

HÉLÈNE MAUGENDRE

FRANÇOISE MICHEL

Fibrations associées à un pinceau de courbes planes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 10,
n° 4 (2001), p. 745-777

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_4_745_0

© Université Paul Sabatier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Fibrations associées à un pinceau de courbes planes^(*)

HÉLÈNE MAUGENDRE ⁽¹⁾, FRANÇOISE MICHEL ⁽²⁾

RÉSUMÉ. — Soient f et g deux germes de fonctions analytiques à l'origine dans \mathbb{C}^2 et $N \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons explicitement l'ensemble B des valeurs atypiques du pinceau $\{f_a = f + ag^N, a \in \mathbb{C}\}$. Avec notre description de B , nous pouvons déterminer les valeurs irrégulières à l'infini des applications polynômiales de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} (voir les exemples du chapitre 5). Nous comparons les fibrations de Milnor des germes f_a du pinceau et nous exhibons un facteur commun aux polynômes caractéristiques de leurs monodromies. Lorsque $g = x$, nous montrons que la répartition de la multiplicité par dicritique est indépendante du paramètre a et nous décrivons la topologie des membres génériques en fonction de la résolution minimale de $f \cdot x$.

ABSTRACT. — Let f and g be two holomorphic germs at the origin in \mathbb{C}^2 , and let N be in \mathbb{N}^* . We explicitly determine the set B of atypical values of the pencil $\{f_a = f + ag^N, a \in \mathbb{C}\}$. In section 5 we use our definition of B to calculate the irregular values at infinity of a polynomial map from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C} . We compare the Milnor fibrations of the germs $f_a, a \in \mathbb{C}$. We give a common factor of the characteristic polynomials of the corresponding monodromies. When $g = x$, we describe the topology of a generic germ of the pencil in terms of the minimal resolution of $f \cdot x$.

1. Introduction

NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — Si g_1 et g_2 sont deux germes de fonctions analytiques à l'origine de \mathbb{C}^2 , la multiplicité d'intersection à l'origine entre g_1 et g_2 est notée $(g_1, g_2)_0$.

(*) Reçu le 26 mars 2001, accepté le 30 avril 2002

(1) Institut Fourier, Université de Grenoble I, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères, courriel : Helene.Maugendre@ujf-grenoble.fr

(2) Laboratoire de mathématiques Émile Picard, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31 062 Toulouse Cedex 4, courriel : fmichel@picard.ups-tlse.fr

La multiplicité à l'origine de g_1 est notée $(g_1)_0$.

Les germes g_1 et g_2 sont topologiquement équivalents s'il existe un germe d'homéomorphisme $G : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de degré $+1$ tel que $g_1 \circ G = g_2$.

Si g_1 est un germe irréductible différent de x , une paramétrisation de g_1 est la donnée de $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ tel que $\{g_1 = 0\} = \{(t^m, \varphi(t)), t \in \mathbb{C}\}$, de plus on choisit m minimum. Le théorème de Puiseux montre l'existence d'une telle paramétrisation.

La valuation en t de $g_2(t^m, \varphi(t))$ est notée $\text{val}_t(g_2(t^m, \varphi(t)))$. On rappelle que, lorsque $(t^m, \varphi(t))$ est une paramétrisation du germe irréductible g_1 , $\text{val}_t(g_2(t^m, \varphi(t))) = (g_1, g_2)_0$.

D'autre part une composante irréductible d'un germe de courbe est appelée "branche" de la courbe.

On note D_ε^{2n} les boules de \mathbb{C}^n de rayon ε et S_ε^{2n-1} leur bord.

Soient f et g deux germes de fonctions analytiques à singularité, non nécessairement isolée, à l'origine de \mathbb{C}^2 , tels que f et g n'aient aucune composante irréductible commune. Soient N un entier strictement positif et a un nombre complexe. Nous définissons $f_a : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ par $f_a(x, y) = f(x, y) + a(g(x, y))^N$. Nous considérons le germe d'application analytique $\Phi_a = (g, f_a) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ défini par :

$$\Phi_a(x, y) = (g, f_a)(x, y) = (g(x, y), f_a(x, y)).$$

Le germe Φ_a est fini car g et f_a n'ont aucune composante commune.

Le lieu des zéros D du déterminant $\hat{D} = (\partial g / \partial x)(\partial f / \partial y) - (\partial g / \partial y)(\partial f / \partial x)$ de la matrice jacobienne de Φ_a est le lieu critique de Φ_a .

Le rôle de l'entier N , qui paraît arbitraire dans la définition de f_a , deviendra naturel dans l'étude détaillée des pinceaux de la forme $f(x, y) + ax^N$ (voir chapitre 4). De tels pinceaux déterminent le comportement à l'infini des applications polynômiales P , de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} . L'entier N est alors égal au degré du polynôme P .

Par convention, nous choisissons des coordonnées dans \mathbb{C}^2 pour que $\{x = 0\}$ ne soit pas une composante de $D \cup f^{-1}(0)$.

ÉNONCÉ DES PRINCIPAUX RÉSULTATS. — Traditionnellement, l'ouvert d'équisingularité du pinceau $f + ag^N$ est le plus grand ouvert U de \mathbb{C} tel que, quels que soient $a, b \in U$, f_a et f_b ont même type topologique.

Ici nous construisons explicitement un ensemble fini B , de nombres complexes, de la façon suivante.

Considérons l'ensemble (éventuellement vide) des branches γ_j de D , $1 \leq j \leq k$ paramétrées par $(t^{m_j}, \varphi_j(t))$ telles que $\text{val}_t f((t^{m_j}, \varphi_j(t))) = N(g, \gamma_j)_0$. Nous obtenons :

$$f((t^{m_j}, \varphi_j(t))) = b_j t^{N(g, \gamma_j)_0} + \sum_{i \geq N(g, \gamma_j)_0 + 1} c_i t^i$$

$$g((t^{m_j}, \varphi_j(t))) = d_j t^{(g, \gamma_j)_0} + \sum_{i \geq (g, \gamma_j)_0 + 1} d'_i t^i.$$

Posons $B_1 = \{-b_j d_j^{-N}, 1 \leq j \leq k\}$.

Si f est non réduite ou s'il existe au moins une branche γ de D paramétrée par $(t^m, \varphi(t))$ telle que $\text{val}_t f((t^m, \varphi(t))) > N(g, \gamma)_0$, alors $B = B_1 \cup \{0\}$, sinon $B = B_1$.

Dans le chapitre 2 nous démontrons :

THÉORÈME 1. — *L'ouvert $\mathbb{C} \setminus B$, est l'ouvert U d'équisingularité du pinceau $f + ag^N$.*

L'existence d'un tel ouvert est connue depuis O. Zariski (voir [Z] mais aussi [T1]). Dans [L-W], D.T. Lê et C. Weber donnent une caractérisation de l'ensemble fini $\mathbb{C} \setminus U$ en fonction de la résolution minimale du pinceau.

Le théorème 1 présente l'avantage de déterminer B algorithmiquement à partir de f et g sans référence au paramètre a . Il fournit aussi la caractérisation implicite suivante de U : "le paramètre a appartient à U si et seulement si la multiplicité d'intersection de f_a avec chaque branche de D est minimale."

Ensuite nous comparons les fibrations de Milnor des membres du pinceau $f + ag^N$ et nous déterminons un facteur commun aux polynômes caractéristiques des monodromies associées.

Plus précisément, pour $a \in \mathbb{C}^*$ et ε suffisamment petit, nous considérons la décomposition minimale de Waldhausen $\bigcup_{\text{finie}} V_S$ de S_ε^3 admettant les composantes de l'entrelacs de $ff_a g$ pour feuilles de Seifert. À chaque variété de Seifert V_S nous associons l'invariant topologique $q(S)$ (voir définition 5 paragraphe 3.1).

THÉORÈME 2. — Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, si $N > \min q(S)$, la variété de Waldhausen $W^N = \bigcup_{q(S) < N} V_S$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\varphi_a = f_a/|f_a| : W^N \rightarrow S^1$ et $\varphi = f/|f| : W^N \rightarrow S^1$ sont des fibrations isomorphes ;
2. si F_a^N est une fibre de φ_a , alors $\chi(F_a^N) = (g, f_a)_\circ - (f_a, \Gamma^N)_\circ$ où $\chi(F_a^N)$ est la caractéristique d'Euler de F_a^N , et Γ^N est le produit des composantes γ de D telles que $(f, \gamma)_\circ / (g, \gamma)_\circ < N$;
3. la résolution minimale de $f \cdot g$ définit un ensemble fini I_N et des entiers positifs $r_N, v_i(f_a)$, et $\text{val}_{E_i}(f_a)$ où $i \in I_N$, tels que le polynôme $\Lambda_a^N(t)$ défini par :

$$\Lambda_a^N(t) = (t^{r_N} - 1) \prod_{i \in I_N} (t^{\text{val}_{E_i}(f_a)} - 1)^{v_i(f_a) - 2}$$

soit le polynôme caractéristique de la monodromie de f_a^N . De plus, Λ_a^N divise le polynôme caractéristique de la monodromie de f et celui de la monodromie de f_a .

La variété W^N est construite (3.2 et 3.3) à l'aide du carrousel de Lê (voir [L1]). Le théorème 3 (3.3) montre que φ_a est une "sous-fibration de Milnor" commune à tous les membres du pinceau et entraîne les points 1 et 2 du théorème 2. Le point 3 du théorème 2 est démontré au paragraphe 4.1 (proposition 6).

En toutes dimensions, C. Caubel ([C1], [C2] et [C3]) étudie les fibrations de Milnor des pinceaux de germes d'hypersurfaces et retrouve, en particulier, les résultats de I.N. Iomdine, D.T. Lê, D. Siersma, M. Tibar (voir [I], [L2], [S], [Ti]) qui concernaient les pinceaux de la forme $f(z_0, \dots, z_n) + az_0^N$ avec N "grand". Pour d'autres familles voir aussi [Sc].

Lorsque l'on considère les valeurs atypiques à l'infini des applications polynômiales de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} , on est amené à regarder des pinceaux de la forme $f(x, y) + ax^N$. C'est pourquoi, au chapitre 4, nous faisons une étude détaillée de ce pinceau au moyen de la résolution minimale de $f \cdot x$. Les résultats de ce chapitre 4 se généralisent directement aux pinceaux $f + ag^N$ lorsque g est irréductible. Au chapitre 5 (exemple 3) nous donnons des exemples de détermination des valeurs atypiques à l'infini d'une application polynômiale de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} .

Pour les pinceaux $f(x, y) + ax^N$, $\{q(S)\}$ est l'ensemble des quotients polaires de f pour la direction x (voir [LMW1]). En 4.2 et 4.3, nous supposons

$N > \min\{q(S)\}$. Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, nous considérons la résolution minimale π du germe produit $f \cdot f_a \cdot x$. Nous notons $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ l'arbre orienté qui représente π . Étant donné un sommet dicritique S de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ (voir le corollaire 7 du paragraphe 4.2), nous notons ε l'arête qui arrive en S . Pour tout $b \in \mathbb{C}$, $f_{b,\varepsilon}$ désigne le produit (avec multiplicité) des composantes de f_b dont la géodésique passe par ε (voir le paragraphe 4.3). Nous montrons (proposition 9) :

$$(f_{b,\varepsilon}, x)_0 = (f_{a,\varepsilon}, x)_0, \text{ quel que soit } b \in \mathbb{C}.$$

Cette égalité est non triviale si b appartient à B . Elle montre que la "répartition de la multiplicité" par dicritique est indépendante de la valeur du paramètre a de la déformation $f(x, y) + ax^N$. Ceci limite les variations de la topologie des fibres spéciales et s'applique en particulier aux singularités à l'infini des applications polynômes de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} .

Ensuite, pour tout $a \in U$, nous déterminons, dans les théorèmes 4 et 5 du paragraphe 4.4, l'arbre de la résolution minimale de $f_a \cdot x$ et de $f \cdot f_a \cdot x$ à partir de celui de $f \cdot x$.

Les pinceaux $f(x, y) + ax^N$ lorsque $N \leq \min\{q(S)\}$ sont dits dégénérés. Ils sont étudiés au paragraphe 4.5.

2. Caractérisation des valeurs atypiques

Considérons l'ensemble fini B et l'ouvert d'équisingularité $U = \mathbb{C} \setminus B$ définis dans l'introduction.

DÉFINITION 1. — *Si $a \in U$, a est une valeur régulière du pinceau et f_a est un germe générique du pinceau.*

Si $b \in B$, b est une valeur atypique du pinceau et f_b est un germe spécial du pinceau.

DÉFINITION 2. — *La courbe jacobienne de (g, f_a) est l'adhérence du lieu critique de Φ_a auquel on enlève les éventuelles branches de $(f_a \cdot g)^{-1}(0)$.*

On obtient donc, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\Gamma_a = \overline{D \setminus (\{f_a \cdot g = 0\} \cap D)}$.

La courbe discriminante Δ_a est l'image de Γ_a par l'application Φ_a .

REMARQUE 1. — *Pour $a \in U$, f_a est à singularité isolée à l'origine et Γ_a est alors constituée de la réunion de la courbe jacobienne Γ_0 de (g, f) et des éventuelles composantes non réduites de $f^{-1}(0)$.*

Soient (u, v) les coordonnées complexes de $\Phi_a((\mathbb{C}^2, 0))$ et δ une branche de Δ_a . Alors il existe un nombre rationnel q_δ/p_δ strictement positif ($\text{pgcd}(q_\delta, p_\delta)=1$), un entier $m > 0$ tels qu'un développement de Puiseux de δ soit donné par :

$$u = v^{q_\delta/p_\delta} \left(\alpha + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \beta_k v^{k/m} \right)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ (car $\{u = 0\}$ n'est pas une branche de Δ_a) et $\beta_k \in \mathbb{C}$.

DÉFINITION 3. — *L'ensemble des quotients jacobiens de (g, f_a) est l'ensemble Q_a des nombres rationnels p_δ/q_δ associés aux branches δ de Δ_a .*

Si g est une forme linéaire, Q_a est l'ensemble des quotients polaires de f_a pour la direction g .

Cet ensemble est un invariant du type topologique de la paire de germes (g, f_a) . Lorsque g est une forme linéaire transverse à f voir [L-M-W1], sinon voir [Ma2]. La proposition suivante qui nous sera utile pour les démonstrations se vérifie facilement (voir [L-M-W1] ou [Ma2]) :

PROPOSITION a. — *L'ensemble Q_a est égal à l'ensemble constitué des nombres rationnels $q_\gamma(f_a) = (f_a, \gamma)_0 / (g, \gamma)_0$, où γ est une branche de Γ_a .*

REMARQUE 2. — *Si une branche γ de Γ_a ($a \neq 0$) n'est pas une branche de Γ_0 , alors γ est une branche de $f^{-1}(0)$ et correspond à un quotient jacobien égal à N pour (g, f_a) .*

PROPOSITION 1. — *Si p/q appartient à Q_0 et $p/q < N$ alors p/q appartient à Q_a quel que soit a dans \mathbb{C} . De plus, si $a \in U$, alors $\max Q_a \leq N$.*

Démonstration. — Comme $p/q < N$, toute branche γ de Γ_0 de quotient p/q est une branche de Γ_a . On doit vérifier que le quotient est le même pour Γ_0 et Γ_a .

On a $f_a(x, y) = f(x, y) + a(g(x, y))^N$. Si $(t^m, \varphi(t))$ est une paramétrisation de γ , on a $(f_a, \gamma)_0 / (g, \gamma)_0 = \text{val}_t(f_a(t^m, \varphi(t))) / \text{val}_t(g(t^m, \varphi(t)))$ et

$$(f_a, \gamma)_0 / (g, \gamma)_0 = \text{val}_t(f(t^m, \varphi(t)) + a(g(t^m, \varphi(t)))^N) / \text{val}_t(g(t^m, \varphi(t))).$$

Si $\text{val}_t(f(t^m, \varphi(t))) / \text{val}_t(g(t^m, \varphi(t))) < N$, c'est-à-dire si le quotient jacobien de f associé à γ est strictement plus petit que N , alors le quotient jacobien pour f_a associé à γ est le même que celui de f .

Un calcul analogue montre que si $a \in U$ alors $\max Q_a \leq N$. □

Nous appelons Q_a^N le sous-ensemble de Q_a défini comme suit :

$$Q_a^N = \{p_\delta/q_\delta \in Q_a \text{ tels que } p_\delta/q_\delta < N\}.$$

Nous notons Δ_a^N l'ensemble des branches de Δ_a dont le quotient jacobien associé appartient à Q_a^N . La proposition 1 implique :

COROLLAIRE 1. — *Si N est strictement supérieur au plus petit quotient jacobien de (g, f) , alors, pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'ensemble Q_a^N n'est pas vide, de plus, $Q_a^N = Q_0^N$.*

On va relier l'ensemble des valeurs atypiques B , défini dans l'introduction, à la courbe jacobienne et aux quotients jacobiens de (g, f) .

REMARQUE 3. — 1. *Les définitions de B et de Q_0 impliquent que si N n'appartient pas à Q_0 , alors, soit B est vide, soit $B = \{0\}$.*

2. *S'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que f_b soit non réduite, alors $b \in B$. En effet, si $b = 0$ et si f_b n'est pas réduite, c'est par définition ; si $b \neq 0$ et si f_b n'est pas réduite, alors $f_b^{-1}(0)$ et D ont une branche commune paramétrée par $(t^m, \varphi(t))$, et $f_b(t^m, \varphi(t)) = 0$, donc $f(t^m, \varphi(t)) + b(g(t^m, \varphi(t)))^N = 0$, ce qui implique $b \in B$.*

PROPOSITION 2. — *Il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $\max Q_b \geq N$ si et seulement si $B \neq \emptyset$. Dans ce cas on a $Q_a = Q_0^N \cup \{N\}$ quel que soit $a \in U$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ avec $\max Q_b \geq N$, alors il existe une branche γ de Γ_b paramétrée par $(t^m, \varphi(t))$ telle que $\text{val}_t f_b(t^m, \varphi(t)) \geq N(g, \gamma)_0$. On a aussi $\text{val}_t f(t^m, \varphi(t)) \geq N(g, \gamma)_0$. On a ainsi $f_b(t^m, \varphi(t)) = ct^n + \sum_{i \geq n+1} c_i t^i$, $c \neq 0$.

$$\text{On développe } g(t^m, \varphi(t)) = dt^{(g, \gamma)_0} + \sum_{i \geq (g, \gamma)_0 + 1} d_i t^i.$$

Deux cas sont à considérer :

1. Si $n > N(g, \gamma)_0$, alors $f(t^m, \varphi(t)) = -bd^N t^{N(g, \gamma)_0} + \dots$ et donc $b \in B$.
2. Si $n = N(g, \gamma)_0$, alors $f(t^m, \varphi(t)) = (c - bd^N)t^{N(g, \gamma)_0} + \dots$

Si $c \neq bd^N$, alors $b - cd^{-N} \in B$.

Enfin si $c = bd^N$, alors $0 \in B$ car, soit on a $f(t^m, \varphi(t)) = 0$ et f est non réduite, soit $\text{val}_t (f(t^m, \varphi(t))) > N(g, \gamma)_0$ et $\max Q_0 > N$; dans tous les cas $0 \in B$ par définition.

On vient de montrer que s'il existe b tel que $\max Q_b \geq N$, on a $B \neq \emptyset$.

Si $B_1 \neq \emptyset$, alors $\max Q_a \geq N$ pour tout $a \notin B_1$. Dans ce cas la proposition 1 et le corollaire 1 impliquent $Q_a = Q_0^N \cup \{N\}$ pour tout $a \in U$.

Sinon, $B = \{0\}$, et alors, soit f n'est pas réduite et donc $Q_a = Q_0^N \cup \{N\}$ pour tout $a \neq 0$, soit $\max Q_0 > N$ et alors il existe une branche γ de Γ_0 paramétrée par $(t^m, \varphi(t))$ telle que $\text{val}_t (f(t^m, \varphi(t))) > N(g, \gamma)_0$. Par conséquent pour tout $a \neq 0$, $\text{val}_t (f_a(t^m, \varphi(t))) = N(g, \gamma)_0$ et $Q_a = Q_0^N \cup \{N\}$. \square

La proposition 2 implique en particulier :

COROLLAIRE 2. — Si $B = \emptyset$ alors $Q_a = Q_0 = Q_0^N$ quel que soit $a \in \mathbb{C}$.

Démonstration du théorème 1. — Comme $a \notin B$, f_a est réduite. Si f_b n'est pas réduite, alors $b \in B$ (d'après la remarque 3) et f_b n'est pas topologiquement équivalent à f_a .

Maintenant il suffit donc de considérer le cas où f_b est réduite. Si $c \in \mathbb{C}$, le germe jacobien $\hat{\Gamma}_c$ de (g, f_c) est le produit des composantes de \hat{D} qui ne divisent pas $g \cdot f_c$. Si f_a et f_b sont réduites on a $\hat{\Gamma}_a = \hat{\Gamma}_b = \prod_{i=1}^n \hat{\gamma}_i^{k_i}$, où les germes irréductibles $\hat{\gamma}_i$ et $\hat{\gamma}_j$ sont distincts pour $i \neq j$.

Dans [Ma2], on montre que pour tout $c \in \mathbb{C}$, il existe $\varepsilon, \theta, \eta$, $0 < \eta \ll \theta \ll \varepsilon$ suffisamment petits tels que la restriction $f_{c|}$ de f_c à $X_c = f_c^{-1}(S_\eta^1) \cap g^{-1}(D_\theta^2) \cap D_\varepsilon^4$ soit (à isotopie près) la fibration de Milnor de f_c . C'est une version particulière de la fibration de Milnor construite à partir du carrousel de Lê. On note F_c une fibre de $f_{c|}$. Comme dans [L1] on a :

$$\chi(F_a) = (g, f_a)_0 - (\hat{\Gamma}_a, f_a)_0,$$

$$\chi(F_b) = (g, f_b)_0 - (\hat{\Gamma}_b, f_b)_0.$$

Comme $f_a(x, y) = f_b(x, y) + (a - b)(g(x, y))^N$, on a $(g, f_a)_0 = (g, f_b)_0$ quel que soit $b \in \mathbb{C}$.

D'autre part,

$$(\hat{\Gamma}_a, f_a)_0 = \sum_{i=1}^n k_i (\hat{\gamma}_i, f_a)_0 \text{ et } (\hat{\Gamma}_b, f_b)_0 = (\hat{\Gamma}_a, f_b)_0 = \sum_{i=1}^n k_i (\hat{\gamma}_i, f_b)_0.$$

Soit $(t^{m_i}, \varphi_i(t))$ une paramétrisation de $\hat{\gamma}_i$. On a :

$$(*) \quad \begin{cases} q_{\gamma_i}(f_a) = \frac{\text{val}_t(f_a(t^{m_i}, \varphi_i(t)))}{(g, \hat{\gamma}_i)_0} \\ q_{\gamma_i}(f_b) = \frac{\text{val}_t(f_a(t^{m_i}, \varphi_i(t)) + (b-a)g(t^{m_i}, \varphi_i(t)))^N}{(g, \hat{\gamma}_i)_0} \end{cases}$$

Comme $a \in U$, $\max Q_a \leq N$ (voir la proposition 1). Si $q_{\gamma_i}(f_b) \leq N$, par (*), on a $(\hat{\gamma}_i, f_a)_0 = (\hat{\gamma}_i, f_b)_0$.

Par conséquent :

1. si $b \notin B$, $\max Q_b \leq N$ et $(\hat{\Gamma}_a, f_a)_0 = (\hat{\Gamma}_b, f_b)_0$. De plus, f_a et f_b sont à singularité isolée et en particulier F_a et F_b sont connexes. Donc $\chi(F_a) = \chi(F_b)$ implique $\text{rang}_{\mathbb{Z}} H_1(F_a, \mathbb{Z}) = \text{rang}_{\mathbb{Z}} H_1(F_b, \mathbb{Z})$. Le théorème de μ -constant pour les germes de courbes ([L1]) implique alors que f_a et f_b sont topologiquement équivalentes ;
2. si $b \in B$ et f_b est réduite, il existe des composantes irréductibles $\hat{\gamma}_{i_1}, \dots, \hat{\gamma}_{i_s}$ de $\hat{\Gamma}_a = \hat{\Gamma}_b$ telles que $q_{\hat{\gamma}_{i_j}}(f_b) > N = q_{\hat{\gamma}_{i_j}}(f_a)$. Alors $(\hat{\gamma}_i, f_a)_0 = (\hat{\gamma}_i, f_b)_0$ si $i \notin \{i_j, j = 1, \dots, s\}$ et $(\hat{\gamma}_i, f_a)_0 = N(g, \hat{\gamma}_i)_0 < (\hat{\gamma}_i, f_b)_0$ si $i \in \{i_j, j = 1, \dots, s\}$. Donc $\chi(F_b) < \chi(F_a)$, ce qui implique que f_a et f_b ne sont pas topologiquement équivalentes. \square

Commentaires. — On peut montrer topologiquement, sans utiliser le théorème μ -constant, que si $b \notin B$ alors f_a et f_b sont topologiquement équivalentes. Au paragraphe 3.2, la construction de la décomposition minimale de Waldhausen pour f_a et f_b donne, entre autre, une telle preuve topologique directe.

3. Fibration commune aux germes du pinceau $f(x, y) + a(g(x, y))^N$

3.1. Graphe coloré de la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour $f \cdot f_a \cdot g$

Soit ℓ un germe de fonction analytique à l'origine de \mathbb{C}^2 .

DÉFINITION 4. — Une décomposition de Waldhausen de S_ε^3 pour ℓ est une décomposition de S_ε^3 en une réunion finie de variétés de Seifert (variétés connexes qui sont munies d'un feuilletage orienté en cercles) telle que les composantes de l'entrelacs orienté et pondéré $K_\ell = \ell^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ soient des feuilles de certaines de ces variétés.

REMARQUE 4. — Deux variétés de Seifert d'une telle décomposition s'intersectent en au plus un tore.

Le graphe de Waldhausen associé à une décomposition de Waldhausen de S_ε^3 pour ℓ , noté $G(\ell)$ se construit comme suit.

Chaque sommet S de l'arbre correspond à une variété de Seifert V_S de la décomposition de Waldhausen de S_ε^3 pour ℓ considérée. Deux sommets sont reliés par une arête si les variétés de Seifert qui leur correspondent s'intersectent (toujours suivant un unique tore).

REMARQUE 5. — Comme le graphe $G(\ell)$ représente une décomposition de Waldhausen de S_ε^3 , $G(\ell)$ est un arbre.

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour la construction de $G(f \cdot f_a \cdot g)$, on met autant de flèches rouges (respectivement bleues, respectivement noires) à un sommet S qu'il existe de feuilles de la variété de Seifert V_S (correspondant à ce sommet) qui sont des composantes de K_{f_a} (respectivement K_f , respectivement K_g).

DÉFINITION 5. — Si S est un sommet de $G(f \cdot f_a \cdot g)$, le quotient topologique de S pour f_a (respectivement f), noté $q_a(S)$ (respectivement $q(S)$) est égal à $\mathcal{L}(K_{f_a}, \rho) / \mathcal{L}(K_g, \rho)$, (respectivement $\mathcal{L}(K_f, \rho) / \mathcal{L}(K_g, \rho)$), où ρ est une feuille de la variété de Seifert V_S et $\mathcal{L}(,)$ désigne le nombre d'enlacement dans S_ε^3 .

3.2. Obtention de la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour $f \cdot f_a \cdot g$ via le carrousel

Dans ce paragraphe, $N > \min Q_0$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Le cas $N \leq \min Q_0$ est dégénéré et traité au paragraphe 4.5.

D'après [Ma2], nous savons qu'il existe des réels strictement positifs $\eta, \theta, \varepsilon$ vérifiant $0 < \eta \ll \theta \ll \varepsilon$, tels que pour $\Sigma_a = [(f_a^{-1}(S_\eta^1) \cap g^{-1}(D_\theta^2)) \cup (f_a^{-1}(D_\eta^2) \cap g^{-1}(S_\theta^1))] \cap D_\varepsilon^4$ on a le résultat suivant :

THÉORÈME b. — Il existe $\varepsilon, \theta, \eta$ des réels suffisamment petits, avec $0 < \eta \ll \theta \ll \varepsilon$, tels qu'il existe un difféomorphisme (à coins) Ψ de Σ_a sur S_ε^3 tel que $\Psi(K_f^{\Sigma_a}) = K_f$, $\Psi(K_{f_a}^{\Sigma_a}) = K_{f_a}$ et $\Psi(K_g^{\Sigma_a}) = K_g$ où $K_f^{\Sigma_a} = f^{-1}(0) \cap \Sigma_a$, $K_{f_a}^{\Sigma_a} = f_a^{-1}(0) \cap \Sigma_a$ et $K_g^{\Sigma_a} = g^{-1}(0) \cap \Sigma_a$.

Par conséquent, établir la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour $f \cdot f_a \cdot g$ revient à isotopie près à construire la décomposition minimale de Waldhausen de Σ_a pour $f \cdot f_a \cdot g$.

Quitte à diminuer $\eta, \theta, \varepsilon$, nous pouvons les choisir de sorte que l'intersection de Δ_a avec le bord de $D_\theta^2 \times D_\eta^2$ soit contenue dans $D_\theta^2 \times S_\eta^1$.

Par ailleurs, soit $\Delta_{a,i}$ la réunion des composantes irréductibles de Δ_a qui admettent p_i/q_i pour quotient jacobien, $1 \leq i \leq k$. Il est facile de constater, à l'aide des développements de Puiseux des branches de Δ_a , que, plus le quotient jacobien augmente, plus la tresse $K_{\Delta_{a,i}} = \Delta_{a,i} \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1)$ s'éloigne de l'âme de $(D_\theta^2 \times S_\eta^1)$.

Par conséquent, il existe un réel strictement positif θ' , $0 < \theta' < \theta$ tel que :

$$(\Delta_a \cup \Phi_a(\{f = 0\})) \cap (D_{\theta'}^2 \times S_\eta^1) = \Delta_a^N \cap (D_{\theta'}^2 \times S_\eta^1).$$

REMARQUE 6. — La courbe $\{au^N = v\}$ est une branche de Δ_a si et seulement si f est à singularité non isolée à l'origine.

On écrit

$$\{N\} \cup Q_a = \{p_i/q_i, i = 1, \dots, k, (p_i/q_i) < (p_{i+1}/q_{i+1}), \text{ p.g.c.d.}(p_i, q_i) = 1\}.$$

REMARQUE 7. — Il existe m , $1 \leq m < k$, tel que $p_{m+1}/q_{m+1} = N$.

D'après [L-M-W1], chapitre 2, nous avons le résultat suivant :

LEMME c. — Il existe des réels α et θ_i , $1 \leq i \leq k$, avec $0 < \alpha \ll \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k$ tels que si :

$$Z_1 = (D_{\theta_1}^2 \times S_\eta^1) \setminus (\overset{\circ}{D}_\alpha^2 \times S_\eta^1)$$

$$Z_i = (D_{\theta_i}^2 \times S_\eta^1) \setminus (\overset{\circ}{D}_{\theta_{i-1}}^2 \times S_\eta^1), 2 \leq i \leq k,$$

alors $K_{\Delta_a} \cap Z_i = \Delta_a \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1) \cap Z_i = K_{\Delta_{a,i}}$, pour tout $i \neq m+1$, et $(K_{\Delta_a} \cup \{au^N = v\}) \cap Z_{m+1} = (\Delta_a \cup \Phi_a(\{f = 0\})) \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1) \cap Z_{m+1} = K_{\Delta_{a,m+1}} \cup \Phi_a(K_f^{\Sigma_a})$.

Les Z_i sont appelées les zones jacobienues.

On peut choisir θ' tel que $D_{\theta'}^2 \times S_\eta^1 = (\bigcup_{i=1}^m Z_i) \cup (D_\alpha^2 \times S_\eta^1)$.

Construction

Le moyen d'obtenir la décomposition minimale de Waldhausen de Σ_a pour $f \cdot f_a \cdot g$ est le suivant. Nous savons que la restriction $\Phi_{|\Sigma_a}$ de Φ_a à Σ_a est un revêtement ramifié qui admet $\Gamma_a \cap \Sigma_a$ et les éventuelles composantes non réduites de $K_{f_a g}$ pour lieu de ramification et $K_{\Delta_a} = \Delta_a \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1)$,

union $\{0\} \times S_\eta^1$ (respectivement $S_\theta^1 \times \{0\}$) si g (respectivement f_a) est non réduite, pour valeurs de ramification. Nous construisons la décomposition minimale de Waldhausen de $(D_\theta^2 \times S_\eta^1) \setminus (\overset{\circ}{D}_\alpha^2 \times S_\eta^1)$ qui admet les composantes de $K_{\Delta_a} \cup \Phi_a(K_f^{\Sigma_a}) = K_{\Delta_a} \cup (\{au^N = v\} \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1))$ pour feuilles. Par prolongement des feuilletages aux tores pleins $D_\alpha^2 \times S_\eta^1$ et $S_\theta^1 \times D_\eta^2$, on obtient la décomposition minimale de Waldhausen de $(D_\theta^2 \times S_\eta^1) \cup (S_\theta^1 \times D_\eta^2)$ qui admet $K_{\Delta_a} \cup (\{au^N = v\} \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1)) \cup (\{0\} \times S_\eta^1) \cup (S_\theta^1 \times \{0\})$ pour feuilles. Comme les valeurs de ramification de $\Phi_{|\Sigma_a}$ constituent une réunion de feuilles, le pull-back de la décomposition minimale de Waldhausen de $(D_\theta^2 \times S_\eta^1) \cup (S_\theta^1 \times D_\eta^2)$, qui a $K_{\Delta_a} \cup (\{au^N = v\} \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1)) \cup (\{0\} \times S_\eta^1) \cup (S_\theta^1 \times \{0\})$ pour feuilles, fournit une décomposition de Waldhausen (non nécessairement minimale) de Σ_a pour $f \cdot f_a \cdot g \cdot \Gamma_a$, à partir de laquelle il est facile d'obtenir une décomposition minimale de Waldhausen de Σ_a pour $f \cdot f_a \cdot g$, comme décrit dans [Ma2] (ou [L-M-W1] pour g forme linéaire transverse à f).

REMARQUE 8. — *Étant donné une variété de Seifert Σ_S de la décomposition minimale de Waldhausen de Σ_a pour $f \cdot f_a \cdot g$ décrite ci-dessus, nous posons $V_S = \Psi(\Sigma_S)$. Les variétés de Seifert V_S ainsi obtenues fournissent une décomposition minimale de Waldhausen de S_ϵ^3 pour $f \cdot f_a \cdot g$. Notons $G(f \cdot f_a \cdot g)$ le graphe de Waldhausen de cette décomposition.*

COROLLAIRE 3. — 1. $Q_a \cup \{N\} = \{q_a(S) \text{ où } S \text{ parcourt les sommets de } G(f \cdot f_a \cdot g)\}$;

2. $Q_0 \cup \{N\} = \{q(S) \text{ où } S \text{ parcourt les sommets de } G(f \cdot f_a \cdot g)\}$;

3. Si S est un sommet de $G(f \cdot f_a \cdot g)$ tel que $q(S) < N$ alors $q(S) = q_a(S)$.

Démonstration. — Soit ρ une feuille régulière de V_S . Il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\Psi^{-1}(\rho)$ appartienne à Z_i . Compte-tenu des propriétés du difféomorphisme Ψ et du fait que Φ_a induit un revêtement fini de $\Psi^{-1}(\rho)$ sur $\Phi_a(\Psi^{-1}(\rho))$, on a :
 $\mathcal{L}(K_{f_a}, \rho) / \mathcal{L}(K_g, \rho) = \tilde{\mathcal{L}}(S_\theta^1 \times \{0\}, \Phi_a(\Psi^{-1}(\rho))) / \tilde{\mathcal{L}}(\{0\} \times S_\eta^1, \Phi_a(\Psi^{-1}(\rho))) = p_i/q_i$, où $\tilde{\mathcal{L}}(\cdot, \cdot)$ est le nombre d'enlacement dans la sphère $(D_\theta^2 \times S_\eta^1) \cup (S_\theta^1 \times D_\eta^2)$. D'où le 1 et par symétrie le 2.

Le 3 est conséquence de 1 et 2 et du fait que si $q(S) < N$ alors V_S rencontre au moins une composante γ commune à Γ_0 et Γ_a , de sorte que $q(S) = q_a(S)$ par la proposition 1 et la proposition a. \square

3.3. Résultats

Comme au paragraphe 3.2, nous supposons ici que $N > \min Q_0$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ceci implique que la variété Σ^N , définie ci-dessous, contient $\Phi_{|\Sigma_a}^{-1}(Z_1)$, et comme dans [Ma1], on peut voir que Σ^N n'est pas une réunion de tores pleins, voisinage tubulaire de K_g dans Σ_a .

DÉFINITION 6. — On appelle Σ^N la réunion des variétés de Seifert Σ_S de la décomposition minimale de Waldhausen de Σ_a pour $f \cdot f_a \cdot g$ (obtenues en 3.2) qui sont telles que $q(S) < N$ et on pose $W^N = \Psi(\Sigma^N)$.

THÉORÈME 3. — Les fibrations $\varphi_a = f_a/|f_a| : W^N \longrightarrow S^1$ et $\varphi = f/|f| : W^N \longrightarrow S^1$ sont isomorphes.

Démonstration. — Le carrousel de Lê (voir [L1]) implique que les fibrations de Milnor pour f et f_a se restreignent à W^N . Donc φ_a et φ sont des fibrations.

Notons τ_j , $1 \leq j \leq l$, les composantes de bord des morceaux seifertiques de W^N .

La fibration φ_a (resp. φ) induit un homomorphisme $\psi_{a,j}$ (resp. ψ_j) de $H_1(\tau_j, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{Z} et un homomorphisme ψ_a (resp. ψ) de $H_1(W^N, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{Z} . Si C est une courbe fermée simple sur τ_j , alors $\psi_{a,j}(C)$ (resp. $\psi_j(C)$) est le nombre d'enlacement dans S_ε^3 de C et de K_{f_a} (resp. de C et de K_f) noté $\mathcal{L}(C, K_{f_a})$ (resp. $\mathcal{L}(C, K_f)$).

Comme W^N est une variété de Waldhausen dans S_ε^3 , si $\psi_{a,j} = \psi_j$ pour tout j dans $\{1, \dots, l\}$, alors $\psi_a = \psi$ et les fibrations φ_a et φ sont isomorphes (voir [E-N], p. 34).

Le théorème 3 se déduit donc du lemme suivant :

LEMME 1. — On a l'égalité $\psi_{a,j} = \psi_j$.

Démonstration. — Dans la décomposition de Waldhausen de S_ε^3 pour $f \cdot f_a \cdot g$, construite (en 3.2) à partir du carrousel, τ_j est l'intersection de deux variétés de Seifert V_{j_1} et V_{j_2} telles que $q_a(S_{j_1}) < q_a(S_{j_2}) \leq N$. D'après le 3 du corollaire 3 et la définition de W^N , on a $q_a(S_{j_1}) = q(S_{j_1}) < q_a(S_{j_2}) = q(S_{j_2}) \leq N$. Sur τ_j soient ρ_1 une feuille de Seifert de V_{j_1} et ρ_2 une feuille de Seifert de V_{j_2} .

On obtient alors $\psi_{a,j}([\rho_1]) = q_a(S_{j_1}) \cdot \mathcal{L}(\rho_1, K_g) = q(S_{j_1}) \cdot \mathcal{L}(\rho_1, K_g) = \psi_j([\rho_1])$ et de même $\psi_{a,j}([\rho_2]) = \psi_j([\rho_2])$.

Comme $\Phi_a(\Psi^{-1}(\rho_1))$ et $\Phi_a(\Psi^{-1}(\rho_2))$ sont des feuilles de Seifert qui appartiennent à des zones jacobiniennes différentes, leurs classes engendrent un sous-groupe d'indice fini dans $H_1(\Phi_a(\Psi^{-1}(\tau_j)), \mathbb{Z})$; il en est de même pour les classes de ρ_1 et ρ_2 dans $H_1(\tau_j, \mathbb{Z})$, d'où le lemme. \square

On choisit une fibre F_a de la fibration de Milnor $f_a / | f_a | : S_\varepsilon^3 \setminus K_{f_a} \rightarrow S^1$. On rappelle que $F_a^N = F_a \cap W^N$.

PROPOSITION 3. — *Le morphisme $H_1(F_a^N, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(F_a, \mathbb{Z})$ induit par l'inclusion est injectif.*

Démonstration. — Par construction $\Psi^{-1}(F_a^N)$ est un morceau de la fibration de la fibre de Milnor obtenue par le carrousel de Lê. Par conséquent (voir [L1]), il existe une monodromie $h : F_a \rightarrow F_a$ de $f_a / | f_a |$ qui se restreint en une monodromie de φ_a sur F_a^N , et F_a est obtenue (à type d'homotopie près) à partir de F_a^N en ajoutant des anses d'indice un. \square

Notons $\Lambda_a^N(t)$ (resp. $\Lambda_a(t)$) le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par la monodromie de φ_a sur $H_1(F_a^N, \mathbb{Z})$ (resp. par la monodromie de $f_a / | f_a |$ sur $H_1(F_a, \mathbb{Z})$).

COROLLAIRE 4. — *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\Lambda_a^N(t) = \Lambda_0^N(t)$ divise $\Lambda_a(t)$ et $\Lambda_0(t)$.*

Dans la section 4.1, on obtient une formule explicite pour $\Lambda_a^N(t)$ à partir de la résolution minimale de $f_a \cdot g$ (voir la proposition 6). Au paragraphe 4.1 nous utiliserons la proposition suivante pour calculer $\Lambda_a^N(t)$.

PROPOSITION 4. — *Soit A une composante connexe de $\overline{\Sigma_a \setminus \Sigma^N}$ et soit U_A un voisinage tubulaire de $A \cap (K_f^{\Sigma_a} \cup K_{f_a}^{\Sigma_a})$. Alors $\overset{\circ}{A} = A \setminus U_A$ n'est ni un tore plein ni un tore épaissi.*

Démonstration. — Comme A se surjecte par Φ_a sur $(\cup_{j=m+1}^k Z_j) \cup (S_\theta^1 \times D_\eta^2)$, A a une composante de bord commune avec Σ^N , et A contient au moins une composante de $K_f^{\Sigma_a}$ et au moins une composante de $K_{f_a}^{\Sigma_a}$. Par conséquent, $\overset{\circ}{A}$ a au moins trois composantes de bord. \square

COROLLAIRE 5. — *Si une variété de Seifert V_S de la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour $f \cdot f_a \cdot g$ rencontre K_f ou K_{f_a} , alors $q(S) \geq N$ et $q_a(S) \geq N$.*

Démonstration. — La décomposition minimale de Waldhausen de A est non triviale et ne contient que des variétés de Seifert $V_{S'}$ telles que $q(S') \geq N$ et $q_a(S') \geq N$. \square

COROLLAIRE 6. — *Si N est strictement supérieur au plus grand quotient jacobien de (g, f) alors, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\Lambda_a^N(t) = \Lambda_0(t)$ divise $\Lambda_a(t)$.*

Démonstration. — Soit $\overset{\circ}{A}$ comme dans la proposition 4. Notons \bar{A} la variété de Waldhausen obtenue en ajoutant à $\overset{\circ}{A}$ les composantes connexes de U_A qui contiennent une composante de $K_{f_a}^{\Sigma_a}$; \bar{A} a au moins deux composantes de bord donc ce n'est pas un tore plein.

Si \bar{A} n'était pas un tore épaissi, \bar{A} contiendrait un morceau seifertique essentiel V dont le quotient topologique serait supérieur ou égal à N . Par [Ma2] ce quotient serait un quotient jacobien pour (g, f) , ce qui contredit l'hypothèse; \bar{A} est donc un tore épaissi. Donc Σ^N a le type d'homotopie de $\Sigma_a \setminus K_f^{\Sigma_a}$. La fibration φ est alors homotope à la fibration de Milnor de f . □

4. Point de vue de la résolution minimale

4.1. Résolution et calcul de $\Lambda_a^N(t)$

Appelons π la résolution minimale de $f \cdot f_a \cdot g$ à l'origine de \mathbb{C}^2 , $a \neq 0$. Le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est constitué d'une réunion finie de composantes irréductibles notées $E_i, i \in \mathbb{N}$. La transformée totale de $\mathcal{C} = (f \cdot f_a \cdot g)^{-1}(0)$ est $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ et la transformée stricte de \mathcal{C} est l'adhérence de $\pi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{0\})$. Une composante irréductible de la transformée stricte intersecte une unique composante E_i du diviseur exceptionnel en un unique point.

On définit l'arbre de la résolution minimale de $f \cdot f_a \cdot g$, noté $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$, comme suit.

Chaque E_i fournit un sommet S_i de l'arbre. Si deux composantes E_i et E_j s'intersectent alors on relie les sommets S_i et S_j par une arête. On attache autant de flèches à un sommet S_i qu'il existe de composantes irréductibles de la transformée stricte de \mathcal{C} qui rencontrent E_i .

On factorise en produit de facteurs irréductibles premiers entre eux $f \cdot f_a \cdot g = \prod_{j=1}^r \ell_j^{s_j}$ et on pondère par s_j la flèche qui représente la transformée stricte de ℓ_j .

DÉFINITION 7. — *La valuation $\text{val}_{E_i}(\ell)$ de la composante irréductible E_i pour un germe ℓ à l'origine de \mathbb{C}^2 est l'ordre de $\ell \circ \pi$ le long de E_i .*

Pour calculer $\text{val}_{E_i}(\ell)$, on considère un germe de courbe lisse c_i transverse à E_i passant par un point générique p de E_i . Un tel germe de courbe

est appelé une *curvette* de E_i . On paramétrise $\pi(c_i)$ par $(t^m, \varphi(t))$. La valuation $\text{val}_{E_i}(\ell)$ est la valuation en t de $\ell(t^m, \varphi(t))$.

Chaque sommet S_i de l'arbre $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$ est pondéré par les deux quotients suivants : $q_{S_i}(f) = \text{val}_{E_i}(f)/\text{val}_{E_i}(g)$ et $q_{S_i}(f_a) = \text{val}_{E_i}(f_a)/\text{val}_{E_i}(g)$. Notons $Q(f) = \{q_{S_i}(f) \text{ où } S_i \text{ est un sommet de } \mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)\}$ (resp. $Q(f_a) = \{q_{S_i}(f_a) \text{ où } S_i \text{ est un sommet de } \mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)\}$).

PROPOSITION 5. — *Si $q_{S_i}(f) < N$ alors $q_{S_i}(f_a) = q_{S_i}(f) < N$, et de même, si $q_{S_i}(f_a) < N$ alors $q_{S_i}(f) = q_{S_i}(f_a) < N$.*

Démonstration. — Soit c_i est une curvette de E_i dont une paramétrisation de Puiseux de $\pi(c_i)$ est donnée par $(t^m, \varphi(t))$. On a $q_{S_i}(f) = \text{val}_t(f(t^m, \varphi(t)))/\text{val}_t(g(t^m, \varphi(t))) < N$, d'où :

$$(*) \text{val}_t(f(t^m, \varphi(t))) < \text{val}_t(g(t^m, \varphi(t)))N.$$

On calcule $q_{S_i}(f_a) = \text{val}_t(f_a(t^m, \varphi(t)))/\text{val}_t(g(t^m, \varphi(t)))$, i.e $q_{S_i}(f_a) = \text{val}_t(f(t^m, \varphi(t)) + a(g(t^m, \varphi(t)))^N)/\text{val}_t(g(t^m, \varphi(t)))$.

D'après (*) on obtient $q_{S_i}(f_a) = \text{val}_t(f(t^m, \varphi(t)))/\text{val}_t(g(t^m, \varphi(t)))$, d'où le résultat.

Même résultat lorsque l'on suppose $\text{val}_t(f_a(t^m, \varphi(t))) < \text{val}_t(g(t^m, \varphi(t)))N$. \square

DÉFINITION 8. — *La valence v_i d'un sommet S_i de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$ est égale à la somme du nombre d'arêtes et de flèches qui rencontrent S_i . De plus, $v_i(f)$ (resp. $v_i(f_a)$) est égal à la somme du nombre d'arêtes et de flèches qui représentent des composantes la transformée stricte de f (resp. f_a) et qui rencontrent S_i .*

REMARQUE 9. — *On rappelle que la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour $f \cdot f_a \cdot g$ peut être obtenue à partir de l'arbre pondéré $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$. À chaque sommet S_i de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$ de valence $v_i \geq 3$ correspond un sommet $S(i)$ de $G(f \cdot f_a \cdot g)$ et on a $q_a(S(i)) = q_{S_i}(f_a)$ et $q(S(i)) = q_{S_i}(f)$. De plus, si un sommet S_i de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$ est tel que $v_i \geq 3$ et $q_{S_i}(f) < N$, on a, par le 3 du corollaire 3, $q_{S_i}(f_a) = q_{S_i}(f) < N$ et, par le corollaire 5, $v_i(f_a) = v_i(f)$. De plus $Q_0 \subset Q(f)$ et $Q_a \subset Q(f_a)$. Donc $\min Q(f_a) \leq \min Q_a$. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de 4.4, on étudie les pinceaux avec $N > \min Q(f)$. Vu que $\min Q(f) \leq \min Q_0$, le cas $N \leq \min Q(f)$ fait partie des cas dégénérés traités en 4.5.*

PROPOSITION 6. — *Supposons $N > \min Q(f_a)$. Appelons I_N l'ensemble des indices i des sommets S_i de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$ tels que $q_{S_i}(f_a) < N$ et D_N l'ensemble des indices i des sommets S_i tels que $q_{S_i}(f_a) = N$.*

Fibrations associées à un pinceau de courbes planes

Le polynôme $\Lambda_a^N(t) = (t^{r_N} - 1) \prod_{i \in I_N} (t^{\text{val}_{E_i}(f_a)} - 1)^{v_i(f_a) - 2}$, où $r_N = \text{ppcm}_{i \in I_N \cup D_N}(\text{val}_{E_i}(f_a))$, est un facteur commun aux polynômes caractéristiques de la monodromie de f et de f_a .

Démonstration. — Soit $\tilde{\Sigma} = (f_a \circ \pi)^{-1}(S_\eta^1) \cap U$ où η est suffisamment petit et U est un “bon” voisinage de $\pi^{-1}(0)$. Soit \tilde{F}_a une fibre de Milnor de la fibration $f_a \circ \pi : \tilde{\Sigma} \rightarrow S_\eta^1$. À tout sommet S_i de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot g)$ correspond un morceau F_i de \tilde{F}_a défini comme dans [D-M] section 1.8. On construit une monodromie $h_a : \tilde{F}_a \rightarrow \tilde{F}_a$ qui se restreint en un difféomorphisme $h_i : F_i \rightarrow F_i$. On considère maintenant $\tilde{F}_a^N = \bigcup_{i \in I_N} F_i$.

La remarque 9 implique que \tilde{F}_a^N est isotope à la fibre F_a^N considérée dans la proposition 3 du paragraphe 3.3. Donc le polynôme $\Lambda_a^N(t)$ est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $H_1(\tilde{F}_a^N, \mathbb{Z})$ induit par la restriction de h_a à \tilde{F}_a^N .

On a la suite exacte suivante de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \dots \rightarrow 0 = H_2(\tilde{F}_a^N) \rightarrow \\ & \bigoplus_{\substack{i < j \\ i, j \in I_N}} H_1(F_i \cap F_j) \rightarrow \bigoplus_{i \in I_N} H_1(F_i) \rightarrow H_1(\tilde{F}_a^N) \rightarrow \\ & \bigoplus_{\substack{i < j \\ i, j \in I_N}} H_0(F_i \cap F_j) \rightarrow \bigoplus_{i \in I_N} H_0(F_i) \rightarrow H_0(\tilde{F}_a^N) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On note respectivement $P_0(t)$, $\lambda_a^N(t)$, $P_1(t)$ et $\Lambda_a^N(t)$ les polynômes caractéristiques de la monodromie sur $\bigoplus_{i \in I_N} H_0(F_i)$, $H_0(\tilde{F}_a^N)$, $\bigoplus_{i \in I_N} H_1(F_i)$ et $H_1(\tilde{F}_a^N)$.

On a donc :

$$1 = \frac{\Lambda_a^N(t) \cdot P_0(t)}{P_1(t) \cdot \lambda_a^N(t)} \text{ soit } \Lambda_a^N(t) = \frac{P_1(t) \cdot \lambda_a^N(t)}{P_0(t)}.$$

Or $\lambda_a^N(t) = (t^{r_N} - 1)$, $P_0(t) = \prod_{i \in I_N} (t^{r_i} - 1)$ et

$$P_1(t) = \prod_{i \in I_N} (t^{\text{val}_{E_i}(f_a)} - 1)^{v_i(f_a) - 2} (t^{r_i} - 1).$$

On utilise la proposition 1.7 de [D-M] et le fait que dans [D-M], D_i est obtenu à partir de F_i en collant un disque à toutes les composantes de bord de F_i .

De plus, les valences v_i de [D-M] sont les valences $v_i(f_a)$ de l'énoncé de la proposition 6.

LEMME 2 . Si $i \in I_N$ alors :

1. $val_{E_i}(f_a) = val_{E_i}(f)$;
2. $v_i(f_a) = v_i(f)$.

La construction de la monodromie h_a décrite ci-dessus est valable pour $a = 0$. D'autre part, d'après la proposition 3, $\Lambda_0^N(t)$ divise $\Lambda_0(t)$. Par ailleurs, en échangeant le rôle de a et 0, nous obtenons $\Lambda_a^N(t) = \Lambda_0^N(t)$ divise $\Lambda_0(t)$ et $\Lambda_a(t)$; donc le lemme implique la proposition 6. \square

REMARQUE 10. — D'après le lemme 2, l'arbre $\mathcal{A}(f_a \cdot g)$ permet de déterminer $\Lambda_a^N(t)$ avec la formule de la proposition 6.

Démonstration du lemme 2. — La définition de $q_{S_i}(f_a)$ et $q_{S_i}(f)$ et la proposition 5 impliquent le 1 du lemme.

Si $v_i \geq 3$, comme $i \in I_N$, alors, d'après la remarque 9, $v_i(f_a) = v_i(f)$.

Si $v_i = 2$, et si $v_i(f_a) = 1$, alors une composante irréductible de la transformée stricte de f ou de g rencontre E_i . Si c'est une composante de f , on a $q_{S_i}(f_a) = N$, ce qui est exclu. Si c'est une composante de g , on a $v_i(f_a) = v_i(f) = 1$.

De même, $v_i(f) = 1$ implique $v_i(f_a) = 1$.

Sinon, $v_i(f_a) = v_i(f) = 2$.

Si $v_i = 1$ alors $v_i(f_a) = v_i(f) = 1$. \square

4.2. Sommets dicritiques

Le cas $g(x, y) = x$ est particulièrement important puisqu'il s'applique à l'étude des valeurs atypiques à l'infini des applications polynômiales de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} . C'est pourquoi nous établissons des formules précises pour de telles familles de pincesaux. Elles se généralisent facilement lorsque g est irréductible. On suppose de plus $N > \min Q(f)$. Le cas $N \leq \min Q(f)$ sera traité en 4.5.

On convient de noter S_0 le sommet de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ où s'accroche la flèche qui représente la transformée stricte de x . On oriente les arêtes de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ à partir du sommet S_0 . On colorie en rouge (resp. bleu) les géodésiques orientées qui vont de S_0 à l'extrémité des flèches qui représentent les composantes de la transformée stricte de f_a (resp. f). L'arbre $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ ainsi obtenu est pondéré, orienté et coloré.

Un sommet S_i de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ est de rupture pour f_a (resp. f) si $v_i(f_a)$ (resp. $v_i(f)$) est supérieur ou égal à trois lorsque $i \neq 0$, et S_0 est un sommet de rupture pour f_a (resp. f) si $v_0(f_a)$ (resp. $v_0(f)$) est supérieur ou égal à deux.

Notons $R(f_a)$ (resp. $R(f)$) l'ensemble des indices i de S_i qui sont tels que S_i est un sommet de rupture pour f_a (resp. f).

Pour une démonstration des deux résultats suivants on pourra consulter [L-M-W2] dans le cas où x est transverse à f ou [Mal] pour le cas général.

PROPOSITION d. — *L'ensemble des quotients $q_{S_i}(f_a), i \in R(f_a)$ (resp. $q_{S_i}(f), i \in R(f)$) est l'ensemble des quotients polaires de f_a (resp. f) pour la direction x .*

THÉORÈME DE CROISSANCE. — *Il y a croissance stricte de $q_{S_i}(f_a)$ (resp. $q_{S_i}(f)$) le long des géodésiques de f_a (resp. f) et constance sur les arêtes incolores ou unicolores bleues (resp. incolores ou unicolores rouges). En particulier $q_{S_0}(f) = \min Q(f)$ (resp. $q_{S_0}(f_a) = \min Q(f_a)$).*

Comme on a supposé $N > \min Q(f)$, on a donc $q_{S_0}(f) < N$, et $q_{S_0}(f_a) = q_{S_0}(f) < N$.

PROPOSITION 7. — *Soit S_i un sommet bicoloré de $A(f \cdot f_a \cdot x)$ dont au moins une arête (ou flèche) unicolore est issue. Alors aucune arête sortante de S_i n'est bicoloré et $q_{S_i}(f_a) = q_{S_i}(f) = N$.*

Démonstration. — On suppose que S_i est un sommet bicoloré auquel est attachée une arête (ou une flèche) unicolore bleue. Choisissons une curvette c qui passe par le point singulier de la transformée totale de \mathcal{C} symbolisé par l'arête ou la flèche bleue. Cette curvette est générique pour $f_a \cdot x$. Soit $(t^m, \varphi(t))$ une paramétrisation de $\pi(c)$.

Soit c_1 une curvette de S_i générique pour $f \cdot x$ et pour f_a . Soit $(t^{m_1}, \varphi_1(t))$ une paramétrisation de $\pi(c_1)$. Notons que $m = m_1$ car c et c_1 sont les curvettes d'un même sommet, génériques pour x .

Par choix de c et c_1 on a :

$$\text{val}_t(f(t^m, \varphi(t))) > \text{val}_t(f(t^m, \varphi_1(t))) \text{ et}$$

$$\text{val}_t(f_a(t^m, \varphi(t))) = \text{val}_t(f_a(t^m, \varphi_1(t))).$$

Donc $\text{val}_t(f(t^m, \varphi(t)) + at^{mN}) = \text{val}_t(f(t^m, \varphi_1(t)) + at^{mN})$ et par conséquent on obtient :

$$\text{val}_t(f_a(t^m, \varphi_1(t))) = mN \text{ et}$$

$$\text{val}_t(f(t^m, \varphi_1(t))) \geq mN.$$

Ainsi on a $q_{S_i}(f_a) = N$ et $q_{S_i}(f) \geq N$.

Choisissons désormais une curvette c_2 passant par le point singulier de la transformée totale de \mathcal{C} symbolisé par une arête (ou flèche) rouge (unicolore ou bicolore). Soit $(t^m, \varphi_2(t))$ une paramétrisation de $\pi(c_2)$. On a forcément $\text{val}_t(f_a(t^m, \varphi_2(t))) > mN$ i.e. $\text{val}_t(f(t^m, \varphi_2(t)) + at^{mN}) > mN$, ce qui implique $f(t^m, \varphi_2(t)) = -at^{mN} + \dots$ et par conséquent $\text{val}_t(f(t^m, \varphi_2(t))) = mN$ donc $q_{S_i}(f) = N$. Ceci prouve également que c_2 est générique pour f et par conséquent que l'arête rouge est unicolore, ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 8. — *Si S_j est un sommet de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ tel que $q_{S_j}(f_a) = q_{S_j}(f) = N$, alors aucune arête sortante de S_j n'est bicolore.*

Démonstration. — Supposons qu'une arête bicolore sorte par S_j . On choisit une géodésique, par exemple bleue, qui passe par cette arête. Elle aboutit à une flèche bleue. Soit S_i le dernier sommet bicolore sur cette géodésique. La géodésique choisie sort de S_i par une arête (ou flèche) unicolore bleue. Par la proposition 7, on a donc $q_{S_i}(f_a) = q_{S_i}(f) = N$. Comme S_i se trouve après S_j , ceci contredit le théorème de croissance. \square

Voici désormais quelques conséquences de ces résultats.

COROLLAIRE 7. — *Dans $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$, sur toute géodésique de f , il existe un unique sommet S_{i_0} de quotient N qui est un sommet bicolore dont toutes les arêtes sortantes sont unicolores, et tel que $q_{S_{i_0}}(f_a) = q_{S_{i_0}}(f) = N$. Un tel sommet S_{i_0} est dit "dicritique".*

Sur cette géodésique, les sommets précédant S_{i_0} sont bicolores et de quotient strictement inférieur à N pour f et f_a . Les sommets succédant à S_{i_0} sont unicolores de quotient égal à N pour f_a , et de quotient strictement supérieur à N pour f .

COROLLAIRE 8. — *Si S_i est un sommet de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ avec $q_{S_i}(f) < N$, alors (on a $q_{S_i}(f) = q_{S_i}(f_a)$) aucune arête ou flèche unicolore ne rencontre S_i .*

DÉFINITION 9. — *On définit $\mathcal{A}_N(f \cdot f_a \cdot x)$ (respectivement $\mathcal{A}_N(f \cdot x)$) le sous-graphe de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ (respectivement $\mathcal{A}(f \cdot x)$) constitué des sommets S_i de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ (respectivement $\mathcal{A}(f \cdot x)$) qui sont tels que $q_{S_i}(f) < N$, de toutes les arêtes attachées à ces sommets et de la flèche qui représente la transformée stricte de x .*

REMARQUE 11. — Une flèche privée de sa pointe est considérée comme une arête.

COROLLAIRE 9. — Dans $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ on a :

(i) $\mathcal{A}_N(f \cdot f_a \cdot x)$ est connexe ; c'est donc un sous-arbre.

(ii) $\mathcal{A}_N(f \cdot x)$ est un sous-arbre de $\mathcal{A}_N(f \cdot f_a \cdot x)$.

Démonstration. — La croissance stricte des quotients polaires sur les géodésiques colorées et leur constance sur les arêtes incolores prouve que $\mathcal{A}_N(f \cdot f_a \cdot x)$ est connexe.

Comme $\mathcal{A}_N(f \cdot f_a \cdot x)$ ne contient aucune arête ou flèche unicolore et que $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ est l'arbre de la résolution minimale de $f \cdot f_a \cdot x$, on a (ii). \square

4.3. Multiplicité sortante pour un dicritique

Préliminaires. — Soit ℓ un germe de fonction analytique, $\mathcal{A}(\ell)$ un arbre d'une résolution de ℓ à l'origine de \mathbb{C}^2 , et soit x un axe qui n'est pas une composante de ℓ . Comme précédemment, on note S_0 le sommet où s'accroche la transformée stricte de x . On oriente $\mathcal{A}(\ell)$ à partir de S_0 . Soit S_i un sommet de $\mathcal{A}(\ell)$ et soit ε une arête issue de S_i . On note S_{i+1} l'autre extrémité de ε .

Soit c_i (respectivement c_{i+1}) une curvette de la composante irréductible du diviseur exceptionnel correspondant à S_i (respectivement S_{i+1}) ; on dira que c_i est associée à S_i . Soit z un axe transverse à $x \cdot \ell$. Un développement de Puiseux de $\pi(c_i)$ est donné par :

$$z = \sum_{j=1}^k a_j x^{m_j/n_1 \dots n_j} + b_i x^{m_i/n_1 \dots n_k n_i}.$$

Un développement de Puiseux de $\pi(c_{i+1})$ est :

cas I :

$$z = \sum_{j=1}^k a_j x^{m_j/n_1 \dots n_j} + b x^{m_i/n_1 \dots n_k n_i} + b_{i+1} x^{m_{i+1}/n_1 \dots n_k n_i n_{i+1}},$$

cas II :

$$z = \sum_{j=1}^k a_j x^{m_j/n_1 \dots n_j} + b_{i+1} x^{m_{i+1}/n_1 \dots n_k n_{i+1}}, \text{ avec}$$

$$\frac{m_j}{n_1 \dots n_j} < \frac{m_{j+1}}{n_1 \dots n_{j+1}} < \dots < \frac{m_i}{n_1 \dots n_k n_i} < \frac{m_{i+1}}{n_1 \dots n_k n_i n_{i+1}} \text{ pour le cas I et}$$

$$\frac{m_j}{n_1 \dots n_j} < \frac{m_{j+1}}{n_1 \dots n_{j+1}} < \dots < \frac{m_i}{n_1 \dots n_k n_i} < \frac{m_{i+1}}{n_1 \dots n_k n_i n_{i+1}} \text{ pour le cas II,}$$

les n_j, n_i, n_{i+1} pouvant être égaux à un et a_j, b_i, b, b_{i+1} étant des nombres complexes non nuls.

DÉFINITION 10. — *Le sommet S_i est caractéristique pour $\pi(c_{i+1})$ si et seulement si $n_i > 1$ et $b \neq 0$, i.e. dans le cas I et $n_i > 1$. Sinon S_i n'est pas caractéristique pour $\pi(c_{i+1})$.*

DÉFINITION 11. — *Si c'_i est une autre curvette associée à S_i , on pose :*

$$l_i = \frac{(\pi(c_i), \pi(c'_i))_0}{n_i}.$$

Le couple d'entiers (l_i, n_i) (p.g.c.d. $(l_i, n_i) = 1$) est la paire associée au sommet S_i .

REMARQUE 12. — *Nous rappelons que les l_i satisfont les formules suivantes (pour plus de détails voir [M-W] chapitre 5) :*

(i) *Si aucun sommet caractéristique pour $\pi(c_i)$ ne précède S_i sur la géodésique de $\pi(c_i)$, alors $l_i = m_i$.*

(ii) *Sinon, $l_i = m_i + n_i(ln - m)$, où (l, n) est le couple associé au dernier sommet caractéristique pour $\pi(c_i)$ qui précède S_i sur la géodésique de $\pi(c_i)$.*

Rappelons la proposition 5.4.1 du chapitre 5 de [M-W] qui nous sera utile pour ce qui suit.

PROPOSITION e. — *Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux composantes irréductibles d'un germe de fonction analytique ℓ à l'origine de \mathbb{C}^2 . Désignons par (l_i, n_i) , le couple d'entiers associé au sommet S_i où se séparent les géodésiques de ℓ_1 et ℓ_2 . Avec les notations précédentes nous avons :*

$$(\ell_1, \ell_2)_0 = (\ell_1, x)_0 \cdot (\ell_2, x)_0 \cdot \frac{l_i}{(n_1 \dots n_k)^2 n_i}.$$

Notation. — On factorise ℓ en $\ell = \ell_\varepsilon \cdot \ell_{\bar{\varepsilon}}$ où les géodésiques des facteurs de ℓ_ε (respectivement $\ell_{\bar{\varepsilon}}$) passent par l'arête ε (respectivement ne passent pas par ε).

DÉFINITION 12. — *La multiplicité sortante de ℓ par l'arête ε , notée $m_\varepsilon(\ell)$ est égale à :*

$$\frac{(\ell_\varepsilon, \pi(c_i))_0}{l_i n_i} \text{ pour le cas I et } \frac{(\ell_\varepsilon, \pi(c_i))_0}{l_i} \text{ pour le cas II.}$$

PROPOSITION 9. — Soit S_i un sommet de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$. Si $q_{S_i}(f) < N$ et si ε est une arête de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ qui a pour origine S_i et pour extrémité S_{i+1} , alors $m_\varepsilon(f) = m_\varepsilon(f_a)$ et $(x, f_\varepsilon)_0 = (x, f_{a,\varepsilon})_0$.

Démonstration. — Comme pour tout $b \in \mathbb{C}$ on a $(x, f_{b,\varepsilon})_0 = m_\varepsilon(f_b)n_1 \dots n_k$, il suffit de vérifier que pour tout $a \in \mathbb{C}$ on a $m_\varepsilon(f) = m_\varepsilon(f_a)$.

D'après la proposition 5, on a $q_{S_i}(f) = q_{S_i}(f_a)$. Par conséquent, si c_i désigne une curvette de S_i , on obtient pour le cas I :

$$\frac{(\pi(c_i), f_\varepsilon)_0 + (\pi(c_i), f_{\bar{\varepsilon}})_0}{(\pi(c_i), x)_0} = \frac{(\pi(c_i), f_{a,\varepsilon})_0 + (\pi(c_i), f_{a,\bar{\varepsilon}})_0}{(\pi(c_i), x)_0}, \text{ soit}$$

$$\frac{m_\varepsilon(f) \cdot l_i \cdot n_i + (\pi(c_i), f_{\bar{\varepsilon}})_0}{(\pi(c_i), x)_0} = \frac{m_\varepsilon(f_a) \cdot l_i \cdot n_i + (\pi(c_i), f_{a,\bar{\varepsilon}})_0}{(\pi(c_i), x)_0}, \text{ d'où}$$

$$m_\varepsilon(f) \cdot l_i \cdot n_i + (\pi(c_i), f_{\bar{\varepsilon}})_0 = m_\varepsilon(f_a) \cdot l_i \cdot n_i + (\pi(c_i), f_{a,\bar{\varepsilon}})_0 \quad (1).$$

Par ailleurs comme $q_{S_i}(f) < N$, d'après le corollaire 7, on sait que le sommet S_{i+1} est tel que $q_{S_{i+1}}(f) = q_{S_{i+1}}(f_a) \leq N$. Pour ce sommet, $q_{S_{i+1}}(f) = q_{S_{i+1}}(f_a)$, donc d'après la proposition e, ceci équivaut à $m_\varepsilon(f) \cdot l_{i+1} + n_{i+1}(\pi(c_i), f_{\bar{\varepsilon}})_0 = m_\varepsilon(f_a) \cdot l_{i+1} + n_{i+1}(\pi(c_i), f_{a,\bar{\varepsilon}})_0$ (2).

Avec (1) on a : $(\pi(c_i), f_{\bar{\varepsilon}})_0 - (\pi(c_i), f_{a,\bar{\varepsilon}})_0 = (m_\varepsilon(f_a) - m_\varepsilon(f))l_i \cdot n_i$, et avec (2), $n_{i+1} \cdot l_i \cdot n_i(m_\varepsilon(f_a) - m_\varepsilon(f)) = l_{i+1}(m_\varepsilon(f_a) - m_\varepsilon(f))$. Ainsi on obtient $n_{i+1} \cdot l_i \cdot n_i = l_{i+1}$ (*).

Ceci implique que n_{i+1} divise l_{i+1} et donc n_{i+1} divise m_{i+1} . Par conséquent $n_{i+1} = 1$. Considérons désormais deux cas : celui où $n_i = 1$ puis celui où $n_i > 1$.

Dans le premier cas (*) devient $m_{i+1} + (ln - m) = m_i + (ln - m)$, où (l, n) est le couple associé au sommet caractéristique pour $\pi(c_i)$ qui précède S_i (s'il n'existe pas de tel sommet de rupture, dans les formules cela revient à prendre $l = m$ et $n = 1$). On obtient alors $m_i = m_{i+1}$, ce qui est impossible.

Dans le second cas, (*) devient : $m_{i+1} + (l_i n_i - m_i) = l_i n_i$. On obtient encore $m_i = m_{i+1}$, ce qui est absurde.

Pour le cas II nous avons $m_\varepsilon(f) \cdot l_i + (\pi(c_i), f_{\bar{\varepsilon}})_0 = m_\varepsilon(f_a) \cdot l_i + (\pi(c_i), f_{a,\bar{\varepsilon}})_0$ (1') et

$$m_\varepsilon(f) \cdot l_{i+1} + \frac{n_{i+1}}{n_i}(\pi(c_i), f_{\bar{\varepsilon}})_0 = m_\varepsilon(f_a) \cdot l_{i+1} + \frac{n_{i+1}}{n_i}(\pi(c_i), f_{a,\bar{\varepsilon}})_0 \quad (2').$$

Avec (1') et (2') on obtient alors l'égalité suivante : $l_{i+1} \cdot n_i = l_i \cdot n_{i+1}$ (**).

Nous allons considérer deux cas, suivant qu'il existe un sommet caractéristique pour $\pi(c_i)$ qui précède S_i ou pas.

S'il n'existe pas de tel sommet, on a $l_{i+1} = m_{i+1}$ et $l_i = m_i$. L'égalité (**) devient alors $m_i n_{i+1} = m_{i+1} n_i$, ce qui équivaut à $m_i/n_i = m_{i+1}/n_{i+1}$, ce qui est impossible.

S'il existe un sommet de rupture qui précède S_i , avec les notations qui précèdent, (**) s'écrit : $(m_i + n_i(ln - m))n_{i+1} = (m_{i+1} + n_{i+1}(ln - m))n_i$, soit $m_i/n_i = m_{i+1}/n_{i+1}$, ce qui est impossible. \square

Avec les mêmes notations que dans la proposition 9 nous avons :

COROLLAIRE 10. — (i) $(f_{a,\bar{\varepsilon}}, \pi(c_i))_0 = (f_{\bar{\varepsilon}}, \pi(c_i))_0$;

(ii) $(x, f_{\bar{\varepsilon}})_0 = (x, f_{a,\bar{\varepsilon}})_0$;

Démonstration. — (i) est une conséquence directe de la proposition 9 et de la définition de $m_\varepsilon(f)$ et $m_\varepsilon(f_a)$. Pour (ii) on utilise le fait que $q_{S_0}(f) = q_{S_0}(f_a) < N$, ce qui implique que $(x, f)_0 = (x, f_a)_0$. On conclut en utilisant la proposition 9. \square

4.4. Détermination de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ en fonction de $\mathcal{A}(f \cdot x)$

THÉORÈME 4. — Lorsque a est régulière, $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ s'obtient à partir de $\mathcal{A}(f \cdot x)$ comme suit.

(i) On ajoute à $\mathcal{A}_N(f \cdot x)$ tous les sommets de quotient N de $\mathcal{A}(f \cdot x)$. On note $\mathcal{A}'_N(f \cdot x)$ l'arbre ainsi obtenu.

(ii) Pour chaque arête semi-ouverte ε sortante de $\mathcal{A}_N(f \cdot x)$, on note S_ε son sommet origine.

a Si l'extrémité de ε dans $\mathcal{A}(f \cdot x)$ est une pointe de flèche de poids un, alors on ajoute cette pointe.

b Si l'extrémité de ε dans $\mathcal{A}(f \cdot x)$ est un sommet S de quotient N pour f et de paire (l_S, n_S) , on accroche $m_\varepsilon(f)/n_S$ flèches de poids un à S dans $\mathcal{A}'_N(f \cdot x)$.

c Si l'extrémité de ε dans $\mathcal{A}(f \cdot x)$ est une pointe de flèche de poids strictement supérieur à un ou un sommet S de quotient strictement supérieur à N pour f , alors on raccroche à ε une zone possédant exactement un sommet de rupture S' de quotient N pour f_a , et on

Fibrations associées à un pinceau de courbes planes

ajoute $m_\varepsilon(f)/n_{S'}$ flèches à S' . La paire $(l_{S'}, n_{S'})$ associée à S' est obtenue comme suit. Posons :

$$\omega = \frac{N \text{val}_{E_\varepsilon}(x) - \text{val}_{E_\varepsilon}(f_\varepsilon)}{m_\varepsilon(f)}$$

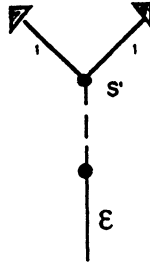
(α) Si S_ε est un sommet caractéristique pour les branches de f_ε , on a $l_{S'}/n_{S'} = \omega$.

(β) Sinon, $l_{S'}/n_{S'} = \omega/n_{S_\varepsilon}$.

(iii) On efface la couleur bleu et on colorie en rouge les géodésiques des composantes irréductibles de f_a .

THÉORÈME 5. — Lorsque a est régulière, on construit l'arbre $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ comme suit. On prend l'arbre $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ et les composantes connexes de $\mathcal{A}(f \cdot x) \setminus \mathcal{A}'_N(f \cdot x) = \coprod_{i=1}^p A_i$.

a Si A_i est une pointe de flèche de poids un, dans $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ on remplace l'arête ε et la pointe de flèche accrochée à ε par une zone de la forme :



où le sommet S' est dicritique, de paire associée $(l_{S'}, n_{S'})$ avec $n_{S'} = 1$ et $l_{S'} = \omega$, et le nombre de sommets ajoutés sur la géodésique issue de S_ε est égal à $l_{S'} - l_{S_\varepsilon} n_{S_\varepsilon}$.

b Si A_i a une arête origine ε_i semi-ouverte, alors son sommet origine S dans $\mathcal{A}(f \cdot x)$ est tel que $q_S(f) = N$, et alors dans $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ on raccroche A_i au sommet S de $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$.

c (1) Si A_i est une pointe de flèche de poids r_i strictement supérieur à un, on ajoute dans $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ une flèche de poids r_i à S' si $n_{S'} = 1$ (où S' est le sommet de quotient N défini au (c) du théorème 4) ou au sommet de valence un, extrémité de la zone de rupture associée à S' si $n_{S'} > 1$.

(2) Sinon, A_i a un sommet origine S'' et $q_{S''}(f) > N$. Si $n_{S'} = 1$, on raccroche A_i à $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ en mettant une arête entre S' et S'' (où S'

est le sommet de quotient N défini au (c) du théorème 4). Si $n_{S'} > 1$, on insère dans A_i la partie incolore de $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ qui s'accroche à S' en tenant compte de la résolution des composantes de f_ε .

On colorie en rouge et bleu en suivant les géodésiques des composantes irréductibles de f_a et de f respectivement.

REMARQUE 13. — (i) Dans le cas a des théorèmes 4 et 5, on a $m_\varepsilon(f) = 1$. Si S_ε n'est pas caractéristique pour la composante de f_ε , on a $n_{S_\varepsilon} = 1$ car ε est un support pour la flèche qui représente f_ε .

(ii) Le cas $n_{S'} > 1$ du c(2) du théorème 5 se fait explicitement en utilisant les paires de Zariski des branches de $f_\varepsilon^{-1}(0)$ comme dans [M-W] chapitre 6. Avec les arbres topologiques de satellisation, on raccrocherait directement le bout d'arbre correspondant à A_i à la fourche correspondant à S' (voir [M-W] chapitre 3).

Démonstration des théorèmes 4 et 5. — Nous avons l'inclusion $\mathcal{A}_N(f \cdot x) \subset \mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$.

Soit ε une arête sortante de $\mathcal{A}_N(f \cdot x)$.

Si l'extrémité S de ε dans $\mathcal{A}(f \cdot x)$ est un sommet de quotient N , alors $f_{a,\varepsilon}$ correspond à des curvettes de S , et les b des théorèmes 4 et 5 sont évidents.

Si l'extrémité S de ε dans $\mathcal{A}(f \cdot x)$ est une pointe de flèche de poids un, alors on a $m_\varepsilon(f) = 1 = m_\varepsilon(f_a)$, et donc $f_{a,\varepsilon}$ (et f_ε) est irréductible et sa géodésique dans $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ ne contient pas de sommet caractéristique après S_ε (d'après la remarque 13 (i)).

Par conséquent le a du théorème 4 est clair.

Pour le a du théorème 5, on a ajouté le sommet S' de quotient N , de paire $(l_{S'}, n_{S'})$ avec $n_{S'} = 1$ (par la remarque 13 (i)), et $f_{a,\varepsilon}$ et f_ε sont des curvettes de S' . D'après la définition 11, on a donc $l_{S'} = (f_{a,\varepsilon}, f_\varepsilon)_0$, et on obtient :

$$N = \frac{(f_a, f_\varepsilon)_0}{(x, f_\varepsilon)_0} = \frac{(f, f_{a,\varepsilon})_0}{(x, f_\varepsilon)_0} = \frac{(f_\varepsilon, f_{a,\varepsilon})_0 + (f_{\bar{\varepsilon}}, f_{a,\varepsilon})_0}{(x, f_\varepsilon)_0},$$

car $(x, f_\varepsilon)_0 = (x, f_{a,\varepsilon})_0 = \text{val}_{E'}(x)$, d'où l'on tire $N(x, f_\varepsilon)_0 - (f_{\bar{\varepsilon}}, f_{a,\varepsilon})_0 = (f_\varepsilon, f_{a,\varepsilon})_0 = l_{S'}$.

Soit c une curvette associée à S_ε . Comme $n_{S'} = 1$, on a : $(x, \pi(c))_0 = (x, f_\varepsilon)_0$ et $(f_{\bar{\varepsilon}}, \pi(c))_0 = (f_{\bar{\varepsilon}}, f_{a,\varepsilon})_0$.

Le calcul de $(f_\varepsilon, f_{a,\varepsilon})_0$ exprimé à l'aide de l_{S_ε} montre que le nombre de sommets à ajouter est $m_{S'} - m_{S_\varepsilon} = l_{S'} - l_{S_\varepsilon} n_{S_\varepsilon}$.

Les points c des théorèmes 4 et 5 se démontrent comme suit.

Si $m_\varepsilon(f) > 1$ et si $q_{S_\varepsilon}(f) < N$, alors on considère la géodésique d'une composante de $f_{a,\varepsilon}$ dans $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$. Elle contient exactement un sommet S' de quotient N , et les branches de $f_{a,\varepsilon}^{-1}(0)$ sont résolues en des curvettes de S' . De plus, ε est une arête de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ et toutes les géodésiques de f_ε passent par S' dans $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ (d'après la proposition 7).

On calcule la paire $(l_{S'}, n_{S'})$ associée à S' . Soit c' une curvette associée à S' et c une curvette associée à S_ε . On obtient :

$$N = \frac{(f, \pi(c'))_0}{(x, \pi(c'))_0} = \frac{(f_a, \pi(c'))_0}{(x, \pi(c'))_0}.$$

Par conséquent on a : $N(x, \pi(c'))_0 = (f_a, \pi(c'))_0 = (f, \pi(c'))_0$, ou encore $N(x, \pi(c'))_0 = (f_{\bar{\varepsilon}}, \pi(c'))_0 + (f_\varepsilon, \pi(c'))_0 = (f_{a,\bar{\varepsilon}}, \pi(c'))_0 + (f_{a,\varepsilon}, \pi(c'))_0$.

Comme $(f_a, \pi(c))_0 = (f_{a,\varepsilon}, \pi(c))_0 + (f_{a,\bar{\varepsilon}}, \pi(c))_0$ et $(f, \pi(c))_0 = (f_\varepsilon, \pi(c))_0 + (f_{\bar{\varepsilon}}, \pi(c))_0$, par le corollaire 10 on a $(f_{a,\bar{\varepsilon}}, \pi(c))_0 = (f_{\bar{\varepsilon}}, \pi(c))_0$.

Dans le cas I on obtient alors $N n_{S'}(x, \pi(c))_0 = n_{S'}(f_{\bar{\varepsilon}}, \pi(c))_0 + l_{S'} m_\varepsilon(f)$, d'où $l_{S'}/n_{S'} = \omega$.

Dans le cas II nous avons $N \frac{n_{S'}}{n_{S_\varepsilon}}(x, \pi(c))_0 = \frac{n_{S'}}{n_{S_\varepsilon}}(f_{\bar{\varepsilon}}, \pi(c))_0 + l_{S'} m_\varepsilon(f)$, d'où $l_{S'}/n_{S'} = \omega/n_{S_\varepsilon}$.

Ceci démontre le c du théorème 4 et la remarque 13 (ii) permet de conclure au c du théorème 5. \square

4.5. Cas dégénérés

Les cas dégénérés concernent les valeurs de N qui sont inférieures ou égales au plus petit quotient polaire de f . On trouve l'ensemble B des valeurs atypiques du pinceau $f(x, y) + ax^N$ comme nous l'avons expliqué dans l'introduction. Ici on décrit le type topologique d'une fibre régulière en fonction du type topologique de $f \cdot x$.

THÉORÈME 6. — *Pour a régulière, lorsque N est inférieur ou égal au plus petit quotient polaire de f , alors le complémentaire dans S_ε^3 d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs $f_a^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ est une variété de Seifert.*

Ce théorème est une conséquence directe du lemme suivant :

LEMME 3. — Pour a régulière, lorsque N est inférieur ou égal au plus petit quotient polaire de f , on a $Q_a = \{N\}$.

Démonstration. — La vérification de ce résultat est identique à la démonstration de la proposition 1 du paragraphe 2. \square

Ce lemme peut aussi être obtenu à partir de résultats de B. Teissier ([T2]). Dans ce cas $f+ag^N = 0$ apparaît comme l'intersection de $f+az^N = 0$ avec la surface $z = g(x, y)$.

Démonstration du théorème 6. — Le fait que Q_a soit égal à $\{N\}$ se traduit par l'existence d'une unique zone polaire Z_1 . Le lemme 2.5.2 de [L-M-W1] nous dit alors que $\Sigma_a \cap \Phi_a^{-1}(Z_1)$ est connexe par arcs ; donc Σ_a est connexe et par conséquent le complémentaire dans Σ_a d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs $(f_a \cdot x)^{-1}(0) \cap \Sigma_a$ est une variété de Seifert. \square

COROLLAIRE 11. — Pour a régulière, l'arbre $A(f_a \cdot x)$ possède un unique sommet de rupture et les flèches qui représentent la transformée stricte de $f_a^{-1}(0)$ s'accrochent à ce sommet de rupture. En particulier f_a a le type topologique de $x^n - y^m$ où $m = (f, x)_0$ et $n = \min(N, (f, y)_0)$.

Démonstration. — Nous venons de démontrer que le complémentaire dans S_ε^3 d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs $(f_a \cdot x)^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ est une variété de Seifert. La correspondance biunivoque entre les variétés de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen du complémentaire dans S_ε^3 d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs $(f_a \cdot x)^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ et les sommets de rupture de $A(f_a \cdot x)$ prouve la première partie du corollaire.

Soit b une autre valeur régulière. L'image par Φ_a de $f_b^{-1}(0)$ est la courbe d'équation $v = (a - b)u^N$. C'est une feuille régulière. Par conséquent elle se relève par Φ_a en un nombre fini de feuilles régulières. Les composantes de $f_b^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ sont donc des feuilles régulières ; par conséquent leurs transformées strictes dans $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ sont symbolisées par des flèches du sommet de rupture. Comme a et b sont régulières, les types topologiques de f_a et f_b sont les mêmes, d'où le résultat. \square

5. Exemples

5.1. Exemple 1

Dans la suite la flèche blanche représente la transformée stricte de $\{x = 0\}$, les flèches noires les transformées strictes des composantes de $\{f = 0\}$ et les flèches grises celles de $\{f_a = 0\}$.

Considérons Φ_0 donné par $\Phi_0(x, y) = (x, (x^5 - y^3)^2)$. Dans l'arbre $\mathcal{A}(f \cdot x)$, chaque sommet S_i est pondéré par le quotient de contact $q_{S_i}(f) = \text{val}_{E_i}(f)/\text{val}_{E_i}(x)$ (voir figure 1).

On a $D(x, y) = -6y^2(x^5 - y^3)$; $D^{-1}(0)$ possède donc deux branches. Pour $(x^5 - y^3)$, dont une paramétrisation de Puiseux est donnée par (t^3, t^5) , on obtient $f(t^3, t^5) = 0$; pour $\{y = 0\}$, dont une paramétrisation de Puiseux est donnée par $(t, 0)$, on obtient $\text{val}_t(f(t, 0)) = 10$ et $(x, y)_0 = 1$.

L'ensemble Q_0 est constitué du singleton $\{10\}$.

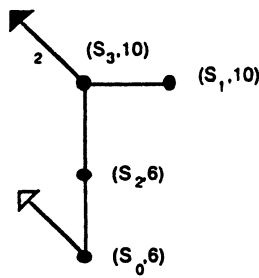


figure 1

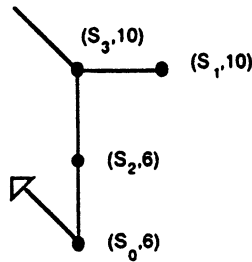


figure 2

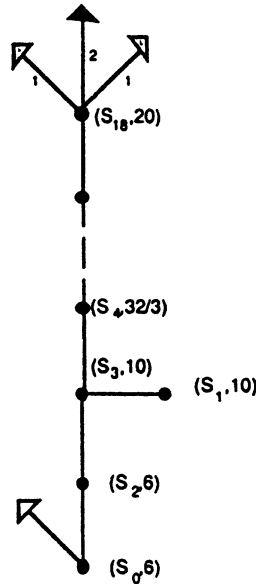


figure 3

a) Pour $N = 20$, l'arbre $\mathcal{A}_{20}(f \cdot x)$ est représenté figure 2.

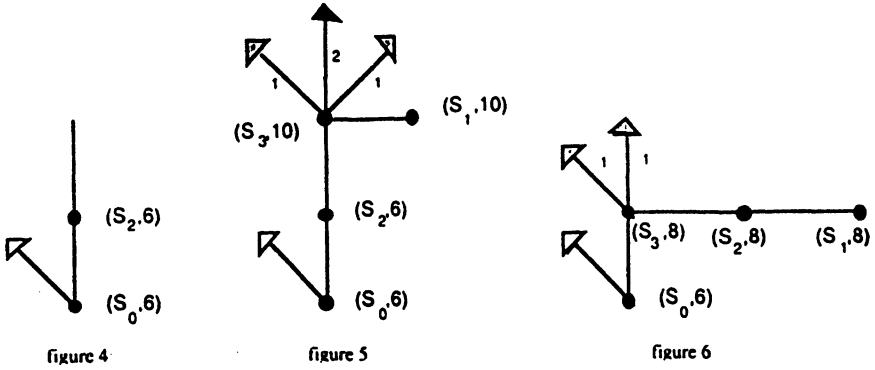
Dans ce cas $B_1 = \emptyset$ et $B = \{0\}$ car f n'est pas réduite.

Nous obtenons $Q_a = \{10; 20\}$ et en utilisant les théorèmes 4 et 5 nous trouvons que la zone de rupture créée est de paire $(30, 1)$, ce qui nous permet de construire l'arbre $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$, où chaque sommet est pondéré par $q_{S_i}(f_a) = \text{val}_{E_i}(f_a)/\text{val}_{E_i}(x)$ (voir figure 3).

b) Pour $N = 10$ (voir l'arbre $\mathcal{A}_{10}(f \cdot x)$ figure 4), on a $\text{val}_t(f(t, 0)) = N(x, y)_0$. Par conséquent, $B_1 = \{-1\}$ et $B = \{0, -1\}$ car f n'est pas réduite.

Si $a \in \mathbb{C} \setminus B$, $Q_a = \{10\}$ et la zone de rupture ajoutée est du type $(5, 3)$, d'où la construction de $\mathcal{A}(f \cdot f_a \cdot x)$ (figure 5).

c) Pour $N = 8$, $B_1 = \emptyset$ et $B = \{0\}$ car $Q_0 = \{10\}$. Par définition ce cas est dégénéré, et pour a régulière l'arbre $\mathcal{A}(f_a \cdot x)$ est représenté figure 6.



5.2. Exemple 2

Considérons $f = \prod_{i=1}^r f_i^{e_i}$ où $r \geq 2$ et les f_i sont lisses et transverses deux

à deux. La multiplicité à l'origine de f est donc égale à $\sum_{i=1}^r e_i$. On étudie

$f(x, y) + ax^N$ avec $N > \sum_{i=1}^r e_i$. On a $q_{S_1}(f) = \sum_{i=1}^r e_i$ où S_1 est le sommet de $\mathcal{A}(f \cdot x)$ représentant le diviseur obtenu en éclatant l'origine dans \mathbb{C}^2 .

LEMME 4 . Si $N > \sum_{i=1}^r e_i$ alors 0 est la seule valeur atypique éventuelle du pinceau $f + ax^N$.

Démonstration. — Si x est transverse à f alors $Q_0 = \{\sum_{i=1}^r e_i\}$ et N est strictement supérieur à l'unique quotient polaire de f pour la direction x .

Dans le cas où x n'est pas transverse à f , le quotient associé à S_0 est un quotient polaire de f pour la direction x . Par le théorème de croissance, il est strictement inférieur à $\sum_{i=1}^r e_i$, donc à N . De plus, si $r \geq 3$, $\sum_{i=1}^r e_i$ est un deuxième quotient polaire pour f . Dans tous les cas N est strictement supérieur aux quotients polaires de f pour la direction x .

La remarque 3 permet alors de conclure : si f est réduite B est vide, sinon $B = \{0\}$. \square

En appliquant le théorème 4, a et c, on construit $A(f_a \cdot x)$ à partir de $A(f \cdot x)$. Dans le cas c, on remplace chaque pointe de flèche correspondant à une composante irréductible f_i de f de poids $e_i > 1$ par une zone possédant un unique sommet de rupture, de paire associée $(l_{(i)}, n_{(i)})$, auquel on accroche $e_i/n_{(i)}$ flèches et pour lequel on a :

$$l_{(i)}/n_{(i)} = \omega_{(i)} = \frac{N(x, f_i)_0 - \sum_{j \neq i} e_j}{e_i}.$$

5.3. Exemple 3

Comme dit dans l'introduction, notre caractérisation des valeurs atypiques d'un pinceau permet de déterminer les valeurs irrégulières à l'infini d'une application polynômiale de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} associée à un polynôme de $\mathbb{C}[x, y]$. Voici des exemples qui illustrent la méthode.

a) Supposons que $Q(x, y)$ est de la forme $\prod_{i=1}^N (x - a_i)$, les a_i non nécessairement distincts. Les fibres de l'application polynômiale Q sont des droites parallèles. Les valeurs irrégulières de Q sont les valeurs $c \in \mathbb{C}$ telles que $Q(x) = c$ est non réduite. On les détermine de la façon suivante.

Soit $P(X, Z) = \prod_{i=1}^N (X - a_i Z)$ l'homogénéisée de Q . Le pinceau associé est $P(X, Z) + aZ^N = P_a(X, Z)$, et $P_a(X, Z) \cap \{Z = 0\} = (0 : 1 : 0) = \{A\}$. On localise au point A et on calcule les valeurs atypiques du pinceau local $P(x, z) + az^N$. Le germe D défini dans l'introduction est le lieu des zéros de $\prod_{j=1}^{N-1} (x - c_j z)$, où les c_j sont les racines de la dérivée du polynôme $\prod_{i=1}^N (x - a_i)$.

Quel que soit j on a : $P(c_j z, z) = (\prod_{i=1}^N (c_j - a_i))z^N$. On pose $b_j = \prod_{i=1}^N (c_j - a_i)$. L'ensemble des valeurs atypiques de Q est $B = \{-b_j, j = 1, \dots, N - 1\}$ (les b_j ne sont pas forcément distincts).

b) En appliquant la même méthode qu'en a), on montre que $R(x, y) = y^q + \prod_{i=1}^N (x - a_i)$ est régulier à l'infini si $q \geq 1$ et $q \neq N$.

c) Soit $S(x, y) = x + x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$. Les fibres de S intersectent la droite à l'infini en $A = (0 : 1 : 0)$ et $A' = (1 : 0 : 0)$. Après localisation en A (resp. A') on obtient les pinceaux : $xz^{\alpha+\beta-1} + x^\alpha + az^{\alpha+\beta}$ (resp. $z^{\alpha+\beta-1} + y^\beta + az^{\alpha+\beta}$).

En A' le germe \hat{D} est $\beta y^{\beta-1}$ et alors $B = \emptyset$.

En A le germe \hat{D} est $z^{\alpha+\beta-1} + \alpha x^{\alpha-1}$. Les branches de \hat{D} ont une paramétrisation de la forme $(z = t^{\alpha-1}, x = \sigma t^{\alpha+\beta-1})$ avec $1 + \alpha \sigma^{\alpha-1} = 0$. Alors $B = \{0\}$. Donc la seule valeur atypique de S à l'infini est 0.

Bibliographie

- [C1] CAUBEL (C.). — *Sur La topologie d'une famille de pinceaux de germes d'hypersurfaces complexes*, thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier, Toulouse (1998).
- [C2] CAUBEL (C.). — *Sur La topologie d'une famille de pinceaux de germes d'hypersurfaces complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série 1, (1999), 501-504.
- [C3] CAUBEL (C.). — *Variation of the Milnor fibration in pencils of hypersurface singularities*, Proceedings of the London Math. Soc. Vol. 83, Part 2 (2001), 330-350.
- [D-M] DU BOIS (P.), MICHEL (F.). — *The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs*, Journal of algebraic geometry, vol. 3, n°1, (1994), 1-38.
- [E-N] EISENBUD (D.), NEUMANN (W.). — *Three-dimensional link theory and invariants of plane curves singularities*, Annals of Math. Studies 110, (1985), Princeton University Press.
- [I] IOMDINE (I.N.). — *Complex surfaces with a 1-dimensional set of singularities*, Sibirian Math. J. (15) (1974), 1061-1082.
- [L1] LÊ (D.T.). — *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*, Annales de l'Institut Fourier, t.23, n°4, (1973), 261-270.
- [L2] LÊ (D.T.). — *Ensembles analytiques complexes avec lieu singulier de dimension un (d'après I.N. Iomdine)*, Séminaire sur les singularités, Université Paris VII, (1976-1977), Publications Mathématiques de l'université Paris VII, (1980).
- [L-W] LÊ (D.T.), WEBER (C.). — *Équisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et C^0 -suffisance*, L'enseignement mathématique, t. 43 (1997), 355-380.
- [L-M-W1] LÊ (D.T.), MICHEL (F.), WEBER (C.). — *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann.Scién.E.N.S., 4ième série, T 24, (1991), 141-169.

- [L-M-W2] LÊ (D.T.), MICHEL (F.), WEBER (C.). — *Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes*, *Compositio Mathematica* 72, (1989), 87-113.
- [Ma1] MAUGENDRE (H.). — *Discriminant d'un germe $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ et résolution minimale de $f \cdot g$* , *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. VII, n° 3, (1998), 497-525.
- [Ma2] MAUGENDRE (H.). — *Discriminant of a germ $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ and Seifert fibered manifolds*, *Journal of the London Mathematical Society* (2) 59 (1999), 207-226.
- [M-W] MICHEL (F.), WEBER (C.). — *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*, Prépublication de l'Université de Genève, (1985).
- [Sc] SCHRAUWEN (R.). — *Topological series of isolated plane curves singularities*, *l'Enseignement Mathématique* (36) (1990), 115-141.
- [S] SIERSMA (D.). — *The monodromy of a series of hypersurface singularities*, *Comment. Math. Helv.* 65, (2), (1990), 181-197.
- [T1] TEISSIER (B.). — *Introduction to equisingularity problems*, *Proc. A.M.S., Conference on algebraic geometry*, Arcata 1974, A.M.S. Providence R.I. (1975).
- [T2] TEISSIER (B.). — *Variétés polaires I*, *Inv. Math.* 40 (1977), 267-292.
- [Ti] TIBAR (M.). — *Embedding non isolated singularities into isolated singularities*, *The Brieskorn Anniversary Volume*, Birkhauser, *Progress in Math.*, vol. 162, (1998), 103-115.
- [Z] ZARISKI (O.). — *Contributions to the problem of equisingularity*, *CIME notes* (1969) ; *Complete works* vol.4, 159-237.