ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GEORGES GREKOS

LABIB HADDAD

Densités, moyennes et ensemble représentatif : unification du cas discret et du cas continu

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 10, nº 1 (2001), p. 35-68

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_1_35_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n° 1, 2001
pp. 35–68

Densités, moyennes et ensemble représentatif : unification du cas discret et du cas continu (*)

GEORGES GREKOS [1] ET LABIB HADDAD [2]

RÉSUMÉ. — Soit T une partie non bornée de $\mathbf{R}_+$ avec 0 appartenant à T. A chaque fonction croissante $f : T \to \mathbf{R}_+$ nous associons le couple $r(f) = (s(f), i(f))$ où $s(f) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t}$ et $i(f) = \liminf_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t}$ appartiennent à $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Nous décrivons l'ensemble

$$R(f) = \{r(g)\ ;\ g : T \to \mathbf{R},\ g \text{ et } f - g \text{ croissantes}\}.$$

Ce travail unifie et prolonge des résultats obtenus sur les densités des parties de $\mathbf{N}$, d'une part, et les limites des moyennes des fonctions positives, d'autre part.

ABSTRACT. — Let T be a non bounded subset of $\mathbf{R}_+$, containing 0. Let $\mathcal{C}$ denote the set of all increasing functions $f : T \to \mathbf{R}_+$ such that $f(0) = 0$. We call **representative point** of a function f in $\mathcal{C}$, the ordered pair

$$r(f) = (s(f), i(f)) \in \overline{\mathbf{R}}_+ \times \overline{\mathbf{R}}_+$$

where

$$s(f) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} \quad \text{and} \quad i(f) = \liminf_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t}.$$

Given two real functions g and f, defined on T, we say that g is **subordinated to** f if and only if the function $f - g$ is increasing. In this paper

(*) Reçu le 21 février 2000, accepté le 18 avril 2001

(1) Université Jean Monnet (Saint-Etienne), Mathématiques, 23 rue du Dr. Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne cedex 2, France.
e-mail: grekos@univ-st-etienne.fr
(2) Résidence d'Orgenson, 120 rue de Charonne, 75011 Paris, France.
e-mail: labib.haddad@wanadoo.fr
Adresse pour correspondance :
G. GREKOS, Mathématiques, 23 rue du Dr. Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne cedex 2.
e-mail: grekos@univ-st-etienne.fr
Télécopie : 04 77 25 18 17

we study the **representative set** of a function f belonging to $\mathcal{C}$. This set is defined as

$$R(f) = \{r(g) : g \in \mathcal{C} \text{ and } g \text{ is subordinated to } f\}.$$

The finite points of $R(f)$, that is all points $r(g)$ such that $s(g) < +\infty$, form a closed convex region of $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ containing (0,0) and lying below the straight line $y = x$. If $s(f) < +\infty$, then $R(f)$ has the form of what we call a **stop-block** (in French: taquet), having $r(f)$ as extremal point. [See figures 1 or 3.] Here are some directions of the present work.

(I) We develop a general context, special cases of which are the following two cases already studied by the first named author.

(1) $T = \mathbf{N}$ and all functions $f : T \to \mathbf{N}$ are **counting functions** of subsets of $\mathbf{N}$:

$$f(n) = f_A(n) = \text{Card } A \cap [0, n].$$

(2) $T = \mathbf{R}_+$ and all functions are absolutely continuous, that is, indefinite integrals of positive functions:

$$f(x) = \int_0^x a(t)\ dt.$$

(II) We study $R(f)$ when $s(f) = +\infty$ and $i(f)$ is finite or when both $i(f)$ and $s(f)$ equal $+\infty$.

(III) The inverse theorem (saying that, given a convex set B as described above, there is a function f in $\mathcal{C}$ such that $R(f) = B$) was already proved in the two mentioned special cases. Here this theorem is proved in the new more general context and, moreover, the proof is completely recast. Emphasis is on geometric ideas. Thus the drawing of a function f such that $R(f) = B$, is a succession of homothetics of drawings of a function defined geometrically by using the tangents of the upper boundary of B.

0. Introduction

Ce travail unifie et prolonge des résultats obtenus dans une série d'articles, concernant les densités des parties de $\mathbf{N}$, d'une part, et les limites des moyennes des fonctions positives, d'autre part.

La densité d'une partie de $\mathbf{N}$ est une notion utilisée souvent aussi bien en Théorie des Nombres [HR], qu'en Analyse [M, P] ou en Combinatoire. La densité possède certaines propriétés d'une mesure, mais elle n'est pas σ-additive. Il existe plusieurs types de densités [FGi]. Considérons, par exemple, la densité usuelle, dite "densité asymptotique". Pour $A \subset \mathbf{N}$, on définit sa densité supérieure

$$\bar{d}A \;=\; \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \text{ Card } A \cap [1, n]$$

et sa densité inférieure

$$\underline{d}A \;=\; \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \text{ Card } A\cap[1,n] \;.$$

Ceci fournit un point $D(A) = (\bar{d}A\ ,\ \underline{d}A)$ de $[0,1]^2$. Le premier auteur [Gr1] a étudié, pour un ensemble A fixé, l'ensemble $R(A) = \{D(B);\ B\subset A\}$ et il a démontré que $R(A)$ est convexe et fermé et a la forme particulière d'un "taquet" (cf. section **1.2** ou figure 1) accroché au point $D(A)$.

Signalons, au passage, que d'autres aspects des ensembles $R(A)$ ont été abordés. Dans [DGr], on retrouve des ensembles du même type en considérant les densités des indices des sous-suites équiréparties modulo 1 d'une suite réelle (u_n). Dans [GrV] on étudie, entre autres, la pente de la partie supérieure de la frontière de $R(A)$ à l'origine.

La définition donnée ci-dessus de la densité, revient à considérer les limites supérieure et inférieure de

$$\frac{1}{x}\int_1^x a(t)\ dt\ ,$$

où a est la fonction caractéristique de A définie de la façon suivante: Pour t réel, $t\geqslant 1$, on pose

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ [t]\in A\ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette observation a conduit le premier auteur à étudier [Gr2] la situation analogue pour les moyennes des fonctions a réelles positives bornées. Si a est fixée et b parcourt toutes les fonctions positives majorées par a, alors les couples

$$\left(\limsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x b(t)\ dt\ ,\ \liminf_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x b(t)\ dt\right)$$

des moyennes limites des fonctions b forment un ensemble du même type que l'ensemble $R(A)$.

Dans ce travail:

1) Nous développons un contexte général dont des cas particuliers sont les cas déjà étudiés. Cela consiste à remplacer les fonctions $x\mapsto\int_1^x a(t)\ dt$ par des fonctions croissantes, définies sur une partie fixée de $\mathbf{R}_+$.

2) Nous étudions les cas où la limite supérieure ou les deux limites, inférieure et supérieure, sont infinies.

3) Nous avons complétement refondu la preuve du théorème réciproque en mettant en évidence les transformations de nature géométrique qui y interviennent.

Voici un bref aperçu de la composition de l'article.

1. Définitions et résultats.

1.1. Cadre et notations.

Dans toute la suite, on désigne par T une partie non bornée de $\mathbf{R}_+$ et par $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T)$ l'ensemble des fonctions réelles $f : T \to \mathbf{R}$.

Pour chacune des fonctions $f : T \to \mathbf{R}$, on pose

$$i(f) = \liminf_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} \quad \text{et} \quad s(f) = \limsup_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t}.$$

On posera aussi $r(f) = (s(f), i(f))$: c'est un point du plan réel achevé $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$. On l'appellera **le point représentatif** de f.

Etant données f et g dans $\mathcal{F}$, on dira que g est **subordonnée** à f, et on écrira g sub f, lorsque la différence $f - g$ est une fonction **croissante**, autrement dit, lorsque:

pour tous $x \leqslant y$ dans T, on a $g(y) - g(x) \leqslant f(y) - f(x)$ (ce qu'on pourra écrire symboliquement $\Delta g \leqslant \Delta f$).

Cette subordination est une relation de **préordre** sur l'ensemble $\mathcal{F}$. La relation d'**équivalence** associée est donc (g sub f et f sub g) et revient à dire que la différence $f - g$ est **constante**. Dans ce cas on aura $r(f) = r(g)$.

En effet, lorsque l'on a g sub f, on aura $i(g) \leqslant i(f)$ et $s(g) \leqslant s(f)$ car alors, pour x fixé et $y \geqslant x$, on a $g(y) \leqslant f(y) + (g(x) - f(x))$; il suffit ensuite de laisser y tendre vers l'infini.

Supposons dorénavant que $0 \in T$ et posons

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(T) = \{f \in \mathcal{F} \, : f \text{ croissante} \quad \text{et} \quad f(0) = 0\}.$$

Puis, pour chaque $f \in \mathcal{C}$, posons

$$S(f) = \{g \in \mathcal{C} : g \text{ sub } f\}$$
$$R(f) = \{r(g) : g \in S(f)\}.$$

Ce dernier ensemble est une partie du premier quadrant $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \overline{\mathbf{R}}_+$ du plan réel achevé: on dira que $R(f)$ est l'**ensemble représentatif** de f.

Le propos dans [Gr1] et [Gr2] consistait à caractériser ces ensembles représentatifs $R(f)$ dans *deux cas particuliers*, du moins lorsqu'on suppose que $s(f)$ est *fini*.

On reviendra, plus loin, sur ces deux cas particuliers :

– le premier est celui où f est la *fonction de comptage* associée à une partie A de $\mathbf{N}$

$$f(n) = \text{ Card } \{m \in A : m < n\};$$

– le second est celui où f est croissante et *absolument continue* sur les intervalles bornés.

Dans le premier cas, on a $T = \mathbf{N}$; dans le second $T = \mathbf{R}_+$.

1.2. Une définition : les taquets.

Etant donnés deux nombres *réels* $a \geqslant b \geqslant 0$, considérons les quatre points suivants du plan réel :

$$O = (0,0) \quad A = (a,0) \quad B = (a,b) \quad C = (b,b).$$

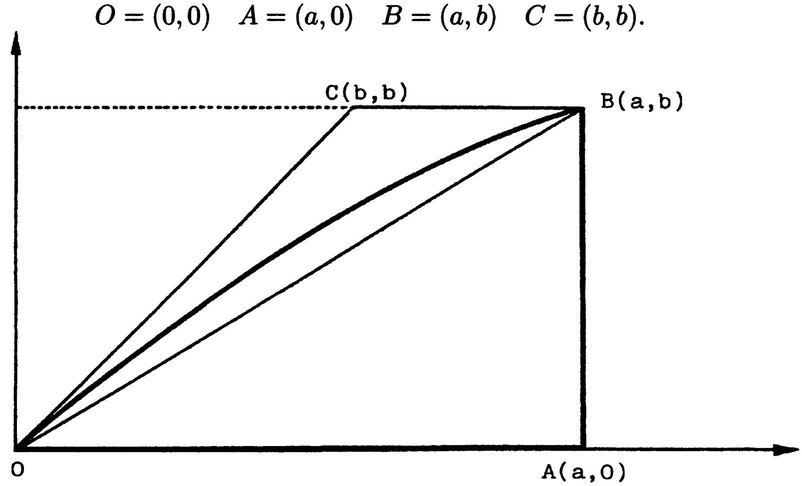

Figure 1

On appellera **taquet fixé au point** (a, b) tout ensemble *convexe fermé* du plan, contenant le *triangle* OAB et contenu dans le *trapèze* $OABC$.

Ainsi le plus petit des taquets fixés en (a, b) est le triangle OAB lui-même, le plus grand étant le trapèze $OABC$.

Un taquet est entièrement déterminé par l'arc $\overset{\frown}{OB}$ qui le limite par le haut, autrement dit par la donnée de la fonction *concave*

$$p : [0, a] \to [0, b]$$

dont le graphe est, précisément, l'arc $\overset{\frown}{OB}$ et que l'on pourra appeler le **profil** du taquet.

Soulignons le fait qu'un taquet est une partie du plan réel $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, convexe et compacte; hormis les cas où $b = 0$, un taquet est donc un *corps convexe.*

1.3. Brève description des résultats.

Dans les deux cas déjà considérés [Gr1, Gr2] on démontre en substance que les ensembles représentatifs $R(f)$ sont précisément les taquets.

On va étendre ces résultats au cas général. On montrera ainsi que, pour $f : T \to \mathbf{R}$ croissante et $f(0) = 0$, $i(f) = b$ et $s(f) = a < +\infty$, l'ensemble représentatif $R(f)$ est un taquet fixé au point (a, b).

Réciproquement, tout taquet est l'ensemble représentatif d'au moins une fonction croissante $f : T \to \mathbf{R}$ avec, au choix, $T = \mathbf{N}$ ou $T = \mathbf{R}_+$ ou autre.

Le cas particulier où $s(f) = +\infty$ donnera lieu à un traitement séparé car il présente des phénomènes inattendus qui seront illustrés par des exemples et contre-exemples.

Pour établir ces résultats, on aura besoin de quelques préliminaires.

2. Le théorème direct.

2.1. Premières remarques simples.

1) Soient f et g dans $\mathcal{C}$ avec g sub f. Alors $0 \leqslant i(g) \leqslant s(g) \leqslant s(f)$ et $i(g) \leqslant i(f)$. L'ensemble $R(f)$ est donc contenu dans l'intersection des quatre "demi-plans fermés" suivants du plan achevé $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$:

$$y \geqslant 0, \quad y \leqslant x, \quad x \leqslant s(f) = a, \quad y \leqslant i(f) = b.$$

Lorsque a est fini, l'intersection des quatre demi-plans n'est autre que le trapèze $OABC$.

2) Soient f et g dans $\mathcal{C}$ avec g sub f. Pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, on a encore $\lambda g \in \mathcal{C}$ et λg sub f et $r(\lambda g) = \lambda\, r(g)$ avec la convention $0 \cdot \infty = 0$.

Ainsi, si r est un point à distance finie appartenant à $R(f)$, tout le segment $[O, r]$ qui joint l'origine à r est contenu dans $R(f)$.

2.2. Un mesclun : mélange de deux fonctions.

On se donne f et g dans $\mathcal{C}$. On suppose que g sub f et que $s(f) = a$ et $i(g) = c$. On va construire $h \in \mathcal{C}$ telle que g sub h et h sub f, $s(h) = a$ et $i(h) = c$. La fonction h se présentera comme un "savant" mélange des fonctions f et g.

1) La construction de h.

On a $i(g) = c \leqslant s(g)$ et $i(g) = c \leqslant i(f) \leqslant s(f) = a$. Bien entendu, si $c = +\infty$ alors $s(g) = i(f) = s(f) = a = +\infty$. On peut alors prendre, au choix, $h = g$ ou $h = f$. On suppose donc que c est *fini*. On construit alors h comme un mélange de f et de g de la manière suivante. Par récurrence, on construit deux suites (x_n) et (y_n) dans T de sorte que l'on ait

$$x_0 = 0,\ n \leqslant x_n < y_n < x_{n+1},$$
$$h(0) = h(x_0) = 0$$

et

$$h(x) = \begin{cases} f(x) - f(x_n) + h(x_n) & \text{pour} \quad x_n \leqslant x \leqslant y_n \\ g(x) - g(y_n) + h(y_n) & \text{pour} \quad y_n \leqslant x \leqslant x_{n+1} \end{cases}$$

$$\frac{h(x_n)}{x_n} \leqslant c + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{h(y_n)}{y_n} \geqslant \begin{cases} a - \frac{1}{n} & \text{si } a \text{ est fini} \\ n & \text{si } a = +\infty. \end{cases}$$

Cela est possible car, en supposant $h(x)$ définie pour $0 \leqslant x \leqslant x_n$ et sachant que $s(f - f(x_n) + h(x_n)) = s(f) = a$, il existe dans T au moins un point $y_n > x_n$ tel que

$$a_n = \frac{f(y_n) - f(x_n) + h(x_n)}{y_n} \geqslant \begin{cases} a - \frac{1}{n} & \text{si } a < +\infty; \\ n & \text{si } a = +\infty. \end{cases}$$

Ce choix de y_n étant fait et sachant que $i(g - g(y_n) + h(y_n)) = i(g) = c$, il existe dans T au moins un point $x_{n+1} > y_n$, et $x_{n+1} \geqslant n + 1$, tel que

$$c_n = \frac{g(x_{n+1}) - g(y_n) + h(y_n)}{x_{n+1}} \leqslant c + \frac{1}{n}.$$

2) Propriétés de h.

La fonction-mélange h ainsi construite est croissante et $h(0) = 0$ donc $h \in \mathcal{C}$. De plus, comme annoncé, on a g sub h et h sub f donc, en particulier, $c = i(g) \leqslant i(h)$ et $s(h) \leqslant s(f) = a$.

Comme, d'autre part, $\liminf\ c_n \leqslant c$ et $\limsup\ a_n \geqslant a$ on a bien $i(h) = c$ et $s(h) = a$.

2.3. Une première conséquence.

Soient $u \in \mathcal{C}$ et $(x, y) \in R(u)$. **Si y est fini,** *alors le segment vertical qui joint le point $(x, 0)$ au point (x, y) est tout entier contenu dans $R(u)$, i.e. on a*

$$\{(x, z) \quad : \quad 0 \leqslant z \leqslant y\} \subset R(u).$$

La démonstration (laissée au lecteur) utilise le mélange de fonctions; elle est également valable pour x fini et pour x infini.

Pour y infini, on montrera plus bas, à l'aide d'une autre démonstration que le résultat tient encore, i.e. lorsque l'on a $(+\infty, +\infty) \in R(u)$, alors

$$\{+\infty\} \times \overline{\mathbf{R}}_+ = \{(+\infty, z) : 0 \leqslant z \leqslant +\infty\} \subset R(u).$$

2.4. Une deuxième conséquence.

Soient $f \in \mathcal{C}$, $\quad i(f) = b$ et $s(f) = a$ **fini**.

L'ensemble représentatif $R(f)$ est alors contenu dans le trapèze $OABC$ et contient le triangle OAB où $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (a, b)$, $C = (b, b)$.

Cela résulte de **2.1** et **2.3**.

Afin d'établir que $R(f)$ est un taquet, nous aurons encore besoin de quelques résultats auxiliaires.

2.5. Quelques propriétés élémentaires.

On désigne par f, g, h des éléments quelconques de $\mathcal{F}$.

1) On a toujours (sauf lorsqu'une somme est indéterminée)

$$i(f) + i(g) \leqslant i(f + g), \quad s(f + g) \leqslant s(f) + s(g).$$

Bien entendu, on peut avoir des inégalités strictes même lorsque f et g sont croissantes.

2) On a toujours $s(-h) = -i(h)$ (et $i(-h) = -s(h)$); donc $s(f-g) \leqslant s(f) - i(g)$ sauf indétermination de cette différence.

3) On a toujours ceci :

1) Si $f \leqslant g$ alors $i(f) \leqslant i(g)$ et $s(f) \leqslant s(g)$.

2) $i(f \wedge g) = i(f) \wedge i(g)$ et $s(f \vee g) = s(f) \vee s(g)$.

4) Soit (u_k) une famille dans $\mathcal{F}$ ayant une enveloppe supérieure $u \in \mathcal{F}$. Si u_k sub f pour chaque indice k, alors u sub f.

En effet : $u = \vee u_k$ et $f - u = f - \vee u_k = \wedge(f - u_k)$ est croissante comme enveloppe inférieure de fonctions croissantes. □

De même, si la famille (u_k) possède une enveloppe inférieure $v \in \mathcal{F}$ et si u_k sub f pour chaque k, alors v sub f.

2.6. Un cas particulier d'enveloppes supérieures.

On se donne f et g dans $\mathcal{C}$ et on considère l'ensemble suivant

$$U(f,g) = \{u \in S(f) : u \leqslant g\}.$$

On désigne par h l'*enveloppe supérieure* des $u \in U(f,g)$.

1) Ainsi h est croissante, $h(0) = 0$ et, d'après le **2.5,4)** ci-dessus, on a h sub f et, bien entendu, on a aussi $h \leqslant g$. Autrement dit $h \in U(f,g)$: parmi toutes les fonctions u appartenant à $U(f,g)$, il en est une plus grande que toutes les autres (une sorte de *socle*) et c'est précisément h, leur enveloppe supérieure. Pour faire court, on dira que h est la f-**enveloppe** de g.

2) Voici une expression commode de h (voir figure 2). On pose

$$v(x) = \sup_{t \leqslant x} (f(t) - g(t))$$

pour chaque $x \in T$. On va montrer que $h = f - v$.

Démonstration. — De par sa définition, la fonction $v : T \to \mathbf{R}$ est croissante et $v(0) = 0$. Donc $v \in \mathcal{C}$. La fonction $f - v$ est également croissante, i.e. on a v sub f.

En effet : Pour $x \leqslant y$ dans T, posons

$$w(x,y) = \sup_{x \leqslant t \leqslant y} (f(t) - g(t)).$$

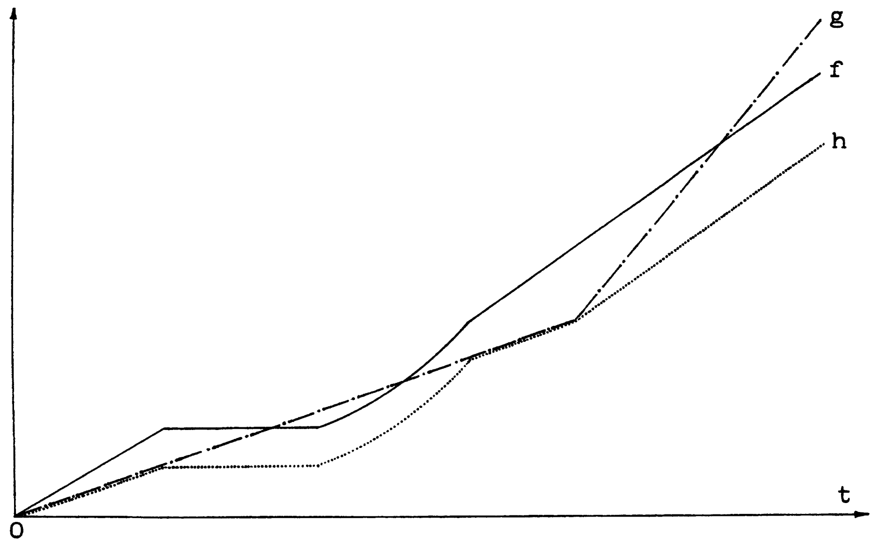

Figure 2

Ainsi $v(y) = v(x) \vee w(x,y)$ d'où

$$v(y) - v(x) = v(x) \vee w(x,y) - v(x) = 0 \vee (w(x,y) - v(x)).$$

Or $f(t) - g(t) \leqslant f(y) - g(x)$ pour $x \leqslant t \leqslant y$,

donc $w(x,y) \leqslant f(y) - g(x)$; et $f(x) - g(x) \leqslant v(x)$

d'où $w(x,y) - v(x) \leqslant f(y) - g(x) - (f(x) - g(x)) = f(y) - f(x)$.

Donc $v(y) - v(x) \leqslant f(y) - f(x)$ comme annoncé.

On a ainsi v sub f et $(f - v)$ sub f. D'autre part, pour chaque $u \in S(f)$, on a

$$u \leqslant g \ \underline{\text{ssi}}\ \ f - g \ \leqslant f - u \ \underline{\text{ssi}}\ \ v \leqslant f - u \ \underline{\text{ssi}}\ \ u \leqslant f - v.$$

Donc $h = f - v$ comme annoncé. $\square$

2.7. Théorème.

Soient f et g dans C et soit h la f-enveloppe de g.

1) *On a alors $i(g) \wedge s(f) \leqslant s(h) \leqslant s(g) \wedge s(f)$.*

2) *Soit $l \in \mathcal{F}$. Si l sub f et $s(l - g) \leqslant 0$ alors $i(l) \leqslant i(h)$.*

Pour établir ce théorème, on se servira du résultat suivant.

2.8. Lemme.

Soient $u \in \mathcal{F}$, $u(0) = 0$, $v(x) = \sup_{t \leqslant x} u(t)$. On suppose que $v(x)$ est fini pour chaque $x \in T$, i.e. que $v \in \mathcal{C}$. Alors

1) *On a nécessairement $s(v) = 0$ ou $i(v - u) = 0$.*

2) *Pour chaque $q \in \mathcal{C}$, si $s(v - q) > 0$ alors $s(v - q) = s(u - q)$. En particulier, si $s(u - q) \leqslant 0$ alors $s(v - q) \leqslant 0$.*

Démonstration du lemme.

1) Puisque $u \leqslant v$, on a $v - u \geqslant 0$ donc $i(v - u) \geqslant 0$.

D'autre part, de par la définition même de v, pour chaque $x \in T$, il existe $t = t(x) \leqslant x$ tel que

$$v(t) \leqslant v(x) \leqslant u(t) + 1.$$

Si l'ensemble des $t(x)$ est majoré par $y \in T$, on aurait $u(t) + 1 \leqslant v(y) + 1$ donc $v \leqslant v(y) + 1$ et alors $s(v) = 0$. Sinon, comme $0 \leqslant v(t) - u(t) \leqslant 1$ pour une suite de $t = t(x)$ tendant vers $+\infty$, on aurait

$$0 \leqslant \frac{v(t) - u(t)}{t} \leqslant \frac{1}{t}$$

qui tendrait vers 0, d'où $i(v - u) \leqslant 0$.

2) Puisque $u \leqslant v$, on a $u - q \leqslant v - q$ donc $s(u - q) \leqslant s(v - q)$.

Pour chaque $x \in T$, on reprend un $t = t(x) \leqslant x$ pour lequel $v(x) \leqslant u(t) + 1$, donc

$$v(x) - q(x) \leqslant u(t) - q(t) + 1 \leqslant u(t) + 1 \leqslant v(x) + 1,$$

car q est croissante et positive, on s'en souvient.

Si $s(v - q) > 0$, il existe une suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$ pour lesquelles on aura $0 < \dfrac{v(x) - q(x)}{x}$, le deuxième membre tendant vers $s(v - q)$.

Mais alors la suite correspondante des valeurs de $t = t(x)$ n'est pas bornée (car si elle l'était par un $y \in T$, on aurait $v(x) - q(x) \leqslant v(y) + 1$)

et l'on a

$$0 < \frac{v(x)-q(x)}{x} \leqslant \frac{v(x)-q(x)}{t} \leqslant \frac{u(t)-q(t)+1}{t},$$

donc, à la limite, $s(v-q) \leqslant s(u-q)$. D'où l'égalité annoncée. $\square$

Démonstration du théorème 2.7

On reprend $u = f - g$ et $v(x) = \sup\limits_{t \leqslant x} u(t)$. Ainsi $h = f - v$ et le lemme s'applique.

1) De $h \leqslant g$ et $h \leqslant f$ on tire $s(h) \leqslant s(g) \wedge s(f)$.

Ensuite, on écrit $g - h = g - f + v = v - u$. Si $s(v) = 0$, alors $s(f) = s(h+v) \leqslant s(h) + s(v) = s(h)$. Sinon, alors $i(v-u) = 0$ d'après le 1) du lemme.

Ainsi $0 = i(v-u) = i(g-h) \geqslant i(g) - s(h)$ d'où $i(g) \leqslant s(h)$ que $s(h)$ soit fini ou non.

Ainsi, dans les deux cas, on a bien $i(g) \wedge s(f) \leqslant s(h)$.

2) Puisque l sub f, on a $f - l \in \mathcal{C}$ et $l - h = v + l - f$ à laquelle on peut donc appliquer le 2) du lemme avec $q = f - l$.

On a $s(u + l - f) = s(l - q) \leqslant 0$ par hypothèse. Donc $s(l-h) = s(v + l - f) \leqslant 0$ d'après le lemme. D'où

$$i(h) = i(l + h - l) \geqslant i(l) - s(l-h) \geqslant i(l). \quad \square$$

2.9. Un cas particulier.

On se fixe $f \in \mathcal{C}$ et on pose $s(f) = a$, *fini ou non.*

Pour chaque nombre réel (fini) $c \in [0, a]$, on considère la fonction affine $g_c : T \to \mathbf{R}$ où $g_c(t) = ct$. On considère ensuite la fonction h_c : la f-enveloppe de g_c. On a $i(g_c) = s(g_c) = c$ et donc, d'après le théorème **2.7**, on a $s(h_c) = c$.

Posons $i(h_c) = p(c)$. On obtient ainsi une fonction $p : [0, a] \cap \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que nous appellerons le **profil** de la fonction f.

On observera ceci : lorsque a est fini, la fonction p est définie sur l'intervalle $[0, a]$ tout entier ; tandis que, pour $a = +\infty$, la fonction p est définie sur $[0, a[$ i.e. sur $\mathbf{R}_+$.

Quelle que soit alors la fonction $l \in \mathcal{F}$, si l'on a l sub f et $s(l) \leqslant c$, on aura $i(l) \leqslant i(h_c) = p(c)$ d'après le théorème **2.7**, 2).

1) L'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante.

Pour chaque **réel** *c de l'intervalle $[0, a]$, l'ensemble des points de $R(f)$ dont l'abscisse est égale à c n'est autre que le segment vertical*

$$\{(c, y) : 0 \leqslant y \leqslant p(c)\}.$$

Ainsi, lorsque a est **fini**, *on a*

$$R(f) = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a \ \text{ et } \ 0 \leqslant y \leqslant p(x)\}.$$

Pour voir que l'ensemble représentatif $R(f)$ est un taquet dans ce cas, il suffit donc de montrer que le profil p de f est une fonction **concave** et croissante (ce sera alors le profil du taquet $R(f)$ lui-même).

En fait, on va voir que le profil p de f est croissant et concave que a soit fini ou non.

2) La fonction p est **croissante** car, pour deux réels $c \leqslant d$, on a $g_c \leqslant g_d$ donc $h_c \leqslant h_d$ et $i(h_c) \leqslant i(h_d)$ i.e. $p(c) \leqslant p(d)$.

2.10. Théorème.

Le profil p de toute fonction $f \in \mathcal{C}$ est **concave**.

Démonstration. — Soient $c \leqslant d$ des réels (finis) de l'intervalle $[0, a]$ et soient $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$ et $e = \lambda c + \mu d$. On considère $h = \lambda h_c + \mu h_d$.

On commence par observer que $h \in \mathcal{C}$ et h sub f et

$$h(t) = \lambda h_c(t) + \mu h_d(t) \leqslant \lambda ct + \mu dt = et = g_e(t)$$

donc $h \leqslant h_e$. Ainsi

$$i(h) \leqslant i(h_e) = p(e) = p(\lambda c + \mu d)$$

et

$$i(h) = i(\lambda\, h_c + \mu\, h_d) \geqslant \lambda\, i(h_c) + \mu\, i(h_d) = \lambda\, p(c) + \mu\, p(d).$$

D'où $\lambda\, p(c) + \mu\, p(d) \leqslant p(\lambda\, c + \mu\, d)$. $\square$

2.11. Le théorème direct (corollaire de 2.10).

Soit $f \in \mathcal{C}$ où $i(f) = b$ et $s(f) = a$ **fini**. *L'ensemble représentatif $R(f)$ est alors un taquet fixé au point (a, b).*

3. Remarques sur les deux cas déjà traités.

3.1. Une mesure d'écart.

Etant données f et g dans $\mathcal{F}$, on pose

$$\delta(f,g) = s(|f-g|).$$

C'est une mesure de "l'écart" entre f et g.

C'est même, proprement, un **écart** sur l'ensemble $\mathcal{F}$ au sens classique de Bourbaki [B] : la fonction $\delta : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ ayant les propriétés requises

$$\delta(f,f) = 0 \qquad \delta(f,g) = \delta(g,f)$$
$$\delta(f,g) \leqslant \delta(f,h) + \delta(h,g).$$

On observera également ceci :

$$|i(f), i(g)| \leqslant \delta(f,g) \quad \text{et} \quad |s(f), s(g)| \leqslant \delta(f,g),$$

où $|x,y|$ désigne l'écart des deux points x, y de la droite achevée. Ainsi l'écart $|r(f), r(g)|$ des deux points représentatifs dans le plan achevé (muni de l'écart "sup") est majoré par l'écart $\delta(f,g)$, i.e. l'application $r : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$ est *lipschitzienne* de rapport 1.

La relation $\delta(f,g) = 0$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$. Elle implique, en particulier, l'égalité $r(f) = r(g)$ des points représentatifs.

On va montrer qu'elle implique aussi l'égalité $R(f) = R(g)$ des ensembles représentatifs pour f et g dans $\mathcal{C}$.

3.2. Théorème.

Soient f et k dans $\mathcal{C}$ tels que $\delta(f,k) = 0$. Alors $R(f) = R(k)$.

Démonstration.— Soit $g \in S(k)$ et soit h la f-enveloppe de g. On va voir que $\delta(g,h) = 0$.

Avec les notations de la démonstration du théorème **2.7**, on a

$$h = f - v, \quad 0 \leqslant g - h = g - f + v = v + (g-k) + (k-f).$$

Puisque $k-g$ est croissante, on peut appliquer le lemme **2.8** à la fonction $v + g - k$. On a

$$s(u + g - k) = s(f - g + g - k) = s(f-k) = 0$$

donc $s(v+g-k) \leqslant 0$. Ainsi

$$0 \leqslant s(g-h) \leqslant s(v+g-k) + s(k-f) \leqslant 0$$

donc $s(|g-h|) = s(g-h) = 0$ i.e. $\delta(g,h) = 0$ comme annoncé.

Ainsi $r(g) = r(h)$ d'où $R(k) \subset R(f)$ et, par symétrie de la relation $\delta(f,k) = 0$, on a aussi l'inclusion $R(f) \subset R(k)$ d'où l'égalité annoncée. $\square$

3.3. Une première discrétisation (en ordonnée).

A chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, on peut faire correspondre la fonction $h : T \to \mathbf{Z}$ définie par $h(t) = [f(t)]$ partie entière de $f(t)$. On écrira simplement $h = [f]$.

Ainsi $h \leqslant f \leqslant h+1$ et donc $\delta(f,h) = 0$.

Lorsque $f \in \mathcal{C}$, on a aussi $h \in \mathcal{C}$ et donc $R(f) = R(h)$ d'après le théorème précédent.

Désignons par $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ l'ensemble des fonctions croissantes $u : T \to \mathbf{N}$ telles que $u(0) = 0$.

Ainsi $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ et, pour chaque $f \in \mathcal{C}$, on a $h = [f] \in \mathcal{D}$.

Attention pourtant: on peut avoir g sub f sans que l'on ait $[g]$ sub $[f]$, même lorsque g et f sont dans $\mathcal{C}$, comme on peut s'en convaincre en construisant des exemples simples.

On a cependant le résultat suivant: *Pour f et g dans $\mathcal{F}$, si f ne prend que des valeurs entières (autrement dit si $f = [f]$), alors g* sub *f implique* $[g]$ sub f.

En effet : pour $x \leqslant y$, on a alors

$$g(y) - g(x) \leqslant f(y) - f(x) = n \quad \text{entier}$$

donc $g(y) \leqslant g(x) + n$, d'où $[g(y)] \leqslant [g(x)+n] = [g(x)] + n$. $\square$

Pour chaque $f \in \mathcal{C}$, on peut considérer

$$S(f) \cap \mathcal{D} = \{g \in \mathcal{D} : \; g \text{ sub } f\}$$

et

$$D(f) = \{r(g) : \; g \in S(f) \cap \mathcal{D}\}$$

qui est une sorte d'ensemble représentatif "discrétisé" contenu dans l'ensemble représentatif $R(f)$, i.e. $D(f) \subset R(f)$.

Cependant, lorsque $f \in \mathcal{D}$, il y a alors égalité

$$R(f) = D(f).$$

En effet : pour chaque $g \in S(f)$, on a alors $[g] \in S(f) \cap \mathcal{D}$ et $r([g]) = r(g)$ d'après ce qui a été dit.

En résumé, quel que soit $f \in \mathcal{C}$ et $h = [f]$, on a

$$R(f) = R(h) = D(h).$$

Dans l'étude des ensembles représentatifs $R(f)$ où $f \in \mathcal{C}$, on ne perd rien en généralité si l'on s'en tient aux seules fonctions à valeurs entières.

3.4. Une deuxième discrétisation (en abscisse).

On suppose ici que l'on a $\mathbf{N} \subset T$.

A chaque fonction $f : T \to \mathbf{R}$ correspond sa *restriction* $f|_{\mathbf{N}} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Lorsque f est croissante, il en est de même de $f|_{\mathbf{N}}$ bien entendu. L'application de restriction $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(\mathbf{N})$ ainsi définie respecte la subordination puisque, si g sub f alors $g|_{\mathbf{N}}$ sub $f|_{\mathbf{N}}$.

De plus, soit $h = f|_{\mathbf{N}}$. Alors, si f est croissante, on a

$$h(n) \leqslant f(t) \leqslant h(n+1) \quad \text{pour} \quad n \leqslant t \leqslant n+1,$$

donc $i(h) = i(f)$ et $s(h) = s(f)$, d'où $r(h) = r(f)$. Ainsi, pour chaque $f \in \mathcal{C}(T)$, on a $R(f) \subset R(f|_{\mathbf{N}})$.

En réalité, on a même l'*égalité* $R(f) = R(f|_{\mathbf{N}})$ comme on va le montrer.

En effet : l'application de *restriction* $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(\mathbf{N})$ est surjective et possède au moins une *section* $\mathcal{C}(\mathbf{N}) \hookrightarrow \mathcal{C}(T)$ compatible avec la subordination.

Plus précisément, soit $h \in \mathcal{C}(\mathbf{N})$. On peut définir un prolongement $g : T \to \mathbf{R}$ de h comme suit

$$g(t) = h(n) \qquad \text{pour} \qquad n \leqslant t < n+1.$$

Cette fonction g appartient à $\mathcal{C}(T)$ et l'on a $g|_{\mathbf{N}} = h$.

L'application de prolongement $\mathcal{C}(\mathbf{N}) \hookrightarrow \mathcal{C}(T)$ ainsi définie respecte la subordination et c'est une section de l'application de restriction. Ainsi

$$R(g) = R(g|_{\mathbf{N}}) = R(h).$$

Partant alors d'une fonction $f \in \mathcal{C}(T)$, on considère sa restriction $h = f|_{\mathbf{N}}$ et le prolongement $g : T \to \mathbf{R}$ de h. Comme f et g coïncident sur $\mathbf{N}$, on a $\delta(f,g) = 0$ et donc $R(f) = R(g) = R(h)$ comme annoncé. □

Remarque. — L'application de prolongement utilisée ci-dessus n'est pas la seule possible. En voici deux autres à titre d'exemples.

Pour $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ donnée, on peut définir $g : T \to \mathbf{R}$ des deux manières suivantes.

1) Première manière : $g(t) = h(n+1)$ pour $n < t \leqslant n+1$.

2) Deuxième manière : $g = h$ sur $\mathbf{N}$ et g affine sur chacun des intervalles $[n, n+1]$.

Dans la deuxième manière, la fonction g est toujours *continue*. Elle est même absolument continue sur tout intervalle borné lorsque $T = \mathbf{R}_+$.

3.5. Les deux cas déjà traités.

1) Un cas discret : les fonctions de comptage.

A chaque partie A de $\mathbf{N}$, on associe une **fonction de comptage** $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par $f(n) = \text{Card}\,\{m \in A : m < n\}$. C'est une fonction croissante, à valeurs entières, et $f(0) = 0$. Les nombres finis $i(f)$ et $s(f)$ sont les **densités (asymptotiques) inférieure** et **supérieure**, respectivement, de l'ensemble A. Si B est une partie de A, sa fonction de comptage g est telle que g sub f. Réciproquement, si $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est croissante, telle que $g(0) = 0$ et g sub f, alors g est la fonction de comptage d'une partie B de A. Cette correspondance est bijective. L'ensemble représentatif $R(f)$ coïncide avec l'ensemble représentatif "discret" $D(f)$ comme il a été dit, ci-dessus, au paragraphe **3.3** au sujet de la première discrétisation. En particulier, puisque la densité supérieure $s(f)$ est finie, l'ensemble représentatif $R(f) = D(f)$ est donc un *taquet* comme il est dit dans le théorème **2.11**. Dans [Gr1], on donne une démonstration ad hoc de ce résultat.

Ce premier cas particulier traité dans [Gr1], peut être placé dans un cadre plus général où, au lieu de parties de $\mathbf{N}$, on considère des *parties* de $\mathbf{R}_+$ et, plus généralement encore, des *suites* ce qui permet, éventuellement, la *répétition* de certains termes si on le désire. Voici ce cadre général.

Etant donnée une suite $a = (a_n)$, finie ou infinie, de nombres réels $a_n \geqslant 0$, on lui associe la **fonction de comptage** $f : \mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ définie par $f(x) = \mathrm{Card}\{n : a_n < x\}$.

C'est une fonction croissante, en escalier, à valeurs entières et $f(0) = 0$. Les nombres $i(f)$ et $s(f)$ représentent les **densités asymptotiques inférieure** et **supérieure** de la suite (a_n).

Cette fonction est *finie* (i.e $f(x) < +\infty$ pour tout $x \geqslant 0$) si et seulement si la suite (a_n) ne possède aucun point d'accumulation dans $\mathbf{R}_+$, ce qui revient à dire que cette suite est finie *ou* tend vers l'infini. **Supposons qu'il en soit ainsi.**

Alors, à chaque suite $b = (a_n)_{n \in M}$ extraite de (a_n), correspond une fonction de comptage $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{N}$

$$g(x) = \mathrm{Card}\{n \in M : a_n < x\}$$

telle que g sub f i.e. $g \in S(f) \cap \mathcal{D}$.

Réciproquement, si $g \in S(f) \cap \mathcal{D}$, il existe au moins une suite $b = (a_n)_{n \in M}$ extraite de (a_n) dont g est la fonction de comptage.

Démonstration. — Rangeons l'ensemble des *valeurs* $\{a_n\}$ en une suite strictement croissante $0 \leqslant r_0 < r_1 < \cdots < r_m < \cdots$ et comptons

$$N(m) = \mathrm{Card}\{n : a_n = r_m\} \text{ pour } m \geqslant 0.$$

Alors $f(x) = \sum_{r_n < x} N(m)$. La fonction f est constante sur chacun des intervalles $I(m) =]r_m, r_{m+1}]$ et le saut $f(r_{m+1}) - f(r_m)$ est précisément l'entier $N(m)$. Mais alors, puisque g est subordonnée à f, elle est également constante sur chacun des intervalles $I(m)$ et son saut $P(m) = g(r_{m+1}) - g(r_m)$ est majoré par $N(m)$. On fabrique alors la partie M de $\mathbf{N}$ comme suit. Pour chaque m, on choisit une partie $M(m)$ ayant $P(m)$ éléments dans l'ensemble $\{n : a_n = r_m\}$, ce qui est possible puisque $P(m) \leqslant N(m)$. L'ensemble $M = \bigcup_{m \geqslant 0} M(m)$ convient. $\square$

L'ensemble représentatif $R(f)$ est alors l'ensemble des couples

$$r(g) = (s(g), i(g))$$

où $g \in S(f) \cap \mathcal{D}$ et c'est aussi l'ensemble des couples (densité supérieure, densité inférieure) pour chacune des suites $b = (a_n)_{n \in M}$ extraites de la suite (a_n).

En particulier, lorsque la suite (a_n) possède une densité supérieure finie, l'ensemble représentatif $R(f)$ est ainsi un taquet fixé en $r(f)$ comme il est dit dans le théorème **2.11**.

2) Un cas "continu" : les fonctions absolument continues.

Voici d'abord, brièvement exposé, le second cas particulier traité dans [Gr2].

On considère l'ensemble F des fonctions bornées $a : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ intégrables sur tout intervalle borné $[0, x]$. A chacune de ces fonctions a, on associe son intégrale indéfinie $f(x) = \int_0^x a(t)\, dt$ et le couple formé de

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad \liminf_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} ;$$

autrement dit, $r(f) = (s(f), i(f))$. Puis l'on considère l'ensemble $\{r(g) : g(x) = \int_0^x b\ (t)\ dt$ où $b \in F$ et $b \leqslant a\}$ et on montre que cet ensemble est un taquet fixé au point $r(f)$ lorsque $s(f)$ est fini.

Voici, à présent, comment cela se rattache au cadre général présenté dans les pages précédentes.

Une fonction $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est croissante et localement absolument continue (i.e. absolument continue sur chaque intervalle borné) *si et seulement si* elle est intégrale indéfinie d'une fonction positive localement intégrable $a : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x a(t)\ dt.$$

D'autre part, soit f une telle fonction et soit $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction croissante. Alors

1) si g sub f, la fonction g est elle-même localement absolument continue; en effet, pour $x \leqslant y$, on aura $0 \leqslant g(y) - g(x) \leqslant f(y) - f(x)$; et

2) si, de plus, $f(x) = f(0) + \int_0^x a(t)\ dt$, $a \geqslant 0$, et $g(x) = g(0) + \int_0^x b(t)\ dt$, $b \geqslant 0$,

on aura g sub f *si et seulement si* $b \leqslant a$ presque partout.

On retrouve ainsi le cas traité dans [Gr2] comme cas particulier où la fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$ est supposée localement absolument continue.

3.6. Remarque.

En rapport avec le paragraphe précédent **(3.5,2)**), une remarque s'impose sur le lien entre ces considérations et la *théorie de la mesure*. Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble ordonné des *mesures* boréliennes positives sur $\mathbf{R}_+$ finies sur les parties bornées et considérons la partie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$ formée des fonctions continues à gauche $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$. Il y a une correspondance canonique bijective entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, on le sait. A chaque $f \in \mathcal{L}$ est associée une mesure $\sigma \in \mathcal{M}$ définie par $\sigma([x,y[) = f(y) - f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant y$. Réciproquement, à chaque mesure $\sigma \in \mathcal{M}$ est associée la fonction $f \in \mathcal{L}$ définie par $f(x) = \sigma([0,x[)$ pour $x \geqslant 0$.

Dans cette correspondance, on a

$$i(f) = \liminf \frac{\sigma([0,x[)}{x} \quad \text{et} \quad s(f) = \limsup \frac{\sigma([0,x[)}{x}$$

qui se présentent ainsi comme de véritables **densités** moyennes, asymptotiques, inférieure et supérieure, de la mesure σ par rapport à la mesure de Lebesgue.

En outre, si σ et τ sont les mesures qui correspondent respectivement aux fonctions f et g dans $\mathcal{L}$, alors

$$g \text{ sub } f \quad \underline{\text{ssi}} \quad \tau \leqslant \sigma.$$

Enfin, il existe une **rétraction** $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+) \to \mathcal{L}$ qui fait correspondre à $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$ la fonction $h \in \mathcal{L}$ définie par

$$h(x) = \sup_{t<x} f(t),$$

de sorte que $h \leqslant f$.

On vérifie, sans détour, que l'on a alors $r(h) = r(f)$, de sorte que, plus précisément,

$$R(f) = R(h) = \{r(g) : g \in \mathcal{L} \quad \text{et} \quad g \text{ sub } h\}.$$

4. Le théorème réciproque.

Après l'analyse du phénomène, le moment est venu de faire la *synthèse* des taquets : étant donné un taquet quelconque, on va montrer qu'il est l'ensemble représentatif d'au moins une fonction croissante (une sorte de "guirlande") que nous construirons et que nous appellerons son **antécédent**. Au taquet est déjà associé son **profil**; nous allons lui associer également une **fonction auxiliaire**, première étape dans la construction de son antécédent.

Voici les détails.

4.1. La fonction auxiliaire.

On se donne un taquet fixé au point (a, b) et on considère son profil $p : [0, a] \to [0, b]$: c'est une fonction croissante, concave, telle que $p(0) = 0, p(a) = b$, $p(x) \leqslant x$, et son graphe n'est autre que l'arc $\widehat{OB}$ qui limite le taquet par le haut (voir figure 3).

Pour chaque $x \in [0, 1]$, cet arc possède une seule **droite d'appui** (une tangente) $\Delta(x)$ de pente x, en raison de la concavité. Si $(u, p(u))$ est l'un quelconque de ces points d'appui, l'équation de la droite $\Delta(x)$ s'écrit $Y - p(u) = (X - u)x$. Ainsi cette droite coupe la verticale d'abscisse a au point dont l'ordonnée est égale à $p(u) + (a - u)x$. Cette "ordonnée à l'abscisse a" de la droite $\Delta(x)$ dépend de x mais pas de u. On pose alors

$$\lambda(x) = p(u) + (a - u)x.$$

La fonction $\lambda : [0, 1] \to \mathbf{R}$ ainsi définie est la **fonction auxiliaire** du taquet, une sorte de "contre-profil". L'équation de la droite d'appui $\Delta(x)$ s'écrit alors

$$Y - \lambda(x) = (X - a)x.$$

1) Principales propriétés de la fonction auxiliaire.

On aura besoin des deux propriétés suivantes :

(1)
$$\lim_{x \to 0^+} \lambda(x) = b.$$

(2)
$$\frac{\lambda(x) - k}{x}$$

est fonction décroissante de $x > 0$ tant que la constante k reste inférieure ou égale à $p(u)$ où $(u, p(u))$ est un point d'appui de la droite $\Delta(x)$.

En particulier, $\dfrac{\lambda(x)}{x}$ *est une fonction décroissante de $x \in]0, 1]$.*

On montrera, au passage, que:

La fonction auxiliaire λ est une fonction croissante, continue, telle que $\lambda(0) = b$ et $\lambda(1) = a$,

$$\lambda : [0, 1] \to [b, a]$$

(voir figure 3).

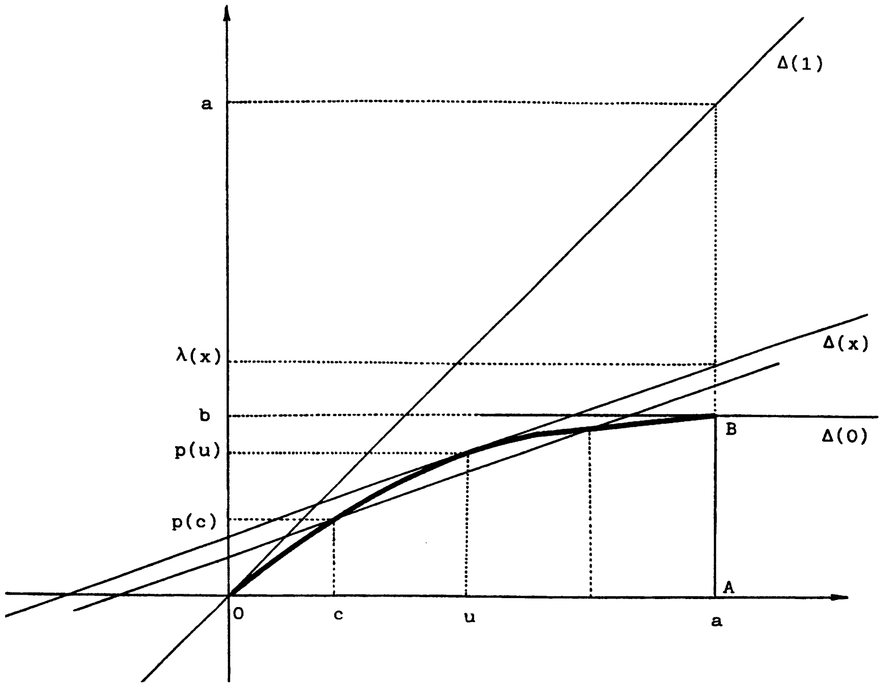

Figure 3

Démonstrations. — [En suivant sur la figure 3 les étapes des démonstrations, on a une vision géométrique claire de la démarche.]

La droite $\Delta(0)$ n'est autre que l'horizontale à l'ordonnée b, et la droite $\Delta(1)$ la bissectrice des axes. D'où $\lambda(0) = b$ et $\lambda(1) = a$. Ensuite, on observe successivement ceci. On a :

(3) $\lambda(x) \geqslant p(c) + (a-c)x$ *quels que soient* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *et* $0 \leqslant c \leqslant a$, *avec égalité si et seulement si* $(c, p(c))$ *est point d'appui de la droite* $\Delta(x)$.

En effet : La droite de pente x passant par le point $(c, p(c))$ de l'arc $\overset{\frown}{OB}$ a pour équation $Y - p(c) = (X - c)x$, elle coupe la verticale d'abscisse a au point d'ordonnée égale à $p(c) + (a-c)x$, elle est parallèle à la droite d'appui $\Delta(x)$ et située entièrement en dessous d'elle, en raison de la concavité.

On a donc aussi

(4) $\lambda(y) - \lambda(x) \leqslant (a-v)(y-x)$ *si* $(v, p(v))$ *est point d'appui de la droite* $\Delta(y)$, *quels que soient* x *et* y *dans* $[0,1]$.

En effet : on prend $c = v$ dans (3), il vient $\lambda(x) \geqslant p(v) + (a-v)x$. Ainsi $\lambda(y) - \lambda(x) \leqslant p(v) + (a-v)y - (p(v) + (a-v)x) = (a-v)(y-x)$.

On a ainsi

(5) $0 \leqslant a - u \leqslant \dfrac{\lambda(y) - \lambda(x)}{y - x} \leqslant a - v \leqslant a$ *quels que soient* $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ *où* $(u, p(u))$ *et* $(v, p(v))$ *sont points d'appui des droites* $\Delta(x)$ *et* $\Delta(y)$ *respectivement.*

Ainsi, en particulier, la fonction λ est *croissante*, elle est *lipschitzienne* de rapport a donc *continue* comme annoncé. La propriété (1) est donc établie, a fortiori.

On a d'autre part

(6) $\dfrac{\lambda(y) - k}{y} - \dfrac{\lambda(x) - k}{x} \leqslant (p(v) - k)(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x})$ *si* $(v, p(v))$ *est point d'appui de la droite* $\Delta(y)$, *quels que soient* x *et* y *dans* $]0, 1]$ *et* k *dans* $\mathbf{R}$.

En effet : en prenant, comme ci-dessus, $c = v$ dans (3), il vient

$$\frac{\lambda(x) - k}{x} \geqslant (p(v) - k)\frac{1}{x} + a - v.$$

Ainsi

$$\frac{\lambda(y) - k}{y} - \frac{\lambda(x) - k}{x} \leqslant (p(v) - k)(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}).$$

Si donc $k \leqslant p(u)$ et $0 < x \leqslant y \leqslant 1$, on a $k \leqslant p(u) \leqslant p(v)$, de sorte que

$$(p(v) - k)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \leqslant 0.$$

Ce qui établit la propriété (2) annoncée. □

2) Troncature.

Si l'on tronque le taquet donné à l'abscisse c, on obtient un nouveau taquet fixé au point $(c, p(c))$ (un *sous - taquet* pour ainsi dire) dont le *profil* est la restriction $p|_{[0,c]}$ du profil p à l'intervalle $[0, c]$. (Voir figure 4.)

Que peut-on dire de la fonction auxiliaire μ de ce sous-taquet ?

Par définition, $\mu(x)$ est l'ordonnée à l'abscisse c de la droite d'appui $E(x)$, de pente x, au sous-taquet. Pour $0 \leqslant c < a$, désignons par $z = p'_d(c)$

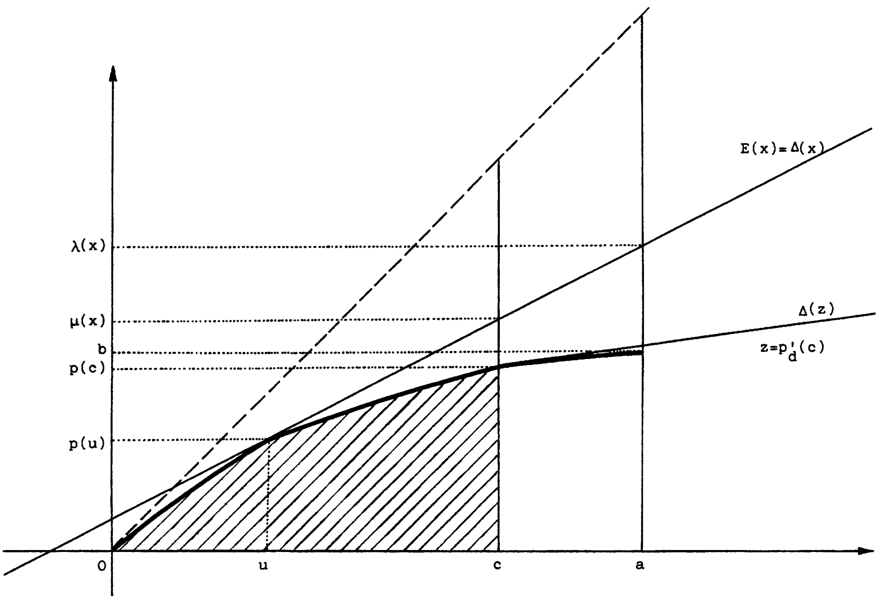

Figure 4

la dérivée à droite au point c du profil p. Ainsi, tant que $x \geqslant z$, la droite d'appui $E(x)$ coïncide avec $\Delta(x)$ et, pour $x \leqslant z$, la droite $E(x)$ s'appuie au point $(c, p(c))$. Un instant de réflexion suffit alors à voir que l'on a

$$\mu(x) = \begin{cases} p(c) & \text{si} \quad x \leqslant z, \\ \lambda(x) - (a-c)x & \text{si} \quad x \geqslant z, \end{cases} \tag{7}$$

$z = p'_d(c)$.

Avant de passer à la construction de l'antécédent, on observera encore ceci. On a

$$\lambda(x) - \mu(x) = \begin{cases} \lambda(x) - p(c) & \text{si} \quad x \leqslant z; \\ (a-c)z & \text{si} \quad x = z; \\ (a-c)x & \text{si} \quad x \geqslant z. \end{cases} \tag{8}$$

De cela découlent les deux résultats suivants.

(9) *La fonction $\lambda - \mu$ est croissante et majorée par $(a - c)$.*

(10) $\dfrac{\lambda(x) - \mu(x)}{x}$ *est fonction décroissante de $x \in]0, 1]$.* [Pour $x \leqslant z$ cela découle de la propriété (2) et, pour $x \geqslant z$, $\dfrac{\lambda(x) - \mu(x)}{x} = a - c$ est constante.]

4.2. L'antécédent.

Une fois pour toutes, on se fixe une suite de nombres réels

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots$$

où l'on suppose que le rapport $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ tend vers l'infini, et on désigne par $I(n)$ l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$.

Si l'on veut fixer les idées, on pourra prendre $t_n = n!$ pour $n \geqslant 1$.

On reprend un taquet fixé en (a, b) et sa fonction auxiliaire λ. Puis l'on définit l'**antécédent** $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ comme suit :

$$\begin{array}{ll} f(t) = 0 & \text{pour} \quad t \in I(0) \\ f(t) = t\lambda(\frac{t_n}{t}) & \text{pour} \quad t \in I(n), n \geqslant 1. \end{array}$$

On va voir que cette fonction f est croissante, $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$, et que son ensemble représentatif $R(f)$ n'est autre que le taquet donné.

Démonstration. — Puisque $\lambda(1) = a$, on a $f(t_n) = at_n$.

Pour $t \in I(n)$, on a $f(t) = t\lambda\left(\dfrac{t_n}{t}\right) \leqslant at \leqslant at_{n+1} = f(t_{n+1})$.

En posant $x = \dfrac{t_n}{t}$, on voit alors que $f(t)$ s'écrit $t_n \dfrac{\lambda(x)}{x}$ et qu'elle est donc (d'après **4.1,1)**,(2)) une fonction *croissante de* t sur $I(n)$, donc sur $[t_n, t_{n+1}]$ également, donc sur $\mathbf{R}_+$ tout entier. Ainsi *tout antécédent appartient à* $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$.

Observons encore ceci : on a $f(t) \leqslant at$ et $f(t_n) = at_n$ donc $s(f) = a$. De plus $b \leqslant \lambda\left(\dfrac{t_n}{t}\right) = \dfrac{f(t)}{t}$ et l'on sait (d'après **4.1,1)**,(1)) que $\lambda(x)$ tend vers b lorsque x tend vers 0. Donc $i(f) = b$.

En résumé, le point représentatif $r(f)$ de l'antécédent n'est autre que le point (a, b) où le taquet est fixé.

Pour achever de montrer que le taquet est précisément l'ensemble représentatif $R(f)$, il suffit de montrer que le profil de la fonction f tel que nous l'avons défini au paragraphe **2.9** coïncide avec le profil p du taquet.

Pour cela, on se donne $0 \leqslant c < a$ et on considère, d'une part, l'antécédent g du taquet tronqué à l'abscisse c et, d'autre part, la f-enveloppe h de la fonction $t \mapsto ct$ (voir au **2.6**).

D'après la première partie de la démonstration, puisque g est un antécédent, on sait que $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$; on sait aussi que $s(g) = c$ et $i(g) = p(c)$. De plus, on a g sub f.

En effet : on a, pour $t \in I(n)$,

$$f(t) - g(t) = t\left(\lambda(\frac{t_n}{t}) - \mu(\frac{t_n}{t})\right) = t_n\frac{\lambda(x) - \mu(x)}{x}$$

où l'on a posé $x = \dfrac{t_n}{t}$. D'après **4.1,2)**,(10), on voit que $f(t) - g(t)$ est fonction croissante de t sur $I(n)$ et majorée par $(a - c)t_n \leqslant (a - c)t_{n+1} = f(t_{n+1}) - g(t_{n+1})$. Donc $f - g$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Ainsi $g(t) \leqslant h(t) \leqslant ct$ et, pour $t \in I(n)$,

$$\begin{aligned} &h(t) - h(t_n) \leqslant f(t) - f(t_n)\\ &h(t) \leqslant f(t) - f(t_n) + h(t_n) \leqslant f(t) - at_n + ct_n. \end{aligned}$$

D'où

$$p(c) \leqslant \mu(\frac{t_n}{t}) = \frac{g(t)}{t} \leqslant \frac{h(t)}{t} \leqslant \lambda(\frac{t_n}{t}) - (a-c)\frac{t_n}{t} = \begin{cases} p(c) & \text{si } \frac{t_n}{t} = z,\\ \mu(\frac{t_n}{t}) & \text{si } \frac{t_n}{t} \geqslant z, \end{cases}$$

où $z = p'_d(c)$. On distingue alors les deux cas suivants :

– si $z > 0$, pour $t = \dfrac{t_n}{z}$, on aura $\dfrac{h(t)}{t} = p(c)$;

– si $z = 0$, on aura $\dfrac{h(t)}{t} \to p(c)$ lorsque $\dfrac{t_n}{t} \to 0$.

Dans les deux cas, on a donc $i(h) = p(c)$ ce qui achève la démonstration. □

On a ainsi établi le résultat suivant.

4.3. Le théorème réciproque.

Tout taquet est l'ensemble représentatif de son antécédent.

5. Le cas où la limite supérieure est infinie ($s(f) = +\infty$).

On se donne $f \in C$ telle que $s(f) = a = +\infty$ et $i(f) = b \leqslant +\infty$.

A partir des considérations générales (voir **2.9**), on sait déjà ceci. A la fonction f est associée une fonction $p : \mathbf{R}_+ \to [0, b]$, le **profil** de f, qui est définie par $p(c) = i(h_c)$ où h_c est le f-enveloppe de g_c et $g_c(t) = ct$.

Le profil p est une fonction concave, croissante. Ainsi $\lim_{c\to+\infty} p(c)$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ et elle est majorée par b.

Pour les abscisses finies, l'ensemble représentatif $R(f)$ est constitué des couples (c, y) ou $c \in \mathbf{R}_+$ et $0 \leqslant y \leqslant p(c)$.

Pour l'abscisse infinie, et lorsque b est *finie*, on a déjà observé au **2.3** que l'on avait la relation

$$(+\infty, y) \in R(f) \quad \underline{\text{ssi}} \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Dans un instant, on va voir que cette relation est encore vraie lorsque b est *infinie*, ce qui veut dire que l'on aura toujours

$$R(f) = \{(c, y) : c \in \mathbf{R}_+ \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant p(c)\} \cup \{(+\infty, y) : 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Ainsi, on aurait pu s'attendre à ce que l'on ait

$$¿ \quad \lim_{c\to+\infty} p(c) = b \quad ?$$

Deux *contre-exemples* prouvent qu'il n'en est rien et que l'on peut avoir $p(c) \equiv 0$ tandis que b est *non nul* (fini ou infini).

5.1. Deux contre-exemples où $s(f) = a = +\infty$.

On se donne une suite $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ telle que

(i) $a_n = t_n - t_{n-1} \geqslant 1 \quad (n \geqslant 1)$ donc, en particulier, $t_n \geqslant n$;

(ii) (a_n) soit croissante ;

(iii) $\lim \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = +\infty$.

La suite $b_n = t_n^2 - t_{n-1} = t_n(t_n - 1) + a_n$ sera elle-même croissante !

1) On définit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ par

$f(0) = 0$ et $f(t) = t_n$ pour $t_{n-1} < t \leqslant t_n \quad (n \geqslant 1)$.

Cette fonction est croissante, elle appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$.

On a $i(f) = 1$ et $s(f) = +\infty$ et $p(c) \equiv 0$.

En effet : on a $f(t) \geqslant t$ et $f(t_n) = t_n$ donc $i(f) = 1$.

De plus $f(t_n+1)=t_{n+1}$ d'où $\dfrac{f(t_n+1)}{t_n+1}=\dfrac{t_{n+1}}{t_n+1}$ donc $s(f)=+\infty$.

Calculons $p(1)$: $g(t)=t$. On pose $u(t)=f(t)-t$; donc, pour $t_{n-1}<t\leqslant t_n$, on a $u(t)=t_n-t$. On a donc $\sup\limits_{t_{n-1}<t\leqslant t_n} u(t)=t_n-t_{n-1}=a_n$, $v(t)=a_n$, $h(t)=f(t)-v(t)=t_{n-1}$,

$\dfrac{h(t_n)}{t_n}=\dfrac{t_{n-1}}{t_n}\to 0$, donc $p(1)=i(h)=0$. Comme la fonction p est concave sur $\mathbf{R}_+$, on a donc $p(c)\equiv 0$ comme annoncé.

2) On définit $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ par $f(0)=0$ et $f(t)=t_n^2$ pour $t_{n-1}<t\leqslant t_n\quad(n\geqslant 1)$.

Cette fonction appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$. On a $i(f)=s(f)=+\infty$ et $p(c)\equiv 0$.

En effet : on a $f(t)\geqslant t^2$ donc $i(f)=s(f)=+\infty$.

Calculons $p(1)$: $g(t)=t$. On pose $u(t)=f(t)-t$ donc, pour $t_{n-1}<t\leqslant t_n$, on a $u(t)=t_n^2-t$, $v(t)=\sup u(t)=t_n^2-t_{n-1}=b_n$, $h(t)=f(t)-v(t)=f(t)-b_n=t_{n-1}$,

$\dfrac{h(t_n)}{t_n}=\dfrac{t_{n-1}}{t_n}\to 0$, donc $p(1)=i(h)=0$, donc $p(c)\equiv 0$.

Exemples de suites (t_n) convenables.

1) $t_0=0 \qquad t_{n+1}=t_n^2+t_n+1 \qquad n\geqslant 1$

$a_n=t_{n-1}^2+1$, les t_n sont des entiers.

2) On prend une suite croissante $a_n\geqslant 1$

$t_0=0 \qquad t_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

La condition (iii) devient

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=1+\frac{a_{n+1}}{t_n}\to+\infty.$$

Il suffit de prendre $a_{n+1}=nt_n$ par récurrence. Si les a_n sont entiers les t_n le seront aussi.

5.2. Proposition.

Soit $f\in\mathcal{C}$ telle que $i(f)=s(f)=+\infty$. Alors $\{+\infty\}\times\mathbf{R}_+\subset R(f)$.

Démonstration. — Nous utiliserons un procédé analogue à celui des enveloppes, la notion "duale" pour ainsi dire.

Un cas particulier d'enveloppes inférieures (voir le **2.6**).

On se donne f et g dans $\mathcal{C}$. On suppose que $g \leqslant f$ et on pose

$$V(f,g) = \{u \in S(f) : u \geqslant g\}.$$

On désigne par h l'*enveloppe inférieure* des $u \in V(f,g)$.

1) Ainsi h est croissante, $h(0) = 0$ et, d'après le **2.5,4)**, on a $h \operatorname{sub} f$. Bien entendu, on a aussi $h \geqslant g$. Autrement dit $h \in V(f,g)$: parmi toutes les fonctions u appartenant à $V(f,g)$, il en est une plus petite que toutes les autres, et c'est leur enveloppe inférieure h (une sorte de "voûte"). On dira que h est la **f-enveloppe inférieure** de g.

2) Voici une expression commode de h.

On pose $v(x) = \inf\limits_{t \geqslant x} (f(t) - g(t))$ pour chaque $x \in T$.

On va voir que $h = f - v$.

Démonstration. — On a $v \in \mathcal{C}$ car $v(0) = 0$ et v est visiblement croissante. On a aussi v sub f.

En effet : pour $x \leqslant y$ dans T, posons

$$\omega(x,y) = \inf_{x \leqslant t \leqslant y} (f(t) - g(t)).$$

Ainsi $v(x) = v(y) \wedge \omega(x,y)$ d'où

$$v(y) - v(x) = v(y) - v(y) \wedge \omega(x,y) = 0 \vee (v(y) - \omega(x,y)).$$

Or $f(t) - g(t) \geqslant f(x) - g(y)$ pour $x \leqslant t \leqslant y$

donc $\omega(x,y) \geqslant f(x) - g(y)$ et $v(y) \leqslant f(y) - g(y)$,

d'où

$$v(y) - \omega(x,y) \leqslant f(y) - g(y) - (f(x) - g(y)) = f(y) - f(x).$$

Ainsi $f - v \in \mathcal{C}$ et $(f - v)$ sub f.

3) Soit alors $u \in S(f)$. On a

$$u \geqslant g \quad \underline{\text{ssi}} \quad f - g \geqslant f - u \quad \underline{\text{ssi}} \quad v \geqslant f - u \quad \underline{\text{ssi}} \quad u \geqslant f - v.$$

Donc $h = f - v$ comme annoncé. $\square$

4) **Lemme:** *Soit $u \in \mathcal{F}$ donnée telle que $u(0) = 0$ et $u \geqslant 0$. On pose $v(x) = \inf_{t \geqslant x} u(t)$. Alors $v \in \mathcal{C}$ et $0 \leqslant v \leqslant u$. On a aussi $i(u - v) = 0$.*

En effet : Comme $u - v \geqslant 0$, on a $i(u - v) \geqslant 0$. D'autre part, pour chaque $x \in T$, il existe $t = t(x) \geqslant x$ tel que $u(t) \leqslant v(x) + 1 \leqslant v(t) + 1$ de par la définition de v, d'où $0 \leqslant u(t) - v(t) \leqslant 1$. Lorsque x tend vers l'infini, on a aussi $t = t(x) \to +\infty$ et donc $\dfrac{u(t) - v(t)}{t} \to 0$ donc $i(u-v) \leqslant 0$. $\square$

5) *Si h est la f-enveloppe inférieure de g* : on applique le lemme à $u = f - g$; on a $h = f - v$ donc $u - v = h - g$ d'où $0 = i(u - v) = i(h - g) \geqslant i(h) - s(g)$ donc $i(h) \leqslant s(g)$ (fini ou non). Du fait que $g \leqslant h$, on tire $i(g) \leqslant i(h) \leqslant s(g)$.

6) *Cas particulier:* Celui où $g(t) = ct$ pour t assez grand. Puisqu' alors $i(g) = s(g) = c$, on aura $i(h) = c$ où h est la f-enveloppe inférieure de g.

Revenons à la proposition.

On considère $f \in \mathcal{C}$ telle que $i(f) = s(f) = +\infty$. On se donne $c \in \mathbf{R}_+$ et on considère $g(t) = ct$ pour t assez grand ; on aura $g \leqslant f$ et l'on peut alors considérer h la f-enveloppe inférieure de g. D'après ce qui précède, on a donc $h \in S(f)$ et $i(h) = c$.

Deux cas se présentent alors : si $s(h) = +\infty$, on aura $r(h) = (+\infty, c) \in R(f)$. Si, par contre, $s(h) < +\infty$, on est assuré, par la construction du mesclun au **2.2**, qu'il existe au moins une fonction $l \in S(f)$ pour laquelle $r(l) = (+\infty, c)$.

Dans les deux cas, on a donc bien $(+\infty, c) \in R(f)$ comme annoncé, ce qui achève la démonstration. $\square$

5.3. Synthèse dans le cas où la limite supérieure est infinie ($s(f) = +\infty$).

On se donne un *profil* $p : \mathbf{R}_+ \to [0, b]$ où $b \leqslant +\infty$, i.e. la fonction p est concave, croissante, telle que $p(0) = 0$ et $p(x) \leqslant x$ (la limite $\lim\limits_{c \to +\infty} p(c)$ qui existe est majorée par b mais ne lui est pas nécessairement égale !).

On va montrer qu'il existe au moins une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$ telle que $i(f) = b,\ s(f) = +\infty$ et

$$R(f) = \{(c,y) : c \in \mathbf{R}_+ \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant p(c)\} \cup (\{+\infty\} \times [0,b]).$$

Comme dans le cas des taquets "ordinaires" (voir **4.2**), afin de faire la synthèse ici, on se donne une suite $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots$ où l'on supposera que $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ *croît* vers l'infini, et on posera $I(n) = [t_n, t_{n+1}[$ à nouveau. A la suite des t_n, on associera une suite $c_0 = 0 < c_1 < \cdots < c_n < \cdots$ où $\lim\ c_n = +\infty$. On dira plus loin comment on choisit les c_n en fonction de la suite des t_n.

Pour chaque $n \geqslant 1$, on a un taquet fixé en $(c_n, p\ (c_n))$ obtenu par troncature à l'abscisse c_n. On désignera par λ_n la fonction auxiliaire de ce taquet (voir **4.1**).

Cela fait, on définit alors un antécédent $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ comme suit.

On prend

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 &\qquad &\text{pour} \quad t \in I(0) \\ f(t) &= t\lambda\left(\tfrac{t_n}{t}\right) &\qquad &\text{pour} \quad t \in I(n),\ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

On va montrer que cette fonction convient.

1) On sait déjà que f est croissante sur $I(n)$, comme dans la démonstration du **4.2**. On a $f(t_n) = c_n\ t_n$ et, pour $t \in I(n)$, $f(t) \leqslant c_n t \leqslant c_n\ t_{n+1} \leqslant c_{n+1} t_{n+1} = f(t_{n+1})$. Donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ tout entier, i. e. $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$ comme annoncé.

2) On a $\dfrac{f(t_n)}{t_n} = c_n$ qui tend vers l'infini. Donc $s(f) = +\infty$.

3) Pour $t \in I(n),\ n \geqslant 1$, on a $\dfrac{f(t)}{t} = \lambda_n \left(\dfrac{t_n}{t}\right)$ fonction décroissante de t qui a donc pour borne inférieure sur $I(n)$ le nombre $b_n = \lambda_n \left(\dfrac{t_n}{t_{n+1}}\right)$ lui-même minoré par $p(c_n)$.

Par un choix judicieux de la suite (c_n) en fonction de la suite (t_n), on va montrer que l'on peut s'arranger pour que $\liminf\ b_n = b$, que ce dernier soit fini ou infini. Cela fait, on aura donc bien $i(f) = b$.

On distinguera le cas où b est fini du cas où b est infini.

4) *Si b est infini.* Sur la droite d'appui $\Delta\left(\dfrac{t_n}{t_{n+1}}\right)$, on choisit un point dont l'ordonnée dépasse n et dont on désigne l'abscisse par c_n précisément. De cette façon, on est assuré que $b_n = \lambda\left(\dfrac{t_n}{t_{n+1}}\right) \geqslant n$ et donc $\liminf\ b_n = +\infty$ comme désiré. (Ces choix se font par récurrence et en veillant à ce que la suite des c_n soit strictement croissante et tende vers l'infini). (Voir figure 5).

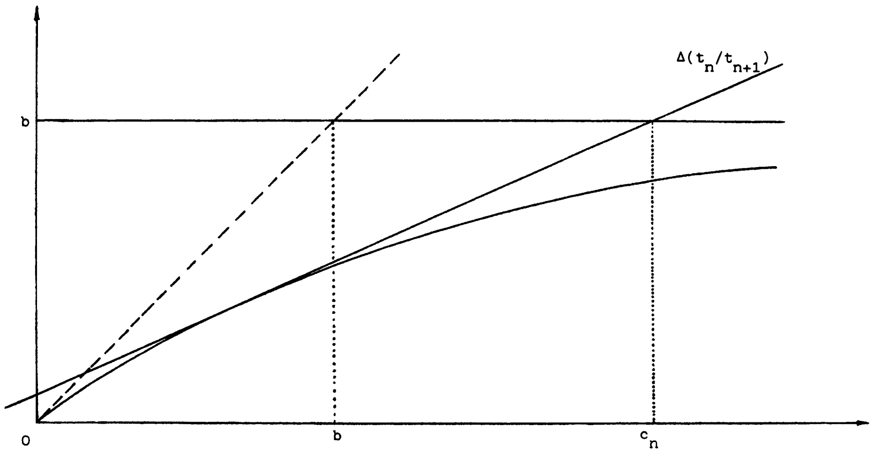

Figure 5

5) *Si b est fini.* On prend pour c_n l'abscisse du point d'ordonnée b sur la droite d'appui $\Delta\left(\dfrac{t_n}{t_{n+1}}\right)$. Ainsi $b_n = \lambda_n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}}\right) = b$ pour tout $n \geqslant 1$!

Ces choix faits, on a $i(f) = b$ et $s(f) = +\infty$ comme souhaité.

Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à établir ceci.

6) *Soit* $0 < c < +\infty$ *et soit* h *la* f*-enveloppe de la fonction* $(t \longmapsto ct)$. *Alors* $i(h) = p(c)$.

Démonstration.

On considère les n assez grands pour que $c < c_n$. On a h sub f et $h(t) \leqslant ct$ par définition. Donc, pour $t \in I(n)$, on a

$$h(t) \leqslant f(t) - f(t_n) + h(t_n) \leqslant f(t) - c_n t_n + ct_n$$

donc

$$\frac{h(t)}{t} \leqslant \lambda_n\left(\frac{t_n}{t}\right) - (c_n - c)\frac{t_n}{t} = \theta_n\left(\frac{t_n}{t}\right).$$

Comme au **4.2**, on distingue deux cas ($z = p'_d(c)$).

Si $z > 0$, pour $t = \dfrac{t_n}{z}$, on aura $\theta_n\left(\frac{t_n}{t}\right) = p(c)$.

Si $z = 0$, toutes les fonctions auxiliaires λ_n sont égales à la fonction auxiliaire μ du taquet tronqué à l'abscisse c, et $\theta_n\left(\frac{t_n}{t}\right)$ tend vers $p(c)$, et atteint même cette valeur, pour $\dfrac{t_n}{t}$ assez petit. Dans les deux cas donc, on a $i(h) \leqslant p(c)$.

Pour établir l'inégalité inverse, on introduit une fonction $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ comme au **4.2**. On reprend la fonction auxiliaire μ ci-dessus et on suppose que $c_{m-1} < c \leqslant c_m$. On pose alors

$$\begin{array}{rl} g(t) = f(t) & \text{pour} \quad t < t_m; \\ g(t) = t\mu\left(\frac{t_n}{t}\right) & \text{pour} \quad t \in I(n),\ n \geqslant m. \end{array}$$

Sur $[0, t_m[$, la fonction g coïncide avec f, au-delà elle coïncide avec l'antécédent du taquet tronqué : ainsi g est croissante et $g(t) \leqslant ct$. On vérifie (comme au **4.2**) que $g \operatorname{sub} f$. Ainsi $g \leqslant h$. Donc $p(c) = i(g) \leqslant i(h) \leqslant p(c)$. D'où l'égalité annoncée.

Fin de la démonstration. $\square$

6. Remerciements.

Les auteurs tiennent à remercier, vivement, le rapporteur pour ses nombreuses remarques, observations, critiques et suggestions qui les ont obligés à remanier, en l'améliorant, le texte original.

Bibliographie

[B] N. Bourbaki. “Topologie Générale, chapitres 5 à 10, TG IX.1”, Définition 1. Diffusion C.C.L.S., Paris, 1974.

[DGr] Y. Dupain et G. Grekos. Densités des sous-suites équiréparties d' une suite donnée, dans: “Journées de Théorie Additive des Nombres, 1977”, édité par J.-M. Deshouillers et Fr. Dress. Université de Bordeaux I, U.E.R. de Mathématiques et d' Informatique, 1981, p. 43-56.

[FGi] A. Fuchs et R. Giuliano Antonini. Théorie générale des densités. Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Mat. 108 (1990), Vol. **14**, 253-294.

[Gr1] G. Grekos. Répartition des densités des sous-suites d'une suite d'entiers. J. Number Theory **10** (1978), 177-191.

[Gr2] G. Grekos. Moyennes limites et convexité. Period. Math. Hungarica **22** (1990), 159-166.

[GrV] G. Grekos et B. Volkmann. On densities and gaps. J. Number Theory **26** (1987), 129-148.

[HR] H. Halberstam et K. F. Roth. "Sequences." Oxford Univ. Press, 1966. 2^{nd} edition, Springer, 1983.

[M] S. Mandelbrojt. "Séries de Dirichlet, principes et méthodes." Monographies internationales de mathématiques modernes, 11. Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[P] G. Pólya. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Z. **29** (1929), 549-640.