ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MOHAMED MALIKI
HAMIDOU TOURÉ

Dépendance continue de solutions généralisées locales

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 10, nº 4 (2001), p. 701-711
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_4_701_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n° 4, 2001
pp. 701–711

Dépendance continue de solutions généralisées locales (*)

MOHAMED MALIKI (1), HAMIDOU TOURÉ (2)

RÉSUMÉ. — On considère l'équation parabolique générale:

$$u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v \qquad \text{in } Q =]0, T[\times \mathbb{R}, \quad T > 0$$

On montre la dépendance continue de la solution généralisée locale du problème de Cauchy associé par rapport à f, β, v et la donnée initiale u_0.

Ce type de solution est introduit et étudié dans [MT]. On commence notre étude par un rappel des différentes propriétés de la solution généralisée locale. On donne enuite un lemme technique général et en application de ce dernier résultat on a la dépendance continue de la solution généralisée locale.

ABSTRACT. — We consider the general parabolic equation :

$$u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v \qquad \text{in } Q =]0, T[\times \mathbb{R}, \quad T > 0$$

We prove the continuous dependance of the local generalized solution with respect to f, β, v and the initial data u_0 of the associated Cauchy problem.

This type of solution was introduced and studied in [MT]. We start by recalling different propreties of the local generalized solution. We give an abstract general lemma and, in application of this result we get the continuous dependance of local generalized solutions.

(*) Reçu le 5 mars 2001, accepté le 25 mars 2002
(1) Équipe: modélisation, E.D.P. et Analyse numérique, F.S.T. Mohammédia B.P. 146 Mohammédia, Maroc, E.mail: maliki@uh2m.ac.ma
(2) F.A.S.T. Ouagadougou 03 B.P. 7021 Burkina Faso
Email: toureh@univ-ouaga.bf

1. Introduction et notations

On pose $Q =]0,T[\times\mathbb{R}$ avec $T > 0$, et on se donne:

$$(H) \qquad \begin{cases} 1) & u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ \\ 2) & v \in L^1(0,T,L^\infty(\mathbb{R})). \end{cases}$$

On considère le problème $PC = PC(f,\beta,v,u_0)$

$$(PC) \qquad \begin{cases} u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v & \text{sur } Q \\ u(0,.) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}, \end{cases}$$

où f, $\beta \in C(\mathbb{R})$, β est croissante (au sens large). On fait la normalisation $f(0) = \beta(0) = 0$.

Le problème $PC(f,\beta,v,u_0)$ est un problème parabolique dégénéré de second ordre qui n'admet pas en général de solution "régulière" (cf [BT1], [BT2], [BT3], [T]). Le but de ce travail est de prouver la dépendance continue de la solution généralisée locale, introduite et étudiée dans [MT], de $PC(f,\beta,v,u_0)$ par rapport aux données f, β, u_0, et v.

En utilisant la théorie des semi groupes non linéaires dans L^1, (cf [BCP], [B]) on montre dans [MT], que le problème de Cauchy $PC(f,\beta,v,u_0)$ est bien posé, et qu'on a existence, unicité de la solution généralisée locale ainsi que le principe de comparaison dans $L^1(\mathbb{R})$ de ces solutions.

La question de la dépendance continue des solutions généralisées locales a été traitée dans [MT] dans le cas où f, β sont localement lipschitziennes. Notre travail est une extension de ce résultat au cas où f et β sont seulement continues.

La preuve du théorème principal est différente de celle de [MT]. En effet elle est basée sur une idée plus générale due à Bénilan et Kruzkhov (où ils montrent, dans le cas du premier ordre, la manière de passer d'une inégalité de Kato (cf [MT]) au principe de comparaison de deux solutions entropiques et cela en faisant des choix particuliers sur les fonctions tests utilisées) (voir [BK] et aussi[CMT]).

Notre travail est organisé de la façon suivante: Dans la seconde section on rappelle les définitions des différentes notions de solutions utilisées, leurs propriétés ainsi que les liens entre elles. On énonce le résultat principal. Dans la troisième section on établit un lemme technique et on donne comme application le résultat de dépendance continue des solutions généralisées locales par rapport aux données.

2. Préliminaires et énoncé du résultat principal

On commence par rappeler les notions de solutions introduites dans [MT]. Posons $E = E(f, \beta, Q, v)$,

$$(E) \qquad u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v \qquad \text{sur } Q$$

où Q est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 1 (Solution classique). — On appelle solution classique de $E(f, \beta, Q, v)$, toute fonction $u \in \mathcal{C}(Q)$ telle que:

$$\begin{cases} u_t,\ f(u)_x,\ \beta(u)_{xx} \ \in \mathcal{C}(Q) \\ \\ u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v \ \text{ sur } \ Q. \end{cases} \tag{1}$$

Notons alors que $v \in \mathcal{C}(Q)$.

On introduit maintenant la notion de solution généralisée.

DÉFINITION 2 (Solution généralisée). — On appelle solution généralisée de $E(f, \beta, Q, v)$ toute fonction $u \in L^1_{Loc}(Q)$ vérifiant: il existe une suite (f_n, β_n, v_n, u_n) dans $C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times C(Q)^2$ avec u_n solution classique de $E(f_n, \beta_n, Q, v_n)$ telle que

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u, \ \ v_n \longrightarrow v \ \text{ dans } \ L^1_{Loc}(Q), \\ f_n \longrightarrow f, \ \ \beta_n \longrightarrow \beta \ \text{ dans } \ C(\mathbb{R}), \\ f_n(u_n) \longrightarrow f(u), \ \ \beta_n(u_n) \longrightarrow \beta(u) \ \text{ dans } \ L^1_{Loc}(Q), \end{cases} \tag{2}$$

où on a noté $C_m(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et monotones croissantes (au sens large).

La notion de solution généralisée est une notion globale. Il lui correspond la notion locale suivante:

DÉFINITION 3 (Solution généralisée locale). — On appelle solution généralisée locale de $E(f, \beta, Q, v)$ toute fonction $u \in L^1_{Loc}(Q)$, vérifiant: tout point $(t_0, x_0) \in Q$ admet un voisinage ouvert Q_1 dans Q tel que la restriction de u à Q_1 soit solution généralisée de $E(f, \beta, Q_1, v)$.

Remarque 1. — Il est clair qu'on a les relations suivantes:

a) Toute solution classique est une solution généralisée.

b) Toute solution généralisée est une solution généralisée locale.

c) Toute solution généralisée locale est une solution entropique (cf [MT] Proposition 7) (pour la définition de solution entropique introduite par S.N. Kruskov (cf [KH],[KA], [BT1], [T], [MT],[C1], [C2]).

En reprenant les même notations que dans [MT], on introduit le sous ensemble X de $L^1(Q) \times L^1(\mathbb{R})$ défini de la manière suivante:

Étant donné $C > 0$, soit X l'ensemble des fonctions $(v, u_0) \in L^1(Q) \times L^1(\mathbb{R})$, vérifiant (H) avec

$$\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \int_0^T \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} dt \leqslant C,$$

muni de la topologie de $L^1(0, T : L^\infty(\mathbb{R})) \times L^1(\mathbb{R})$.

Notre résultat principal de dépendance continue est donné par le théorème suivant:

THÉORÈME 1. — Étant donné $(f_n, \beta_n, v_n, u_{0,n}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_m(\mathbb{R}) \times L^1_{loc}(Q) \times L^\infty(\mathbb{R})$, telle que:

$$(E1) \qquad \begin{cases} f_n \to f \quad \beta_n \to \beta \quad \text{dans} \;\; \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ (v_n, u_{0,n}) \;\; \text{converge vers} \;\; (v, u_0) \;\; \text{dans} \;\; L^1_{loc}(Q) \times L^1_{loc}(\mathbb{R}) \\ \|u_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \displaystyle\int_0^T \|v_n(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \, dt \leqslant C, \end{cases}$$

alors u_n converge vers u dans $\mathcal{C}([0, T], L^1_{loc}(\mathbb{R}))$, où u_n, u sont les solutions généralisées locales correspondant respectivement à $(f_n, \beta_n, v_n, u_{0,n})$ et (f, β, v, u_0).

3. Dépendance continue par rapport aux données

Comme première étape de la preuve de notre résultat principal (Théorème 1), on montre le lemme suivant (qui est une adaptation de celui de [BK] donné dans le cas du premier ordre).

3.1. Un lemme technique

LEMME 1. — Soient ω une fonction positive définie sur $[0, +\infty[$, telle que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\omega(\epsilon)}{\epsilon} = +\infty \tag{3}$$

1) Soit $h \in L^1{}_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $h^+ = max(h,0) \in L^1(\mathbb{R})$, Soit $W \in L^1{}_{loc}(\mathbb{R})$, $W \geqslant 0$, $W \in L^\infty(\mathbb{R})$, tels que:

$$\int_{\mathbb{R}} W\xi \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} (W+\epsilon)\frac{\omega(\epsilon)}{\epsilon}(|\frac{\partial \xi}{\partial x}| + |\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}|)\, dx + \int_{\mathbb{R}} h\xi \, dx, \qquad (4)$$

pour tout $\epsilon > 0$ et $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\xi \geqslant 0$.
Alors

$$h \in L^1(\mathbb{R}), \quad W \in L^1(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} W(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx.$$

2) Soit $h \in L^1{}_{loc}(Q)$ telle que $h^+ = max(h,0) \in L^1(Q)$,

Soit $W_0 \in L^1(\mathbb{R})$, $W \in L^1{}_{loc}(Q)$, $W \geqslant 0$, $W \in L^\infty(Q)$, tels que:

$$\int\int_Q \{W\frac{\partial \xi}{\partial t} + (W+\epsilon)\frac{\omega(\epsilon)}{\epsilon}(|\frac{\partial \xi}{\partial x}| + |\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}|) + h\ \xi\ dx\ dt\} \geqslant 0, \qquad (5)$$

pour tout $\epsilon > 0$ et $\xi \in \mathcal{D}(Q)$, $\xi \geqslant 0$,
et $(W(t,.) - W_0)^+ \longrightarrow 0$ dans $L^1{}_{loc}(\mathbb{R})$, quand t tend vers 0 essentiellement.

Alors

$$h \in L^1(Q), \quad W \in L^\infty(0,T,L^1(\mathbb{R}))$$

$$\int_{\mathbb{R}} W(\tau,x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} W_0(x)\, dx + \int_{Q_\tau} h(t,x)\, dx,$$

pour presque tout $\tau \in (0,T)$, avec $Q_\tau =]\tau, T[\times\mathbb{R}$

Preuve. — **1)** La preuve du lemme repose sur un choix particulier de la fonction test ξ, Posons $h = h^+ - h^-$.

Prenons la fonction ξ de la forme $\xi(x) = \psi(\frac{|x|}{R})$, où $R = R(\epsilon)$ une constante à choisir, et la fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant:

a) $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$.

b) $\psi \equiv 1$ sur $[\,-1,+1\,]$,

c) $|\psi'(x)| \leqslant \psi(x)$, $\quad |\psi''(x)| \leqslant \psi(x)$.

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(x)dx = M$.

D'après l'inégalité (4) on a

$$\int_{\mathbb{R}} (W+h^-)\ \xi\ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} (W+\epsilon)\frac{\omega(\epsilon)}{\epsilon}\ (|\frac{\partial \xi}{\partial x}|+|\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}|)\ dx + \int_{\mathbb{R}} h^+ \xi\ dx, \quad (6)$$

En remplaçant ξ par sa valeur dans (6) et en utilisant les propriétés de ψ on obtient:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (W+h^-)\ \xi\ dx &\leqslant \frac{\omega(\epsilon)}{R\epsilon}(1+\frac{1}{R}) \int_{\{|x|\ \geqslant\ R\}} W\xi\ dx \\ &+\frac{\omega(\epsilon)}{R}(1+\frac{1}{R}) \int_{\{|x|\ \geqslant\ R\}} \xi\ dx + \int_{\mathbb{R}} h^+\xi\ dx, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

c'est à dire

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (W+h^-)\ \xi\ dx &\leqslant \frac{\omega(\epsilon)}{R\epsilon}(1+\frac{1}{R}) \int_{\{|x|\ \geqslant\ R\}} W\xi\ dx \\ &+2M\omega(\epsilon)(1+\frac{1}{R}) + \int_{\mathbb{R}} h^+\xi\ dx\ , \end{aligned} \right. \quad (8)$$

On choisit $R = R(\epsilon)$ solution de l'équation du second ordre(en R):

$$\frac{\omega(\epsilon)}{R\epsilon}(1+\frac{1}{R}) = \epsilon$$

c'est à dire :

$$R(\epsilon) = \frac{2}{-1+\sqrt{[1+\dfrac{4\epsilon^2}{\omega(\epsilon)}]}}$$

On a alors :

$$\lim_{\epsilon \to 0} R(\epsilon) = +\infty, \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \omega(\epsilon)(1+\frac{1}{R}) = 0^+.$$

L'inégalité (8) devient alors:

$$(1-\epsilon) \int_{\mathbb{R}} W\xi\ dx + \int_{\mathbb{R}} h^-\xi dx \leqslant 2M\omega(\epsilon)(1+\frac{1}{R}) + \int_{\mathbb{R}} h^+\xi\ dx, \quad (9)$$

En tenant compte de la valeur de $R(\epsilon)$, et en faisant tendre ϵ vers 0 dans (9) on obtient puisque $\xi(x) = 1$ sur $[-R(\epsilon), +R(\epsilon)]$

$$h \in L^1(\mathbb{R}), \quad W \in L^1(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} W(x)\ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(x)\ dx.$$

2) La preuve de ce point est similaire à celle de 1). Notons d'abord que l'inégalité (5) est équivalente à

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W(\tau,.)\ \xi\ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} W(\sigma,.)\ \xi\ dx + \int_\sigma^\tau dt \int_{\mathbb{R}} (W(t,.)+\epsilon)\frac{\omega(\epsilon)}{\epsilon} \\ (|\frac{\partial\xi}{\partial x}| + |\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}|)\ dx + \int_\sigma^\tau \int_{\mathbb{R}} h\ \xi\ dx\ dt, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Ceci pour tout $\epsilon > 0$, $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\xi \geqslant 0$, $\sigma, \tau \in (0,T)$, $\sigma \leqslant \tau$.

En faisant tendre σ vers 0 on a:

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (W(\tau,.) + \int_0^\tau h^-(t,.)\ dt)\ \xi\ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} W_0\ \xi\ dx + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} h^+\ \xi\ dt\ dx \\ + \int_{\mathbb{R}} (\int_0^\tau W(t,.)\ dt\ + \epsilon\tau)\frac{\omega(\epsilon)}{\epsilon}(|\frac{\partial\xi}{\partial x}| + |\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}|)\ dx \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Prenons ξ comme précédemment, on obtient:

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (W(\tau,.) + \int_0^\tau h^-(t,.)\ dt)\ \xi\ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} W_0\ \xi\ dx + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} h^+\ \xi\ dt\ dx \\ + \frac{\omega(\epsilon)}{R\epsilon}(1+\frac{1}{R}) \int_{\{|x|\ \geqslant\ R\}} \int_0^\tau W(t,.)\ \xi\ dt\ dx \\ + \frac{\tau\omega(\epsilon)}{R}(1+\frac{1}{R}) \int_{\{|x|\ \geqslant\ R\}} \xi\ dx, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \sup_{\tau\in(0,T)} ess \int_{\mathbb{R}} W(\tau,.)\ \xi\ dx\ + \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau h^-(t,.)\ \xi\ dxdt \leqslant \int_{\mathbb{R}} W_0\ \xi\ dx \\ + \frac{\omega(\epsilon)T}{R\epsilon}(1+\frac{1}{R}) \sup_{\tau\in(0,T)} ess \int_{\mathbb{R}} W(\tau,.)\ \xi\ dt\ dx \\ + \frac{2MT\omega(\epsilon)}{R}(1+\frac{1}{R}) + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} h^+\ \xi\ dt\ dx \end{aligned}\right. \tag{13}$$

On prend $R = R(\epsilon)$ solution de l'équation du second ordre:

$$\frac{\omega(\epsilon)T}{R\epsilon}(1+\frac{1}{R}) = \epsilon$$

c'est à dire :

$$R(\epsilon) = \frac{2}{-1 + \sqrt{[1 + \frac{4\epsilon^2}{\omega(\epsilon)T}]}}$$

On a alors :

$$\lim_{\epsilon \to 0} R(\epsilon) = +\infty, \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \omega(\epsilon)(1 + \frac{1}{R}) = 0^+.$$

Un raisonnement similaire à celui fait précédemment permet de conclure.

3.2. Preuve du Théorème 1

Preuve. — Soient $R > 0$, δ fixés, il existe $(\hat{v}, \hat{u_0}) \in X$ tel que

$$\int_{\{|x| \leqslant R\}} |u_0 - \hat{u}_0| \, dx + \int_0^T \int_{\{|x| \leqslant R\}} |v - \hat{v}| \, dx \, ds < \frac{\delta}{4}, \tag{14}$$

$(\hat{v}, \hat{u_0})$ étant dans X, en utilisant la théorie des semi groupes dans L^1, le problème $PC(f, \beta, \hat{v}, \hat{u_0})$, admet une unique bonne solution (cf [BCP], [BT1], [MT]) que l'on note $\hat{u} = \mathcal{F}(f, \beta, \hat{v}, \hat{u}_0)$ et qui dépend continûment des données $(f, \beta, \hat{v}, \hat{u_0})$, et on a

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_{\{|x| \leqslant R\}} |u(t) - \hat{u}(t)| \, dx < \delta, \tag{15}$$

où u est la solution généralisée locale correspondant à (f, β, v, u_0). (cf Proposition 3.11, Corollaire 3.12 de[M]).

Notons $\hat{u}_n = \mathcal{F}(f_n, \beta_n, \hat{v}, \hat{u}_0)$, par continuité de $\mathcal{F}$, (cf [MT]) on a

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_n(t) - \hat{u}(t)| \, dx = 0. \tag{16}$$

D'autre part

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\{|x| \leqslant R\}} |u_n(t) - u(t)| \, dx \leqslant & \int_{\{|x| \leqslant R\}} |u_n(t) - \hat{u}_n(t)| \, dx \\ & + \int_{\{|x| \leqslant R\}} |\hat{u}_n(t) - \hat{u}(t)| \, dx + \int_{\{|x| \leqslant R\}} |\hat{u}(t) - u(t)| \, dx. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Compte tenu de (15), (16) et (17), pour montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T[} \int_{\{|x|\,\leqslant\, R\}} |u_n(t) - u(t)|\, dx = 0,$$

il suffit de montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\{|x|\,\leqslant\, R\}} |u_n(t) - \hat{u}_n(t)|\, dx < \delta.$$

Par le Lemme 12, (cf [MT]) pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\xi \geqslant 0$ et $0 < t \leqslant T$ on a

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int |u_n(t) - \hat{u}_n(t)|\xi dx \\ \qquad\qquad \displaystyle\leqslant \int |u_0^n - \hat{u}_0|\xi dx + 2\int_0^t \int |f_n(u_n) - f_n(\hat{u}_n)||\xi_x| dx\, ds \\ \displaystyle +2\int_0^t \int |\beta_n(u_n) - \beta_n(\hat{u}_n)||\,\xi_{xx}|\, dx\, ds + \int_0^T \int |v_n - \hat{v}|\,\xi\, dx\, ds. \end{array}\right. \tag{18}$$

Dans le but d'appliquer le résultat général du Lemme 1, posons

$$W_n(t) = |u_n(t) - \hat{u_n}(t)|; \quad W_{0,n} = |u_{0,n} - \hat{u_0}|; \quad h_n = |v_n - \hat{v}|.$$

Soit ω_{1n} le module de continuité de la fonction f_n.

Soit ω_{2n} le module de continuité de la fonction β_n.

Soit $\omega_n = max(\omega_{1n}, \omega_{2n})$.

On sait que les fonctions ω_i sont sous additives croissantes et positives d'où pour $r = k\epsilon + s$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant s < \epsilon$ on a :

$$\omega_i(r) < (k+1)\omega_i(\epsilon) \leqslant (r+\epsilon)\frac{\omega_i(\epsilon)}{\epsilon}.$$

On a pour tout $n \geqslant n_0$ (n_0 assez grand)

$$\left\{\begin{array}{l} |f_n(u_n) - f_n(\hat{u}_n)| \leqslant \omega_n(W_n) \leqslant (W_n + \epsilon)\dfrac{\omega_n(\epsilon)}{\epsilon}, \\ |\beta_n(u_n) - \beta_n(\hat{u}_n)| \leqslant \omega_n(W_n) \leqslant (W_n + \epsilon)\dfrac{\omega_n(\epsilon)}{\epsilon}, \end{array}\right.$$

En remplaçant dans (18), on obtient pour $n \geqslant n_0$ (une inégalité similaire à (10))

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W_n(t)\, \xi\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} W_{0,n}\, \xi\, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h_n\, \xi\, dx\, ds \\ + 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (W_n + \epsilon) \frac{\omega_n(\epsilon)}{\epsilon} (|\frac{\partial \xi}{\partial x}| + |\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}|)\, dx\, ds, \end{aligned} \right. \tag{19}$$

avec $W_{0,n} \to 0$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $h_n \to 0$ dans $L^1_{loc}(Q)$, et $\|W_n\|_{L^\infty(Q)} \leqslant C$,

Une application directe du Lemme 1 donne à partir de l'inégalité (13):

$$\begin{aligned} (1 - 2\epsilon) \sup_{\tau \in (0,T)} ess \int_{\mathbb{R}} W_n(\tau)\, \xi\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} W_{0,n}\, \xi\, dx \\ + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h_n\, \xi\, dt\, dx + 4MT\omega_n(\epsilon)(1 + \frac{1}{R}) \end{aligned} \tag{20}$$

Pour $n \geqslant n_0$ assez grand et en faisant tendre ϵ vers 0 on obtient le résultat,

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_{\{|x| \leqslant R\}} |u_n(t) - \hat{u}_n(t)|\, dx < \delta.$$

□

Bibliographie

[B] BÉNILAN (Ph.). — Équation d'évolution dans un espace de Bananch quelconque et application, Thèse de Doctorat d'État, Orsay (1972).

[BCP] BÉNILAN (Ph.), CRANDALL (M.G.) et PAZY (A.). — Evolution equation governed by accretive operators, (livre á paraître).

[BK] BÉNILAN (Ph.), KRUSKHOV (S.N.). — Quasilinear first order with continuous nonlinearities. Dokl.Ac. Sc. Russia 339(1994), 151-154 (english tr. Russian Acad. Sci. Dokl. Mat. 50 (1995), 391-396).

[BT1] BÉNILAN (Ph.), TOURÉ (H.). — Sur l'équation générala $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v$, C.R. Acad. Sc. Paris, serie 1, 299, 18 (1984).

[BT2] BÉNILAN (Ph.), TOURÉ (H.). — Sur l'équation générale $u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x$ dans L^1 I. Etude du problème stationnaire, in Evolution equations, Lecture Notes Pure and Appl. Math Vol. 168, 1995.

[BT3] BÉNILAN (Ph.), TOURÉ (H.). — Sur l'équation générale $u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x$ dans L^1 II. Le problème d'évolution, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 12, 6, 1995, pp. 727-761.

[C1] CARRILLO (J.). — On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem, Nonlinear Analysis, 22, 5 (1994), pp. 573-607.

[C2] CARRILLO (J.). — Entropy solutions for nonlinear degenerate problems Arch. Rational Mech. Anal. 147 (1999), 269-361.

[CMT] CARRILLO (J.), MALIKI (M.), TOURÉ (H.). — On the uniqueness of the entropy solution (En préparation).

[KH] KRUSKHOV (S.N.), HIDELBRAND (F.). — The Cauchy problem for quasilinear first order equations in the case the domaine of dependance on initial data is infinite. Vestnik Mosc. Univ.1,pp 93-100; engli. tr. in Moscow Univ. Math. Bull.2.

[KA] KRUSKHOV (S.N.), PANOV (E. Yu.). — Conservative quasilinear first order law in the class of locally sommable functins, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 220, 1 pp.233-26; english traduction in soviet Math. Dokl. 16 (1985).

[M] MALIKI (M.). — Solutions faibles pour des problèmes paraboliques non linéaires fortement dégénérés. Thèse d'état Faculté des sciences semlalia Marrakech Maroc.

[MT] MALIKI (M.), TOURÉ (H.). — Solution généralisée locale d'une équation parabolique quasi linéaire dégénérée du second ordre. Ann. Fac. Sci. Toulouse. Vol. VII 1, (1998) 113-133.

[T] TOURÉ (H.). — Étude des équations générales $u_t - \varphi(u)_{xx} + f(u)_x = v$ par la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1, Thèse 3^{eme} cycle, 1982, Université de Franche-Comté.