nu P \; g \, d\lambda \text{ pour } (\nu, g) \in L^1(\lambda) \times L^\infty(\lambda)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int \nu \; Pg \, d\lambda &= \int \nu(x) Eg(|x - Y|) dx \\ &= E \int \nu(x) g(|x - Y|) dx \text{ par Fubini} \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} \nu(x) \cdot g(x - y) 1_{x \geqslant y} dx + \int_0^{+\infty} \nu(x) \cdot g(y - x) 1_{y > x} dx \right\} Q(dy)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} g(Z) \cdot \nu(y + Z) dZ + \int_0^{+\infty} g(Z) \cdot \nu(y - Z) 1_{y \geqslant Z} dZ \right\} Q(dy)$$

$$= \int_0^{+\infty} g(Z) dZ \left\{ \int_0^{+\infty} (\nu(y + Z) + \nu(y - Z) 1_{y \geqslant Z}) Q(dy) \right\}$$

i.e. νP existe et peut être défini par la formule

$$\nu P(Z) = \int_0^{+\infty} \big(\nu(y+Z) + \nu(y-Z)1_{y\geqslant Z}\big)Q(dy)$$

Soulignons que cette chaîne représente un exemple de chaîne fellerienne, (la propriété fellerienne veut dire que pour toute fonction continue et bornée, Pf l'est aussi), dont le comportement est assez régulier. C'est pourquoi l'étude de cette chaîne comporte un intérêt certain. Soulignons aussi le fait que cette chaîne est un cas particulier de l'équation de différence stochastique définie par

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$$

utilisée dans la théorie de l'apprentissage, c.f. Norman [10].

1.2. Aperçu historique

1.2.1. D'abord, Feller [1] a introduit cette chaîne dans le cas où Q possède une densité et a trouvé la distribution stationnaire

$$\Pi(dx) = (EY)^{-1} \cdot \big(1 - F(x)\big)dx \tag{1}$$

dans le cas $EY < +\propto$, où F est la fonction de répartition de Y.

1.2.2. Knight [3] a analysé le cas où Q est arbitraire. Il a établi que Π donnée par (1) est une distribution stationnaire dans le cas où $EY < +\propto$. De plus, Π est finale pour la chaîne (i.e. pour toute fonction continue et bornée $P^n f$ tend vers $\int f d\Pi$ lorsque n tend vers l'infini), si la distribution Q est non arithmétique et $EY < +\propto$.

Rappelons que la distribution Q est dite arithmétique s'il existe $h > 0$ tel que le support de Q contenu dans hN.

Dans ce cas, il existe des distributions stationnaires autres que (1).

1.2.3. Smirnov [7] a montré que $\mu(dx) = \big(1 - F(x)\big)dx$ est toujours une mesure invariante. Si $EY = +\propto$, il n'existe pas de distribution stationnaire (ce problème était posé par Knight [3]).

Rappelons quelques notions de [7] se rapportant à une chaîne de Markov dont l'espace des états est muni d'une structure topologique :

Une telle chaîne est dite topologiquement irréductible si pour tout ouvert non vide U, pour tout x, il existe $k \in N$ tel que $P^k(x, U) > 0$.

Elle est dite topologiquement récurrente (ou diffuse) si pour tout ouvert non vide U, pour tout x, $P_x\Big(\bigcup_{n\in N}(X_n \in U)\Big) = 1$ où

$$P_x\Big(\bigcup_{n\in N}(X_n \in U)\Big) = P(X_{n_0} \in U \text{ pour au moins un } n_0 \in N / X_0 = x).$$

Elle est dite dissipative si le potentiel de n'importe quelle fonction continue à support compact est borné.

(Tout ceci étant introduit dans [7] seulement pour les chaînes felleriennes).

Signalons deux résultats obtenus par Smirnov [7].

1.2.3.1. La chaîne de différences absolues est topologiquement irréductible si, et seulement si :

- Q est non arithmétique
- le support de Q est non borné.

1.2.3.2. La chaîne de différences absolues topologiquement irréductible est ou bien topologiquement récurrente ou bien dissipative.

1.2.4. Mais dans son article [8], Smirnov a lancé une conjecture : la chaîne de différences absolues est toujours topologiquement récurrente lorsqu'elle est topologiquement irréductible.

Ceci est prouvé dans [8] sous la condition supplémentaire $EY^{1/2} < +\infty$, (ce qui peut être légèrement affaibli).

2. λ-irréductibilité de la chaîne de différences absolues

Nous nous proposons de trouver des conditions qui garantiraient que la chaîne de différences absolues topologiquement irréductible soit λ-irréductible, λ étant la restriction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{H} = R^+$. (Notons que λ sera une mesure d'irréductibilité maximale grâce au fait que λP est absolument continue par rapport à λ). Ensuite, nous énonçons et démontrons une réciproque.

2.1 DÉFINITION. — Nous dirons que la distribution Q est étalée[1], s'il existe $n \in N$ tel que Q^{*^n} est non-singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Remarquons que si Q est étalée, alors Q est non arithmétique.

---

(1) En anglais « spread-out » cf. Revuz [6]

2.2 THÉORÈME [9] (Condition suffisante de l'irréductibilité). — *Si le support de Q est non borné et Q est étalée, alors la chaîne de différences absolues est λ-irréductible où λ désigne la restriction de la mesure de Lebesgue sur $H = R^+$.*

2.3 LEMME 1. — *Soient f et g deux éléments de $L^1_+(\lambda)$. Alors le produit de convolution f^*g est semi-continu inférieurement.*

2.4 Démonstration de 2.2. — La probabilité Q est étalée, donc il existe $m_0 \geqslant n_0$, tel que

$$Q^{*^{m_0}}(dx) \geqslant C_0 \cdot 1_{[a_0,b_0]}(x)\lambda(dx) \tag{2.4.1}$$

C_0 étant une constante positive, $0 \leqslant a_0 < b_0$.

En effet, posons

$$Q^{*^{n_0}} = \alpha + \beta \text{ où } \alpha \ll \lambda \text{ et } \beta \perp \lambda.$$

On a :

$$\begin{aligned} Q^{*^{2\cdot n_0}} &= Q^{*^{n_0}} * Q^{*^{n_0}} = (\alpha+\beta) * (\alpha+\beta) \\ &\geq \alpha * \alpha = (f * f)\lambda \text{ si } \frac{d\alpha}{d\lambda} = f \text{ (dérivée de Radon-Nikodym).} \end{aligned}$$

L'affirmation résulte du lemme 1 en faisant $f = g$. Pour m_0, nous prenons $2n_0$ par exemple.

Posons $Q_r(A) = Q(A \cap [0,r])$ avec r un nombre positif. Alors on a :

$$\lim_{r \uparrow +\infty} (Q_r)^{*^n}(A) = Q^{*^n}(A) \ \forall n \in N. \tag{2.4.2}$$

La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est évident en utilisant le théorème de Beppo-Lévi. Supposons que ce soit vrai pour n, et démontrons-le pour $n+1$; on a :

$$\begin{aligned} &\lim_{r \uparrow +\infty} (Q_r)^{*^{n+1}}(A) \\ &= \lim_{r \uparrow +\infty} \int 1_A(y_1 + \ldots + y_{n+1}) Q_r(dy_1) \ldots Q_r(dy_{n+1}) \\ &= \lim_{r \uparrow +\infty} \int Q_r(dy_{n+1}) \int 1_{A-y_{n+1}}(y_1 + \ldots + y_n) Q_r(dy_1) \ldots Q_r(dy_n) \\ &= \lim_{r \uparrow +\infty} \int_{[0,r]} Q(dy_{n+1}) \int_{[0,r]} \ldots \int_{[0,r]} 1_{A-y_{n+1}}(y_1 + \ldots + y_n) Q(dy_1) \ldots Q(dy_n) \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, en particulier pour $n = 2$,

$$\int Q(dy_{n+1})\Big(\int\dots\int 1_{A-y_{n+1}}(y_1+\dots+y_n)Q(dy_1)\dots Q(dy_n)\Big) = Q^{*^{n+1}}(A)$$

De (2.4.2), on déduit que pour r suffisamment grand, $Q_r^{*^{n_0}}$ a une composante absolument continue par rapport à λ, et par suite (2.4.1) implique qu'il existe $r > 0$, $m \geqslant 1$, $c > 0$ et $a, b, 0 \leqslant a < b$:

$$(Q_r)^{*^m}(dx) \geqslant c \cdot 1_{[a,b]}(x)\lambda(dx). \tag{2.4.3}$$

Comme

$$\begin{aligned} P(x, A) &= P(X_1 \in A/X_0 = x) \\ &\geqslant P(X_1 \in A, Y_1 \leq r/X_0 = x) = P_r(x, A), \end{aligned}$$

on a par récurrence

$$P^k(x, A) \geqslant (P_r)^k(x, A) \tag{2.4.4}$$

Posons

$$P^{(r)} = \frac{1}{P(Y_i \leqslant r)} P_r \tag{2.4.5}$$

C'est la probabilité de transition pour la chaîne tronquée $X_{n+1} = \big|X_n - Y_{n+1}^{(r)}\big|$ où les $Y_i^{(r)}$ sont distribuées selon $Q^{(r)}$, i.e.

$$Q^{(r)}(A) = P(Y \in A/Y \leqslant r) = \frac{Q(A \cap [0, r])}{Q([0, r])} \tag{2.4.6}$$

Par (2.4.4) et (2.4.5) on a

$$P^m(x, A) \geqslant \big(P(Y \leqslant r)\big)^m \cdot (P^{(r)})^m(x, A) \tag{2.4.7}$$

L'idée est maintenant de faire disparaître la valeur absolue dans la chaîne tronquée. Soit

$$x \geqslant mr \tag{2.4.8}$$

Du fait que $Y_i^{(r)} \leqslant r$, on a $\sum_{i=1}^m Y_i^{(r)} \leqslant mr$.

$$\begin{aligned} X_0 &= x \\ X_1 &= \big|X_0 - Y_1^{(r)}\big| = x - Y_1^{(r)} \\ &\vdots \\ X_m &= x - \Big(Y_1^{(r)} + \dots + Y_m^{(r)}\Big) \end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\left(P^{(r)}\right)^{m}(x, A) & = P\left(x - \sum_{i=1}^{m} Y_i^{(r)} \in A\right) \\
& = \frac{1}{\left(P(Y \leqslant r)\right)^{m}} \cdot (Q_r)^{*^{m}}(x - A)
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

Maintenant nous sommes en mesure d'achever la démonstration. Elle se fait en trois étapes.

2.4.1. On va montrer que la chaîne est Ψ-irréductible pour $\Psi(dx) = 1_{[a',b']}(x)dx$. Fixons a', b' tels que l'on a :

1) $0 < b' - a' < b - a$
2) $a' > mr - b$
3) $a' \geqslant 0$.

Alors pour tout ensemble mesurable $A \subseteq [a', b']$ avec $\lambda(A) > 0$ et pour tout $x \in]\max(mr, a + b'), a' + b[= I_{a',b'}$, un intervalle ouvert, on a

$$x - A \subseteq [a, b]$$

d'où :

$$\lambda\big([a, b] \cap (x - A)\big) = \lambda(x - A) = \lambda(A) > 0$$

Par (2.4.2), (2.4.7) et (2.4.9) on a

$$P^{m}(x, A) \geqslant c \cdot 1_{I_{a',b'}}(x) \cdot \lambda\big([a', b'] \cap A\big), \ \ A \in B$$

Vu l'irréductibilité topologique, on a :

Pour tout $x \in \mathbb{H}$, il existe $k \in N$ tel que $P^{k}(x, I_{a',b'}) > 0$. Par suite,

$$
\begin{aligned}
P^{m+k}(x, A) = & \int P^{k}(x, dy) P^{m}(y, A) \\
& \geqslant P^{k}(x, I_{a',b'}) \cdot \lambda\big([a', b'] \cap A\big) > 0
\end{aligned}
\tag{2.4.10}
$$

pour un ensemble mesurable A tel que $\lambda\big([a', b'] \cap A\big) = \Psi(A) > 0$.

On a l'assertion dans ce cas.

2.4.2. On va montrer que la chaîne est Ψ-irréductible où $\Psi(dx) = 1_{[h,+\infty[}(x)dx$ pour un nombre non-négatif $h > mr - b$.

Supposons que $\lambda(A \cap [h, +\infty[) > 0$ et choisissons un nombre positif $1' < b - a$. Comme $[h, +\infty[= \sum_{k \in N} [h + k1', h + (k+1)1'[$, il existe $k_0 \in N$ tel que :

$$\lambda\Big(A \cap \big[h + k_0 1', h + (k_0+1)1'\big[\Big) > 0$$

En posant

$$\begin{aligned} a' &= h + k_0 1' \\ b' &= h + (k_0+1)1', \end{aligned}$$

on se ramène à la première étape.

Si $mr - b < 0$, on peut prendre $h = 0$. Sinon $h > 0$, et on passe à 2.4.3.

2.4.3. On va montrer que la chaîne est λ-irréductible.

Pour cela, définissons un noyau T_z pour $Z \in]0,1[$ par $T_z(x, A) = \sum_{k \geqslant 1} Z^k P^k(x, A)$.

Fixons $Z \in]0,1[$ quelconque et remarquons que la chaîne est ν-irréductible, si et seulement si, pour tout x, ν est absolument continue par rapport à $T_z(x, \bullet)$, i.e. $\nu(A) > 0$ implique $T_Z(x, A) > 0$.

Soit

$$A \subseteq [0, +\infty[\text{ avec } \lambda(A) > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} T_Z(x, A) &= \sum_{k \geqslant 1} Z^k P^k(x, A) \\ &= \sum_{k \geqslant 1} Z^k P\big(|X_{k-1} - Y_k| \in A / X_0 = x\big) \\ &= \sum_{k \geqslant 1} Z^k \int P\big(|X_{k-1} - y| \in A / X_0 = x\big) Q(dy) \\ &\geqslant \int \sum_{k \geqslant 1} Z^k P(X_k \in y + A / X_0 = x) Q(dy) \\ &= \int_0^{+\infty} T_Z(x, y + A) Q(dy) \\ &\geqslant \int_h^{+\infty} T_Z(x, y + A) Q(dy) \end{aligned}$$

Le support de Q n'étant par borné, on constate que $Q\big([h,+\infty[\big) > 0$. Puis, comme $y + A \subseteq [h,+\infty[$ lorsque $y > h$, on obtient que pour tout $y > h$, $T_Z(x, y+A) > 0$. D'où

$$T_Z(x,A) \geqslant \int_h^{+\infty} T_Z(x,y+A)Q(dy) > 0$$

Par conséquent, la chaîne est λ-irréductible. □

Convenons d'écrire L_X pour désigner la loi de probabilité d'une variable X. Ainsi $L_Y = Q$. On utilisera la notation $Q' = L_{-Y}$, (i.e. $Q'(A) = Q(-A)$) et encore $\widetilde{Q} = \frac{1}{2}(Q + Q')$, $\widehat{Q} = Q * Q'$. Les distributions $\widetilde{Q}$ et $\widehat{Q}$ sont évidemment symétriques.

Rappelons qu'une chaîne de Markov est dite irréductible si elle est ν-irréductible pour une mesure ν quelconque non nulle.

2.5 Théorème 2 (Condition nécessaire de l'irréductibilité). — *Pour que la chaîne de différences absolues soit irréductible, il est nécessaire que la distribution $\widetilde{Q}$ soit étalée, ou d'une manière équivalente que la distribution $\widehat{Q}$ soit étalée.*

2.6 Lemme 2. — *$\widetilde{Q}$ est étalée si, et seulement si, $\widehat{Q}$ l'est.*

2.7 Démonstration.

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^{*^n} &= \left(\frac{1}{2}(Q+Q')\right)^{*^n}\\ &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k Q^{*^k} * (Q')^{*^{n-k}}\end{aligned}$$

En particulier,

$$\widetilde{Q}^{*^{2n}} \geqslant 2^{-n}\cdot C_{2n}^n Q^{*^n} * (Q')^{*^n} = 2^{-n}\cdot C_{2n}^n \widehat{Q}^{*^n}$$

Si $\widehat{Q}$ est étalée, alors $\widetilde{Q}$ l'est aussi.

Réciproquement, si $\widetilde{Q}$ est étalée, il existe $n \geq 1$ tel que $\widetilde{Q}^{*^n}$ possède une composante non triviale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ, et par suite on peut trouver un $k \in \{0,\dots,n\}$ tel que $Q^{*^k} * (Q')^{*^{n-k}}$ est non-singulière par rapport à λ. Mais alors

$$\widehat{Q}^{*^n} = Q^{*^k} * (Q')^{*^{(n-k)}} * (Q')^{*^k} * Q^{*^{(n-k)}}$$

possède une composante non triviale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ. $\square$

2.8 LEMME 3. — *Soit φ une mesure d'irréductibilité. Si une mesure γ est telle que $\gamma P \ll \gamma$, alors $\varphi \ll \gamma$.*

2.9 Démonstration. — φ est une mesure d'irréductibilité

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{H}$, $\varphi \ll T_Z(x,.)$

$\Leftrightarrow$ Pour toute mesure initiale α, $\varphi \ll \alpha T_Z$, où $T_Z = \sum_{k\geqslant 1} Z^k P^k$ voir section 2.4.3.

Puisque $\gamma P \ll \gamma$, on obtient que $\gamma T_Z \ll \gamma$ et par conséquent, $\varphi \ll \gamma T_Z \ll \gamma$. Donc $\varphi \ll \gamma$. $\square$

2.10 Démonstration de 2.5. — Soit $L_Y = Q$. On a

$$\begin{aligned} P(x,A) &= P\big(|x-Y| \in A\big) \\ &= P\big\{(x-Y \geqslant 0, x-Y \in A) \cup (x-Y<0, Y-x \in A)\big\} \\ &\leqslant P(x-Y \in A) + P(Y-x \in A) \end{aligned}$$

Introduisons deux noyaux notés K_0 et K_1, définis par les relations

$$\begin{aligned} K_0(x,A) &= P(x-Y \in A) \\ K_1(x,A) &= P(Y-x \in A) \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} &P \leqslant K_0 + K_1 \\ &P^2 \leqslant (K_0+K_1)^2 = K_0^2 + K_0K_1 + K_1K_0 + K_1^2 \\ &\vdots \\ &P^n \leqslant \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} K_{i_1}\dots K_{i_n} \end{aligned}$$

Soient $Y_1, Y_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées selon la loi Q, comme dans la section 1.1, et X_0 une variable aléatoire indépendante de $Y_1, Y_2, \dots, L_{X_0} = \alpha$. Alors, on a :

$$\alpha K_0 = L_{X_0 - Y_1}$$
$$\alpha K_1 = L_{Y_1 - X_0}$$
$$\alpha K_0^2 = (\alpha K_0) K_0 = L_{(X_0 - Y_1) - Y_2} = L_{X_0 - Y_1 - Y_2}$$
$$\alpha K_0 K_1 = (\alpha K_0) K_1 = L_{Y_2 - (X_0 - Y_1)} = L_{-X_0 + Y_1 + Y_2}$$
$$\alpha K_1 K_0 = (\alpha K_1) K_0 = L_{(Y_1 - X_0) - Y_2} = L_{-X_0 + Y_1 - Y_2}$$
$$\alpha K_1^2 = (\alpha K_1) K_1 = L_{Y_2 - (Y_1 - X_0)} = L_{X_0 - Y_1 + Y_2}$$

On peut donc voir, que pour $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\alpha(K_0 + K_1)^n &= \alpha^* Q'^* (Q + Q')^{*^{(n-1)}} + \alpha'^* Q^* (Q + Q')^{*^{(n-1)}} \\ &= 2^{n-1} (\alpha^* Q' + \alpha'^* Q) * \widetilde{Q}^{*^{(n-1)}}\end{aligned}$$

Prenons $\alpha = \delta_0$, où δ_0 désigne la mesure de Dirac concentrée au point 0. On a alors

$$\alpha^* Q' + \alpha'^* Q = \delta_0 (Q + Q') = 2\widetilde{Q} \text{ et } \delta_0 (K_0 + K_1)^n = 2^n \widetilde{Q}^{*^n}.$$

Pour une mesure d'irréductibilité φ, on constate qu'en prenant $Z \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned}\varphi \ll \delta_0 T_{Z/2} &= \delta_0 \sum_{n \in N^*} (Z/2)^n P^n \\ &\leqslant \sum_{n \in N^*} (Z/2)^n \delta_0 (K_0 + K_1)^n \\ &= \sum_{n \in N^*} Z^n \widetilde{Q}^{*^n}\end{aligned}$$

D'après le lemme 3, $\varphi \ll \lambda$ car pour la mesure de Lebesgue λ on a $\lambda P \ll \lambda$. On peut donc tirer de la relation $\varphi \ll \sum_{n \in N^*} Z^n \widetilde{Q}^{*^n}$, qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $\widetilde{Q}^{*^n}$ est non-singulière par rapport à λ.

En d'autres mots $\widetilde{Q}$ est étalée, ce qui achève la démonstration, vu le lemme 2. □

3. λ-conservativité de la chaîne de différences absolues

Comme on l'avait déjà mentionné, la chaîne de différences absolues est toujours topologiquement récurrente sous les conditions que $EY^{1/2} < +\infty$ et que la chaîne est topologiquement irréductible. Ceci a été établi dans [8], par une technique assez compliquée. Or on a trouvé une approche qui conduit à la conservativité au sens de Hopf de la chaîne en question, toujours sous la condition $EY^{1/2} < +\infty$ (ce qui est un peu étonnant, la condition étant la même que celle donnée dans [8]). Ensuite, nous donnons un exemple où la chaîne est transiente si $EY^{1/2} = +\infty$.

Posons

$$\mu^{(r)}(dx) = f^{(r)}(x)dx \text{ où } f^{(r)}(x) = 1_{[0,r]}(x)\big[P(Y > x) - P(Y > r)\big].$$

Vérifions que la mesure $\mu^{(r)}$ est invariante pour $P^{(r)}$ i.e.

$$f^r P^{(r)} = f^r \tag{3.1}$$

Cette assertion résulte du lemme suivant

3.1 LEMME 4 [3]. — *La mesure $\mu(dx) = P(Y \geq x)dx$ est une mesure invariante pour la chaîne de différences absolues.*

3.2 Remarque. — On peut écrire aussi $\mu(dx) = P(Y > x)dx$, car les deux fonctions $x \to P(Y \geqslant x)$ et $x \to P(Y > x)$ ne diffèrent que sur un ensemble dénombrable, qui est de mesure de Lebesgue nulle.

3.3 Vérification de (3.1). — Pour une raison d'homogénéité dans les formules, $\mu^{(r)}(dx) = P(Y^{(r)} \geqslant x)dx$ est une mesure invariante pour la chaîne tronquée, ceci n'a un sens que si $r \geqslant x$. D'où

$$\mu^{(r)}(dx) = 1_{[0,r]}(x)P(Y^{(r)} \geqslant x)dx.$$

Or d'après (2.4.6), $Y^{(r)}$ est distribuée selon $Q^{(r)}$.

D'où

$$\begin{aligned}\mu^{(r)}(dx) &= 1_{[0,r]}(x)\frac{P(Y \geqslant x, Y \leqslant r)}{P(Y \leqslant r)}dx \\ &= C'(r)1_{[0,r]}(x)\big(P(Y \geqslant x) - P(Y > r)\big)dx\end{aligned}$$

Donc on a (3.1), compte tenu de la remarque 3.2.

Vu (2.4.7) et (3.1) on a :

$$\sum_{k\in N} f^{(r)}P^k \geqslant \sum_{k\in N} \big(P(Y \leqslant r)\big)^k f^{(r)}\big[P^{(r)}\big]^k \geqslant \frac{1}{P(Y>r)} f^{(r)} \tag{3.2}$$

En se servant de l'inégalité (3.2), essayons de trouver une fonction $h \in L^1(\lambda)$, telle que $\sum_{k\in N} hP^k = \infty$, ce qui signifie que la chaîne est conservative (cf. Foguel [2] ou Neveu [4]). Pour cela, on cherchera h sous la forme $h(x) = \int_0^{+\infty} g(r) f^{(r)}(x)dr$, où g est une fonction positive.

Il nous suffit donc d'indiquer une telle fonction g, qui satisfasse aux conditions suivantes

1) $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(r) f^{(r)}(x) dr dx < +\infty$

2) $\int_0^{+\infty} g(r) \left[\dfrac{f^{(r)}(x)}{P(Y>r)}\right] dr = +\infty$

Puisque $f^{(r)}(x)$ tend vers $P(Y > x) > 0$ lorsque r tend vers $+ \propto$, ceci revient à

1) $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(r) f^{(r)}(x) dr dx < +\infty$

2) $\int_0^{+\infty} g(r) \big[P(Y>r)\big]^{-1} dr = +\infty$

Et pour qu'une telle fonction g existe il suffit que

$$\int_0^{+\infty} f^{(r)}(x)dx = 0\Big(\big[P(Y>r)\big]^{-1}\Big) \text{ quand } r \to +\infty, \text{ i.e.}$$

$$B(r) \overset{\text{déf}}{=} P(Y>r) \int_0^r \big(P(Y>x) - P(Y>r)\big)dx \to 0 \tag{3.3}$$

lorsque $r \to \propto$. Cette assertion est une conséquence du lemme $5'$ ci-dessous.

3.4 Lemme 5. — *Étant donné une suite de nombres réels non négatifs décroissants b_n $n \in N$, telle que $\lim\limits_{n+\infty} b_n = 0$ il existe une suite $a_n \geqslant 0$ $n \in N$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

1) $\sum\limits_{n\in N} a_n b_n < +\infty$

2) $\sum\limits_{n\in N} a_n = +\infty.$

3.5 Démonstration. — De b_n, on va extraire une sous-suite $b_{\phi(n)}$ telle que $\sum_{n\in N} b_{\phi(n)} < +\infty$. Par exemple, on peut poser $\phi(1) = 1, \dots, \phi(n+1) = \inf\left\{m > \phi(n) : \sup_{K\geqslant m} b_k \leqslant 2^{-m}\right\}$, c'est possible car $\lim_{n+\infty} b_n = 0$. Alors on prend $a_{\phi(n)} = 1$ et $a_m = 0$ si m est différent de $\phi(1), \phi(2), \dots$ □

3.6 Lemme 5'. — *Soit B une fonction non négative localement intégrable sur $[0, +\infty[$, et $B(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$. Alors il existe une fonction A non négative localement intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que*

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(r)B(r)dr < +\infty$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(r)dr = +\infty.$

3.7 Démonstration. — Posons $b_n = \sup_{t>n} B(t), n = 0, 1, 2, \dots$

Évidemment $b_n \downarrow 0$. Soit $a_n \geqslant 0$ la suite du lemme 5, correspondante à b_n.

Si on pose alors

$$A(r) = \sum_{K\in N} a_k 1_{[K,K+1[}(r)$$

on aura d'une part

$$\int_0^{+\infty} A(r)dr = \sum_{K\in N} a_K = +\infty$$

et d'autre part, compte tenu de l'inégalité

$$B(r) \leqslant \sum_{K\in N} b_k 1_{[K,K+1[}(r)$$

on aura

$$\int_0^{+\infty} A(r)B(r)dr \leqslant \sum_{K\in N} a_K b_K < +\infty. \qquad \square$$

En supposant la condition (3.3) satisfaite, on peut appliquer le lemme 5' pour la fonction B figurant dans (3.3). Il suffit finalement de prendre : $g(r) = P(Y > r)A(r)$ où A est une fonction du lemme 5', correspondante à B.

Ainsi on obtiendra :

$$\int_0^{+\infty} g(r)dr \int_0^{+\infty} f^{(r)}(x)dx = \int_0^{+\infty} A(r)B(r)dr < +\infty$$

et

$$\int_0^{+\infty} g(r)\big[P(Y > r)\big]^{-1}dr = \int_0^{+\infty} A(r)dr = +\infty$$

Si, par exemple, $P(Y > r) \sim Cr^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ la condition (3.3) est remplie si et seulement si $\alpha > 1/2$.

3.8 PROPOSITION. — *Si $EY^{1/2} < +\infty$, alors la chaîne de différences absolues est conservative (au sens de Hopf).*

3.9 Démonstration. — Il est suffisant de montrer que (3.3) est satisfait sous la condition $EY^{1/2} < +\infty$.

Désignons par G la fonction $x \to P(Y \geqslant x)$. En fait la proposition résulte du fait que si f est une fonction croissante positive ; alors $Ef(Y) < \infty$ implique $G(x) = o[f(x)]^{-1}$. $\square$

3.10 COROLLAIRE 1. — *Soit $EY^{1/2} < +\infty$.*

Alors si la chaîne est topologiquement irréductible, elle est topologiquement récurrente.

3.11 Démonstration. — En effet, la chaîne est conservative et topologiquement irréductible, donc elle est topologiquement récurrente, *voir* [8].

3.12 COROLLAIRE 2. — *Supposons que $EY^{1/2} < +\infty$ et Q étalée, alors la chaîne est récurrente au sens de Harris (c.f. Nummelin [5], sections 3.5 et 3.6).*

3.13 Démonstration. — En effet grâce au théorème 3.6 de [5], la chaîne est récurrente ; elle est de plus récurrente au sens de Harris par le théorème 3.7 (vii), car on peut prendre un intervalle $]a, b[$, où $0 \leqslant a < b$, pour le « petit ensemble »[2] C, tel que $P_x\left(\bigcup_{n\in N}(X_n \in C)\right) = 1$, pour tout x. (Ceci est une conséquence de (2.4.10) et de la récurrence topologique : si $P^k(x_0, I_{a',b'}) = \delta > 0$ il existe un intervalle $]a, b[$ contenant x_0, tel que $P^k(x, I_{a',b'}) > \dfrac{\delta}{2}$ pour $x \in]a, b[$.

(2) En anglais « small set »

On a donc

$$P^{m+k}(x,A) \geqslant \frac{\delta C}{2}\lambda([a',b'] \cap A) \text{ pour } x \in]a,b[= C.$$

Pour terminer, nous démontrons un résultat qui infirme la conjecture de Smirnov. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

3.14 PROPOSITION. — *Si la distribution Q a pour densité $f(y) = \beta\varepsilon^{\beta} y^{-(\beta+1)} 1_{[\varepsilon,+\infty[}(y)$ où $\beta \in]0,1/2]$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, alors il existe $\beta_0 \in]0,1/2[$ tel que $\forall\ \beta \in]0,\beta_0]$ la chaîne de différences absolues est transiente.*

Avant de démontrer cette proposition, nous énonçons un résultat concernant le critère de « dérive » pour la transience (voir [11]). Pour cela, nous définissons l'ensemble de sous-niveaux d'une fonction V à valeurs positives par

$$C_V(r) = \{x : V(x) \leqslant r\} \forall\ r \geqslant 0.$$

3.15 THÉORÈME [11]. — *Supposons que X_n soit λ-irréductible. Alors X_n est transiente si, et seulement si, il existe une fonction bornée $V : \mathbb{H} \to R^+$ et $r \geqslant 0$ tels que*

1) V est de plus mesurable et que $\lambda(C_V(r)) > 0$ et $\lambda(C_V(r)^c) > 0$;

2) $\Delta V(x) = P(V)(x) - V(x) > 0$ si $x \in C_V(r)^c$.

3.16 Démonstration de 3.14. — L'hypothèse sur Q implique que X_n est λ-irréductible, voir le théorème 2.2.

Considérons $P(V)(x) - V(x)$, en choisissant $V(x) = (\varepsilon^{-\alpha} - x^{-\alpha}) 1_{[\varepsilon,+\infty[}(x)$ où $\alpha > 0$ est à choisir.

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= P(V)(x) - V(x) \\ &= EV(|x-Y|) - V(x) \\ &= \beta\varepsilon^{\beta}\Big\{ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \big[(\varepsilon^{-\alpha} - |x-y|^{-\alpha}) 1_{[\varepsilon,+\infty[}(|x-y|) \\ &\qquad - (\varepsilon^{-\alpha} - x^{-\alpha}) 1_{[\varepsilon,+\infty[}(x)\big] y^{-(\beta+1)} dy \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta\varepsilon^{\beta}\Bigg\{ \int_{\varepsilon}^{x-\varepsilon} \big[x^{-\alpha} - (x-y)^{-\alpha}\big] y^{-(\beta+1)} dy \\
&\quad + \int_{x+\varepsilon}^{+\infty} \big[x^{-\alpha} - (y-x)^{-\alpha}\big] y^{-(\beta+1)} dy \\
&\quad + \big[x^{-\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}\big] \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} y^{-(\beta+1)} dy \Bigg\} \\
&= \beta\varepsilon^{\beta} x^{-(\beta+\alpha)} \Bigg\{ \int_{\varepsilon/x}^{1-\varepsilon/x} \big[1 - (1-t)^{-\alpha}\big] t^{-(\beta+1)} dt \\
&\quad + \int_{1+\varepsilon/x}^{+\infty} \big[1 - (t-1)^{-\alpha}\big] t^{-(\beta+1)} dt \\
&\quad + \big[1 - (\varepsilon/x)^{-\alpha}\big] \int_{1-\varepsilon/x}^{1+\varepsilon/x} t^{-(\beta+1)} dt \Bigg\} \\
&= \sum_{i=1}^{4} I_1(\alpha)
\end{aligned}$$

Pour $\alpha > 0$ assez petit, considérons la fonction : $\alpha \to g_t(\alpha)$ définie par

$$\begin{aligned}
g_t(\alpha) &= \left(\frac{1-(1-t)^{-\alpha}}{\alpha}\right) 1_{]\varepsilon/x, 1-\varepsilon/x[}(t) + \left(\frac{1-(t-1)^{-\alpha}}{\alpha}\right) 1_{]1+\varepsilon/x, 2[}(t) \\
&\quad + \left(\frac{1-(t-1)^{-\alpha}}{\alpha}\right) 1_{]2,+\infty[}(t) + \left(\frac{\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-\alpha}\right)}{\alpha}\right) 1_{]1-\varepsilon/x, 1+\varepsilon/x[}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{4} g_t^i(t)
\end{aligned}$$

et posons :

$$h_t(\alpha) = x^{-\alpha} g_t(\alpha)$$

Démontrons que $h^i_{\cdot}(\alpha)$ est monotone et que

$$\beta\varepsilon^{\beta} x^{-\beta} \int h_t^i(\alpha) t^{-(\beta+1)} dt < B_i \text{ pour } i = 1, 2, 4$$

$$\beta\varepsilon^{\beta} x^{-\beta} \int h_t^3(\alpha) t^{-(\beta+1)} dt \geqslant B_3$$

En effet,

$$h_{\cdot}^{1\prime}(\alpha) = x^{-\alpha}\big(g_{\cdot}^{1\prime}(\alpha) - \ln(x) g_{\cdot}^{1}(\alpha)\big).$$

Comme

$$h_t^{1\prime}(0) = \ln(1-t)\left(-\frac{1}{2}\ln(1-t) - \ln(x)\right) > 0$$

si $x > 1/\varepsilon$ et $h^{1\prime}(\alpha)$ est continue, $h^{1\prime}(\alpha) > 0$ si α est bien choisi et $x > 1/\varepsilon$.

Ainsi pour de tels choix, $h^1(\alpha)$ est croissante.

Comme

$$h_t^{2\prime}(0) = \ln(t-1)\left(-\frac{1}{2}\ln(t-1) - \ln(x)\right) > 0$$

si $x > 1/\varepsilon$ et $h^{2\prime}(\alpha)$ est continue, $h^{2\prime}(\alpha) > 0$ si α est bien choisi et $x > 1/\varepsilon$.

Ainsi pour de tels choix, $h^2(\alpha)$ est croissante.

Comme

$$h_t^{3\prime}(0) = \ln(t-1)\left(-\frac{1}{2}\ln(t-1) - \ln(x)\right) < 0$$

si $x > 1$ et $h^{3\prime}(\alpha)$ est continue, $h^{3\prime}(\alpha) < 0$ si α est bien choisi et $x > 1$.

Ainsi pour de tels choix, $h^3(\alpha)$ est décroissante.

Comme

$$h^{4\prime}(0) = \ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) - \ln(x)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\ln(\varepsilon x) > 0$$

si $x > 1/\varepsilon$ et $h^{4\prime}(\alpha)$ est continue, $h^{4\prime}(\alpha) > 0$ si α est bien choisi et $x > 1/\varepsilon$.

Ainsi pour de tels choix, $h^4(\alpha)$ est croissante.

Supposons maintenant que $0 < \alpha < \alpha_0$ et $x > 1/\varepsilon$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\int_{\varepsilon/x}^{1-\varepsilon/x} x^{-\alpha}\left(\frac{1-(1-t)^{-\alpha}}{\alpha}\right)t^{-(\beta+1)}dt \\
&\leqslant \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\int_{\varepsilon/x}^{1-\varepsilon/x} x^{-\alpha_0}\left(\frac{1-(1-t)^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\right)t^{-(\beta+1)}dt \\
&\leqslant \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta} x^{-\alpha_0}\left(1-\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-(\beta+1)}\int_{\varepsilon/x}^{1-\varepsilon/x}\left(\frac{1-(1-t)^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\right)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\left(1-\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-(\beta+1)}\left[t+\frac{(1-t)^{-\alpha_0+1}}{-\alpha_0+1}\right]_{\varepsilon/x}^{1-\varepsilon/x}\\
&= \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\left(\frac{x-\varepsilon}{x}\right)^{-(\beta+1)}\left[1-2\cdot\frac{\varepsilon}{x}+\frac{1}{-\alpha_0+1}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-\alpha_0+1}\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{-\alpha_0+1}\left(\frac{x-\varepsilon}{x}\right)^{-\alpha_0+1}\right]\\
&\leqslant \frac{\beta\varepsilon^{2\beta}}{\alpha_0}\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\beta+1}}\left(\varepsilon^{\alpha_0}+\frac{\varepsilon^{-\alpha_0+2}}{-\alpha_0+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\int_{1+\varepsilon/x}^{2}x^{-\alpha}\left(\frac{1-(t-1)^{-\alpha}}{\alpha}\right)t^{-(\beta+1)}dt\\
&\leqslant \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\int_{1+\varepsilon/x}^{2}x^{-\alpha_0}\left(\frac{1-(t-1)^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\right)t^{-(\beta+1)}dt\\
&\leqslant \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}2^{-(\beta+1)}\int_{1+\varepsilon/x}^{2}\left(1-(t-1)^{-\alpha_0}\right)dt\\
&= \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}2^{-(\beta+1)}\left[t-\frac{(t-1)^{-\alpha_0+1}}{-\alpha_0+1}\right]_{1+\varepsilon/x}^{2}\\
&= \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}2^{-(\beta+1)}\left[1-\frac{1}{-\alpha_0+1}-\frac{\varepsilon}{x}+\frac{1}{-\alpha_0+1}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-\alpha_0+1}\right]\\
&\leqslant \frac{\beta\varepsilon^{2\beta}}{\alpha_0}2^{-(\beta+1)}\left(\varepsilon^{\alpha_0}+\frac{\varepsilon^{-\alpha_0+2}}{-\alpha_0+1}\right)\\
&-\beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\int_{2}^{+\infty}x^{-\alpha}\left(\frac{1-(t-1)^{-\alpha}}{\alpha}\right)t^{-(\beta+1)}dt\\
&\leqslant -\beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\int_{2}^{+\infty}x^{-\alpha_0}\left(\frac{1-(t-1)^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\right)t^{-(\beta+1)}dt\\
&\leqslant \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\int_{2}^{+\infty}(t-1)^{-\alpha_0}t^{-(\beta+1)}dt\\
&\leqslant \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\int_{2}^{+\infty}t^{-(\beta+1)}dt\\
&= \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\left[-t^{-\beta}\right]_{2}^{+\infty}\\
&= \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\beta}\frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}2^{-\beta}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon^{2\beta+\alpha_0}}{\alpha_0}2^{-\beta}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^\beta \int_2^{+\infty} x^{-\alpha}\left(\frac{1-(t-1)^{-\alpha}}{\alpha}\right) t^{-(\beta+1)}dt \geqslant -\frac{\varepsilon^{2\beta+\alpha_0}}{\alpha_0}2^{-\beta}$$

$$\begin{aligned}
&\beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^\beta \int_{1-\varepsilon/x}^{1+\varepsilon/x} x^{-\alpha}\left(\frac{1-\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-\alpha}}{\alpha}\right) t^{-(\beta+1)}dt \\
&\leqslant \beta\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^\beta \frac{x^{-\alpha_0}-\varepsilon^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\left[\frac{t^{-\beta}}{-\beta}\right]_{1-\varepsilon/x}^{1+\varepsilon/x} \\
&\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^\beta \frac{\varepsilon^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\left(\frac{x}{x+\varepsilon}\right)^\beta + \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^\beta \frac{x^{-\alpha_0}}{\alpha_0}\left(\frac{x}{x-\varepsilon}\right)^\beta \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^{2\beta}}{\alpha_0}\left(\varepsilon^{-\alpha_0}+\frac{\varepsilon^{\alpha_0}}{(1-\varepsilon^2)^\beta}\right)
\end{aligned}$$

Par le théorème de la convergence monotone, lorsque $\alpha \downarrow 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{I_1(\alpha)}{\alpha} &\to \beta\varepsilon^\beta x^{-\beta}\left(\int_{\varepsilon/x}^{1-\varepsilon/x} \ln(1-t)t^{-(\beta+1)}dt\right) \\
\frac{I_2(\alpha)}{\alpha} &\to \beta\varepsilon^\beta x^{-\beta}\left(\int_{1+\varepsilon/x}^{2} \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt\right) \\
\frac{I_3(\alpha)}{\alpha} &\to \beta\varepsilon^\beta x^{-\beta}\left(\int_{2}^{+\infty} \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt\right) \\
\frac{I_4(\alpha)}{\alpha} &\to \beta\varepsilon^\beta x^{-\beta}\left(\ln(\varepsilon/x)\int_{1-\varepsilon/x}^{1+\varepsilon/x} t^{-(\beta+1)}dt\right) \quad \text{si } x > 1/\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\Psi(x) = &\int_{\varepsilon/x}^{1-\varepsilon/x} \ln(1-t)t^{-(\beta+1)}dt + \int_{1+\varepsilon/x}^{2} \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt \\
&+ \int_2^{+\infty} \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt + \ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)\cdot\int_{1-\varepsilon/x}^{1+\varepsilon/x} t^{-(\beta+1)}dt
\end{aligned}$$

tend vers

$$\begin{aligned}
\Psi = &\int_0^1 \ln(1-t)t^{-(\beta+1)}dt + \int_i^2 \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt \\
&+ \int_2^{+\infty} \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt
\end{aligned}$$

lorsque $x \to + \propto$, il suffit de montrer que

$$\int_0^1 \ln(1-t)t^{-(\beta+1)}dt + \int_1^2 \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt + \int_2^{+\infty} \ln(t-1)t^{-(\beta+1)}dt = I + II + III > 0.$$

- *Minoration de I.*

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1\right) \ln(1-t)t^{-(\beta+1)}dt \\ &= \int_0^{1/2} \ln(1-t)t^{-(\beta+1)}dt + \int_0^{1/2} \ln(1/2-t)(t+1/2)^{-(\beta+1)}dt \\ &= I' + II' \end{aligned}$$

Une intégration par partie dans I' donne

$$\begin{aligned} I' &= \left[\frac{\ln(1-t)}{-\beta t^\beta}\right]_0^{1/2} - \frac{1}{\beta}\int_0^{1/2} \frac{t^{-\beta}}{1-t}dt \\ &\geqslant \left[\frac{\ln(1-t)}{-\beta t^\beta}\right]_0^{1/2} - \frac{2}{\beta}\int_0^{1/2} t^{-\beta}dt \\ &= \frac{2^\beta \ln 2}{\beta} - \frac{2^\beta}{\beta(-\beta+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II' &= \int_0^{1/2} \ln(1/2-t)(t+1/2)^{-(\beta+1)}dt \\ &= \int_0^{1/2} \ln(1-2t)(t+1/2)^{-(\beta+1)}dt - \ln 2 \int_0^{1/2} (t+1/2)^{-(\beta+1)}dt \\ &\geqslant 2^{\beta+1} \int_0^{1/2} \ln(1-2t)dt - \ln 2 \int_0^{1/2} (t+1/2)^{-(\beta+1)}dt \\ &= -2^\beta + \frac{\ln 2}{\beta} - \frac{\ln 2\, 2^\beta}{\beta} \end{aligned}$$

donc

$$I \geqslant -\frac{2^\beta}{\beta(-\beta+1)} - 2^\beta + \frac{\ln 2}{\beta}.$$

- *Minoration de II.*

$$II \geqslant \int_1^2 \ln(t-1)dt = -1.$$

• *Minoration de III.*

Par la transformation $t \to \ln(t-1)$,

$$III = \int_0^{+\infty} t(1+e^t)^{-(\beta+1)} e^t dt$$

et une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} III &= \left[\frac{(e^t+1)^{-\beta} t}{-\beta}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} (e^t+1)^{-\beta} dt \\ &\geqslant \frac{1}{\beta 2^\beta}\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{1}{\beta^2 2^\beta} \end{aligned}$$

Posons

$$\Phi = (\beta^2)(I + II + III).$$

Comme

$$\lim_{\beta\to 0^+} \Phi \geqslant \lim_{\beta\to 0^+} \left(\frac{-2^\beta\beta}{-\beta+1} - 2^\beta\beta^2 + \ln 2\beta - \beta^2 + \frac{1}{2^\beta}\right) = 1 > 0,$$

alors il existe β_0 positif assez petit tel que $I + II + III > 0$ pour tout β vérifiant $0 < \beta \leqslant \beta_0 < 1/2$.

Puisque $\Psi(x) \to \Psi$ lorsque $x \to +\propto$, alors

$$\forall\, A > 0, \exists x_0' > 0 \text{ tel que } \forall\, x \geqslant x_0' \text{ on a } |\Psi(x) - \Psi| < A.$$

Choisissons

$$A = \frac{1}{2\beta^2}\left(\frac{-2^\beta\beta}{-\beta+1} - 2^\beta\beta^2 + \ln 2\beta - \beta^2 + \frac{1}{2^\beta}\right),$$

alors

$$\Psi(x) > \frac{1}{2\beta^2}\left(\frac{-2^\beta\beta}{-\beta+1} - 2^\beta\beta^2 + \ln 2\beta - \beta^2 + \frac{1}{2^\beta}\right) > 0$$

pour tout $x \geqslant x_0'$, si $\beta \in]0, \beta_0]$.

Finalement, si d'une part nous choisissons le couple (α, β) de telle sorte que $0 < \alpha < \beta \leqslant \beta_0 < 1/2$ et d'autre part $r = \varepsilon^{-\alpha} - x_0'^{-\alpha}$, alors les conditions 1) et 2) du théorème 3.15 sont satisfaites.

En effet, on a $C_v(r) = [0, x_0']$ et $C_v(r)^c =]x_0', +\infty[$ avec $\lambda(C_v(r)) > 0$ et $\lambda(C_v(r)^c) > 0$ et de plus $\Psi(x) > 0$ sur $C_v(r)^c$, d'où la transience de la chaîne.

Remarque. — Numériquement, on peut prendre $\beta_0 = 0.362$ par exemple.

Remerciements

Ce travail nous a été proposé par le professeur S.N. Smirnov de l'Université d'État de Moscou, à qui nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance. Nos remerciements vont également au Professeur D. Revuz de l'Université Paris VII et au Professeur V. Harison de l'Université d'Antananarivo pour toutes les suggestions. Nos remerciements vont également au referee.

Bibliographie

[1] FELLER (W.). — *An introduction to probability theory and its applications*, John Wiley & Sons, New York, Vol. 2 (1966), p. 208.

[2] FOGUEL (S.R.). — *The ergodic theory of Markov processes*, New York, Van Nostrand, 1969.

[3] KNIGHT (F.B.). — On the absolute-difference chains, Z. Warscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, Vol. 43 (1978), p. 57-63.

[4] NEVEU (J.). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson & Cie, Éditeurs, Paris, 1964.

[5] NUMMELIN (E.). — *General irreductible Markov chains and non-negative operators*, Cambridge Univ. Press, 1984.

[6] REVUZ (D.). — *Markov chains*, North Holland P.C., Amsterdam, 1975.

[7] SMIRNOV (S.N.). — *Les théorèmes limites pour les processus markoviens et leurs applications*, Thèse de Moscou, Université d'État de Moscou (en russe), 1982.

[8] SMIRNOV (S.N.). — Sur la récurrence de la chaîne de différences absolues, Math. Zamétki, T. 41, n° 6, 1987.

[9] SMIRNOV (S.N.) & RABEHERIMANANA (T.J.). — Sur l'irréductibilité et la conservativité de la chaîne de différences absolues, Publications du Service de Mathématiques, Vol. 1, Antananarivo, 1987.

[10] NORMAN (M.F.). — *Markov processes and learning models*, New York, Academic Press, 1972.

[11] MEEYN (S.P.) & TWEEDIE (R.L.). — *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.