ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MOHAMED MAGHFOUL

Sur la forte K-moyennabilité d'un groupoïde

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 10, nº 4 (2001), p. 683-699

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_4_683_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n° 4, 2001
pp. 683–699

Sur la forte K-moyennabilité d'un groupoïde (*)

MOHAMED MAGHFOUL (1)

RÉSUMÉ. — Nous discutons quelques propriétés de la *forte K-moyennabilité* pour les groupoïdes et nous l'appliquons aux suites exactes en théorie de Kasparov équivariante.

ABSTRACT. — We discuss some properties of the *strong K-amenability* for groupoids and we apply this to the exact sequences in equivariant Kasparov's theory.

Introduction.

En étudiant le comportement du bifoncteur de Kasparov équivariant vis-à-vis des suites exactes de C^*-algèbres, nous avons introduit dans [12] une notion de forte K-moyennabilité pour les groupes. Nous avons montré que pour les groupes G possédant cette propriété, le bifoncteur KK_G est semi-exact sous des hypothèses de relèvement complètement positif ou de nucléarité en K-théorie équivariante.

La théorie de Kasparov équivariante a été généralisée au cas des actions d'un groupoïde [7]. Ceci fournit un cadre plus général dans lequel la KK-théorie équivariante s'explique mieux et peut avoir de nombreuses applications ([16],[17]).

Dans cet article, nous étudions quelques propriétés de la forte K-moyennabilité pour un groupoïde. Nous appliquons cette notion au problème d'existence de suites exactes a six termes en théorie de Kasparov équivariante par rapport à des groupoïdes et nous obtenons le résultat suivant:

(*) Reçu le 29 novembre 1999, accepté le 5 juin 2002

(1) Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Université Ibn Tofail, Kénitra, Maroc. E-mail: mmaghfoul@mailcity.com

THÉORÈME 0.1. — *Soient G un groupoïde localement compact fortement K-moyennable et $0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} B/J \longrightarrow 0$ une suite exacte G-équivariante de G-algèbres avec B séparable. Soit A une G-algèbre séparable.*

• *Si l'application q admet un relèvement complètement positif $C(X)$-linéaire (non nécessairement équivariant) de norme 1, ou si J, B et B/J sont $C(X)$-nucléaires en K-théorie équivariante, on a les suites exactes hexagonales suivantes:*

$$\begin{array}{ccccc} KK_G(A,J) & \xrightarrow{j_*} & KK_G(A,B) & \xrightarrow{q_*} & KK_G(A,B/J) \\ \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ KK^1_G(A,B/J) & \xleftarrow{q_*} & KK^1_G(A,B) & \xleftarrow{j_*} & KK^1_G(A,J) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} KK_G(B/J,A) & \xrightarrow{q^*} & KK_G(B,A) & \xrightarrow{j^*} & KK_G(J,A) \\ \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ KK^1_G(J,A) & \xleftarrow{j^*} & KK^1_G(B,A) & \xleftarrow{q^*} & KK^1_G(B/J,A) \end{array}$$

• *Si A est $C(X)$-nucléaire en K-théorie équivariante, on a la suite exacte hexagonale:*

$$\begin{array}{ccccc} KK_G(A,J) & \xrightarrow{J_*} & KK_G(A,B) & \xrightarrow{q_*} & KK_G(A,B/J) \\ \delta \downarrow & & & & \downarrow \delta \\ KK_G(A,B/J) & \xleftarrow{q_*} & KK_G(A,B) & \xleftarrow{j_*} & KK_G(A,J) \end{array}$$

Ce théorème généralise les résultats de [12] et [3] ainsi que certains résultats partiels de [16] et [17] dans le cas des groupoïdes.

Remerciements. — Je tiens à exprimer mes remerciements au Professeur Georges Skandalis pour les discussions enrichissantes que j'ai pu avoir avec lui pendant la réalisation de ce travail.

1. Préliminaires et notations

Pour la définition et les propriétés de la KK-théorie équivariante par rapport à un groupoïde, nous renvoyons à [7]. Les notations et la terminologie concernant ce bifoncteur sont essentiellement celles de ([10],[7],[12]).

Si X est un espace localement compact, on note $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X nulles à l'infini et $C_c(X)$ celui des fonctions continues à support compact.

Soit G un groupoïde localement compact (σ- compact) de base X et muni d'un système de Haar $\lambda = \{\lambda^x, x \in X\}$(cf.[13]). On note $L^2(G,\lambda)$ le $C(X)$-module hilbertien G-équivariant complété de $C_c(G)$ pour le produit scalaire:

$$\langle \xi, \eta\rangle(x) = \int_{G^x} \langle \xi(g), \eta(g)\rangle(x) d\lambda^x(g)$$

et sur lequel G agit par la translation à gauche λ^G. L'action de $C(X)$ sur $L^2(G,\lambda)$ est telle que $\xi f(g) = \xi(g)f(r(g))$ pour tous $\xi \in L^2(G,\lambda)$ et $f \in C(X)$. Soient B une G-algèbre (séparable), $\mathcal{E}$ un B-module hilbertien (dénombrablement engendré) équivariant et $C_c(G,\mathcal{E})$ l'espace des fonctions continues à support compact de G à valeurs dans $\mathcal{E}$. Sur $C_c(G,\mathcal{E})$ on considère les opérations suivantes:

- $(fb)(g) = f(g)\alpha_g(b_{s(g)})$

- $g(f)(g_1) = g(f(g^{-1}g_1))$

pour tous $g, g_1 \in G$; $b \in B$; $f \in C_c(G,\mathcal{E})$. L'application:

$$x \mapsto \langle f_1, f_2\rangle_x = \int_{G_x} \alpha_{g^{-1}}(\langle f_1(g), f_2(g)\rangle_{r(g)}) d\lambda_x(g)$$

(pour $f_1, f_2 \in C_c(G,\mathcal{E})$) appartient à $C(X, B^\sharp)$ et donc définit un élément de B ([7] lemmes 7.1.1 et 7.1.2) qu'on note $\langle f_1, f_2\rangle$ avec λ_x est la mesure image de λ^x par l'application qui à g associe g^{-1}. On note $L^2(G,\mathcal{E})$ le B-module hilbertien G-équivariant complété de $C_c(G,\mathcal{E})$ pour la norme

$$\|f\| = \mathrm{Sup}_{x\in X} \|\langle f, f\rangle_x\|^{\frac{1}{2}}.$$

L'application: $f(g) \otimes \xi \mapsto f(g).\xi_{r(g)}$ définit un isomorphisme entre $L^2(G) \otimes_{C(X)} \mathcal{E}$ et $L^2(G, \mathcal{E})$. Remarquons que les éléments de $L^2(G, \mathcal{E})$ sont des fonctions sur G telles que $f(g) \in \mathcal{E}_{r(g)}$ pour tout $g \in G$. Pour A une C^*-algèbre, on note $M(A)$ la C^*-algèbre des multiplicateurs de A.

Dans la suite, toutes les C^*-algèbres et tous les modules hilbertiens sont supposés $Z/2Z$-gradués et dénombrablement engendrés. Tous les groupoïdes sont supposés séparés séparables.

2. Forte K-moyennabilité

Dans cette section, nous discutons quelques propriétés de la forte K-moyennabilité pour un groupoïde.

DÉFINITION 2.1. — *Soit G un groupoïde localement compact de base X et muni d'un système de Haar. Soient $\mathcal{H}_G^{(i)} = L^2(G, \lambda) \otimes l^2(I\!N)$; $i = 0, 1$, $\mathcal{H}_G = \mathcal{H}_G^{(0)} \oplus \mathcal{H}_G^{(1)}$. On dira que G est fortement K-moyennable, s'il existe $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_G)^{(1)}$ tel que $(\mathcal{H}_G, F)$ soit de classe 1 dans $KK_G(C(X), C(X))$.*

Ceci équivaut à dire qu'il existe un sous-$C(X)$-module hilbertien H, G-invariant, de $\mathcal{H}_G$ et $F \in \mathcal{L}(H)^{(1)}$ tel que $(\mathcal{H}_G, F) = 1$ dans $KK_G(C(X), C(X))$ [12]. Le groupoïde G agit sur $\mathcal{H}_G$ par $\lambda^G \otimes 1$. Si G est un groupe, alors $X = \{e\}$ et $KK_G(C(X), C(X)) = KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on retrouve ainsi la définition de la forte K-moyennabilité pour les groupes [12]. Soit G un groupoïde localement compact agissant proprement et par isométrie affines sur un champ continu $H = (H_x)_{x \in X}$ d'espaces affines euclidiens où $X = G^{(0)}$. Dans ([11], [16]) on construit pour G vérifiant ces hypothèses une G-algèbre $\mathcal{A}(H)$ et deux éléments $\eta \in KK_G(C(X), \mathcal{A}(H))$ et $D \in KK_G(\mathcal{A}(H), C(X))$. Soit $\gamma = \eta \otimes_{\mathcal{A}(H)} D$: le produit de Kasparov interne. Puisque l'action de G est propre, le théorème de stabilisation montre que le $\mathcal{A}(H)$-module hilbertien $\mathcal{A}(H)$ représentant η est un sous-module G-invariant de $\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{A}(H)$ et donc (et pour les mêmes raisons) le $C(X)$-module représentant γ est un sous-$C(X)$-module G-invariant de $\mathcal{H}_G$. On montre (voir [16]) que $\gamma = 1$ dans $KK_G(C(X), C(X))$. Donc G est fortement K-moyennable. En particulier, si G est topologiquement moyennable [1], alors G est fortement K-moyennable.

PROPOSITION 2.2. — *Soient G_1 et G_2 deux groupoïdes localement compacts munis de systèmes de Haar. Si G_1 et G_2 sont fortement K-moyennables, alors $G_1 \times G_2$ est fortement K-moyennable.*

Démonstration. — Supposons que G_1 et G_2 sont fortement K-moyennables. Soit $F_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{G_i})$ tel que $(\mathcal{H}_{G_i}, F_i)$ soit de classe 1 dans

$KK_{G_i}(C(X_i), C(X_i))$ $(i = 1, 2)$. Soit

$$p_i^* : KK_{G_i}(C(X_i), C(X_i)) \longrightarrow KK_{G_1 \times G_2}(C(X_1 \times X_2), C(X_1 \times X_2))$$

l'homomorphisme associé à la projection $p_i : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_i$, $i = 1, 2$. Le produit de Kasparov de $p_1^*((\mathcal{H}_{G_1}, F_1))$ par $p_2^*((\mathcal{H}_{G_2}, F_2))$ est de la forme: $(\mathcal{H}_{G_1 \times \mathcal{H}_{G_2}}, F)$ et comme $p_i^*((\mathcal{H}_{G_i}, F_i)) = 1$, $(i = 1, 2)$, on a $(\mathcal{H}_{G_1 \times \mathcal{H}_{G_2}}, F) = 1$ dans $KK_{G_1 \times G_2}(C(X_1 \times X_2), C(X_1 \times X_2))$.

PROPOSITION 2.3. — *Soient G_1 et G_2 deux groupoïdes localement compacts munis de systèmes de Haar et $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme propore. Si G_2 est fortement K-moyennable, alors il en est de même pour G_1.*

COROLLAIRE 2.4. — *Soient G un groupoïde localement compact et $H \subset G$ un sous-groupoïde fermé. Si G est fortement K-moyennable, alors il en est de même pour H.*

Démonstration. — Découle du fait que l'inclusion de H dans G est propre.

La démonstration de la proposition (2.3) nécessite quelques préliminaires.

LEMME 2.5 *([4] proposition 2.4.1). — Soient A une algèbre de Banach involutive, π et π' deux représentations de A dans les modules hilbertiens $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Soit ξ (resp. ξ') un vecteur totalisateur pour π (resp. pour π'). Si $\langle \pi(x)\xi, \xi \rangle = \langle \pi'(x)\xi', \xi' \rangle$ pour tout $x \in A$, il existe un unique unitaire U de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ transformant π en π' et ξ en ξ'.*

Démonstration. — Pour tous x, y éléments de A, on a

$$\begin{aligned}\langle \pi(x)\xi, \pi(y)\xi \rangle &= \langle \pi(y^*x)\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \pi'(y^*x)\xi', \xi' \rangle \\ &= \langle \pi'(x)\xi', \pi'(y)\xi' \rangle.\end{aligned}$$

Comme les $\pi(x)\xi$ (resp. les $\pi'(x)\xi'$) sont partout denses dans $\mathcal{E}$ (resp. dans $\mathcal{E}'$), il existe alors un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ tel que $U(\pi(x)\xi) = \pi'(x)\xi'$ pour tout $x \in A$. Montrons que U entrelace les représentations π et π'; c'est à dire $U\pi(x) = \pi'(x)U$ quelque soit x dans A.

Soit $y \in A$, alors

$$\begin{aligned}(U\pi(x))(\pi(y)\xi) &= U(\pi(xy))\xi \\ &= \pi'(xy)\xi' \\ &= \pi'(x)(\pi'(y)\xi') \\ &= (\pi'(x)U)(\pi(y)\xi).\end{aligned}$$

Comme les $\pi(y)\xi$ sont denses dans $\mathcal{E}$, on a bien $U\pi(x) = \pi'(x)U$. D'autre part, pour tout $x \in A$, on a

$$\begin{aligned}\langle \xi', \pi'(x)\xi' \rangle &= \langle \xi, \pi(x)\xi \rangle \\ &= \langle U\xi, U\pi(x)\xi \rangle \\ &= \langle U\xi, \pi'(x)\xi \rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent $\xi' = U(\xi)$. L'unicité de U se déduit facilement puisque les valeurs de U sont imposées sur $\pi(A)\xi$.

Pour X un espace localement compact et $x \in X$ on note $e_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ l'évaluation au point x. Si $\mathcal{E}$ est un $C(X)$-module hilbertien, on désignera par ξ_x l'image de $\xi \in \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}_x = \mathcal{E} \otimes_{e_x} \mathbb{C}$. Pour $\mathcal{E}'$ un autre $C(X)$-module hilbertien et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, on note T_x l'image de T dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}'_x)$ définie par $T_x(\xi \otimes_{e_x} 1) = T(\xi) \otimes_{e_x} 1$.

Pour G un groupoïde localement compact de base X et muni d'un système de Haar λ on note $L^1(G, \lambda)$ l'algèbre de Banach involutive complété de $C_c(G)$ pour la norme

$$\|\phi\| = \max\{|\phi|_1, |\phi^*|_1\},$$

où

$$|\phi|_1 = \sup_{x\in X} \int_{\gamma \in G^x} |\phi(\gamma)| \lambda^x(\gamma)$$

$$\phi^*(\gamma) = \overline{\phi(\gamma^-1)}.$$

La multiplication est donnée par le produit de convolution:

$$f * g(\gamma) = \int_{\gamma' \in G^{r(\gamma)}} f(\gamma) g(\gamma'^{-1}\gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma').$$

Soient $\mathcal{E}$ un $C(X)$-module hilbertien et π une action (au sens de [7], définition 4.4) de G sur $\mathcal{E}$. L'action π induit une représentation (qu'on notera encore π) de $L^1(G,\lambda)$ dans $\mathcal{E}$ définie par

$$\langle \pi(f)\xi, \eta\rangle(x) = \int_{\gamma\in G^x} \langle \pi_\gamma \xi_{s(\gamma)}, \eta_{r(\gamma)}\rangle f(\gamma) d\lambda^x(\gamma).$$

Nous dirons qu'un vecteur $\xi \in \mathcal{E}$ est totalisateur pour l'action π si le sous-espace engendré par $\{\pi(f)\xi, \;\; f \in L^1(G,\lambda)\}$ est dense dans $\mathcal{E}$.

LEMME 2.6. — *Soient G un groupoïde localement compact, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux $C(X)$-modules hilbertiens. Soient π (resp. π') une action de G dans $\mathcal{E}$ (resp. dans $\mathcal{E}'$). Soit ξ (resp. ξ') un vecteur totalisateur pour π (resp. pour π'). Si, pour tout $\gamma \in G$, $\langle \pi_\gamma \xi_{s(\gamma)}, \xi_{r(\gamma)}\rangle = \langle \pi'_\gamma \xi'_{s(\gamma)}, \xi'_{r(\gamma)}\rangle$, alors il existe un unique unitaire U de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ tel que pour tout $\gamma \in G$, on ait :*

$$U^*_{r(\gamma)} \pi'_\gamma U_{s(\gamma)} = \pi_\gamma \;\; et \;\; U_{s(\gamma)} \xi_{s(\gamma)} = \xi'_{s(\gamma)}.$$

Démonstration. — Notons encore π (resp. π') la représentation de $L^1(G,\lambda)$ dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) induite par l'action de G. Pour tous $x \in X$ et $f \in L^1(G,\lambda)$, on a:

$$\begin{aligned}\langle \pi(f)\xi, \xi\rangle(x) &= \textstyle\int_{\gamma\in G^x} \langle \pi_\gamma \xi_{s(\gamma)}, \xi_{r(\gamma)}\rangle f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)\\ &= \textstyle\int_{\gamma\in G^x} \langle \pi'_\gamma \xi'_{s(\gamma)}, \xi'_{r(\gamma)}\rangle f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)\\ &= \langle \pi'(f)\xi', \xi'\rangle(x).\end{aligned}$$

Comme ξ et ξ' sont totalisateurs pour π et π', il existe (lemme 2.5) un unique unitaire U de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ vérifiant $U\pi(f) = \pi'(f)U$ et $U_{s(\gamma)}\xi_{s(\gamma)} = \xi'_{s(\gamma)}$ pour tout $f \in L^1(G,\lambda)$. La relation $U\pi(f) = \pi'(f)U$ implique

$$\langle \pi(f)\xi, U^*\xi'\rangle(x) = \langle \pi'(f)U\xi, \xi'\rangle(x).$$

Donc

$$\int_{\gamma\in G^x} \langle \pi_\gamma \xi_{s(\gamma)}, U^*_{r(\gamma)} \xi'_{r(\gamma)}\rangle f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) = \int_{\gamma\in G^x} \langle \pi'_\gamma U_{s(\gamma)} \xi_{s(\gamma)}, \xi'_{r(\gamma)}\rangle f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$$

pout tout $f \in L^1(G,\lambda)$. Par conséquent $U^*_{r(\gamma)} \pi'_\gamma U_{s(\gamma)} = \pi_\gamma$.

Démonstration de la proposition (2.3).

Pour $\xi \in C_c(G_2)$, on pose

$$\varphi(g_1) = \langle \lambda^{G_2}(f(g_1))\xi_{s(f(g_1))}, \xi_{r(f(g_1))} \rangle.$$

Comme f est propre, la fonction φ est de type positif et à support compact. D'après [1] (lemme 2.2.10), il existe $\xi' \in C_c(G_1)$ tel que

$$\varphi(g_1) = \langle \lambda^{G_2}(f(g_1))\xi_{s(f(g_1))}, \xi_{r(f(g_1))} \rangle = \langle \lambda^{G_1}(g_1)\xi'_{s(g_1)}, \xi'_{r(g_1)} \rangle.$$

D'après le lemme (2.6), $\lambda^{G_2} \circ f \subset \lambda^{G_1}$. Soit maintenant $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{G_2})^{(1)}$ tel que $(\mathcal{H}_{G_2}, F_2)$ soit de classe 1 dans $KK_{G_2}(C(X_2), C(X_2))$. Alors $f^*((\mathcal{H}_{G_2}, F_2)) = (\mathcal{H}_{G_2}, F_1) = 1$ *dans* $KK_{G_1}(C(X_1), C(X_1))$.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde de base X agissant à gauche sur un ensemble Z. Soit $G = \mathcal{G} \times_s Z = \{(h,x) \in \mathcal{G} \times Z : s(h) = r_z(x)\}$ le produit croisé de $\mathcal{G}$ par Z où $r_z : Z \longrightarrow X$ est l'action de $\mathcal{G}$ sur Z. Rappelons que deux éléments (h,x) et (h',y) de $\mathcal{G} \times_s Z$ sont composables si $x = h'y$. On a $(h, h'y) \circ (h', y) = (hh', y)$ et $(h,x)^{-1} = (h^{-1}, hx)$. L'espace des unités de G est Z. Si $\lambda = \{\lambda^x, x \in X\}$ est un système de Haar pour $\mathcal{G}$, la famille $\lambda' = \{\lambda^{r_z(z)}, z \in Z\}$ définit un système de Haar pour $\mathcal{G} \times_s Z$.

PROPOSITION 2.7.— *Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde localement compact muni d'un sytème de Haar et Z un $\mathcal{G}$-espace localement compact. Si $\mathcal{G}$ est fortement K-moyennable, alors le groupoïde $G = \mathcal{G} \times_s Z$ est fortement K-moyennable.*

Démonstration.— L'application p de G dans $\mathcal{G}$ qui à (h,x) associe h définit un homomorphisme de groupoïdes dont la restriction à Z est r_z. Soient $p^* : KK_{\mathcal{G}}(C(X), C(X)) \longrightarrow KK_G(C(Z), C(Z))$ l'homomorphisme induit par p [7] et $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}}, F)$ le $\mathcal{G}$-module de Fredholm définissant la forte K-moyennabilité de $\mathcal{G}$. Donc $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}}, F) = 1$ dans $KK_{\mathcal{G}}(C(X), C(X))$. Puisque $L^2(\mathcal{G}, \lambda) \otimes_{C(X)} C(Z)$ est un sous-$C(Z)$-module hilbertien G-invariant de $L^2(G, \lambda')$, il existe alors $F' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_G)^{(1)}$ tel que $p^*([(\mathcal{H}_{\mathcal{G}}, F)]) = [(\mathcal{H}_G, F')] = 1$.

3. Suites exactes.

Nous commençons cette section en rappelant la définition d'un bimodule $C(X)$-nucléaire (cf.[15],[12],[3]) et celle du bifoncteur KK_G^{nuc} pour un groupoïde G localement compact. Toutes les propriétés de ce bifoncteur étudiées dans ([15],[12]) se généralisent facilement à ce cadre.

DÉFINITION 3.1 *([15],[3]). — Soient X un espace localement compact, A et B des C^*-algèbres avec une structure de $C(X)$-module. Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ une application complètement positive $C(X)$-linéaire.*

1) On dit que φ est $C(X)$-factorisable si elle admet une factorisation $\varphi = \sigma \circ \tau$ où $\tau : A \longrightarrow M_n(C(X))$ et $\sigma : M_n(C(X)) \longrightarrow B$ sont des applications complètement positives.

2) On dit que φ est (normiquement) $C(X)$- nucléaire, si φ est limite pour la topologie simple normique d'applications complètement positives $C(X)$-factorisables.

3) Si $B = M(J)$ est l'algèbre des multiplicateurs d'une C^*-algèbre J, alors φ est dite strictement $C(X)$-nucléaire si elle est limite pour la topologie simple stricte d'applications complètement positives $C(X)$-factorisables.

On suppose désormais que A et B sont des $C(X)$-algèbres [10]. Rappelons que pour tout C^*-module hilbertien $\mathcal{E}$, on a: $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = M(\mathcal{K}(\mathcal{E}))$ [9]. On dit qu'un A, B-bimodule hilbertien $\mathcal{E}$ est $C(X)$-nucléaire si l'action $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est strictement $C(X)$-nucléaire ([15], [3]).

Un A, B-bimodule hilbertien $\mathcal{E}$ est $C(X)$-nucléaire si, et seulement si, pour tout $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ dans $\mathcal{E}$ l'application: $a \mapsto \langle \xi_i, \pi(a)\xi_j \rangle$ de A dans $M_n(B)$ est (normiquement) $C(X)$-nucléaire . Par conséquent un sous-A, B-bimodule $\mathcal{E}'$ d'un A, B-bimodule $C(X)$-nucléaire $\mathcal{E}$ est aussi $C(X)$-nucléaire.

Si J est un idéal bilatère de B et si $\varphi : A \longrightarrow M(B/J)$ est une application contractante strictement $C(X)$-nucléaire, il existe $\varphi' : A \longrightarrow M(B)$ une application contractante strictement $C(X)$-nucléaire telle que $\varphi = q \circ \varphi'$ où $q : M(B) \longrightarrow M(B/J)$ est l'application quotient [3]. Notons aussi que pour $\mathcal{E}_1$ un A, B-bimodule hilbertien et $\mathcal{E}_2$ un B, D-module hilbertien, si $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$ est $C(X)$-nucléaire, le A, D-bimodule $\mathcal{E}_1 \otimes_B \mathcal{E}_2$ est aussi $C(X)$-nucléaire [3].

On dit qu'un A, B-bimodule hilbertien $Z/2Z$-gradué est $C(X)$-nucléaire si le A, B-bimodule trivialement gradué sous-jacent est $C(X)$-nucléaire.

Si A ou B est $C(X)$-nucléaire (i.e. id_A ou id_B est $C(X)$-nucléaire) , alors tout A, B-bimodule est $C(X)$-nucléaire.

La somme directe de deux A, B-bimodules $C(X)$-nucléaires est un A, B-bimodule $C(X)$-nucléaire.

3.1. Le groupe $KK_G^{nuc}(A,B)$.

Soit G un groupoïde localement compact(séparé et séparable) de base X et soient A et B deux G-algèbres ($Z/2Z$-graduées).

DÉFINITION 3.2. — *1) On note $E_G^{nuc}(A,B)$ l'ensemble des A,B-bimodules de Kasparov $(\mathcal{E},F)$ avec $\mathcal{E}$ dénombrablement engendré et $C(X)$-nucléaire.*

2) $D_G^{nuc}(A,B) = E_G^{nuc}(A,B) \cap D_G(A,B)$.

3) Une homotopie est un élément de $E_G^{nuc}(A,B[0,1])$.

4) On note $KK_G^{nuc}(A,B)$ le groupe des classes d'homotopie d'éléments de $E_G^{nuc}(A,B)$.

Si A ou B est $C(X)$-nucléaire, alors $KK_G^{nuc}(A,B)$ est égal à $KK_G(A,B)$. Une G-algèbre A est $C(X)$-nucléaire en K-théorie équivariante si l'élément $1_A \in KK_G(A,A)$ est représenté par un A,A-bimodule de Kasparov $C(X)$-nucléaire. Si A est $C(X)$-nucléaire en K-théorie équivariante, alors pour toute G-algèbre B, on a $KK_G^{nuc}(A,B) = KK_G(A,B)$ et $KK_G^{nuc}(B,A) = KK_G(B,A)$.

Comme dans le cas d'un groupe nous avons:

THÉORÈME 3.3. — *Soient G un groupoïde localement compact, muni d'un système de Haar, fortement K-moyennable et $0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} B/J \longrightarrow 0$ une suite exacte G-équivariante de G-algèbres. Pour toute G-algèbre séparable A, on a la suite exacte hexagonale suivante:*

$$\begin{array}{ccccc}
KK_G^{nuc}(A,J) & \xrightarrow{j_*} & KK_G^{nuc}(A,B) & \xrightarrow{q_*} & KK_G^{nuc}(A,B/J) \\
\delta \downarrow & & & & \downarrow \delta \\
KK_G^{1,nuc}(A,B/J) & \xleftarrow{q_*} & KK_G^{1,nuc}(A,B) & \xleftarrow{j_*} & KK_G^{1,nuc}(A,J)
\end{array}$$

THÉORÈME 3.4. — *Soit G un groupoïde localement compact, muni d'un système de Haar, fortement K-moyennable. Soit $0 \to J \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} B/J \to 0$ une suite exacte G-équivariante de G-algèbres telle que q admette un relèvement complètement positif $C(X)$-linéaire (non nécessairement équivariant) de norme 1.*

a) Si A est séparable, on a la suite exacte hexagonale:

$$\begin{array}{ccccc}
KK_G(A,J) & \xrightarrow{j_*} & KK_G(A,B) & \xrightarrow{q_*} & KK_G(A,B/J) \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
KK^1_G(A,B/J) & \xleftarrow{q_*} & KK^1_G(A,B) & \xleftarrow{j_*} & KK^1_G(A,J)
\end{array}$$

b) Si B est séparable, alors pour toute G-algèbre A, on a la suite exacte:

$$\begin{array}{ccccc}
KK_G(B/J,A) & \xrightarrow{q^*} & KK_G(B,A) & \xrightarrow{j^*} & KK_G(J,A) \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
KK^1_G(J,A) & \xleftarrow{j^*} & KK^1_G(B,A) & \xleftarrow{q^*} & KK^1_G(B/J,A)
\end{array}$$

En utilisant les suites exactes de Puppe ([2], [6], [12], [17]) les théorèmes deviennent un corollaire du lemme suivant.

LEMME 3.5. — *1) Sous les hypothèses a) théorème (3.4), on a la suite exacte*

$$KK_G(A,J)\xrightarrow{j_*}KK_G(A,B)\xrightarrow{q_*}KK_G(A,B/J).$$

2) Sous les hypothèses du théorème (3.3), on a la suite exacte suivante:

$$KK_G^{nuc}(A,J)\xrightarrow{j_*}KK_G^{nuc}(A,B)\xrightarrow{q_*}KK_G^{nuc}(A,B/J).$$

Tous les lemmes intermédiaires ayant servi à la démonstration de ce lemme dans le cas d'un groupe se généralisent sans aucune difficulté à ce cadre. Nous les rappelons en donnant des esquisses des démonstrations. Pour plus de detail voir ([14],[12],[16],[17]).

LEMME 3.6. — *Soit $(\mathcal{E},F)$ un élément de $E_G(A,B)$ tel que $q_*(\mathcal{E},F)\in D_G(A,B/J)$. Il existe alors $(\mathcal{E}',F')\in E_G(A,J)$ tel que $j_*(\mathcal{E}',F')=(\mathcal{E},F)$*

dans $KK_G(A,B)$. *Si de plus* $\mathcal{E}$ *est* $C(X)$*-nucléaire, alors* $(\mathcal{E}',F')$ *l'est et l'égalité précédente a lieu dans* $KK_G^{nuc}(A,B)$.

Démonstration. — Si on pose $\mathcal{E}' = \{\xi \in \mathcal{E}/\langle\xi,\xi\rangle \in J\}$ et $\tilde{\mathcal{E}} = \{\xi \in \mathcal{E}[0,1]/\xi(1) \in \mathcal{E}'\}$. Alors $(\tilde{\mathcal{E}}, F\otimes 1)$ définit une homotopie entre $(\mathcal{E},F)$ et $(\mathcal{E}',F') \in j_*(E_G(A,J))$.

Si de plus $\mathcal{E}$ est $C(X)$- nucléaire, alors $\mathcal{E}'$ et $\tilde{\mathcal{E}}$ sont aussi $C(X)$-nucléaires ([12] proposition 3.4).

Dans la suite, on notera $ax = \pi(a)x$ et V l'unitaire représentant l'action du groupoïde G. Pour le reste de la notation voir([14],[12],[17],[7]).

LEMME 3.7. — *Soit* $(\mathcal{E},\pi)$ *un* A,B*-bimodule équivariant. On pose*

$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{E})/[a,x] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\ \forall a \in A$ *et* $a'(V(s^*x)V^* - r^*x) \in r^*\mathcal{K}(\mathcal{E}),\ \forall a' \in r^*A\}$

$\mathcal{A}' = \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_q B/J)/[a,x] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}\otimes_q B/J)\ \forall a \in A$ *et* $a'(V(s^*x)V^* - r^*x) \in r^*\mathcal{K}(\mathcal{E}\otimes_q B/J),\ \ \forall a' \in r^*A\}$

$\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{A}/\ \ xa \in \mathcal{K}(\mathcal{E}),\ \ \forall a \in A\}$

$\mathcal{G}' = \{x \in \mathcal{A}'/\ \ xa \in \mathcal{K}(\mathcal{E}\otimes_q B/J),\ \ \forall a \in A\}$

$\mathcal{D} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{D}' = \mathcal{A}'/\mathcal{G}'$.

Alors l'homomorphisme $q_* : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_B B/J)$ $(q_*(x) = x\otimes 1)$ *induit un homomorphisme surjectif de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{D}'$.

Démonstration. — La démonstration de Baaj et Skandalis ([2] lemme 7.4) dans le cas d'un groupe quantique s'adapte facilement (en utilisant le lemme technique de Kasparov dans le cas d'un groupoïde [7]) en remplaçant $E_1\otimes S$ par r^*E_1, $V(x\otimes_{\delta_B}1)V^*$ par $V(s^*x)V^*$, $M(E_1\otimes S)$ par $E_1\otimes_r C_b(G)$ et $M(\tilde{M}(E_1\otimes S); E\otimes S)$ par $M(E_1;E)\otimes_r C_b(G)$ etc....

LEMME 3.8. — *Soient* $(\mathcal{E},F) \in E_G(A,B)$ *et* $(F_t)_{t\in[0,1]}$ *une homotopie opératorielle telle que:*

$$F_t \in \mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_B B/J), (\mathcal{E}\otimes_B B/J, F_t) \in E_G(A,B/J) \ \text{ et } \ F\otimes 1 = F_0.$$

Alors il existe une homotopie opératorielle S_t *avec* $(\mathcal{E},S_t) \in E_G(A,B)$, $S_0 = F$ *et* $S_t\otimes 1 - F_t \in \mathcal{K}(\mathcal{E}\otimes_B B/J)$.

Démonstration. — Soient $\varrho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $\varrho' : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ les applications canoniques (lemme 3.7). On a $F \in \mathcal{A}$ et $F_t \in \mathcal{A}'$. On pose $f = \varrho(F)$ et

$f_t = \varrho'(F_t)$. Il existe (voir [14], [12]) $(s_t)_{t\in[0,1]}$ dans $\mathcal{D}$ telle que:

$$q_*(s_t) = f_t, s_t^2 = 1, s_t = s_t^*, V(s_t \otimes 1)V^* = r^* s_t, \partial s_t = 1, s_0 = f.$$

Soit $(S_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin continu dans $\mathcal{A}$ tel que $\varrho(S_t) = s_t$ et $S_0 = F$. Par définition de q, on a $S_t \otimes 1 - F_t \in \mathcal{K}(\mathcal{E} \otimes_B B/J)$.

Soient A, B deux C^*-algèbres, $\mathcal{E}$ un B-module hilbertien et $\varphi : \tilde{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ une application complètement positive avec $\varphi(1) = 1$. Généralisant un théorème de Stinespring, Kasparov a construit un B-module hilbertien $\tilde{\mathcal{E}}$, une isométrie $W \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ et un $*$-homomorphisme $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}})$ avec $\varphi(a) = W^*\pi(a)W$. Rappelons que $\tilde{\mathcal{E}}$ est le séparé complété du produit tensoriel algébrique $A \otimes_{alg} \mathcal{E}$ pour le produit scalaire:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i, \sum_{j=1}^{m} a_j \otimes x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle x_i, \varphi(a_i^* a_j) x_j \rangle$$

l'homomorphisme π est donné par multiplication à gauche et $W\xi = 1 \otimes \xi$. Si φ est un $*$-homomorphisme alors $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{A} \otimes_{\tilde{A}} \mathcal{E} = \mathcal{E}$.

Si l'application φ ci-dessus est strictement $C(X)$- nucléaire, alors il en est de même pour π ([3] proposition 4.4).

Remarque. — Si φ est le relèvement d'un homomorphisme $\varphi' : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_q B/J)$ i.e. $\varphi' = \varphi \otimes 1$, alors grâce à l'associativité du produit tensoriel interne, on a $q \circ \pi = \pi \otimes 1 = \varphi'$.

LEMME 3.9. — *Soit G un groupoïde localement compact de base X et muni d'un système de Haar λ. Soient A une G-algèbre, $\mathcal{E}$ un B-module hilbertien G-équivariant et $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ une application complètement positive $C(X)$-linéaire. Alors, l'application: $\overline{\pi}$ de A dans $\mathcal{L}(L^2(G, \mathcal{E}))$ donnée par: $\overline{\pi}(a)f(\gamma') = \tilde{V}_{\gamma'}(\pi_{s(\gamma')}(\alpha_{\gamma'^{-1}} a_{r(\gamma')}))f(\gamma')$ est complètement positive, $C(X)$-linéaire et équivariante où $\tilde{V}_\gamma : \mathcal{L}(\mathcal{E}_{s(\gamma)}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{r(\gamma)})$ est tel que: $\tilde{V}_\gamma(T)(\xi) = V_\gamma(T(V_\gamma^* \xi))$ et V est l'unitaire associé à l'action de G sur $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — Il est facile de voir que $\overline{\pi}$ est continue, complètement positive et $C(X)$-linéaire. Vérifions alors l'équivariance. Rappelons que l'action de G sur $L^2(G, \mathcal{E})$ est donnée par: $V'_\gamma(f)(\gamma') = V_\gamma(f(\gamma^{-1}\gamma'))$. Pour tous $\gamma \in G$ et $a \in A_{s(\gamma)}$, on a:

$$
\begin{aligned}
[[V'_\gamma \overline{\pi}_{s(\gamma)}(a) V'^*_\gamma] f](\gamma') &= V'_\gamma[\overline{\pi}_{s(\gamma)}(a)(V'^*_\gamma(f))](\gamma') \\
&= V_\gamma[[\overline{\pi}_{s(\gamma)}(a)(V'^*_\gamma(f))](\gamma^{-1}\gamma')] \\
&= V_\gamma[[\tilde{V}^*_\gamma \tilde{V}_{\gamma'}(\pi_{s(\gamma')}(\alpha_{\gamma'^{-1}\gamma}a))](V^*_\gamma(f(\gamma')))] \\
&= V_\gamma[[V^*_\gamma V_{\gamma'}(\pi_{s(\gamma')}(\alpha_{\gamma'^{-1}\gamma}a))V^*_\gamma V_\gamma](V^*_\gamma(f(\gamma')))] \\
&= V_{\gamma'}[\pi_{s(\gamma')}(\alpha_{\gamma'^{-1}\gamma}a)(V^*_{\gamma'}(f(\gamma')))] \\
&= [\tilde{V}_{\gamma'}(\pi_{s(\gamma')}(\alpha_{\gamma'^{-1}\gamma}a))](f)(\gamma') \\
&= [\overline{\pi}_{r(\gamma)}(\alpha_\gamma a))f](\gamma').
\end{aligned}
$$

Si de plus π est une limite pour la topologie simple stricte d'applications $C(X)$-factorisables π_k, alors $\overline{\pi}_k$ converge pour la topologie simple stricte vers $\overline{\pi}$ car l'action de G dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = M(\mathcal{K}(\mathcal{E}))$ est continue pour la topologie stricte.

Soit $H' = l^2(I\!N) \oplus l^2(I\!N)$ et $\varepsilon \in \mathcal{L}(H')$ tel que $\partial\varepsilon = 1,\ \ \varepsilon = \varepsilon^*,\ \ \varepsilon^2 = 1$. Soient $\mathcal{C}_1 = \mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C} \subseteq \mathcal{L}(H')$ la première algèbre de Clifford et $\mathcal{H}_G = L^2(G) \otimes H'$.

LEMME 3.10. — *Soit $(\mathcal{E}, F)$ un élément de $D^{nuc}_G(A, B/J)$. Il existe alors $(\mathcal{E}', F') \in D^{nuc}_G(A, B)$ tel que $q_*(\mathcal{E}', F') = (\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}, 1 \otimes F)$.*

Démonstration. — Soit $\varphi : A \otimes \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{B/J})$ l'$*$-homomorphisme équivariant strictement $C(X)$-nucléaire associé à $(\mathcal{E}, F) \in D^{nuc}_G(A, B/J)$ ($\varphi(a\otimes(\mu+\lambda\varepsilon) = a(\mu+\lambda F)$). Prolongeons φ à $\tilde{A}\otimes\mathcal{C}_1$ en posant $\varphi(1) = 1$. On obtient donc un $*$-homomorphisme unital strictement $C(X)$-nucléaire de $\tilde{A}\otimes \mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{B/J})$ qu'on notera encore φ. Il existe $\psi : \tilde{A}\otimes\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ une application complètement positive strictement $C(X)$-nucléaire qui relève φ. Soit $\tilde{\psi}$ l'homomorphisme strictement $C(X)$-nucléaire associé à ψ par le lemme (3.8). Identifions $\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{H}_B$ à $L^2(G, \mathcal{H}_B)$. L'homomorphisme

$$\overline{\psi} : \tilde{A} \otimes \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{H}_B)$$

donné par:

$$\overline{\psi}(a)f(\gamma') = \tilde{V}_{\gamma'}(\tilde{\psi}_{s(\gamma')}(\alpha_{\gamma'^{-1}} a_{r(\gamma')}))f(\gamma')$$

définit un relèvement équivariant strictement $C(X)$-nucléaire de $1 \otimes \varphi$ (lemmes 3.8 et 3.9). L'élément $(\mathcal{E}', F')$ cherché est donné par la restriction de $\overline{\psi}$ à $A \otimes \mathcal{C}_1$.

LEMME 3.11. — *Soit $0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} B/J \longrightarrow 0$ une suite exacte de G-algèbres telle que q admette un relèvement complètement positif. Soient A*

une G-algèbre séparable et $(\mathcal{E}, F)$ un élément de $D_G(A, B/J)$. On pose $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}$ et $\tilde{F} = 1 \otimes F$. Il existe alors $(\mathcal{E}', F') \in D_G(A, B)$ tel que $q_*(\mathcal{E}', F') = (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F})$.

Démonstration. — Par le théorème 3 [9], il existe un B-module hilbertien $\mathcal{E}_0$ et un $*$-homomorphisme $\pi : B/J \longrightarrow \mathcal{L}(B \oplus \mathcal{E}_0)$ tels que $Q\pi(b)Q = s(b)$, pour tout $b \in B$ où $Q : B \oplus \mathcal{E}_0 \longrightarrow B$ est la projection naturelle et s est le relèvement de q. Notons $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} (B \oplus \mathcal{E}_0)$ et $\overline{\pi} : B/J \longrightarrow \mathcal{L}(\overline{\mathcal{E}})$ l'application donnée par $\overline{\pi}(a)f(\gamma') = \tilde{V}_{\gamma'}(\pi_{s(\gamma')}(\alpha_{\gamma'^{-1}} a_{r(\gamma')}))f(\gamma')$. Alors $\overline{\pi}$ est un $*$-homomorphisme équivariant (lemme 3.9). Posons $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes_{B/J} \overline{\mathcal{E}}$ et $F' = F \otimes 1$. On vérifie facilement que $(\mathcal{E}', F')$ est un élément de $D_G(A, B)$ et $q_*(\mathcal{E}', F') = (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F})$.

Démonstration du lemme (3.5).

– Il est évident que $q_* \circ j_* = 0$ dans chacune des deux suites 1) et 2).

– Montrons pour les deux suites 1) et 2) que $\mathrm{Ker} q_* \subset \mathrm{im} j_*$.

Soit $(\mathcal{E}, F) \in E_G(A, B)$ (resp.$\in E_G^{nuc}(A, B)$) tel que $q_*(\mathcal{E}, F) = (0, 0)$ dans $KK_G(A, B/J)$ (resp. $KK_G^{nuc}(A, B/J)$). Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_G)^{(1)}$ un opérateur définissant la forte en K-moyennnabilité de G. Rappelons que $(\mathcal{H}_G, T) = 1$ dans $KK_G(C(X), C(X))$. Soit $\tilde{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un produit de Kasparov de $(\mathcal{H}_G, T)$ par $(\mathcal{E}, F)$. Il existe donc $(\mathcal{E}_0, F_0)$ et $(\mathcal{E}_1, F_1)$ deux éléments de $D_G(A, B/J)$ (resp. de $D_G^{nuc}(A, B/J)$) tels que $q_*(\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}, \tilde{F}) \oplus (\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_0, 1 \otimes F_0)$ soit opératoriellement homotope à $(\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_1, 1 \otimes F_1)$. D'après le lemme (3.11) (resp. lemme (3.10)), il existe $(\mathcal{E}_0', F_0') \in D_G(A, B)$ (resp. $\in D_G^{nuc}(A, B)$) tel que $q_*(\mathcal{E}_0', F_0') = (\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_0, 1 \otimes F_0)$. Donc

$$q_*((\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}_0', \tilde{F} \oplus F_0')) \text{ et } (\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_1, 1 \otimes F_1)$$

sont opératoriellement homotopes.

Notons par $(S_t)_{t \in [0.1]}$ cette homotopie opératorielle. Il existe d'après le lemme (3.8) une homotopie opératorielle $(G_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $(\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}_0', G_t) \in E_G(A, B)$ (resp. $\in E_G^{nuc}(A, B)$), $G_0 = \tilde{F} \oplus F_0'$ et $G_1 \otimes 1 = 1 \otimes F_1$. L'élément $(\mathcal{H}_G \otimes \mathcal{E}_1, 1 \otimes F_1)$ est dégénéré. D'après le lemme (3.6), la classe de $(\mathcal{H}_G \otimes \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}_0', G_1)$ dans $KK_G(A, B)$ (resp. dans $KK_G^{nuc}(A, B)$) est dans l'image de j_*. Comme $(\mathcal{H}_G, T)$ est de classe 1 dans $KK_G(C(X), C(X))$ et que la classe de $(\mathcal{E}, F)$ dans $KK_G(A, B)$ (resp. dans $KK_G^{nuc}(A, B)$) ne change pas par addition d'un élément dégénéré, le lemme (3.5) est donc démontré.

Remarques. — 1) La moyennabilité forte en K-théorie est utilisée à deux reprises dans la démonstration du lemme (3.5):

- D'abord dans le choix de $\mathcal{H}_G$; ceci nous permet de remplacer $(\mathcal{E}_0, F_0)$ par $(\mathcal{H}_G \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_0, 1 \otimes F_0)$ qui est relevable en un élément de $D_G(A, B)$ (resp. de $D_G^{nuc}(A, B)$).

- D'autre part, parce que $(\mathcal{H}_G, T) = 1$ dans $KK_G(C(X), C(X))$, le produit de Kasparov de $(\mathcal{E}, F)$ par $(\mathcal{H}_G, T)$ définit le même élément que $(\mathcal{E}, F)$ dans $KK_G(A, B)$ (resp. dans $KK_G^{nuc}(A, B)$).

2) Le théorème 3.4 a été établi dans [16] mais dans le cas où il existe un G-espace propre Z tel que B/J soit une $Z \times G$-algèbre.

Bibliographie

[1] ANANTHARAMAN-DELAROCHE (C.) et RENAULT (J.), 1998. — Preprint Université d'Orléans.

[2] BAAJ (S.) et SKANDALIS (G.), 1989. — C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante, K-theory. 2, p. 683–721.

[3] BAUVAL (A.), 1998. — $RKK(X)$-nucléarité (D'après G. Skandalis), K-théory. 13, p 23-40.

[4] DIXMIER (J.), 1969. — Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars Paris.

[5] CUNTZ (J.), 1983. — K-theoretic amenability for discrete groups. J. Reine Angew. Math. 344, p. 180-195.

[6] CUNTZ (J.) et SKANDALIS (G.), 1986. — Mapping cones and exact sequences in KK-theory, J. Operator Theory. 15, p. 163-180.

[7] LE GALL (P-Y.), 1999. — Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes, K-theory. 16, p/ 361-390.

[8] JULG (P.) et VALETTE (A.), 1984. — K-theoretic amenability for $SL_2(\mathbb{Q})$, and the action on the associated tree, J. Funct. Anal. 58, p194-215.

[9] KASPAROV (G. G.) 1980. — Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu, J. Operator Theory. 4, p. 133–150.

[10] KASPAROV (G.G.), 1988. — Equivariant KK-theory and the novikov conjecture. Invent. math. 91, p. 147-201.

[11] KASPAROV (G.G.) et SKANDALIS (G.). — groups acting properly on " bolic " spaces and the Novikov conjecture, à paraître.

[12] MAGHFOUL (M.), 1999. — Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov équivariant. K-theory. 16 p. 1-32

[13] RENAULT (J.N.), 1980. — A groupoid approach to C^*-algebras. Springer Lecture Note in Math. 793.

[14] SKANDALIS (G.), 1985. — Exact sequences for the Kasparov groups of graded algebras, Canadian J. Math. 37, p. 293-216.

[15] SKANDALIS (G.), 1988. — Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz). K-theory. 1, p. 549-573.

[16] TU (J.-L.), 1999. — La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables, K-theory. 17, p 215-264.

[17] TU (J.-L.), 1996. — La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques, Thèse de Doctorat, Université Paris VII.