

DENIS MERCIER

**Problèmes de transmission sur des réseaux  
polygonaux pour des systèmes d'EDP**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n° 1 (2001), p. 107-162

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_2001\\_6\\_10\\_1\\_107\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_1_107_0)

© Université Paul Sabatier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Problèmes de transmission sur des réseaux polygonaux pour des systèmes d'EDP (\*)

DENIS MERCIER <sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Nous étudions des problèmes de transmission pour des systèmes elliptiques du type Agmon-Douglis-Nirenberg sur les réseaux polygonaux avec des conditions de bord et de transmission générales. Nous généralisons ainsi le résultat de [22, 23] dans le cas deux-dimensionnel et pour des opérateurs qui peuvent être d'ordre différent: la solution se décompose en une “partie régulière” augmentée d’une combinaison linéaire finie de fonctions “singulières”. Nous présentons des exemples de calcul pour les exposants singuliers qui interviennent dans la régularité de la solution.

**ABSTRACT.** — We study transmission problems for elliptic systems in the sense of Agmon-Douglis-Nirenberg on polygonal networks with general boundary and interface conditions. We generalize the result of [22, 23] in the two-dimensional case when the operators may be of different order: the solution admits a decomposition into a “regular part” and a finite linear combination of “singular” functions. For some mechanical examples, we give some results about the singular exponents and so we obtain the regularity of the solution.

---

---

(\*) Reçu le 25 mai 1999, accepté le 18 avril 2001

(1) Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 Valenciennes cedex 9.

e-mail: dmercier@univ-valenciennes.fr

## 1. Introduction

L' étude de systèmes d'équations aux dérivées partielles sur des multistruktures a fait récemment l'objet de nombreux travaux, voir par exemple [11, 10, 12, 4, 8, 5, 19]; ces multistruktures sont composées d'un nombre fini d'éléments flexibles interconnectés tels que cordes, poutres, coques, plaques... ou une combinaison entre elles. Des résultats d'existence et de régularité pour de tels problèmes ont été établis pour chaque modèle et possèdent clairement des similarités. Le but principal de ce travail est de présenter un cadre aussi large que possible incluant les modèles deux-dimensionnels précédents.

Pour cela nous traitons des problèmes de transmission pour des systèmes elliptiques d'équations aux dérivées partielles sur des réseaux polygonaux deux-dimensionnels avec des conditions de bord et de transmission assez générales. Nous introduisons des conditions de recouvrement vérifiant des conditions de type Agmon-Douglis-Nirenberg (voir [2]). Nous considérons une classe d'opérateurs de bord et de transmission (basée sur une condition du même type que la condition (19) de [18]) pour laquelle nous pouvons associer une formulation variationnelle par l'intermédiaire d'une formule de Green. En fait, en se donnant pour chaque fonction inconnue et chaque côté du réseau polygonal un système d'opérateurs de Dirichlet, on fait correspondre un système d'opérateurs que l'on peut qualifier de "normal", à l'instar de [13], ce qui nous permet de considérer des conditions de bord et de transmission non homogènes sous la forme d'une relation linéaire liant ces deux systèmes. Nous étudions ensuite la régularité de la solution variationnelle. Cette étude se fait de manière plus ou moins classique (voir [7] par exemple) en considérant d'abord un problème homogène à coefficients constants et un second membre dans des espaces de Sobolev à poids. Les résultats généraux montrent que la régularité est optimale loin des sommets du réseau polygonal, ainsi il suffit d'analyser la régularité près de chaque sommet  $S$ . Le problème est alors transporté dans le cône infini qui correspond au sommet  $S$  et, utilisant la technique de [9] pour  $p = 2$  et de [17] pour  $p \neq 2$ , la solution variationnelle se décompose en la somme d'une partie "régulière" (c'est-à-dire possédant la régularité optimale) et d'une combinaison linéaire finie de fonctions singulières qui ne dépendent que du domaine et des opérateurs. Les coefficients de cette combinaison linéaire dépendent continûment des données. Chaque fonction singulière qui intervient dans cette décomposition est déterminée de façon explicite et sa régularité dépend de la partie réelle d'un paramètre complexe  $\lambda$  qui appartient au spectre discret de l'opérateur obtenu après transformée de Mellin du problème modèle dans le cône infini. Quelques calculs de ces valeurs propres (ou exposants de

singularités) sont présentés pour des exemples tirés de la mécanique (voir [11, 19, 21]). Enfin, dans le cas général où le second membre se situe dans les espaces de Sobolev usuels et où les opérateurs sont à coefficients variables, la résolution polynomiale et la technique employée dans [7] (moyennant une hypothèse sur les opérateurs de bord et de transmission lorsque les ordres des opérateurs sont différents) donnent un résultat de décomposition en partie “régulière” augmentée d’une partie singulière. Finalement l’influence du choix de l’espace variationnel sur la partie singulière de la solution est illustrée sur un exemple.

Pour terminer cette introduction précisons le plan et les principaux résultats de ce travail.

Dans la section 2, nous présentons le cadre général des problèmes considérés: dans les sous-sections 2.1 à 2.3, nous rappelons la définition de réseau polygonal 2-D dans l’espace  $\mathbb{R}^3$  (suivant la définition plus générale d’espace ramifié de G. Lumer [14]). Nous considérons des problèmes elliptiques  $l_i$  (ou des systèmes proprement elliptiques) sur chacun des sous-domaines  $\Omega_i$ , et en chaque point O du squelette formé par les arêtes des sous-domaines, nous imposons des conditions de bord ou de transmission qui recouvrent le système elliptique formé par la juxtaposition des systèmes  $l_i$  associés aux polygones  $\Omega_i$  adjacents en O; en fait cette condition de recouvrement signifie que les conditions de Shapiro-Lopatinski sont satisfaites (voir [22]). Puis, dans la sous-section 2.4 nous présentons quelques exemples tirés de la littérature qui entrent dans notre cadre [11, 21, 15, 19]. Il s’agit de couplages entre l’opérateur de Laplace, le système de l’élasticité et l’opérateur biharmonique. Ces exemples seront ultérieurement utilisés pour illustrer les résultats abstraits obtenus.

La section 3 a pour but de rechercher des conditions de bord ou de transmission les plus générales possibles, qui permettent de mettre le système global sous une forme variationnelle. De façon générale, l’espace variationnel  $V$  considéré est un sous espace de  $H_v^{\vec{m}}(\Omega)$  où  $\vec{m}$  est le vecteur des demi-ordres  $m_i$  des systèmes elliptiques  $l_i$  définis sur chaque sous domaines  $\Omega_i$  et  $H_v^{m_i}(\Omega_i)$  est l’adhérence dans  $H^{m_i}(\Omega_i)$  des fonctions  $C^\infty$  dont le support évite les sommets de  $\Omega_i$ . Dans la sous-section 3.1, nous considérons d’abord des systèmes normaux de Dirichlet (notés  $F_\Gamma$ ) pour chaque côté  $\Gamma$  du domaine et nous associons par l’intermédiaire d’une formule de Green des systèmes d’opérateurs “normaux”  $\Phi_\Gamma$  de façon un peu analogue à la définition de [13], ceci afin d’établir un résultat de relèvement de trace permettant de considérer des conditions de bord et de transmission non homogènes. Dans la sous-section 3.2, nous considérons une sous-classe de conditions de bord et de transmission qui est une relation linéaire entre  $F_\Gamma$

et  $\Phi_\Gamma$ ; nous montrons ensuite que le problème précédent s'écrit alors sous la forme

$$a(u, v) + b(u, v) = f(v), \forall v \in V,$$

où  $a$  est définie à l'intérieur des  $\Omega_i$  et  $b$  sur le squelette. Cette relation entre  $F_\Gamma$  et  $\Phi_\Gamma$  est analogue à la relation nécessaire et suffisante rencontrée dans [18] dans le cadre 1-dimensionnel. Notons que cette condition imposée sur les opérateurs de bords recouvre en fait beaucoup de situations réelles comme le montrent les exemples de la sous-section 3.4.

On s'intéresse ensuite à la régularité de la solution variationnelle (dite aussi "faible"). Dans la section 4, nous mettons en œuvre la théorie développée initialement par Kondratiev (voir [9, 17, 7]) en établissant d'abord un résultat pour des opérateurs homogènes à coefficients constants et des seconds membres dans des espaces de Sobolev à poids du type Kondratiev. Dans les sous-section 4.1, nous supposons d'abord au voisinage de chaque sommet  $S$  que les opérateurs sont égaux à leur partie principale gelée en ce sommet, puis en considérant le problème dans le cône infini  $C_S$  qui coïncide avec le domaine, nous associons au problème modèle, en utilisant les coordonnées locales polaires et la transformée de Mellin, un opérateur  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  elliptique au sens de Agranovitch et Visik [3], agissant sur des espaces de Sobolev définis sur le réseau 1-D sous-jacent au cône et dépendant du paramètre complexe  $\lambda$ . Les fonctions singulières du problème s'obtiennent alors à partir des chaînes de Jordan associées aux valeurs propres  $\lambda$  de cet opérateur. Pour un second membre situé dans des espaces à poids différents les solutions correspondantes diffèrent d'une combinaison linéaire finie de ces fonctions singulières. Ce résultat nous permet dans la sous-section 4.2 d'établir que la solution variationnelle du problème (supposé pour l'instant homogène et à coefficients constants) se décompose en une partie régulière et une partie singulière (combinaison linéaire finie de fonctions singulières) lorsque le second membre est dans un espace à poids. Dans la sous-section 4.3, nous donnons, pour les exemples présentés dans la section 2, des résultats concernant le calcul des exposants de singularités obtenus par la méthode de Newton.

Enfin, dans la section 5, nous considérons le cas général pour des opérateurs à coefficients variables. Dans la sous-section 5.1 nous mettons en œuvre la résolution polynomiale (voir [21] par exemple) qui permet de passer des espaces de Sobolev à poids aux espaces de Sobolev usuels. Sous une hypothèse (notée **H1**) sur les opérateurs de bord et de transmission nous montrons que la résolution polynomiale est possible dans l'espace variationnel. Notons que cette hypothèse permet également d'établir une équivalence entre les conditions de recouvrement et la coercivité (faible) de la forme sesquilinéaire associée à notre problème (voir aussi [1, 22]). Via cette résolution polynomi-

ale nous obtenons encore avec un second membre dans les espaces classiques la décomposition en partie régulière augmentée d'une partie singulière. Enfin dans la sous-section 5.2 nous étudions le cas général où les opérateurs sont à coefficients variables. En chaque sommet  $S$ , l'opérateur est décomposé en "série de Taylor", ceci afin de définir les fonctions singulières en utilisant la technique développée dans [7]. Par des arguments de perturbation compacts, nous montrons que la solution variationnelle est constituée d'une partie régulière augmentée d'une combinaison linéaire finie de ces fonctions singulières. Finalement, dans la sous-section 5.3, nous montrons à l'aide d'un exemple l'incidence du choix de l'espace variationnel sur la partie singulière de la solution. Dans cet exemple, l'espace variationnel naturel est  $H^{\overline{m}}(\Omega)$  alors que l'utilisation (permise) de l'espace  $H_v^{\overline{m}}(\Omega)$  introduit une singularité supplémentaire artificielle car nous montrons que le coefficient de cette singularité de la solution dans  $H^{\overline{m}}(\Omega)$  est nul.

## 2. Formulation du problème.

### 2.1. Les domaines.

Nous allons considérer des problèmes d'interface dans les domaines deux-dimensionnels suivant dont nous convenons de la

**DÉFINITION 1.** —  $\Omega$  est un réseau deux-dimensionnel polygonal topologique (noté en abrégé réseau 2-D) dans  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $\Omega$  est un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^3$  formé d'une union finie de  $K$  sous-espaces ouverts  $\Omega_i$  tels que

(i)  $\Omega_i$  est une surface plane de  $\mathbb{R}^3$ , ouverte (pour la topologie induite) et connexe. Plus précisément, on suppose que la frontière de  $\Omega_i$  est un polygone droit: on écrit cette frontière sous la forme

$$\partial\Omega_i = \bigcup_{q=1}^{Q_i} \overline{\gamma_{iq}},$$

où les côtés  $\overline{\gamma_{iq}}$  sont des segments. Les sommets de  $\Omega_i$  sont les intersections de 2 côtés consécutifs.

(ii)  $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^K \overline{\Omega}_i$  est connexe,

(iii) pour chaque  $i, j \in \{1, 2, \dots, K\}, i \neq j, \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$  est soit vide ou contient un sommet commun, ou encore un côté commun.

Voir les Figures 1 et 2 comme exemples de réseau polygonal 2-D.

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble de tous les côtés  $\gamma_{iq}$  et pour  $\Gamma \in \mathcal{A}$ , on note

$$I_\Gamma = \{i \in \{1, 2, \dots, K\} : \exists q \in \{1, 2, \dots, Q_i\}, \gamma_{iq} = \Gamma\}.$$

$\mathcal{S}$  représente la famille des sommets de  $\Omega$  et pour  $S \in \mathcal{S}$ ,  $I_S$  représente l'ensemble des  $i$  tels que  $S$  soit un sommet de  $\Omega_i$ .

*Remarque 2.* — Un réseau 2-D est un espace ramifié au sens de G. Lumer (voir [14], voir aussi [21] pour la définition d'un réseau deux-dimensionnel polygonal topologique).  $\square$

## 2.2. Espaces fonctionnels.

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, K\}$ , fixons  $N_i$  un entier strictement positif. L'espace fonctionnel des solutions de notre problème considéré ci-dessous sera un espace de fonctions vectorielles

$$u : x \longmapsto u(x),$$

qui pour chaque face  $\Omega_i$  est de longueur  $N_i$ ; autrement dit pour tout  $i = 1, \dots, K$ , la restriction  $u_i$  de  $u$  à  $\Omega_i$  est une fonction vectorielle de  $\Omega_i$  dans  $\mathbb{R}^{N_i}$ , notée

$$\begin{aligned} u_i : \Omega_i &\longrightarrow \mathbb{R}^{N_i} \\ x_i &\longmapsto (u_{i1}(x_i), u_{i2}(x_i), \dots, u_{iN_i}(x_i)). \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, si chaque  $u_{il} \in W^{k_{il}, p}(\Omega_i)$ , on écrira  $u \in W^{\vec{k}, p}(\Omega)$  où  $\vec{k} = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{iN_i})_{i \in \{1, \dots, K\}}$ .

Enumérons maintenant les définitions des espaces de Sobolev (sans ou avec poids) qui seront utiles par la suite.

**DÉFINITION 3.** — Soit  $p \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , alors on note

$$W^{\vec{k}, p}(\Omega) = \{u : u_{il} \in W^{k_{il}, p}(\Omega_i)\}$$

qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\vec{k}, p, \Omega} = \left( \sum_i \sum_l \|u_{il}\|_{W^{k_{il}, p}(\Omega_i)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = 2$ , c'est un espace de Hilbert noté  $H^{\vec{k}}(\Omega)$  dont le produit scalaire sera noté  $(\cdot, \cdot)_{\vec{k}, 2, \Omega}$ .

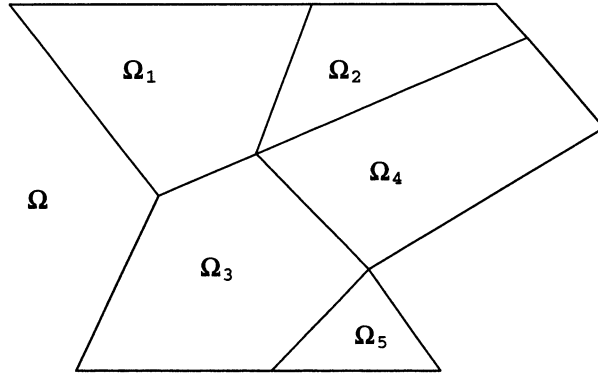


Figure 1

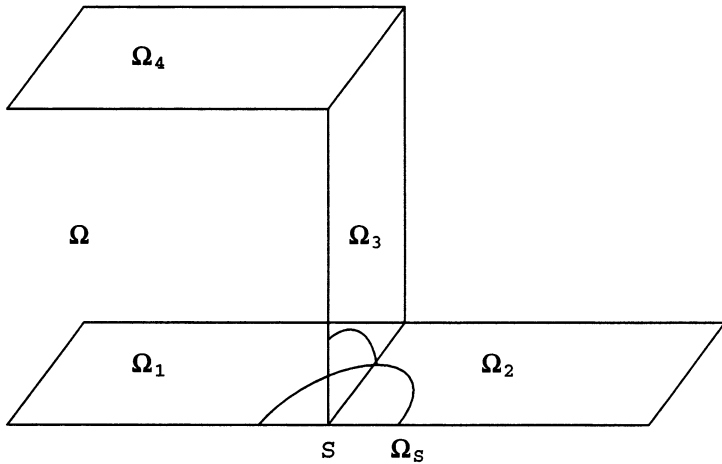


Figure 2

DÉFINITION 4. — Introduisons l'espace (voir [22])

$$C_v^\infty(\overline{\Omega}_i) := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}_i) : u = 0 \text{ dans un voisinage des sommets de } \Omega_i\}.$$

Alors pour  $\vec{k} = (k_{il})_{1 \leq i \leq K, 1 \leq l \leq N_i}$ , on définit

$$H_v^{\vec{k}}(\Omega) = \{u \in H^{\vec{k}}(\Omega) : u_{il} \in H_v^{k_{il}}(\Omega_i)\},$$

où  $H_v^{k_{il}}(\Omega_i)$  est la fermeture de  $C_v^\infty(\overline{\Omega}_i)$  pour la norme de  $H^{k_{il}}(\Omega_i)$ .



*Remarque 5.* — Notons que  $u \in H_v^{\vec{k}}(\Omega)$  satisfait pour tout  $S \in \mathcal{S}, i \in I_S, l \in \{1, \dots, N_i\}$ ,

$$D^\alpha u_{il}(S) = 0, \text{ pour tout } \alpha : |\alpha| < k_{il} - 1. \quad (1)$$

De plus d'après [7] (Propriétés (3.1)), nous avons

$$H_v^{\vec{k}}(\Omega) = \{u \in H^{\vec{k}}(\Omega) \text{ satisfaisant (1)}\}. \quad \square$$

**DÉFINITION 6.** — Si  $m \in \mathbb{N}, V_\beta^{m,p}(\Omega_i)$  est la fermeture de  $C_v^\infty(\overline{\Omega_i})$  pour la norme

$$\|f\|_{V_\beta^{m,p}(\Omega_i)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| r_i^{\beta-m+|\alpha|} D^\alpha f \right\|_{L_p(\Omega_i)}, \quad (2)$$

où  $r_i = r_i(x)$  est la distance de  $x_i$  aux sommets de  $\Omega_i$ .

$V_\beta^{\vec{k},p}(\Omega) = \{u : u_{il} \in V_\beta^{k_{il},p}(\Omega_i)\}$  est muni de la norme

$$\|u\|_{V_\beta^{\vec{k},p}(\Omega)} = \sum_i \sum_l \|u_{il}\|_{V_\beta^{k_{il},p}(\Omega_i)}.$$

Nous définissons l'espace de trace sur chaque  $\gamma_{iq}$  comme l'espace quotient

$$V_\beta^{(m-\frac{1}{p}),p}(\gamma_{iq}) = V_\beta^{m,p}(\Omega_i) / \overset{\circ}{V}_\beta^{m,p}(\Omega_i, \gamma_{iq})$$

où  $\overset{\circ}{V}_\beta^{m,p}(\Omega_i, \gamma_{iq})$  est la fermeture de

$$C_{\gamma_{iq}}^\infty(\Omega_i) = \{u \in C_v^\infty(\overline{\Omega_i}), \text{supp } u \cap \gamma_{iq} = \emptyset\}$$

pour la norme (2).

### 2.3. Opérateurs.

Décrivons tout d'abord les opérateurs différentiels considérés sur  $\Omega$ : pour chaque  $i \in \{1, \dots, K\}$  soit

$$l_i^{ll'}(x_i, D) = (l_i^{ll'}(x_i, D))_{1 \leq l, l' \leq N_i},$$

un système de  $N_i \times N_i$  opérateurs différentiels à coefficients dans  $C^\infty(\overline{\Omega_i})$ . Nous supposons que chaque opérateur  $l_i^{ll'}$  s'écrit sous la forme divergentielle

$$l_i^{ll'} = \sum_{|\alpha| \leq m_{il'}, |\beta| \leq m_{il}} (-1)^\beta D^\beta (a_{ill'}^{\alpha\beta} D^\alpha),$$

avec  $a_{il'}^{\alpha\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega}_i)$ , pour tout  $|\alpha| \leq m_{il'}$ ,  $|\beta| \leq m_{il}$ .

Pour les degrés des opérateurs nous introduisons aussi les notations de [2]: on considère des entiers  $s_{il}$  et  $t_{il'}$  tels que

$$\deg l_i^{ll'} \leq s_{il} + t_{il'},$$

où, sans restreindre la généralité, on peut supposer que  $s_{il} \leq 0, \forall i, l$ .

Avec ces notations, nous pouvons définir la partie principale de  $l = (l_i^{ll'})$  de deux façons différentes.

Première façon: la partie principale de  $l$  notée  $l_0$  est définie par

$$l_0 = ((l_i^{ll'})_0)_{l,l'},$$

où  $(l_i^{ll'})_0$  est la partie principale de l'opérateur  $l_i^{ll'}$  dans le sens où  $(l_i^{ll'})_0$  est le terme d'ordre  $m_{il} + m'_{il}$  de  $l_i^{ll'}$ .

Deuxième façon: la partie principale de  $l$  notée  $l_0$  est définie par

$$l_0 = ((l_i^{ll'})_0)_{l,l'},$$

où  $(l_i^{ll'})_0$  est la partie principale de  $l_i^{ll'}$  dans le sens où  $(l_i^{ll'})_0$  est le terme d'ordre  $s_{il} + t_{il'}$  de  $l_i^{ll'}$ .

Nous ferons l'

**Hypothèse** : les deux parties principales définies précédemment coïncident.

*Remarque 7.* — Cette hypothèse est vérifiée dans les exemples qui vont suivre. D'autre part, dans la littérature à notre connaissance on prend toujours

$$s_{il} + t_{il'} = m_{il} + m_{il'}, \forall i, l, l',$$

ce qui dans certains cas nous oblige à prendre des seconds membres plus réguliers (car dans la suite, les seconds membres volumiques seront pris dans  $H^{-\overline{s}}(\Omega)$ , voir sous-section 3.3). Illustrons cela avec l'exemple suivant: Prenons  $K = 1$ , et sur  $\overline{\Omega}$  considérons le système d'opérateurs

$$l = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ \gamma \frac{\partial}{\partial x_1} & \rho \Delta^2 \end{pmatrix}$$

avec les conditions de bord suivantes

$$u_1 = u_2 = \partial_\nu u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

où  $\partial_\nu$  désigne la dérivation par rapport à la normale extérieure et  $\gamma$  est un réel et  $\rho$  un réel positif. De plus on choisit  $\gamma$  suffisamment petit de sorte que l'on puisse associer aux équations précédentes la forme sesquilinéaire sur  $V = \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$  suivante

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla \bar{v}_1 + \gamma \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \bar{v}_2) dx \\ &+ \rho \int_{\Omega} (\Delta u_2 \Delta \bar{v}_2 - (1 - \sigma) \{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_2^2} \\ &+ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1 \partial x_2} \}) dx, \end{aligned}$$

qui sera fortement coercive.

Ici  $\vec{m} = (m_1, m_2) = (1, 2)$ ; si on fait le choix

$$t_1 = 3, t_2 = 4, s_1 = -1, s_2 = 0,$$

pour étudier la régularité de la solution variationnelle, nous serons amenés à prendre un second membre dans  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Tandis que si on souhaite étudier la régularité pour un second membre dans  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  il serait préférable de choisir

$$t_1 = 2, t_2 = 4, s_1 = 0, s_2 = 0,$$

mais dans ce cas  $s_2 + t_1 < m_1 + m_2$ .  $\square$

Nous passons maintenant aux opérateurs de bord et de transmission: pour chaque  $\Gamma \in \mathcal{A}$ , on désigne par  $m_\Gamma$  le nombre  $m_\Gamma = \sum_{i \in I_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_i} m_{il}$ . Les opérateurs de bord que nous considérerons peuvent être exprimés sous la forme suivante:

$$B_{\Gamma h}(u) = \sum_{i \in I_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_i} B_{\Gamma h}^{il}(x, D)(u_{il}), \quad \forall h = 1, \dots, m_\Gamma.$$

où  $B_{\Gamma h}^{il}$  est un opérateur de bord avec coefficient dans  $C^\infty(\Gamma)$  de degré  $r_{\Gamma h} + t_{il}, r_{\Gamma h} \leq -1$  (voir les notations de [2]).

Le système d'EDP que nous considérons est donc:

$$\sum_{l'=1}^{N_i} l_i^{l'}(x_i, D)u_{il} = f_{il}, \quad \forall i = 1, \dots, K, \forall l = 1, \dots, N_i, \quad (3)$$

$$B_{\Gamma h}(u) = \varphi_{\Gamma h}, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{A}, \forall h = 1, \dots, m_\Gamma. \quad (4)$$

On notera  $[L, B]$  l'opérateur associé à (3)-(4). On impose aux opérateurs  $L$  et  $B$  de satisfaire les 2 conditions suivantes:

**Condition I:** Chaque  $l_i$  est proprement elliptique (voir par exemple [13, 21] pour la définition d'un système proprement elliptique).

**Condition II:** Les conditions de bord et de transmission recouvrent  $l$ , autrement dit pour chaque  $x \in \Gamma$ , si on envoie grâce à un difféomorphisme  $\chi_i$  un voisinage  $\theta_i$  de  $x$  dans  $\Omega_i$  sur un voisinage  $\theta$  de  $O$  dans  $\mathbb{R}_+^2$  les conditions B écrites dans  $\theta$  recouvrent au sens de [2] le système  $(l_i)_{i \in I_\Gamma}$  écrit dans  $\theta$  au point  $x = O$ .

## 2.4. Exemples.

Pour illustrer les problèmes que nous voulons considérer, citons quelques exemples de systèmes d'équations aux dérivées partielles avec des conditions de bord et de transmission vérifiant les conditions I et II. Pour simplifier, sauf pour l'exemple 10, nous formulerons ces problèmes uniquement près d'un point conique nommé  $S$ . Pour chaque  $i \in I_S$ , nous décrirons uniquement le cône noté  $C_i$  qui coïncide avec  $\Omega_i$  dans un voisinage de  $S$ . Dans chacun de ces exemples nous exprimerons les opérateurs dans chaque polygone  $\Omega_i$  ( $i \in I_S$ ) et les conditions de bord et de transmission sur les côtés  $\Gamma \in \mathcal{A}_S$ . Nous noterons ici chacun de ces côtés sous la forme  $\Gamma_i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ijk}, \dots$  pour indiquer qu'il s'agit respectivement d'un côté de  $\Omega_i$  uniquement, d'un côté commun à  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , d'un côté commun à  $\Omega_i, \Omega_j$ , et  $\Omega_k$ . Nous appellerons  $\omega_i$  l'angle formé par  $C_i$ .

*Exemple 8.* — Couplage avec l'opérateur de Laplace

Considérons l'opérateur de Laplace sur 3 polygones  $\Omega_i, i = 1, 2, 3$  possédant un côté commun. Les cônes  $C_1$  et  $C_2$  sont dans un même plan, le cône  $C_3$  est situé dans le plan perpendiculaire (voir la Figure 3).

Pour  $i = 1, 2, 3$  nous choisissons  $p_i > 0$  et  $\nu_i$  représente le vecteur unitaire normal sortant du côté  $\Gamma$  de  $\Omega_i$ . Le problème d'interface que nous envisageons est:

$$p_i \Delta u_i = f_i \text{ dans } \Omega_i, \forall i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 \text{ sur } \Gamma_{123}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} = g \text{ sur } \Gamma_{123}, \quad (7)$$

$$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_i, i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

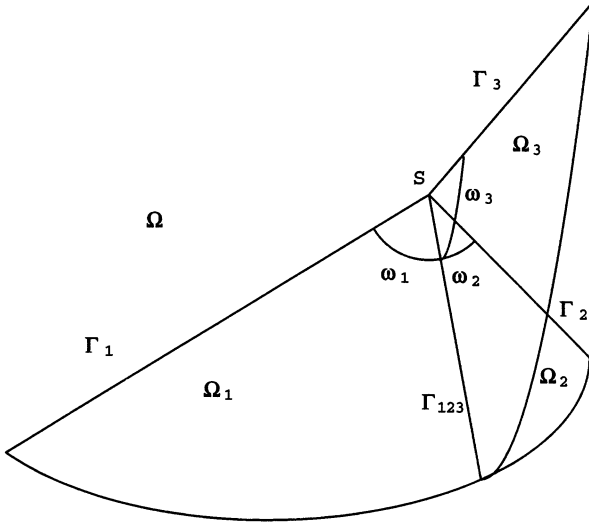


Figure 3

Les opérateurs dans les équations (6)-(8) sont à prendre au sens des traces.

*Exemple 9.* — Mouvement de deux corps élastiques interconnectés.

Cet exemple est tiré de [11] où les auteurs étudient le mouvement d'un corps constitué de plusieurs membranes élastiques interconnectées. Ici nous supposons que le corps est composé de 2 membranes rectangulaires formant un angle  $\alpha$  dans l'espace. On choisit pour chacun de ces 2 éléments un repère orthonormé direct comme sur la Figure 5 et nous posons  $\mathbf{u}^k = (u_1^k, u_2^k)$  le déplacement dans le plan de  $\Omega_k$  et  $u_3^k$  le déplacement dans la direction orthogonale ( $k = 1, 2$ ). Les équations du mouvement après linéarisation donnent:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u}^k)}{\partial x_j} = f_i^k \text{ dans } \Omega_k, i, k = 1, 2, \quad (9)$$

$$\mu_k \Delta u_3^k = f_3^k \text{ dans } \Omega_k, k = 1, 2, \quad (10)$$

$$u_i^k = 0 \text{ sur } \Gamma_k, i = 1, 2, 3, k = 1, 2, \quad (11)$$

$$\begin{cases} u_1^1 = u_1^2 \\ u_2^1 = \cos \alpha u_2^2 + \sin \alpha u_3^2 \\ u_3^1 = -\sin \alpha u_2^2 + \cos \alpha u_3^2 \end{cases} \text{ sur } \Gamma_{12}, \quad (12)$$

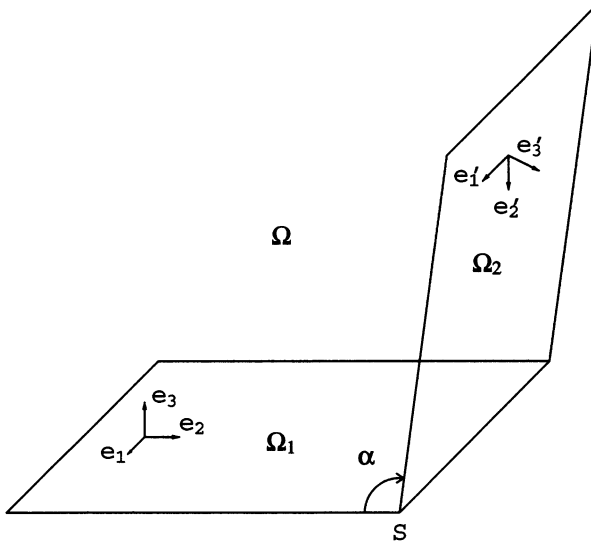


Figure 4

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{12}(\mathbf{u}^1) = -\sigma_{12}(\mathbf{u}^2) \\ \sigma_{22}(\mathbf{u}^1) = -\cos \alpha \sigma_{22}(\mathbf{u}^2) - \mu_2 \sin \alpha \frac{\partial u_3^2}{\partial \nu_2} \\ \mu_1 \frac{\partial u_3^1}{\partial \nu_1} = \sin \alpha \sigma_{22}(\mathbf{u}^2) - \mu_2 \cos \alpha \frac{\partial u_3^2}{\partial \nu_2} \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_{12}, \quad (13)$$

où  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  désignent les coefficients de Lamé du matériau constituant  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$  et  $\sigma_{ij}(\mathbf{u}^k)$  est le tenseur linéarisé des contraintes donné par

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}^k) = \mu_k \left( \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) + \lambda_k \operatorname{div}(\mathbf{u}^k) \delta_{ij}, \quad \forall i, j, k = 1, 2.$$

*Exemple 10. — Vibrations hydroélastiques (interaction fluide-structure)*

Cet exemple est tiré de [19] où l'on étudie les vibrations en mode harmonique d'une structure élastique contenant un liquide incompressible présentant une surface lisse (voir la Figure 5). La fonction  $\varphi$  représente un potentiel de déplacement pour le liquide  $\Omega_F$  et  $\mathbf{u}$  représente le champ de déplacement de la structure élastique  $\Omega_S$ .

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_F, \quad (14)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (15)$$

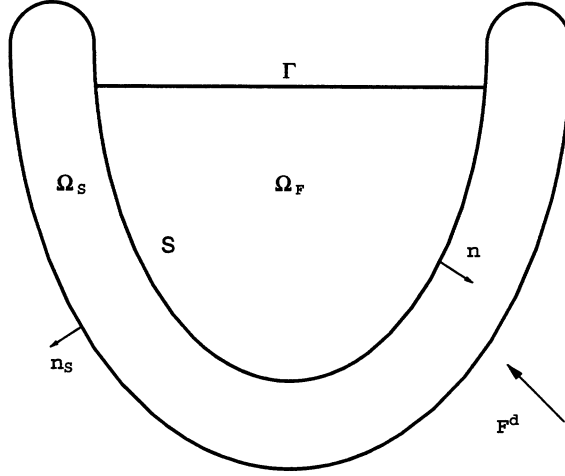


Figure 5

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma, \quad (16)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j^S = \rho_F \omega^2 \varphi n_i \quad \text{sur } \Sigma, \quad (17)$$

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + \rho_S \omega^2 u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_S, \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j^S = F_i^d \quad \text{sur } \partial\Omega_S \setminus \Sigma. \quad (19)$$

Les constantes  $\rho_F$  et  $\rho_S$  sont positives et représentent respectivement les masses volumiques des structures fluides et solides,  $F^d$  représente un champ de force agissant sur la structure solide.

*Exemple 11.* — Couplage “Laplacien-biharmonique”.

Ici nous considérons des opérateurs dont l’ordre est différent sur chaque face. Nous étudions un problème modèle de la mécanique qui est le couplage entre une plaque et une membrane (voir [15],[21]). Le domaine est donné par la Figure 6. Pour  $E > 0$  et  $\sigma \in ]0, 1[$  (respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque  $\Omega_2$ ), on pose  $\rho = \frac{E}{1-\sigma^2}$  et nous introduisons les opérateurs frontières définis sur  $\Gamma$  :

$$Mu = \rho(\sigma \Delta u + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial \nu_2^2}), \quad (20)$$

$$Nu = \rho(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu_2} + (1 - \sigma) \frac{\partial^3 u}{\partial \nu_2 \partial \tau_2^2}), \quad (21)$$

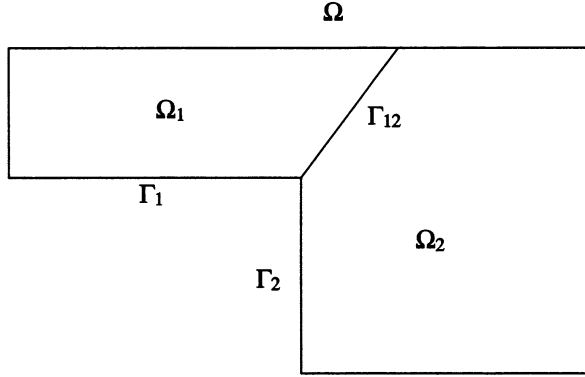


Figure 6

où  $(\nu_2, \tau_2)$  est une base directe orthonormale,  $\nu_2$  étant le vecteur unitaire sortant de  $\Omega_2$  normal à  $\Gamma$ .

Les équations sont:

$$\Delta u_1 = f_1 \text{ dans } \Omega_1, \quad (22)$$

$$\Delta^2 u_2 = f_2 \text{ dans } \Omega_2, \quad (23)$$

$$u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad (24)$$

$$u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \quad (25)$$

$$u_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma_{12}, \quad (26)$$

$$Mu_2 = h_1 \text{ sur } \Gamma_{12}, \quad (27)$$

$$Nu_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \nu_2} = h_2 \text{ sur } \Gamma_{12}. \quad (28)$$

### 3. Formulation variationnelle.

Le but de cette section est de donner une formulation variationnelle pour une classe de problèmes (3)-(4), par l'intermédiaire d'une formule de Green. Ceci nous amènera à imposer une condition supplémentaire pour les équations de bord (4) analogue à la condition (19) de [18].

#### 3.1. Formule de Green.

Dans cette sous section nous établissons la formule de Green correspondant à notre problème (à comparer avec le Théorème 2.1 de [13] pour le cas



scalaire, le Théorème 22.6 de [7] et le Lemme 2.3 de [22]) et de plus nous écrivons un résultat de trace valable pour les systèmes faisant intervenir les opérateurs frontières qui interviennent dans cette formule et que nous utiliserons ultérieurement.

On fixe pour chaque  $\gamma_{iq}$  de  $\Omega_i$  et pour chaque  $l \in \{1, 2, \dots, N_i\}$  un système de Dirichlet d'ordre  $m_{il} : \{F_{iqlj}\}_{j=0}^{m_{il}-1}$  avec, sans restreindre la généralité,  $\deg F_{iqlj} = j$  (voir [13], Définition 2.2.1).

LEMME 12. — Soit  $l' \in \{1, 2, \dots, N_i\}$ , pour chaque côté  $\gamma_{iq}$  de  $\Omega_i$ , il existe un système d'opérateurs  $\{\Phi_{iqll'j}\}_{j=0}^{m_{il'}-1}$  sur  $\gamma_{iq}$  avec coefficients dans  $C^\infty(\overline{\gamma_{iq}})$ , l'ordre de  $\Phi_{iqll'j}$  étant au plus  $m_{il} + m_{il'} - 1 - j$  tel que:

$$\int_{\Omega_i} l_i^{ll'}(x, D)u_{il'}\overline{v_{il}}dx = \sum_{|\alpha| \leq m_{il'}, |\beta| \leq m_{il}} \int_{\Omega_i} a_{il'l'}^{\alpha\beta} D^\alpha u_{il'} D^\beta \overline{v_{il}} dx \quad (29)$$

$$+ \sum_{q=1}^{Q_i} \sum_{j=0}^{m_{il}-1} \int_{\gamma_{iq}} \Phi_{iqll'j} u_{il'} F_{iqlj} \overline{v_{il}} dx,$$

pour tout  $u_{il'} \in H^{t_{il'}}(\Omega_i)$ ,  $v_{il} \in H_v^{m_{il}}(\Omega_i)$ .

Preuve. — Arguments analogues au Théorème 22.6 de [13]  $\square$

Si on note pour chaque  $\gamma_{iq}$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, N_i\}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, m_{il} - 1\}$ ,

$$\Phi_{iqlj}(u_i) = \sum_{l'=1}^{N_i} \Phi_{iqll'j} u_{il'}, \quad (30)$$

$$\text{et } \chi_{il} = \max_{l' \in \{1, 2, \dots, N_i\}} \deg l_i^{ll'},$$

nous obtenons, avec les notations du Lemme 12, le

COROLLAIRE 13. — Pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ , et chaque  $l \in \{1, 2, \dots, N_i\}$

$$\int_{\Omega_i} \left( \sum_{l'=1}^{N_i} l_i^{ll'}(x, D)u_{il'} \right) \overline{v_{il}} dx = \sum_{l'=1}^{N_i} \sum_{|\alpha| \leq m_{il'}, |\beta| \leq m_{il}} \int_{\Omega_i} a_{il'l'}^{\alpha\beta} D^\alpha u_{il'} D^\beta \overline{v_{il}} dx$$

$$+ \sum_{q=1}^{Q_i} \sum_{j=0}^{m_{il}-1} \int_{\gamma_{iq}} \Phi_{iqlj}(u_i) F_{iqlj} \overline{v_{il}} dx, \quad (31)$$

pour tout  $u_{il} \in H^{\chi_{il}}(\Omega_i)$ ,  $v_{il} \in H_v^{m_{il}}(\Omega_i)$ .

De plus, étant données, pour chaque  $\gamma_{iq}$  et chaque  $l \in \{1, 2, \dots, N_i\}$ , deux familles de fonctions  $\{g_j^{iql}\}_{j=0}^{m_{il}-1}$  et  $\{h_j^{iql}\}_{j=0}^{m_{il}-1}$ , indéfiniment différentiables avec support dans  $\gamma_{iq}$ , alors il existe une famille de fonctions  $\{u_{il}\}_{l=1}^{N_i}$  dans  $C_v^\infty(\bar{\Omega}_i)$  telle que

$$\begin{aligned} F_{iqlj} u_{il} &= g_j^{iql}, \\ \Phi_{iqlj}(u_i) &= h_j^{iql}, \end{aligned}$$

pour tout  $\gamma_{iq}, l \in \{1, 2, \dots, N_i\}, j \in \{0, 1, \dots, m_{il} - 1\}$ .

Remarque 14. — Par la définition des  $t_{il}$  et  $\chi_{il}$  nous avons  $t_{il} \geq \chi_{il}$ .  
□

Maintenant posons successivement

$$a_i(u_i, v_i) = \sum_{l=1}^{N_i} \int_{\Omega_i} \sum_{l'=1}^{N_i} \sum_{|\alpha| \leq m_{il'}, |\beta| \leq m_{il}} a_{il'l'}^{\alpha\beta} D^\alpha u_{il'} D^\beta \overline{v_{il}} dx,$$

puis

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^K a_i(u_i, v_i). \quad (32)$$

$a(u, v)$  est la forme sesquilinéaire définie sur  $H^{\vec{m}}(\Omega)$  associée à l'opérateur  $l$ .

Immédiatement nous avons la

PROPOSITION 15. — Pour tout  $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} (l(u), v)_{0,2,\Omega} &= \sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^{N_i} \int_{\Omega_i} \left( \sum_{l'=1}^{N_i} l_i^{l'} u_{il'} \right) \overline{v_{il}} dx \\ &= a(u, v) \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $u \in H^{\vec{t}}(\Omega)$  et  $v \in H_v^{\vec{m}}(\Omega)$ , grâce au Lemme 12, on a

$$\begin{aligned} (l(u), v)_{0,2,\Omega} &= \sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^{N_i} \int_{\Omega_i} \left( \sum_{l'=1}^{N_i} l_i^{l'} u_{il'} \right) \overline{v_{il}} dx \\ &+ \sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^{N_i} \sum_{l'=1}^{N_i} \sum_{q=1}^{Q_i} \sum_{j=0}^{m_{il}-1} \int_{\gamma_{iq}} \Phi_{iql'l'} u_{il'} F_{iqlj} \overline{v_{il}} d\sigma \end{aligned}$$

$$= a(u, v) + \sum_{i=1}^K \sum_{q=1}^{Q_i} \sum_{l=1}^{N_i} \sum_{j=0}^{m_{il}-1} \int_{\gamma_{iq}} \left( \sum_{l'=1}^{N_i} \Phi_{iql'l'} u_{il'} \right) F_{iqlj} \overline{v_{il}} d\sigma.$$

Si on utilise (32) et (30), alors il vient

$$(l(u), v)_{0,2,\Omega} = a(u, v) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}} \int_{\Gamma} \sum_{i \in I_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{N_i} \sum_{j=0}^{m_{il}-1} (\Phi_{iqlj} u_i) F_{iqlj} \overline{v_{il}} d\sigma,$$

où dans le membre de droite ci-dessus  $q$  est défini par  $\gamma_{iq} = \Gamma$ .

### 3.2. Une classe d'opérateurs de bord et de transmission.

Dans cette sous section nous déterminons une classe d'opérateurs de bord et de transmission de sorte que l'on puisse associer à notre problème une formulation variationnelle.

On considère maintenant le vecteur colonne avec  $m_{\Gamma}$  composantes, noté et défini de la façon suivante:

$$F_{\Gamma}(v) = (F_{iqlj}(v))_{i \in I_{\Gamma}, \gamma_{iq} = \Gamma, l \in \{1, \dots, N_i\}, j \in \{0, \dots, m_{il}-1\}}.$$

Les composantes étant rangées par exemple par rapport à  $i, l, j$  dans l'ordre lexicographique.  $F_{\Gamma}(v)$  est donc un opérateur de trace sur  $\Gamma$  défini pour  $v \in H^{\overline{m}}(\Omega)$ .

De même on définit le vecteur colonne avec  $m_{\Gamma}$  composantes :

$$\Phi_{\Gamma}(u) = (\Phi_{iqlj}(u_i))_{i \in I_{\Gamma}, \gamma_{iq} = \Gamma, l \in \{1, \dots, N_i\}, j \in \{0, \dots, m_{il}-1\}}.$$

$\Phi_{\Gamma}(u)$  est bien défini pour  $u \in H^{\overline{t}}(\Omega)$ .

Avec ces notations, il vient:

$$(l(u), v)_{0,2,\Omega} = a(u, v) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}} \int_{\Gamma} {}^t \Phi_{\Gamma}(u) \cdot F_{\Gamma}(\overline{v}) d\sigma, \quad (33)$$

pour tout  $u \in H^{\overline{t}}(\Omega)$ ,  $v \in H_v^{\overline{m}}(\Omega)$ .

A ce stade, nous allons traiter les conditions de bord et de transmission (4) particulières suivantes: on considère pour chaque  $\Gamma \in \mathcal{A}$  deux matrices

carrées  $\mathcal{B}_{1,\Gamma}$  et  $\mathcal{B}_{2,\Gamma}$  d'ordre  $m_\Gamma$  à coefficients constants et l'on considère les conditions de bord et de transmission (4) sous la forme générale suivante:

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma}\Phi_\Gamma(u) - \mathcal{B}_{2,\Gamma}F_\Gamma(u) = \varphi_\Gamma, \forall \Gamma \in \mathcal{A}, \quad (34)$$

où  $\varphi_\Gamma = (\varphi_{\Gamma h})_{h=1,\dots,m_\Gamma}$ .

Nous sommes en mesure d'imposer la (à comparer avec la condition (19) de [18])

**Condition III:** On suppose que pour chaque  $\Gamma \in \mathcal{A}$  :  $\text{Ker}\mathcal{B}_{1,\Gamma} \subset E_\Gamma^\perp$ , où  $E_\Gamma$  est l'espace  $\mathcal{B}_{2,\Gamma}^{-1}(R(\mathcal{B}_{1,\Gamma}) \cap R(\mathcal{B}_{2,\Gamma}))$ .

Après quelques combinaison linéaires et permutations de lignes, les conditions de bord et de transmission (34) s'écrivent aussi (voir la condition (39) de [18]):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{B}_{1,\Gamma}^2 \end{pmatrix} \Phi_\Gamma(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{2,\Gamma}^1 \\ \mathcal{B}_{2,\Gamma}^2 \end{pmatrix} F_\Gamma(u) + \begin{pmatrix} \varphi_\Gamma^1 \\ \varphi_\Gamma^2 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

où  $\mathcal{B}_{1,\Gamma}^2, \mathcal{B}_{1,\Gamma}^1$  sont des matrices  $m'_\Gamma \times m_\Gamma$ ,  $\mathcal{B}_{2,\Gamma}^1$  est une matrice  $(m_\Gamma - m'_\Gamma) \times m_\Gamma$  et  $\text{rang } \mathcal{B}_{1,\Gamma}^2 = \text{rang } \mathcal{B}_{1,\Gamma} = m'_\Gamma$ ,  $\text{rang } \mathcal{B}_{2,\Gamma}^1 = m_\Gamma - m'_\Gamma$ ;  $\varphi_\Gamma^1$  sont les  $m_\Gamma - m'_\Gamma$  premières composantes de  $\varphi_\Gamma$  tandis que  $\varphi_\Gamma^2$  sont les  $m'_\Gamma$  dernières. L'écriture matricielle précédente (ainsi que les suivantes) sont des écritures par blocs.

La condition III se traduit matriciellement par

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma}^2 \cdot (\mathcal{B}_{2,\Gamma}^1)^* = 0. \quad (36)$$

On considère alors l'espace V:

$$V = \{u \in H_v^{\overline{m}}(\Omega) / \forall \Gamma \in \mathcal{A}, \mathcal{B}_{2,\Gamma}^1 \cdot F_\Gamma(u) = 0\}. \quad (37)$$

On désigne par blocs la matrice  $M_\Gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{2,\Gamma}^1 \\ \mathcal{B}_{1,\Gamma}^2 \end{pmatrix}$  qui est donc inversible, puis on pose  $\tilde{F}(u) = M_\Gamma F_\Gamma(u)$  et  $\tilde{\Phi}_\Gamma(u) = (M_\Gamma^{-1})^* \Phi_\Gamma(u)$ .

Les conditions de bord et de transmission deviennent:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{B}_{1,\Gamma}^2 \end{pmatrix} M_\Gamma^* \tilde{\Phi}_\Gamma(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{2,\Gamma}^1 \\ \mathcal{B}_{2,\Gamma}^2 \end{pmatrix} M_\Gamma^{-1} \tilde{F}_\Gamma(u) + \begin{pmatrix} \varphi_\Gamma^1 \\ \varphi_\Gamma^2 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{1,\Gamma}^2 \mathcal{B}_{1,\Gamma}^{2*} \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_\Gamma(u) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_\Gamma & Q'_\Gamma \end{pmatrix} \tilde{F}_\Gamma(u) + \begin{pmatrix} \varphi_\Gamma^1 \\ \varphi_\Gamma^2 \end{pmatrix},$$

$I = I_{m_\Gamma - m'_\Gamma}$  étant la matrice identité d'ordre  $m_\Gamma - m'_\Gamma$ . En posant maintenant  $N_\Gamma = B_{1,\Gamma}^2 B_{1,\Gamma}^{2*}$ ,  $N_\Gamma$  est de rang  $m'_\Gamma$  donc inversible, la condition **III** implique donc que

$$\begin{cases} \tilde{F}_{\Gamma,1}(u) = -\varphi_\Gamma^1 \\ \tilde{\Phi}_{\Gamma,2}(u) = Q_\Gamma'' \tilde{F}_{\Gamma,2}(u) + N_\Gamma^{-1} \varphi_\Gamma^2 \end{cases} \quad (38)$$

où l'on a posé

$$\tilde{\Phi}_\Gamma(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{\Gamma,1}(u) \\ \tilde{\Phi}_{\Gamma,2}(u) \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{F}_\Gamma(u) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{\Gamma,1}(u) \\ \tilde{F}_{\Gamma,2}(u) \end{pmatrix},$$

$\tilde{\Phi}_{\Gamma,2}(u)$  (resp.  $\tilde{F}_{\Gamma,2}(u)$ ) étant les  $m'_\Gamma$  dernières composantes de  $\tilde{\Phi}_\Gamma(u)$  (resp.  $\tilde{F}_\Gamma(u)$ ) et  $Q_\Gamma'' = N_\Gamma^{-1} Q_\Gamma'$ . Notons que la première identité de (38) correspond aux conditions aux limites dites stables (voir [13] pour le vocabulaire), tandis que la deuxième identité de (38) correspond aux conditions aux limites dites transverses, où ici il y a un couplage entre dérivées hautes (qui n'ont pas de sens dans  $H^{\vec{m}}(\Omega)$ ) et basses (qui ont un sens dans  $H^{\vec{m}}(\Omega)$ ).

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma {}^t \Phi_\Gamma(u) \cdot F_\Gamma(\bar{v}) d\sigma &= \int_\Gamma {}^t \Phi_\Gamma(u) \cdot \overline{M_\Gamma^{-1}} \cdot \overline{M_\Gamma} \cdot F_\Gamma(\bar{v}) d\sigma \\ &= \int_\Gamma {}^t \tilde{\Phi}_\Gamma(u) \cdot \tilde{F}_\Gamma(\bar{v}) d\sigma \\ &= \int_\Gamma {}^t \tilde{\Phi}_{\Gamma,2}(u) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma \text{ (car } v \in V) \\ &= \int_\Gamma {}^t \tilde{F}_{\Gamma,2}(u) \cdot {}^t Q_\Gamma'' \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma + \int_\Gamma {}^t (N_\Gamma^{-1} \varphi_\Gamma^2) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma. \end{aligned}$$

On considère alors la forme sesquilinéaire  $b$  qui est définie sur  $H^{\vec{m}}(\Omega) \times H^{\vec{m}}(\Omega)$ :

$$b(u, v) = \sum_\Gamma \int_\Gamma {}^t \tilde{F}_{\Gamma,2}(u) \cdot {}^t Q_\Gamma'' \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma. \quad (39)$$

On notera  $a_1(u, v) = a(u, v) + b(u, v)$  la forme sesquilinéaire définie sur  $V$  associée au problème (3)-(4).

### 3.3. Problème et formulation variationnelle.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat qui associe à notre problème une formulation variationnelle. Définissons d'abord l'espace

$$\tilde{V} = \{u \in H^{\vec{m}}(\Omega) / \forall \Gamma \in \mathcal{A}, B_{2,\Gamma}^1 \cdot F_\Gamma(u) = 0\}. \quad (40)$$

THÉORÈME 16. — *Sous les conditions I à III, pour  $f \in H^{-\vec{s}}(\Omega)$ ,  $\varphi_{\Gamma h} \in H^{-r_{\Gamma h} - \frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $\forall \Gamma \in \mathcal{A}$ ,  $h = 1, \dots, m_{\Gamma}$ , si  $u \in H^{\vec{t}}(\Omega) \cap \tilde{V}$  est une solution de*

$$a(u, v) + b(u, v) = (f, v)_{0,2,\Omega} - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t(N_{\Gamma}^{-1}\varphi_{\Gamma}^2) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma, \forall v \in V, \quad (41)$$

alors  $u$  satisfait

$$\begin{cases} l(u) = f \text{ sur } \Omega, \\ B(u) = \varphi \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (42)$$

avec  $\varphi_{\Gamma}^1 = 0$ , pour tout  $\Gamma \in \mathcal{A}$ .

*Preuve.* — On applique (41) pour  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  (ce qui signifie  $v_{il} \in \mathcal{D}(\Omega_i)$  pour chaque  $il$ ) et on voit que  $l(u) = f$ . Remplaçant  $f$  par  $l(u)$  dans (41) et utilisant la formule de Green (33) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t\tilde{F}_{\Gamma,2}(u) \cdot {}^tQ_{\Gamma}'' \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma &= \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t\tilde{\Phi}_{\Gamma,1}(u) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,1}(\bar{v}) d\sigma \\ &+ \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t\tilde{\Phi}_{\Gamma,2}(u) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma \\ &- \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t(N_{\Gamma}^{-1}\varphi_{\Gamma}^2) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma, \forall v \in V. \end{aligned}$$

Par définition de  $F_{\Gamma}$  et de  $\tilde{F}_{\Gamma}$ , et avec l'aide des théorèmes de trace, on obtient

$$\tilde{\Phi}_{\Gamma,1}(u) = 0 \text{ et } Q_{\Gamma}'' \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(u) = \tilde{\Phi}_{\Gamma,2}(u) - N_{\Gamma}^{-1}\varphi_{\Gamma}^2, \forall \Gamma \in \mathcal{A}.$$

Mais ceci signifie  $B(u) = \varphi$  sur  $\partial\Omega$ .  $\square$

*Remarque 17.* — Dans la suite, nous nous bornerons à l'étude de  $u \in V$  solution de (41), qui sera appelée solution faible de (42). Ceci ne restreint pas la généralité car si  $\tilde{u} \in \tilde{V}$  est solution de

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) + b(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{f}, \tilde{v})_{0,2,\Omega} - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t(N_{\Gamma}^{-1}\tilde{\varphi}_{\Gamma}^2) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{v}) d\sigma, \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

alors en définissant  $u$  par

$$u = \tilde{u} - \sum_{S \in \mathcal{S}} \Phi_S T_S \tilde{u},$$

où  $(T_S \tilde{u})_{il}$  est le développement de Taylor de  $\tilde{u}_{il}$  en  $S$  à l'ordre  $m_{il} - 2$  et  $\Phi_S$  est une fonction de troncature valant 1 dans un voisinage de  $S$  et de

support suffisamment petit, cette fonction  $u$  est dans  $V$  et est solution de (41) avec

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} - \sum_{S \in \mathcal{S}} l(\Phi_S T_S \tilde{u}) \text{ et} \\ \varphi &= \tilde{\varphi} - \sum_{S \in \mathcal{S}} B(\Phi_S T_S \tilde{u}). \end{aligned}$$

Dès lors, si  $u$  admet une décomposition en partie régulière et singulière, alors  $\tilde{u}$  admet elle même une décomposition en partie régulière (celle de  $u$  augmentée de  $\sum_{S \in \mathcal{S}} \Phi_S T_S \tilde{u}$ ) et singulière (identique à celle de  $\tilde{u}$ ).  $\square$

### 3.4. Illustration.

Nous terminons cette section en montrant, pour un exemple introduit dans la sous-section 2.4, pourquoi les conditions **I** à **III** sont satisfaites (la vérification pour les autres exemples se fait de façon analogue). De plus pour cet exemple nous donnons les formes bilinéaires  $a$  et  $b$  ainsi que les espaces  $V$  et  $\tilde{V}$  qui interviennent dans le Théorème 16.

*Exemple 18.* — Couplage avec l'opérateur de Laplace (voir Exemple 8).

Dans cet exemple  $\Omega = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$ , donc  $K = 3$ . Pour chaque  $i = 1, 2, 3$ , nous avons  $N_i = 1$  et  $l_i(x_i, D) = \Delta$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ , nous choisissons  $s_{i1} = 0$ ,  $t_{i1} = 2$ ,  $m_{i1} = 1$ ,  $\omega_{i1} = p_i$ . Il est facile de vérifier que chaque opérateur  $l_i$  est proprement elliptique, ainsi la condition I est satisfaite.

Vérifions la condition II de recouvrement pour le côté  $\Gamma = \Gamma_{123}$  commun aux trois domaines  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Fixons  $x_0$  un élément quelconque de  $\Gamma$ ; par définition de la condition II, on considère les transformées par les difféomorphismes  $\chi_i$  (correspondant à  $x_0$ ) des parties principales des systèmes  $(l_i)_{i \in I_\Gamma}$  et  $(B_{\Gamma h})_{h=1,2,3}$  dans un voisinage  $\theta$  de 0 de  $\mathbb{R}_+^2$ . Notons  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$ ,  $\tilde{l}(x_0, D)$  et  $\tilde{B}(x_0, D)$  ces deux systèmes (obtenus après transformation par les difféomorphismes  $\chi_i$ ) écrits au point  $x = 0$  de  $\mathbb{R}_+^2$ . Les équations (5) nous donnent

$$\tilde{l}(x_0, D) = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

tandis que les équations de transmission (6) et (7) nous donnent

$$\tilde{B}(x_0, D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ p_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & p_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Nous avons  $\det \tilde{l}(x_0, \xi) = |\xi|^6$ . Pour tout couple de vecteurs linéairement indépendants  $\xi, \xi'$  de  $\mathbb{R}^2$ , le polynôme  $\det \tilde{l}(x_0, \xi + \tau\xi')$  de la variable complexe  $\tau$  possède exactement 3 racines de parties imaginaires strictement positives:  $\tau_k^+(x_0, \xi, \xi'), k = 1, 2, 3$  (en fait dans ce cas  $\tau_1^+ = \tau_2^+ = \tau_3^+ = \frac{-\xi \cdot \xi' + \sqrt{(\xi \cdot \xi')^2 - |\xi|^2 |\xi'|^2}}{|\xi|^2}$ ). Soit le polynôme  $P^+(x_0, \xi, \xi')(\tau) = \prod_{k=1}^3 (\tau - \tau_k^+(x_0, \xi, \xi'))$  et  $A(x_0, \xi)$  la matrice adjointe de  $\tilde{l}(x_0, \xi)$  (c'est à dire la matrice satisfaisant  $\tilde{l}(x_0, \xi)A(x_0, \xi) = \det \tilde{l}(x_0, \xi)I_3$ ). Nous rappelons que la condition de recouvrement au sens de [2] est satisfaite si pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^*$ , les lignes de la matrice  $\tilde{B}(x_0, (\xi_1, \tau\xi_2))A(x_0, (\xi_1, \tau\xi_2))$  sont indépendantes modulo le polynôme  $P^+(x_0, (\xi_1, 0), (0, \xi_2))(\tau)$ . Il est de plus clair qu'il suffit de vérifier la condition précédente dans le cas particulier où  $\xi_1 = 1$  et  $\xi_2 = 1$ .

Désignons pour simplifier par  $Q(\tau) = (Q_{kj}(\tau))_{k,j=1,2,3}$  la matrice  $\tilde{B}(x_0, (1, \tau))A(x_0, (1, \tau))$ . Les calculs donnent

$$Q(\tau) = \begin{pmatrix} (1 + \tau^2)^2 & -(1 + \tau^2)^2 & 0 \\ 0 & (1 + \tau^2)^2 & -(1 + \tau^2)^2 \\ p_1\tau(1 + \tau^2)^2 & p_2\tau(1 + \tau^2)^2 & p_2\tau(1 + \tau^2)^2 \end{pmatrix} = (\tau - i)^2 \tilde{Q}(\tau)$$

et  $P^+(x_0, (1, 0), (0, 1))(\tau) = (\tau - i)^3$ .

L'indépendance des lignes de  $Q(\tau)$  modulo  $(\tau - i)^3$  signifie que si on a pour 3 complexes  $c_1, c_2, c_3$  et 3 polynômes  $P_1(\tau), P_2(\tau), P_3(\tau)$  les relations

$$\sum_{k=1}^3 c_k Q_{kj}(\tau) = P_j(\tau)(\tau - i)^3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (43)$$

alors  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Après simplification de (43) par  $(\tau - i)^2$  et prenant  $\tau = i$ , on obtient le système homogène

$$\tilde{Q}(i) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (44)$$

Après calcul, on obtient que le déterminant de la matrice  $\tilde{Q}(i)$  vaut  $-64i(p_1 + p_2 + p_3)$ . Il est non nul puisque les coefficients  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont strictement positifs. L'unique solution de (44) est donc  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Ceci permet de conclure que la condition II de recouvrement est satisfaite pour tout  $x_0$  appartenant au côté  $\Gamma = \Gamma_{123}$ . Pour les autres côtés, l'opérateur étant le Laplacien et la condition de bord étant la condition de Dirichlet, il est bien connu que les conditions de recouvrement sont satisfaites dans ce cas.



Vérifions maintenant la condition III uniquement pour le côté  $\Gamma = \Gamma_{123}$  (la vérification pour les autres côtés étant analogue). Le système de Dirichlet correspondant au côté  $\Gamma$  est donné par  $F_\Gamma(u) = {}^t(u_1, u_2, u_3)$  et le système d'opérateurs associé par la formule de Green (33) est donné par  $\Phi_\Gamma(u) = {}^t(\frac{\partial u_1}{\partial \nu_1}, \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2}, \frac{\partial u_3}{\partial \nu_3})$ . L'écriture des conditions de transmission sous la forme (35) donne

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{B}_{2,\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$M_{\omega,\Gamma} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix},$$

la matrice  $B_{1,\Gamma}^{2'}$  donnée par la formule (36) est égale à :

$$B_{1,\Gamma}^{2'} = ( 1 \quad 1 \quad 1 ).$$

Tandis que la matrice  $B_{2,\Gamma}^1$  donnée par (35) est vaut :

$$B_{2,\Gamma}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On voit que  $B_{1,\Gamma}^{2'} \cdot (B_{2,\Gamma}^1)^* = 0$ , c'est à dire que nous avons (36), ce qui montre que la condition III est vérifiée.

La forme sesquilinéaire associée à ce problème est

$$a_1(u, v) = a(u, v) = \sum_{i=1}^3 p_i \int_{\Omega_i} \nabla u_i \nabla \bar{v}_i dx.$$

Notons que la forme  $b$  définie par (39) est nulle. L'espace variationnel  $V$  est :

$$V = \tilde{V} = \{u \in H^1(\Omega) : u_1 = u_2 = u_3 \text{ sur } \Gamma_{123} \\ \text{et } u_i = 0 \text{ sur } \gamma_{iq}, \forall i \in \{1, 2, 3\}, q \in \{1, \dots, N_i\} \text{ tel que } \gamma_{iq} \neq \Gamma_{123}\},$$

l'égalité de  $V$  avec  $\tilde{V}$  provenant de la Remarque 5. La forme sesquilinéaire  $a_1$  définit une semi-norme équivalente à la semi-norme de  $H^1(\Omega)$ ;  $a_1$  est donc  $V$ -strictement coercive d'après l'inégalité de Poincaré.

#### 4. Un résultat de décomposition.

Nous voulons nous intéresser maintenant à la régularité de la solution faible de (42). Par exemple, pour une solution  $u \in V$  de (41) avec un second membre donné par le Théorème 16, nous voulons savoir si  $u \in H^{\vec{t}}(\Omega)$ , autrement dit est-ce que  $u$  possède la régularité optimale? L'opérateur  $[L, B]$  satisfaisant les conditions **I** et **II**, nous pouvons déjà dire grâce à la théorie générale (voir [2]) que  $u$  possède la régularité optimale loin des sommets de  $\Omega$ . Il nous suffit donc d'analyser la régularité près des sommets. Nous commencerons par établir un résultat de décomposition avec un second membre pris dans des espaces de Sobolev à poids.

##### 4.1. L'opérateur $\mathcal{A}_S(\lambda)$ .

L'étude des problèmes aux limites pour les opérateurs elliptiques dans des domaines à points coniques est bien adaptée aux espaces de Sobolev à poids; elle a été introduite par Kondratiev [9]. Nous étudions donc notre opérateur  $[L(x), B(x)]$  dans les espaces à poids pour revenir par la suite dans les espaces ordinaires.

$[L(x), B(x)]$  transforme

$$V_{\beta}^{k+\vec{t}, p}(\Omega) \text{ dans } V_{\beta}^{k-\vec{s}, p}(\Omega) \times \prod_{\Gamma \in \mathcal{A}, h=1, \dots, m_{\Gamma}} V_{\beta}^{k-r_{\Gamma}, h-1/p, p}(\Gamma) = Y_{\beta}^{k, p}(\Omega). \quad (45)$$

On fixe  $S \in \mathcal{S}$  et nous appelons pour chaque  $i \in I_S, C_i$  le cône qui coïncide avec  $\Omega_i$  dans un voisinage de  $S$  et nous notons  $C_S = \bigcup_{i \in I_S} C_i$ . Les espaces définis dans  $\Omega$  sont définis de façon analogue dans  $C_S$ .

Nous considérons d'abord un problème particulier dans  $C_S$  qui est généré par le problème (3)-(4) en prenant la partie principale de  $[L, B]$  avec coefficients gelés en  $S$ .

$$\sum_{l=1}^{N_i} l_{i,0}^{l', S}(D) u_{il} = f_{il} \text{ dans } C_i, \forall i = 1, \dots, K, \forall l = 1, \dots, N_i, \quad (46)$$

$$B_{\Gamma h, 0}^S(D) u = \varphi_{\Gamma h} \text{ sur } \Gamma, \forall \Gamma \in \mathcal{A}, \forall h = 1, \dots, m_{\Gamma}. \quad (47)$$

On note  $[L_0(S), B_0(S)]$  l'opérateur associé au problème (46)-(47). (Ici, par abus, la notation  $\Gamma \in \mathcal{A}$  signifie que  $\mathcal{A}$  représente l'ensemble des côtés de  $C_S$ ).

On suppose pour chaque  $i \in I_S$  que chaque opérateur  $l_{i,0}^{ll',S}$  et  $B_{\Gamma h,0}^{il,S}$  intervenant dans les équations (46)-(47) est écrit dans  $\mathbb{R}^2$  et que le repère choisi est tel que  $S$  soit l'origine. On introduit ensuite les coordonnées polaires  $(r, \theta_i)$  avec  $\theta_i \in [0; \omega_i]$ . Posons  $\theta = (\theta_i)_{i=1, \dots, K}$  et  $\Omega_S = C_S \cap S^2$ , où  $S^2$  représente la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ ;  $\theta$  est alors un paramétrage du réseau 1-D  $\Omega_S$ . Par la transformée de Mellin

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} r^{-\lambda-1} u(r, \theta) dr = \hat{u}(\lambda, \theta),$$

les équations (46)-(47) deviennent un problème de transmission-frontière dans le domaine  $\Omega_S$  avec le paramètre complexe  $\lambda$  donné par les équations suivantes:

$$\sum_{l'=1}^{N_i} \mathcal{L}_i^{ll',S}(\theta_i, D_{\theta_i}, \lambda + t_{il'}) \hat{u}_{il'}(\lambda + t_{il'}, \theta_i) = \widehat{f}_{il}(\lambda - s_{il}, \theta_i), \quad (48)$$

pour tout  $\theta_i \in ]0; \omega_i[$ ,  $\forall i = 1, \dots, K$ ,  $\forall l = 1, \dots, N_i$ , et

$$\sum_{i \in I_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{N_i} \mathcal{B}_{\Gamma, h}^{il,S}(\omega_{iq}, D_{\theta}, \lambda + t_{il}) \hat{u}_{il}(\lambda + t_{il}, \omega_i) = \widehat{\varphi}_{\Gamma h}(\lambda - r_{\Gamma h}, \omega_{iq}), \quad (49)$$

pour tout  $\Gamma \in \mathcal{A}$ ,  $h = 1, \dots, m_{\Gamma}$ , et où  $\omega_{iq} = 0$  ou  $\omega_i$  selon que  $(r, 0)$  ou  $(r, \omega_i) \in \gamma_{iq} = \Gamma$  et où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^{ll',S}(\theta_i, D_{\theta_i}, r \partial r) &= r^{s_{il} + t_{il'}} l_{i,0}^{ll',S}(D) \text{ et} \\ \mathcal{B}_{\Gamma h}^{il,S}(\omega_{iq}, D_{\theta}, r \partial r) &= r^{r_{\Gamma h} + t_{il}} B_{\Gamma h,0}^{il,S}(D). \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{A}_S(\lambda) = [\mathcal{L}_S(\lambda), \mathcal{B}_S(\lambda)]$  l'opérateur généré par (48)-(49), défini dans  $\Omega_S$  et qui transforme continûment

$$W^{k+\vec{t}, p}(\Omega_S) \text{ dans } W^{k-\vec{s}, p}(\Omega_S) \times \prod_{\Gamma, h} \mathcal{C} = Y^{k,p}(\Omega_S) \quad (50)$$

De l'ellipticité de l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$  dans  $C_S$ , on en déduit l'ellipticité de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  au sens de [3]. Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathcal{C}$ , sauf pour un ensemble de points isolés,  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  est un isomorphisme dans les espaces cités dans (50). Si  $\mathcal{A}_S(\lambda_0)$  n'est pas inversible, on dira que  $\lambda_0$  est une valeur propre de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$ . Comme  $\mathcal{A}_S(\lambda) - \mathcal{A}_S(\lambda_0)$  est un opérateur compact,  $\dim \ker \mathcal{A}_S(\lambda)$  est fini pour tout  $\lambda \in \mathcal{C}$ . Pour montrer que le nombre de valeurs propres est fini dans toute bande  $h \leq \text{Re}(\lambda) \leq h_1$  nous avons besoin d'établir le

LEMME 19. — *Sous les conditions I et II, il existe  $\delta > 0, N > 0$  et  $C > 0$ , tels que pour tout  $\lambda \in \Sigma_{\delta, N} = \{\xi \in \mathcal{C} : |\arg \xi \pm \frac{\pi}{2}| \leq \delta \text{ et } |\xi| \geq N\}$ , et pour tout  $u \in H^{k+\vec{t}}(\Omega_S) = W^{k+\vec{t}, 2}(\Omega_S)$ , nous avons:*

$$\|u\|_{k+\vec{t}, 2, \Omega_S, |\lambda|} \leq C \left\{ \|\mathcal{L}_S(\lambda)(u)\|_{k-\vec{s}, 2, \Omega_S, |\lambda|} + \sum_{\Gamma, h} \left\| \mathcal{B}_{\Gamma, h}^S(\lambda)(u) \right\|_{k-r_{\Gamma h}-\frac{1}{2}, \omega_{\Gamma}, |\lambda|} \right\} \quad (51)$$

où nous avons posé:

$$\begin{aligned} \|u\|_{k+\vec{t}, \Omega_S, |\lambda|} &= \sum_{i, l} \|u_{il}\|_{k+t_{i, l}, 0, \omega_i, |\lambda|} \quad \text{avec} \\ \|u_{il}\|_{k, 0, \omega_i, |\lambda|} &= (|\lambda|)^{2k} \|u_{il}\|_{0, 0, \omega_i}^2 + |u_{il}|_{k, 0, \omega_i}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(voir [7], Définition AA.17) et

$$\|\mathcal{B}_{\Gamma, h}^S(u)\|_{k-r_{\Gamma h}-1/2, \omega_{\Gamma}, |\lambda|} = \sum_{i \in I_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{N_i} |\lambda|^{k-r_{\Gamma h}-1/2} \left| \mathcal{B}_{\Gamma h}^{il, S} u_{il}(\omega_{i q}) \right|.$$

*Preuve.* — Arguments analogues au Lemme 5.11 de [21].  $\square$

Nous précisons maintenant les définitions de valeurs propres, de fonctions propres et de chaînes de Jordan associées pour l'opérateur  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  qui interviennent dans la régularité de la solution variationnelle près de S.

DÉFINITION 20. — *Le complexe  $\lambda = \lambda_0$  est une valeur propre de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$ , si il existe une fonction non triviale  $\phi^{S, \lambda_0, 0} \in W^{k+\vec{t}, p}(\Omega_S)$  avec  $\mathcal{A}_S(\lambda_0)\phi^{S, \lambda_0, 0} = 0$ . La fonction  $\phi^{S, \lambda_0, 0}$  est appelée solution propre de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  pour  $\lambda = \lambda_0$ .*

Soient  $\phi^{S, \lambda_0, \mu, 0}$ ,  $\mu = 1, \dots, I^{S, \lambda_0}$  des fonctions propres indépendantes, on introduit  $N^{S, \lambda_0, \mu}$  fonctions propres associées qui constituent une chaîne de Jordan définie de la façon suivante:

DÉFINITION 21. — *La famille système  $\{\phi^{S, \lambda_0, \mu, k}\}_{k=0, \dots, N^{S, \lambda_0, \mu}, \mu=1, \dots, I^{S, \lambda_0}}$  est un système de chaînes de Jordan si*

$$\sum_{q=0}^k \frac{1}{q!} (\partial/\partial \lambda)^q \mathcal{A}_S(\lambda) \phi^{S, \lambda_0, \mu, k-q} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0$$

pour  $k = 0, \dots, N^{S, \lambda_0, \mu}$ ,  $N^{S, \lambda_0, \mu}$  étant décroissant par rapport à  $\mu$ .

On démontre les théorèmes qui suivent de façon analogue à [9] pour  $p = 2$ , et [17] pour  $p \neq 2$ .

**THÉORÈME 22.** — *Sous les conditions I et II, l'opérateur  $[L, B]$  défini par (45) est un opérateur de Fredholm si et seulement si  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  n'a aucune valeur propre sur la droite  $\text{Re}\lambda = -\beta - 2/p + k$ , pour tout  $S \in \mathcal{S}$ .*

**THÉORÈME 23.** — *Sous les conditions I et II, supposons que  $[L_0(S), B_0(S)] = [L(x), B(x)]$  dans un voisinage de  $S$  et que les droites  $\text{Re}\lambda = -\beta_1 - 2/p_1 + k_1 = h_1$ ,  $\text{Re}\lambda = -\beta_2 - 2/p_2 + k_2 = h_2$  n'ont pas de valeurs propres de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  avec  $h_1 < h_2$ ; alors pour  $u \in V_{\beta}^{k_1 + \vec{t}, p}(\Omega)$  solution du problème (3)-(4) tel que pour  $[f, \varphi] \in Y_{\beta_1}^{k_1, p_1}(\Omega) \cap Y_{\beta_2}^{k_2, p_2}(\Omega)$  nous avons le développement suivant dans un voisinage de  $S$ :*

$$u = w + \Phi_S \sum_{\lambda, \mu, k} c_{S, \lambda, \mu, k} \sigma^{S, \lambda, \mu, k},$$

où  $w \in V_{\beta_2}^{k_2 + \vec{t}, p_2}(\Omega)$ ,  $c_{S, \lambda, \mu, k} \in \mathbb{C}$ ,  $\Phi_S$  est une fonction de troncature égale à 1 dans un voisinage de  $S$ , la somme étant étendue aux valeurs propres  $\lambda$  de  $\mathcal{A}_S(\xi)$  dans la bande  $\text{Re}\lambda \in ]h_1, h_2[$ ,  $\mu = 1, \dots, I^{S, \lambda}$ ,  $k = 0, \dots, N^{S, \lambda_0, \mu}$  et les fonctions singulières sont données par:

$$\sigma^{S, \lambda, \mu, k} = r^{\lambda + \vec{t}} \sum_{q=0}^k \left( \frac{(\ln r)^q}{q!} \right) \phi^{S, \lambda, \mu, k-q}.$$

Les coefficients  $c_{S, \lambda, \mu, k}$  étant des formes linéaires continues de  $[f, \varphi]$ .

#### 4.2. Décomposition dans les espaces de Sobolev à poids.

Pour étudier la régularité de la solution faible du problème (41), nous avons besoin de montrer que cette solution faible est dans un certain espace à poids. Pour cela nous nous plaçons dans un cas particulier où l'on suppose que l'opérateur  $[L, B]$  est homogène avec coefficients constants.

**LEMME 24.** — *Sous les conditions I à III, soit  $u \in V$  une solution du problème (41) avec un second membre  $f \in W^{-\vec{s}, p}(\Omega)$ ,  $\varphi_{\Gamma, h} \in W^{-r_{\Gamma, h} - \frac{1}{p}, p}(\Gamma)$  avec  $1 < p \leq 2$ , alors*

$$u \in V_{\alpha}^{\vec{t}, p}(\Omega) \tag{52}$$

avec  $\vec{t} = (t_{i\alpha})$ ,  $\alpha = \gamma - \frac{2}{p} + \eta + 1$ ,  $\forall \gamma \in ]0, 1[$ , où  $\eta = \sup(t_{i\alpha} - m_{i\alpha})$ .

*Preuve.* — On suit la même démarche que le Lemme 5.21 de [21] (voir aussi [7]). Les conditions de recouvrement et les résultats classiques pour les systèmes impliquent que  $u \in V^{\vec{t}, p}$  loin des sommets de  $\Omega$ . Il suffit donc de prouver (52) près des sommets.

Appliquant la proposition AA.29 de [7] à  $u_{il} \in H_v^{m_{ii}}(\Omega_i)$ , on obtient que

$$u_{il} \in V_{\gamma}^{m_{ii}, 2}(\Omega_i), \forall \gamma \in ]0; 1[ , \forall i, \forall l. \quad (53)$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient quand  $p < 2$

$$u_{il} \in V_{\gamma - \frac{2}{p} - m_{ii} + 1}^{0, p}(\Omega_i), \forall \gamma \in ]0; 1[ , \forall i, \forall l. \quad (54)$$

On fixe maintenant un sommet  $S$  de  $\Omega$  et on considère un recouvrement diadique de

$$C_S^{r_0} = \{x \in \Omega : r(x) < 2r_0\}$$

pour  $r_0 > 0$  et assez petit tel que  $C_S^{r_0} \subset \Omega$ : pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_{\nu} = \{x \in \Omega : \frac{r_0}{\nu} < r(x) < \frac{2r_0}{\nu}\}$$

$$S'_{\nu} = \{x \in \Omega : \frac{r_0}{2\nu} < r(x) < \frac{3r_0}{\nu}\}.$$

On pose  $u_{\nu} = (\nu^{m_{ii}} u_{il}(\frac{\cdot}{\nu}))$ . Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg pour les systèmes assurent l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\sum_{il} \left\| \nu^{m_{ii}} u_{il}(\frac{\cdot}{\nu}) \right\|_{t_{il}, p, S_1} \leq C \left( \sum_{il} \left\| \sum_{l' \in N_i} l_i^{l, l'} (\nu^{m_{ii}} u_{il}(\frac{\cdot}{\nu})) \right\|_{-s_{il}, p, S'_1} \right. \\ \left. + \sum_{il} \left\| \nu^{m_{ii}} u_{il}(\frac{\cdot}{\nu}) \right\|_{0, p, S'_1} \right).$$

On fixe  $i = i_0$  et  $l = l_0$ , l'inégalité précédente conduit à

$$\sum_{|k| \leq t_{i_0 l_0}} \nu^{m_{i_0 l_0}} \nu^{-|k|} \|D^k u_{i_0 l_0}\|_{0, p, S_{\nu}} \leq C \left( \sum_{il} \sum_{|k| \leq -s_{il}} \left\| \nu^{-|k| - m_{ii}} D^k \left( \sum_{l'} l_i^{l, l'} u_{il} \right) \right\|_{-s_{il}, p, S'_{\nu}} \right. \\ \left. + \sum_{il} \| \nu^{m_{ii}} u_{il} \|_{0, p, S'_{\nu}} \right).$$

On multiplie chaque membre de cette inégalité par  $\nu^{\frac{2}{p} - 1 - \gamma}$  et on obtient

$$\sum_{|k| \leq t_{i_0 l_0}} \nu^{\frac{2}{p} - 1 - \gamma + m_{i_0 l_0} - |k|} \|D^k u_{i_0 l_0}\|_{0, p, S_{\nu}} \leq C \left( \sum_{il} \sum_{|k| \leq -s_{il}} \left\| \nu^{\frac{2}{p} - 1 - \gamma - |k| - m_{ii}} D^k \sum_{l'} l_i^{l, l'} (u_{il}) \right\|_{-s_{il}, p, S'_{\nu}} \right. \\ \left. + \sum_{il} \left\| \nu^{\frac{2}{p} - 1 - \gamma + m_{ii}} u_{il} \right\|_{0, p, S'_{\nu}} \right),$$

et par suite

$$\sum_{|k| \leq t_{i_0 t_0}} \nu^{\frac{2}{p}-1-\gamma+m_{i_0 t_0}-|k|} \|D^k u_{i_0 t_0}\|_{0,p,S_\nu} \\ \leq C \left( \sum_{il} \sum_{|k| \leq -s_{il}} \sum_{l'} \|D^k l_i^{l,l'}(u_{il})\|_{-s_{il,p,S'_l}} + \sum_{il} \left\| \nu^{\frac{2}{p}-1-\gamma+m_{il}} u_{il} \right\|_{0,p,S'_l} \right).$$

En sommant cette dernière inégalité sur  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , et utilisant le fait que  $r(x)$  est équivalent à  $\nu^{-1}$  sur  $S_\nu$  et  $S'_\nu$  et aussi (54), on obtient  $u_{i_0 t_0} \in V_{\gamma-\frac{2}{p}+t_{i_0 t_0}-m_{i_0 t_0}+1}(\Omega_{i_0})$  et finalement (52).  $\square$

Nous donnons maintenant un premier résultat de régularité pour un second membre dans un espace à poids:

**THÉORÈME 25.** — *Sous les conditions I à III, soit  $k_1 \in \mathbb{N}$  et supposons que  $k_1 - \beta \geq 0$  et aussi que la droite  $Re \lambda = -\beta - \frac{2}{p} + k_1$  ne contienne aucune valeur propre de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  pour tout  $S \in \mathcal{S}$ . Alors pour tout  $[f, \varphi] \in Y_\beta^{k_1,p}(\Omega)$  avec  $\varphi$  satisfaisant  $\varphi_\Gamma^1 = 0$ , pour tout  $\Gamma$ , toute solution  $u \in V$  du problème  $[L, B]u = [f, \varphi]$  ( $L$  et  $B$  étant homogènes à coefficients constants) admet le développement suivant:*

$$u = u_0 + \sum_{S \in \mathcal{S}, (\lambda, \mu, k) \in \Lambda_S^1(k_1, p, \beta)} c_{S, \lambda, \mu, k} \Phi_S \sigma^{S, \lambda, \mu, k} \quad (55)$$

où  $u_0 \in V_\beta^{k_1 + \vec{t}, p}(\Omega)$ ,  $c_{S, \lambda, \mu, k} \in C$  et

$$\Lambda_S^1(k_1, p, \beta) = \{(\lambda, \mu, k) : \lambda \text{ est une valeur propre de } \mathcal{A}_S(\xi) \text{ telle que} \\ Re \lambda \in ]-\eta - 1; k_1 - \frac{2}{p} - \beta[, \mu = 1, \dots, I^{S, \lambda}, k = 0, \dots, N^{S, \lambda, \mu}, \\ \sigma^{S, \lambda, \mu, k} \in H_v^{\vec{m}}(\Omega)\}. \quad (56)$$

$\eta$  étant défini dans le Lemme 24.

De plus, il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant pas de  $u$  qui vérifie

$$\|u_0\|_{V_\beta^{k_1 + \vec{t}, p}(\Omega)} + \sum_{S \in \mathcal{S}, (\lambda, \mu, k) \in \Lambda_S^1(k_1, p, \beta)} |c_{S, \lambda, \mu, k}| \leq C \| [f, \varphi] \|_{Y_\beta^{k_1,p}(\Omega)}. \quad (57)$$

*Preuve.* — D'après [21], Corollaire 1.25, il existe  $r \in ]1, p[$ , tel que  $f \in W^{-\vec{s}, r}(\Omega)$  et  $\varphi_{\Gamma, h} \in W^{-r\Gamma h - \frac{1}{r}, r}(\Gamma)$ ,  $\forall \Gamma, h$ ; par le Lemme 24  $u \in V_\alpha^{\vec{t}, r}(\Omega)$  avec  $\alpha = \gamma - \frac{2}{r} + \eta + 1, \forall \gamma \in ]0; 1[$ . Puisque  $\alpha > 0$ , on obtient  $[f, \varphi] \in Y_\alpha^{0,r}(\Omega) \cap Y_\beta^{k_1,p}(\Omega)$ . En utilisant le Théorème 23 de comparaison dans les

espaces de Sobolev à poids dans chaque cône  $C_S$  à  $\Phi_S u$  avec  $\gamma$  assez proche de 0, on obtient le résultat.  $\square$

En vue de considérer un second membre  $\varphi$  quelconque, nous donnons maintenant un résultat de relèvement de traces.

LEMME 26. — Pour tout  $\varphi \in \prod_{\Gamma \in \mathcal{A}, h=1, \dots, m_\Gamma} V_\beta^{\tau_\Gamma, h+k_1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$ , il existe  $u \in V_\beta^{k_1+\vec{t}, p}(\Omega)$  tel que  $B_{2, \Gamma}^1 F_\Gamma(u) = \varphi_\Gamma^1, \forall \Gamma$ .

Preuve. — Considérons l'opérateur linéaire

$$G : V_\beta^{k_1+\vec{t}, p}(\Omega) \longrightarrow \prod_{iqlj} V_\beta^{t_{ii}+k_1-\frac{1}{p}-j, p}(\gamma_{iq}),$$

$$u \longmapsto \left( \frac{\partial^j u_{il}}{\partial \nu_{iq}^j} \right),$$

où  $i \in \{1, \dots, K\}, l \in \{1, \dots, Q_i\}, l \in \{1, \dots, N_i\}, j \in \{0, \dots, m_{il}-1\}$ , si  $m_{il} \geq 1$  et où  $\nu_{iq}$  représente la normale extérieure en  $\gamma_{iq}$ . D'après le Théorème 1.31 de [21],  $G$  est linéaire et surjectif. Considérons maintenant l'opérateur linéaire

$$F : V_\beta^{k_1+\vec{t}, p}(\Omega) \longrightarrow \prod_{iqlj} V_\beta^{t_{ii}+k_1-\frac{1}{p}-j, p}(\gamma_{iq}),$$

$$u \longmapsto (F_{iqlj} u_{il}),$$

où  $i \in \{1, \dots, K\}, l \in \{1, \dots, Q_i\}, l \in \{1, \dots, N_i\}, j \in \{0, \dots, m_{il}-1\}$ , si  $m_{il} \geq 1$ . Montrons que comme  $G, F$  est surjectif. Soit donc  $(h_{iqlj}) \in \prod_{iqlj} V_\beta^{t_{ii}+k_1-\frac{1}{p}-j, p}(\gamma_{iq})$ , on veut trouver  $u \in V_\beta^{k_1+\vec{t}, p}(\Omega)$  tel que  $(F_{iqlj} u_{il}) = (h_{iqlj}) \cdot \{F_{iqlj}\}_{j=0}^{m_{il}-1}$  étant un système de Dirichlet, pour chaque  $j \in \{0, \dots, m_{il}-1\}$  nous pouvons écrire d'après le Lemme 2.2.1 de [13]

$$F_{iqlj} = \sum_{s=0}^j \theta_{slj}^{iq} \frac{\partial^s u_{il}}{\partial \nu_{iq}^s} \text{ et } \partial_\nu^j = \sum_{s=0}^j \Lambda_{slj}^{iq} F_{iqls},$$

où pour  $s < j$ , les  $\theta_{slj}^{iq}$  et  $\Lambda_{slj}^{iq}$  sont des opérateurs tangentiels d'ordre au plus  $j-s$  avec coefficients indéfiniment différentiables sur  $\gamma_{iq}$  et, pour  $s = j$ , des fonctions indéfiniment différentiables et différentes de 0 sur  $\gamma_{iq}$ . Posons alors  $(\varphi_{iqlj}) = (\sum_{s=0}^j \Lambda_{sls}^{iq} h_{iqls})$  et, par surjectivité de  $G$ , soit

$u \in V_\beta^{k_1+\vec{t}, p}(\Omega)$  tel que  $(\frac{\partial^j u_{il}}{\partial \nu_{iq}^j}) = (\varphi_{iqlj})$ . Alors,  $F_{iqlj} u_{il} = \sum_{s=0}^j \theta_{slj}^{iq} \frac{\partial^s u_{il}}{\partial \nu_{iq}^s} =$

$$\sum_{s=0}^j \theta_{slj}^{iq} \sum_{s'=0}^s \Lambda_{s'l_s}^{iq} h_{iql_s} = h_{iqlj} \text{ et ceci montre la surjectivité de } F.$$



D'autre part, par définition des  $B_{2,\Gamma}^1$  on peut trouver des fonctions  $g_{iqlj}$  dans  $V_\beta^{t_{ii}+k_1-\frac{1}{p}-j,p}(\gamma_{iq})$  telles que si  $Fu = (g_{iqlj})_{iqlj}$  alors  $B_{2,\Gamma}^1 F_\Gamma(u) = \varphi_\Gamma^1, \forall \Gamma$ .  $\square$

Nous pouvons énoncer maintenant un résultat analogue au Corollaire 4.4 de [22]:

**COROLLAIRE 27.** — *Supposons que les hypothèses du Théorème 25 soient vérifiées alors pour tout  $[f, \varphi] \in Y_\beta^{k_1,p}(\Omega)$ , toute solution faible  $u \in H_v^{\vec{m}}(\Omega)$  du problème  $[L, B]u = [f, \varphi]$  ( $L$  et  $B$  étant homogènes à coefficients constants), dans le sens suivant: pour  $v \in V_\beta^{k_1+\vec{t},p}(\Omega)$  tel que  $B_{2,\Gamma}^1 F_\Gamma(v) = -\varphi_\Gamma^1, \forall \Gamma$ ,  $\tilde{u} = u - v$  appartient à  $V$  et est solution de*

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, w) + b(\tilde{u}, w) &= \sum_{i,l} \int \tilde{f}_{il} \bar{w}_{il} dx \\ &- \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t(N_\Gamma^{-1} \psi_\Gamma^2) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{w}) d\sigma, \forall w \in V, \end{aligned} \quad (58)$$

où l'on a posé  $\tilde{f}_{il} = f_{il} - \sum_{l'=1}^{N_i} l_i^{l'} v_{il'}$  et  $\psi_\Gamma^2 = \varphi_\Gamma^2 - B_{1,\Gamma}^2 \Phi_\Gamma(v) + B_{2,\Gamma}^2 F_\Gamma(v)$ . De plus cette solution  $u$  admet le même développement que (55), avec la même estimation que (57). Cela est équivalent à dire que  $u \in V_0 = v + V$  et satisfait

$$\begin{aligned} a(u, w) + b(u, w) &= \sum_{i,l} \int f_{il} \bar{w}_{il} dx \\ &- \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} {}^t(N_\Gamma^{-1} \varphi_\Gamma^2) \cdot \tilde{F}_{\Gamma,2}(\bar{w}) d\sigma, \forall w \in V \end{aligned} \quad (59)$$

*Preuve.* — On tire du Théorème 25 que la solution  $\tilde{u}$  de (58) admet le développement

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \sum_{S \in \mathcal{S}, (\lambda, \mu, k) \in \Lambda_S^{\frac{1}{2}}(k_1, p, \beta)} c_{S, \lambda, \mu, k}(\tilde{u}) \Phi_S \sigma^{S, \lambda, \mu, k}, \quad (60)$$

où  $\tilde{u}_0 \in V_\beta^{k_1+\vec{t},p}(\Omega)$ . Cela implique directement le développement (55) pour  $u = \tilde{u} + v$  puisque  $v \in V_\beta^{k_1+\vec{t},p}(\Omega)$ .

L'hypothèse  $k_1 - \beta \geq 0$  et les théorèmes sur les injections de Sobolev impliquent  $V_\beta^{k_1+\vec{t}}(\Omega) \hookrightarrow H_v^{\vec{m}}(\Omega)$  et  $H^{\vec{m}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  (où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Ces deux injections montrent que la formule de Green (29) est toujours vraie pour  $u \in V_\beta^{k_1+\vec{t}}(\Omega)$  et  $v \in H_v^{\vec{m}}(\Omega)$ . Remplaçant alors  $\tilde{f}, \tilde{u}, \psi_\Gamma^2$  par leur définition, on obtient l'équivalence entre (58) et (59).  $\square$

*Remarque 28* Dans le cas  $K = 1$ , pour retrouver les résultats du § 7 de [7] il faut choisir  $s_l = m_l - m$  et  $t_l = m + m_l, \forall l = 1, \dots, N$ , lorsque  $m = \max_l m_l$ . Cependant l'ensemble des valeurs propres au sens de [7] et le nôtre est translaté de  $-2m$ , autrement dit

$$\lambda_1 = \lambda_2 - 2m,$$

où  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ) désigne une valeur propre de  $A_S(\lambda)$  au sens de [7] (resp. au sens de la Définition 20).

D'autres choix de  $s_l$  et  $t_l$  conduisent à d'autres valeurs propres puisque les espaces impliqués sont différents.  $\square$

### 4.3. Exemples de calcul d'exposants de singularités.

Dans cette partie, nous représentons les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  pour les exemples introduits dans la sous-section 2.4 avec le choix des paramètres  $s_{il}, t_{il}$  précisés dans la sous-section 3.4. Ces valeurs propres sont calculées avec la méthode de Newton. Pour d'autres méthodes nous renvoyons à [22, 6]. La description des domaines ayant été faite dans la sous-section 2.4, nous rappelons uniquement la valeur des angles en  $S$  des cônes  $C_i$  et nous précisons pour le calcul des exposants de singularités le choix des valeurs des constantes affectées au matériau qui constitue chaque  $\Omega_i$ .

*Exemple 29.* — Couplage avec l'opérateur de Laplace (voir l'Exemple 8).

$\lambda$  est valeur propre si et seulement si il existe une solution non triviale  $\hat{u} = (\hat{u}_i), i = 1, 2, 3$ , des équations ci-dessous:

$$\hat{u}_i(\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_i(\lambda, \omega)}{\partial \omega^2} + (\lambda + 2)^2 \hat{u}_i(\lambda, \omega) = 0, i = 1, 2, 3 \quad (61)$$

$$\hat{u}_i(\lambda, 0) = \hat{u}_j(\lambda, 0), i, j = 1, 2, 3 \quad (62)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial \hat{u}_i(\lambda, 0)}{\partial \omega} = 0 \quad (63)$$

$$\hat{u}_i(\lambda, \omega_i) = 0, i = 1, 2, 3 \quad (64)$$

Nous choisissons ici  $p_i = 1, i = 1, 2, 3$ . Un calcul rapide montre que  $\lambda = -2$  n'est pas valeur propre. Si  $\lambda \neq -2$ , les solutions de (61) sont  $\hat{u}_i(\lambda, \omega) = A_i e^{i(\lambda+2)\omega} + B_i e^{-i(\lambda+2)\omega}, i = 1, 2, 3$ . Remplaçant ces fonctions dans les équations (62)-(64), on obtient un système linéaire homogène de 6 équations

vérifiées par les  $A_i$  et les  $B_i$ . Il existe au moins une solution non triviale si et seulement si le déterminant de ce système est nul. Ce qui conduit à:  $\lambda (\neq -2)$  est valeur propre si et seulement si  $\lambda$  vérifie:

$$3 - \sum_{j=1}^3 e^{2i(\lambda+2)\omega_j} - \sum_{i<j} e^{2i(\lambda+2)(\omega_i+\omega_j)} + 3e^{2i(\lambda+2)\sum_{j=1}^3 \omega_j} = 0.$$

D'après [20] on sait que les valeurs propres sont réelles puisqu'elles peuvent être définies comme des valeurs propres d'un opérateur autoadjoint. La Figure 7 représente les valeurs propres pour  $\omega_1 + \omega_2 = \pi$  et  $\omega_3 = \frac{\pi}{2}$ . L'axe des abscisses  $\omega$  représente les différentes valeurs de  $\omega_1$  en degré tandis que l'axe des ordonnées représente  $Re(\lambda) + 2 = \lambda + 2$ .

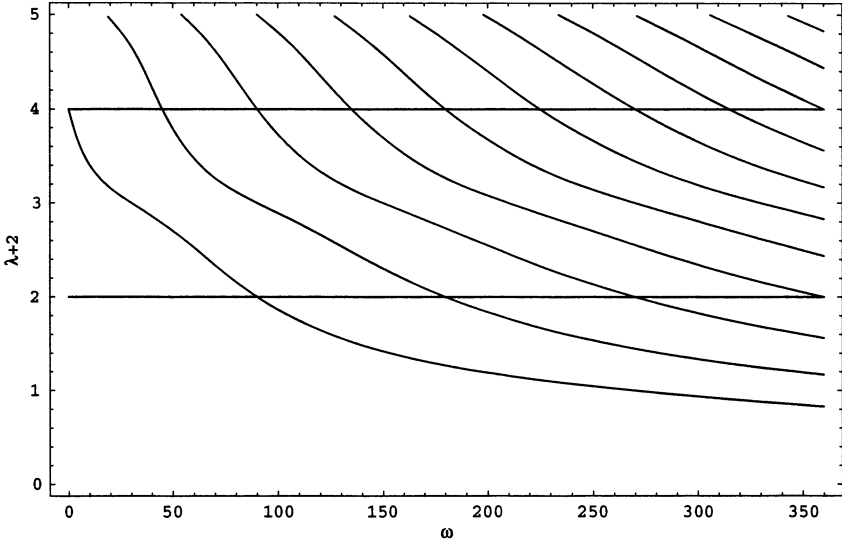


Figure 7

La Figure 8 représente la répartition des valeurs propres pour  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\pi}{2}$  et  $\omega_3$  compris entre 0 et  $2\pi$ . L'axe des abscisses  $\omega$  représente les différentes valeurs de  $\omega_3$  en degré tandis que l'axe des ordonnées représente  $Re(\lambda) + 2 = \lambda + 2$ .

*Exemple 30.* — Mouvement de deux corps élastiques interconnectés (voir Exemple 9).

Les coefficients de Poisson pour les corps  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont notés respectivement  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Nous rappelons que l'angle entre les deux plaques est noté  $\alpha$

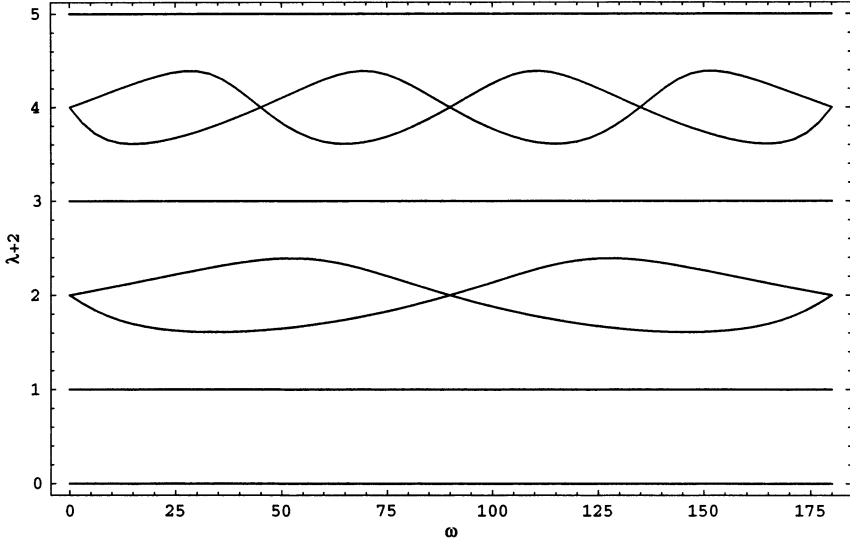


Figure 8

(voir la Figure 4) tandis que les angles intérieurs au sommet  $S$  sont notés  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Dans chaque cône  $C_k$ ,  $k = 1, 2$ , nous fixons  $S$  comme origine et en coordonnées polaires nous introduisons la base locale

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{e}_\omega = \begin{pmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \end{pmatrix}$$

et nous écrivons le vecteur de déplacement dans le plan de  $\Omega_k$  sous la forme

$$\mathbf{u}^k = u_r^k(r, \omega)\mathbf{e}_r + u_\omega^k(r, \omega)\mathbf{e}_\omega.$$

Les équations vérifiées par les fonctions propres associées à  $A_S(\lambda)$  ont la forme suivante.

Equations différentielles:

$$C_k \frac{\partial^2 \hat{u}_r^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega^2} + (\lambda^2 - 1)\hat{u}_r^k(\lambda, \omega) + [(\lambda - 1) - C_k(\lambda + 1)] \frac{\partial \hat{u}_\omega^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_\omega^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega^2} + C_k(\lambda^2 - 1)\hat{u}_\omega^k(\lambda, \omega) + [(\lambda + 1) - C_k(\lambda - 1)] \frac{\partial \hat{u}_r^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (66)$$

$$\lambda^2 \hat{u}_3^k(\lambda, \omega) + \frac{\partial^2 \hat{u}_3^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega^2} = 0. \quad (67)$$

où  $k = 1, 2$  et où nous avons remplacé  $\lambda + 2$  par  $\lambda$ . De plus nous avons posé  $C_k = \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)}$ .

Les conditions de bord extérieur sont:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_r^1(\lambda, \omega_1) &= \widehat{u}_\omega^1(\lambda, \omega_1) = \widehat{u}_3^1(\lambda, \omega_1) = 0 \\ \widehat{u}_r^2(\lambda, \omega_2) &= \widehat{u}_\omega^2(\lambda, \omega_2) = \widehat{u}_3^2(\lambda, \omega_2) = 0.\end{aligned}$$

Les conditions de transmission sont:

$$\begin{cases} \widehat{u}_r^1(\lambda, 0) = \widehat{u}_r^2(\lambda, 0) \\ \widehat{u}_\omega^1(\lambda, 0) = \cos \alpha \widehat{u}_\omega^2(\lambda, 0) + \sin \alpha \widehat{u}_3^2(\lambda, 0) \\ \widehat{u}_3^1(\lambda, 0) = -\sin \alpha \widehat{u}_\omega^2(\lambda, 0) + \cos \alpha \widehat{u}_3^2(\lambda, 0) \end{cases} \quad (68)$$

$$\begin{cases} \widehat{\sigma}_{r\omega}^1(\lambda, 0) = -\widehat{\sigma}_{r\omega}^2(\lambda, 0) \\ \widehat{\sigma}_{\omega\omega}^1(\lambda, 0) = -\cos \alpha \widehat{\sigma}_{\omega\omega}^2(\lambda, 0) - \mu_2 \sin \alpha \frac{\partial \widehat{u}_3^2(\lambda, 0)}{\partial \omega} \\ \mu_1 \frac{\partial \widehat{u}_3^1(\lambda, 0)}{\partial \omega} = +\sin \alpha \widehat{\sigma}_{\omega\omega}^2(\lambda, 0) - \mu_2 \cos \alpha \frac{\partial \widehat{u}_3^2(\lambda, 0)}{\partial \omega} \end{cases} \quad (69)$$

où

$$\widehat{\sigma}_{r\omega}^k(\lambda, \omega) = \mu_k \left[ \frac{\partial \widehat{u}_r^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega} + (\lambda - 1) \widehat{u}_\omega^k(\lambda, \omega) \right],$$

$$\widehat{\sigma}_{\omega\omega}^k(\lambda, \omega) = 2\mu_k \left[ \frac{\partial \widehat{u}_\omega^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega} + \widehat{u}_r^k(\lambda, \omega) \right] + \lambda_k \left[ (\lambda + 1) \widehat{u}_r^k(\lambda, \omega) + \frac{\partial \widehat{u}_\omega^k(\lambda, \omega)}{\partial \omega} \right],$$

$\lambda_k$  et  $\mu_k$  étant les coefficients de Lamé correspondants.

Les équations (65) et (66) ont pour solutions quand  $\lambda \neq 0$  et  $3 + \lambda - 4\nu_k \neq 0$

$$\widehat{u}_r^k(\lambda, \omega) = c_{1k}(\lambda - 1) \cos(\lambda + 1)\omega + c_{2k}(\lambda - 1) \sin(\lambda + 1)\omega + c_{3k}d_k(\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)\omega - c_{4k}d_k(\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)\omega,$$

$$\widehat{u}_\omega^k(\lambda, \omega) = c_{1k}(\lambda - 1) \sin(\lambda + 1)\omega + c_{2k}(\lambda - 1) \cos(\lambda + 1)\omega - c_{3k}(\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)\omega + c_{4k}(\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)\omega,$$

avec  $d_k = \frac{3-\lambda-4\nu_k}{3+\lambda-4\nu_k}$ .

Les solutions des équations (67) ont la forme

$$\widehat{u}_3^k(\lambda, \omega) = c_{5k} \cos \lambda\omega + c_{6k} \sin \lambda\omega.$$

Remplaçant ces solutions dans les conditions de bord et de transmission, nous obtenons un système linéaire homogène de 12 équations et 12 inconnues. Ce système linéaire admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant correspondant est nul.

Nous calculons les valeurs propres de  $A_S(\lambda)$  pour dans différents cas:

*Premier cas.* La Figure 9 représente la partie réelle (augmentée de 2) des exposants singuliers pour  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\pi}{2}$ . L'angle entre les deux plaques est noté  $\alpha$  et nous faisons varier  $\alpha$  de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ . Les coefficients de Poisson pour les corps  $\Omega_1$  (fonte malléable) et  $\Omega_2$  (acier) que nous avons choisis sont respectivement  $\nu_1 = 0.17$  et  $\nu_2 = 0.29$  et le module de cisaillement est  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 4$ . Sur cette figure et sur les suivantes notons que les exposants singuliers qui sont réels sont représentés par un point plus fin tandis que les exposants singuliers possédant une partie imaginaire non nulle ont leurs parties réelles représentées par un point plus épais. Remarquons dans ce cas que les valeurs propres sont les mêmes pour  $\alpha$  et  $2\pi - \alpha$  (symétrie par rapport à  $180^\circ$ ), ce qui est logique du point de vue géométrique.

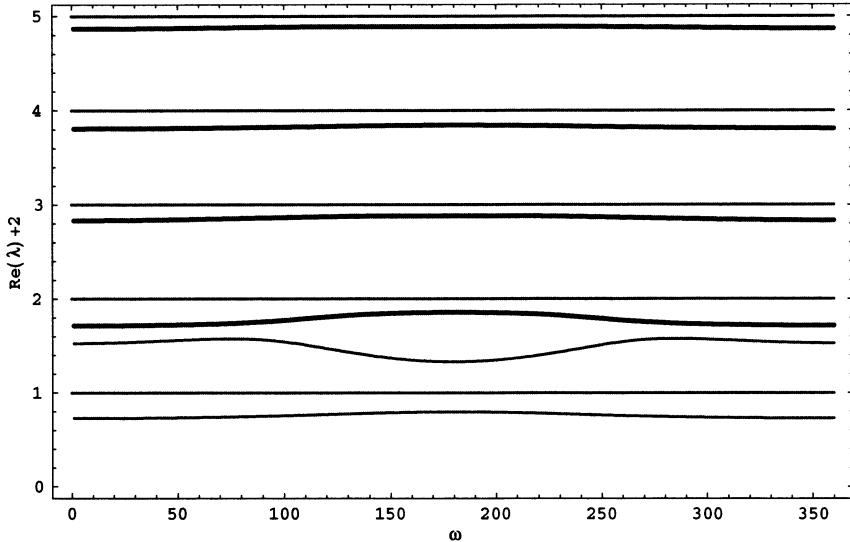


Figure 9

*Deuxième cas.* Comme dans le cas précédent nous fixons  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\pi}{2}$  et faisons varier  $\alpha$  de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  mais nous supposons que les deux plaques sont constituées du même matériau ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.17$ ). Les parties réelles des exposants singuliers sont représentées dans la Figure 10. Notons que pour  $\alpha = 180^\circ$  les exposants singuliers sont entiers. Cela s'explique par le fait que dans ce cas le corps peut être considéré comme un seul corps et que le domaine est régulier en  $S$ .

*Exemple 31.* — Vibrations hydroélastiques, interaction fluide-structure

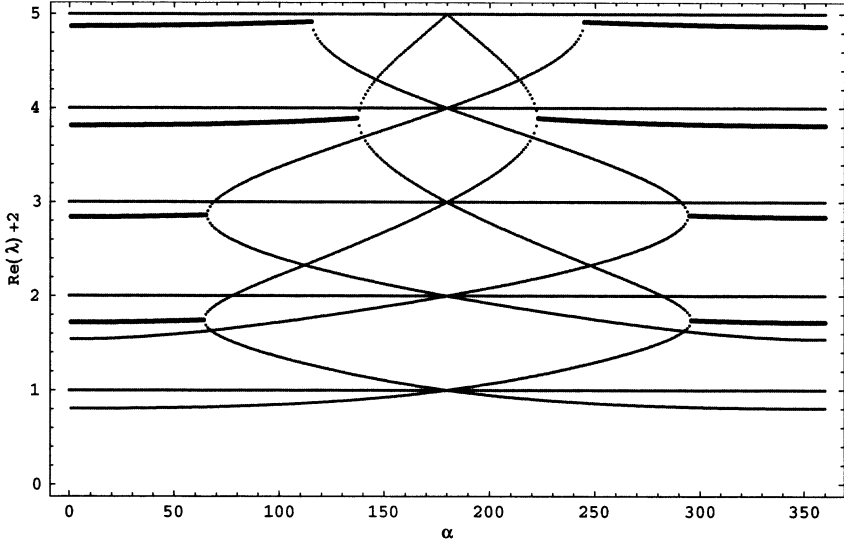


Figure 10

(voir Exemple 10)

Nous considérons les valeurs propres en un sommet S où le cône correspondant est représenté sur la Figure 11.

Les équations vérifiées par les fonctions propres sont (où dans les équations (70)-(76)  $\lambda + 2$  est remplacé par  $\lambda$ )

Equations différentielles:

$$\lambda^2 \widehat{\varphi}(\lambda, \omega) + \frac{\partial^2 \widehat{\varphi}(\lambda, \omega)}{\partial \omega^2} = 0. \quad (70)$$

$$C \frac{\partial^2 \widehat{u}_r(\lambda, \omega)}{\partial \omega^2} + (\lambda^2 - 1) \widehat{u}_r(\lambda, \omega) + [(\lambda - 1) - C(\lambda + 1)] \frac{\partial \widehat{u}_\omega(\lambda, \omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}_\omega(\lambda, \omega)}{\partial \omega^2} + C(\lambda^2 - 1) \widehat{u}_\omega(\lambda, \omega) + [(\lambda + 1) - C(\lambda - 1)] \frac{\partial \widehat{u}_r(\lambda, \omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (72)$$

Conditions de bord extérieur:

$$\text{condition de Dirichlet, } \widehat{\varphi}(\lambda, \omega_1) = 0 \quad (73)$$

$$\text{condition de Neumann, } \widehat{\sigma}_{r\omega}(\lambda, \pi) = \widehat{\sigma}_{\omega\omega}(\lambda, \pi) = 0. \quad (74)$$

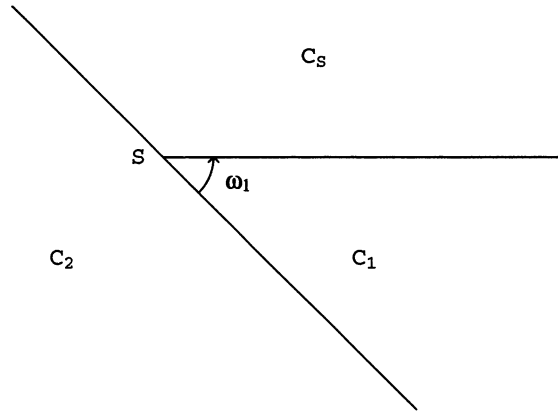


Figure 11

Conditions de transmission:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}(\lambda, 0)}{\partial \omega} = 0, \quad (75)$$

$$\hat{\sigma}_{r\omega}(\lambda, 0) = \hat{\sigma}_{\omega\omega}(\lambda, 0) = 0. \quad (76)$$

On voit ici que le problème est “découplé” lorsqu’on considère la partie principale, ce qui implique que le calcul des valeurs propres se fait séparément. Néanmoins il faut bien comprendre que ce découplage n’a plus lieu pour le calcul des fonctions singulières dans le cas général (voir section 5); en effet les conditions de transmission interviennent dans le calcul de ces fonctions singulières. Une valeur propre pour le Laplacien pourra engendrer une fonction singulière qui vit sur le domaine entier.

Les valeurs propres provenant du Laplacien (équations (70), (73) et (75)) sont données par

$$\lambda + 2 = \frac{\pi}{2\omega_1} + k \frac{\pi}{\omega_1}, k \text{ entier}. \quad (77)$$

Les valeurs propres associées au système de l’élasticité (équations (71), (74) et (76)) sont données par la formule

$$(\lambda + 2) \sin^2(\lambda + 2)\pi = 0, \quad (78)$$

autrement dit  $\lambda$  est entier. Ceci est justifié par le fait que l’angle choisi est  $\pi$  et que les conditions de bord et de transmission sont les mêmes pour la partie principale (conditions de Neumann). Le domaine  $\Omega_2$  a donc une



frontière régulière en  $S$  et la théorie générale implique que les fonctions “ $\sigma^\lambda$ ” correspondantes sont régulières: les fonctions “ $\sigma^\lambda$ ” sont donc des polynômes dans la variable  $x$ , ce qui se vérifie aisément, et  $\lambda$  est obligatoirement un entier.

*Exemple 32.* — Couplage “Laplacien-biharmonique” (voir Exemple 11).

$\lambda$  est valeur propre si et seulement si il existe une solution non triviale  $\hat{u} = (\hat{u}_i), i = 1, 2$ , de

$$\begin{aligned} (\lambda + 3)^2 \hat{u}_1(\lambda, \omega) + \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial \omega^2}(\lambda, \omega) &= 0, \\ (\lambda + 4)^2 (\lambda + 2)^2 \hat{u}_2(\lambda, \omega) + (\lambda + 2)^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial \omega^2}(\lambda, \omega) + \frac{\partial^4 \hat{u}_2}{\partial \omega^4}(\lambda, \omega) &= 0, \\ \hat{u}_1(\lambda, 0) &= 0, \\ \hat{u}_1(\lambda, \omega_1) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial \omega^2}(\lambda, 0) + (\sigma(\lambda + 4)^2 + (1 - \sigma)(\lambda + 4)) \hat{u}_2(0) &= 0, \\ \frac{\partial^3 \hat{u}_2}{\partial \omega^3}(\lambda, 0) + (2 - \sigma)(\lambda + 4)^2 - 3(1 - \sigma)(\lambda + 4) + 2(1 - \sigma) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \omega}(\lambda, 0) &= 0, \\ \hat{u}_2(\lambda, \omega_2) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \omega}(\lambda, \omega_2) &= 0. \end{aligned}$$

Le choix est  $E = 10$  pour le module de Young et  $\sigma = 0.17$  pour le coefficient de Poisson (ce choix correspond pour  $\Omega_2$  à du béton comprimé).

La Figure 12 représente les valeurs propres pour  $\omega_1 + \omega_2 = \frac{3\pi}{2}$ : l’axe des abscisses  $\omega$  représente  $\omega_2$  tandis que l’axe des ordonnées représente  $Re(\lambda) + 3$ . Le problème étant découpé on voit sur le graphique la superposition des exposants singuliers provenant du Laplacien seul avec ceux provenant de l’opérateur biharmonique.

## 5. Cas général.

### 5.1. Résolution polynomiale.

Pour revenir à la résolution de notre problème dans les espaces de Sobolev ordinaires il est nécessaire de résoudre le problème quand le second membre est constitué de fonctions qui sont des polynômes.

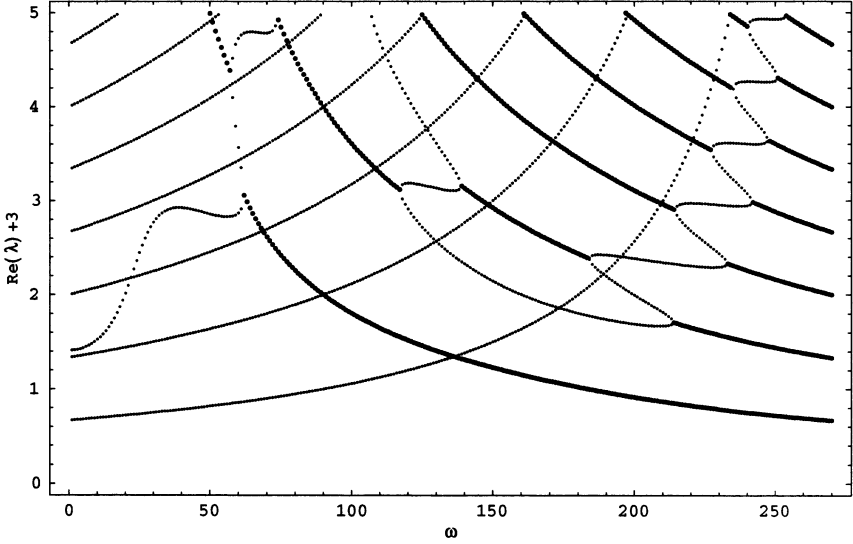


Figure 12

Introduisons d'abord une notation que nous utiliserons par la suite. Pour chaque côté  $\Gamma$  et  $h \in \{1, \dots, m_\Gamma\}$ , posons  $\eta_{\Gamma h} = \sup(t_{il} - m_{il})$  pour les indices  $i$  et  $l$  tels que  $\gamma_{il} = \Gamma$  et tel que  $(B_{\Gamma h}^{il})_0 \neq 0$ .

Pour des raisons qui apparaîtront plus tard, nous faisons l' **Hypothèse H1**. Pour chaque  $\Gamma \in \mathcal{A}_S$  et  $h \in \{1, \dots, m_\Gamma\}$ , supposons que

$$t_{il} - m_{il} = cste = \eta_{\Gamma h},$$

pour les indices  $i$  et  $l$  tels que  $\gamma_{il} = \Gamma$  et tel que  $(B_{\Gamma h}^{il})_0 \neq 0$ .

Une première conséquence de cette hypothèse et qui la justifie partiellement est que l'espace des  $u$  tels que  $B_{\Gamma h}^0 u = 0$  est invariant par le changement

$$u_\nu = (\nu^{m_{il}} u_{il} \left( \frac{\cdot}{\nu} \right)). \quad (79)$$

où  $B_{\Gamma h}^0$  représente la partie principale de  $B_{\Gamma h}$ .

*Remarque 33.* — L'hypothèse H1 est vérifiée quand les opérateurs sont du même ordre ou bien quand le problème est "découplé" (c'est-à-dire que la partie principale est découplée). A noter que cette hypothèse est vérifiée par les exemples de la sous-section 2.4.  $\square$

Nous rappelons maintenant la définition des fonctions singulières duales et des chaînes de Jordan associées (voir [16] pour les justifications). Considérons  $\mathcal{A}_S^*(\lambda)$  l'opérateur adjoint de  $\mathcal{A}_S(\bar{\lambda})$  et soit  $\lambda_0$  une valeur propre de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  à laquelle correspond un système de chaînes de Jordan  $\{\phi^{S,\lambda_0,\mu,k}\}_{\mu=1,\dots,I^{S,\lambda_0}}^{k=0,\dots,N^{S,\lambda_0,\mu}}$ . Alors notons  $\{\Psi^{S,\lambda_0,\mu,k}\}_{\mu=1,\dots,I^{S,\lambda_0}}^{k=0,\dots,N^{S,\lambda_0,\mu}}$  le système de chaînes de Jordan de  $\mathcal{A}_S^*(\lambda)$ , correspondant au nombre  $\bar{\lambda}_0$  tel que

$$\sum_{l=k}^{N^{S,\lambda_0,\mu}} \frac{1}{(l-k)!} (\mathcal{A}_S^{(l-k)}(\lambda_0)u, \Psi^{S,\lambda_0,\mu,l}) = 0 \quad (80)$$

pour tout  $u \in W^{k_1+\vec{t},p}(\Omega_S)$  et tout  $k = 0, \dots, N^{S,\lambda_0,\mu}$ ,  $\mu = 1, \dots, I^{S,\lambda_0}$ , avec les conditions d'orthogonalité:

$$\sum_{l=0}^k \sum_{l'=0}^{N^{S,\lambda_0,\mu'}-k'} \frac{1}{(l+l'+1)!} (\mathcal{A}_S^{(l+l'+1)}(\lambda_0)\phi^{S,\lambda_0,\mu,k-l}, \Psi^{S,\lambda_0,\mu',k'+l'}) = \delta_{kk'}\delta_{\mu\mu'}, \quad (81)$$

pour tout  $k = 0, \dots, N^{S,\lambda_0,\mu}$ ,  $k' = 0, \dots, N^{S,\lambda_0,\mu'}$ ;  $\mu, \mu' = 1, \dots, I^{S,\lambda_0}$ . (( $\xi, \eta$ ) représentent le crochet de dualité  $(Y^{0,2}(\Omega_S), Y^{0,2}(\Omega_S)^*)$  relatif au produit scalaire  $L_2$ ).

Maintenant, nous définissons des espaces de polynômes en posant pour  $J$  entier:

$$P_J(C_S) = \{p, p = (p_{il}) :$$

chaque  $p_{il}$  est un polynôme homogène de degré  $J + t_{il}$  défini sur  $C_i\}$ ,

où nous avons posé  $p_{il} = 0$  quand  $J + t_{il} < 0$ ,

$$X_J(C_S) = \{[p, q], p = (p_{il}), q = (q_{\Gamma h}) :$$

chaque  $p_{il}$  est un polynôme homogène de degré  $J - s_{il}$  défini sur  $C_i$ ,

et  $q_{\Gamma h}$  est un polynôme homogène de degré  $J - r_{\Gamma h}$  défini sur  $\Gamma\}$ ,

avec  $p_{il} = 0$  si  $J - s_{il} < 0$  et  $q_{\Gamma h} = 0$  si  $J - r_{\Gamma h} < 0$ .

Avec ces notations nous pouvons énoncer le

LEMME 34. — Fixons  $S \in \mathcal{S}$  et  $J$  un entier. Alors pour tout  $[p, q] \in X_J(C_S)$ , il existe une solution  $w_S \in L_{loc}^2(C_S)$  de

$$[L_0(S), B_0(S)]w_S = [p, q] \quad (82)$$

*Preuve.* — Si  $J$  n'est pas valeur propre de  $\mathcal{A}_S$  il existe une solution sous la forme  $r^{J+\vec{t}}\varphi(\omega) = (r^{J+t_{il}}\varphi_{il}(\omega_{il}))_{il}$ .

Si  $J$  est valeur propre on cherche une solution sous la forme

$$r^{J+\vec{t}} \varphi(\omega) + \sum_{\mu=1}^{I^{S,J}} c_{\mu} \ln r \sigma^{S,J,\mu,N^{S,J,\mu}}(r, \omega).$$

On pose avec les notations simplificatrices habituelles  $p = p(r, \omega) = r^{J-\vec{s}} g(\omega)$ ,  $q = (r^{J-r_{\Gamma h}} q_{\Gamma h})_{\Gamma h}$ ,  $q' = (q_{\Gamma h}) \in \prod_{\Gamma, h} \mathcal{C}$  et finalement  $p' = (g, q')$ . Si on calcule

$$[L_0(S), B_0(S)](r^{J+\vec{t}} \varphi(\omega) + \sum_{\mu=1}^{I^{S,J}} c_{\mu} \ln r \sigma^{S,J,\mu,N^{S,J,\mu}}(r, \omega)),$$

on montre (comme dans [21], Lemme 4.16) que le problème (82) est équivalent à

$$\mathcal{A}_S(J)\varphi + \sum_{\mu=1}^{I^{S,J}} c_{\mu} \sum_{j=1}^{N^{S,J,\mu}+1} \frac{1}{j!} \mathcal{A}_S^{(j)}(J) \phi^{S,J,\mu,N^{S,J,\mu}+1-j} = p'. \quad (83)$$

Si on pose  $f^{(\mu)} = \sum_{j=1}^{N^{S,J,\mu}+1} \frac{1}{j!} \mathcal{A}_S^{(j)}(J) \phi^{S,J,\mu,N^{S,J,\mu}+1-j}$ , avec le choix (81), les fonctions  $f^{(\mu)}$  satisfont  $(f^{(\mu)}, \Psi^{S,J,\mu',0}) = \delta_{\mu\mu'}$  (voir [16]). Choissant  $c_{\mu} = (p', \Psi^{S,J,\mu,0})$  pour tout  $\mu = 1, \dots, I^{S,J}$ , on peut trouver  $\varphi$  solution de (83) puisque  $p' - \sum_{\mu=1}^{I^{S,J}} c_{\mu} f^{(\mu)}$  est dans l'image de  $\mathcal{A}_S(J)$ .  $\square$

Maintenant nous définissons l'injectivité modulo les polynômes comme dans [7] ou [23]. D'abord, pour tout  $\lambda \in \mathcal{C}$ , notons  $S^{\lambda}(C_S)$  l'espace des fonctions de la forme

$$r^{\lambda+\vec{t}} \sum_{q=0}^Q c_q(\omega) \ln^q r, \quad (84)$$

où chaque fonction vectorielle  $c_q$  est dans  $H^{\vec{t}}(\Omega_S)$ .

**DÉFINITION 35.** — Fixons  $S \in \mathcal{S}$  et  $J$  un entier. On dit que l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$  est injectif modulo les polynômes sur  $S^J(C_S)$  si et seulement si chaque solution  $w_S$  de (82) de la forme (84) avec un second membre dans  $X_J(C_S)$  est dans  $P_J(C_S)$ .

Si  $[L_0(S), B_0(S)]$  n'est pas injectif modulo les polynômes sur  $S^J(C_S)$ , alors on considère une base  $\{q_{\nu}\}_{\nu=1}^{M_J}$  de l'espace  $X_J(C_S)/Y_J(C_S)$ , où  $Y_J(C_S)$  est l'image de  $P_J(C_S)$  par  $[L_0(S), B_0(S)]$ . Grâce au Lemme 34, on fixe une fois pour toute, pour chaque  $\nu \in \{1, \dots, M_J\}$ , une solution  $e^{S,J,\nu}$  de la forme (84) du problème (82) avec comme second membre  $q_{\nu}$ . Ces fonctions sont indépendantes et ne sont pas dans  $P_J(C_S)$ .

Pour  $k_1 \in \mathbb{N}$  et  $p \in ]1, +\infty[$ , on introduit l'espace de Banach dans lequel sera le second membre:

$$X^{k_1, p} = \{[f, g] : f = (f_{il}), g = (g_{\Gamma h}) \text{ tels que les fonctions } f_{il} \in W^{k_1 - s_{il}, p}(\Omega_i) \text{ et } g_{\Gamma h} \in W^{k_1 - r_{\Gamma h} - \frac{1}{p}, p}(\Gamma) \cap \overset{\circ}{H}^{-\eta_{\Gamma h} - r_{\Gamma h} - \frac{1}{2}}(\Gamma)\},$$

et où nous prenons l'intersection si  $-\eta_{\Gamma h} - r_{\Gamma h} \geq 1$ .

Soit  $J = [k_1 - \frac{2}{p}]$  la partie entière de  $k_1 - \frac{2}{p}$ . Pour  $[f, g] \in X^{k_1, p}(\Omega)$  on note  $\prod_J^S [f, g]$  l'élément  $[p, q]$  tel que  $p = (p_{il})$ , où les  $p_{il}$  correspondent au développement de Taylor à l'ordre  $J - s_{il}$  de  $f_{il}$  dans les coordonnées euclidiennes centrées en  $S$ , tandis que  $q_{\Gamma h}$  est celui de  $g_{\Gamma h}$  à l'ordre  $J - r_{\Gamma h}$ . On peut écrire  $\prod_J^S [f, g] = \sum_{j \leq J} (\prod_J^S [f, g])_j$  où  $(\prod_J^S [f, g])_j$  est dans  $X_j(C_S)$ .

D'après le Lemme 34 et avec la Définition 35, il existe  $w_S \in L_{loc}^2(C_S)$  solution de

$$[L_0(S), B_0(S)]w_S = \prod_J^S [f, g], \text{ dans } C_S \quad (85)$$

et cette solution admet le développement

$$w_S = \sum_{k=-\eta}^J \sum_{\nu=1}^{M_k} d_{S, k, \nu} e^{S, k, \nu} + q_S, \quad (86)$$

où  $q_S = (q_{S, il})$  avec  $q_{S, il}$  est un polynôme sur  $C_i$ , et les coefficients  $d_{S, k, \nu}$  sont des combinaisons linéaires des  $D^\alpha f_{il}(S)$  pour  $|\alpha| \leq J - s_{il}$  et de  $D^\alpha g_{\Gamma h}(S)$  pour  $\alpha \leq J - r_{\Gamma h}$ .

LEMME 36. — *Sous l'hypothèse H1, une solution  $w_S$  de (85) peut être choisie telle que  $w_S$  soit localement dans  $H_v^{\overline{m}}(C_S)$ .*

*Preuve.* — Montrons que  $w_S$  se décompose en une somme d'un élément du noyau de l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$  et d'un élément localement dans  $H_v^{\overline{m}}(C_S)$ . Pour cela, fixons l'entier  $j$  tel que  $j \leq J$  et posons  $[p, q] = (\prod_J^S [f, g])_j$ ; notons que  $[p, q] \in X_j(C_S)$ . Soit  $w_S^j = (w_{il}^j)$  une solution de  $[L_0(S), B_0(S)]w_S^j = [p, q]$  donnée par le Lemme 34.  $w_S^j$  s'écrit sous la forme (84). Pour chaque indice  $i \in \{1, \dots, K\}$  et  $l \in \{1, \dots, N_i\}$ , deux cas sont possibles:  $j + t_{il} < m_{il}$  ou  $j + t_{il} \geq m_{il}$ . Dans le second cas, il est clair que  $w_{il}$  est localement dans  $H_v^{m_{il}}(C_S)$ . Ceci nous amène à la décomposition

$$w_S^j = w_1 + w_2,$$

où  $w_1 = (w_{il}^1)$ ,  $w_{il}^1 = w_{il}^j$  si  $j + t_{il} < m_{il}$ , sinon  $w_{il}^1 = 0$ , et  $w_2 = (w_{il}^2)$ ,  $w_{il}^2 = w_{il}^j$  si  $j + t_{il} \geq m_{il}$ , sinon  $w_{il}^2 = 0$ . Pour obtenir le Lemme montrons que  $[L_0(S), B_0(S)]w_1 = 0$ .

Vérifions d'abord que  $L_0(S)w_1 = 0$ . Pour  $i \in \{1, \dots, K\}$ ,  $l \in \{1, \dots, N_i\}$ , deux cas sont à considérer:

Premier cas. Il existe  $l' \in \{1, \dots, N_i\}$  tel que  $w_{il'}^1 \neq 0$  et  $(l_i^{ll'})_0 \neq 0$ . D'après l'hypothèse sur la définition de  $(l_i^{ll'})_0$  (sous-section 2.3), puisque  $(l_i^{ll'})_0 \neq 0$  nous avons

$$s_{il} + t_{il'} = m_{il} + m_{il'}.$$

Ce qui implique

$$j + m_{il} + m_{il'} = j + s_{il} + t_{il'} < m_{il'} + s_{il}$$

et en simplifiant par  $m_{il'}$ , on obtient

$$j - s_{il} < -m_{il} \leq 0.$$

On en déduit alors  $p_{il} = 0$ . De plus, pour  $l'' \in \{1, \dots, N_i\}$  et  $l'' \neq l'$ , on ne peut avoir à la fois  $(l_i^{ll''})_0 \neq 0$  et  $w_{il''}^2 \neq 0$ . Sinon, en calculant comme précédemment on aboutirait à l'inégalité  $j - s_{il} > 0$ .

Dans ce cas, nous en tirons

$$\sum_{l'=1}^{N_i} (l_i^{ll'})_0 w_{il'}^j = \sum_{l'=1}^{N_i} (l_i^{ll'})_0 w_{il'}^1 = 0.$$

Deuxième cas. Quelque soit  $l' \in \{1, \dots, N_i\}$ ,  $w_{il'}^1 = 0$  ou  $(l_i^{ll'})_0 = 0$ . Nous avons immédiatement

$$\sum_{l'=1}^{N_i} (l_i^{ll'})_0 w_{il'}^1 = 0.$$

Finalement, nous avons bien  $L_0(S)w_1 = 0$ .

Montrons maintenant que  $B_0(S)w_1 = 0$ .

Fixons  $\Gamma \in \mathcal{A}_S$  et  $h \in \{1, \dots, m_\Gamma\}$ . Supposons d'abord qu'il existe  $i \in I_\Gamma$  et  $l \in \{1, \dots, N_i\}$  tel que  $(B_{\Gamma h}^{il})_0 \neq 0$  et  $w_{il}^1 \neq 0$ . Nous avons donc  $j + t_{il} < m_{il}$ , ce qui implique  $j < m_{il} - t_{il} = -\eta_{\Gamma h}$  et, d'après **H1**, pour tout  $i' \in I_\Gamma$  et  $l' \in \{1, \dots, N_{i'}\}$  tel que  $(B_{\Gamma h}^{i'l'})_0 \neq 0$  nous avons  $w_{i'l'}^2 = 0$ . Dans ce cas nous obtenons

$$(B_{\Gamma h})_0 w_S^j = \sum_{i' \in I_\Gamma, l': (B_{\Gamma h}^{i'l'})_0 \neq 0} (B_{\Gamma h}^{i'l'})_0 (w_{i'l'}^1 + w_{i'l'}^2) = (B_{\Gamma h})_0 w_1.$$

Si  $h \in \{1, \dots, m'_\Gamma\}$ , l'appartenance de  $g_{\Gamma h}$  à  $\dot{H}^{-\eta_{\Gamma h} - r_{\Gamma h} - \frac{1}{2}}(\Gamma)$  et le fait que  $j - r_{\Gamma h} < -\eta_{\Gamma h} - r_{\Gamma h}$  impliquent  $q_{\Gamma h} = 0$ . Donc  $(B_{\Gamma h})_0 w_1 = 0$ . Si

$h \notin \{1, \dots, m'_\Gamma\}$  alors  $r_{\Gamma h} + t_{il} \geq m_{il}$  et nous en déduisons d'après **H1** que  $r_{\Gamma h} \geq -\eta_{\Gamma h}$ . Puisque aussi  $j < -\eta_{\Gamma h}$  alors  $j - r_{\Gamma h} < 0$ . Par conséquent  $q_{\Gamma h} = 0$  et nous avons aussi  $(B_{\Gamma h})_0 w_1 = 0$ .

Supposons maintenant que pour tout  $i \in I_\Gamma$  et  $l \in \{1, \dots, N_i\}$  on ait  $(B_{\Gamma h}^i)_0 = 0$  ou  $w_{il}^1 = 0$ . Dans ce cas il vient immédiatement  $(B_{\Gamma h})_0 w_1 = 0$ .

En conclusion, on a toujours  $B_0(S)w_1 = 0$ .  $\square$

**THÉOREME 37.** — Soit  $p \in ]1, +\infty[ \setminus \{2\}$ . Sous les conditions **I** à **III**, supposons que l'on a l'hypothèse **H1** et que la droite  $Re \lambda = k_1 - \frac{2}{p}$  ne contient aucune valeur propre de  $A_S(\lambda)$  pour tout  $S \in \mathcal{S}$ . Soit  $[f, g] \in X^{k_1, p}(\Omega)$  et  $u \in H_v^{\overline{m}}(\Omega)$  une solution faible du problème (3)-(4), en ce sens qu'il existe  $v \in H_v^{\overline{m}}(\Omega)$  satisfaisant  $B_{\frac{1}{2}, \Gamma}^1 F_\Gamma(v) = -g_\Gamma^1, \forall \Gamma$  tel que  $u \in V_0 = v + V$  et  $u$  est solution de (59), alors cette solution admet le développement suivant:

$$u = u_0 + \sum_{S \in \mathcal{S}, (\lambda, \mu, k) \in \Lambda_S^1(k_1, p, 0)} c_{S, \lambda, \mu, k} \Phi_S \sigma^{S, \lambda, \mu, k} \quad (87)$$

$$+ \sum_{S \in \mathcal{S}, (k, \nu) \in \Lambda_S^2(k_1, p)} d_{S, k, \nu} \Phi_S e^{S, k, \nu}$$

où  $u_0 \in W^{k_1 + \vec{t}, p}(\Omega)$ ,  $c_{S, \lambda, \mu, k} \in \mathcal{C}$  et nous définissons:

$$\Lambda_S^2(k_1, p) = \{(k, \nu) : k \in \mathbb{Z}, -\eta - 1 < k < k_1 - \frac{2}{p}, \nu = 1, \dots, M_k, e^{S, k, \nu} \in H_v^{\overline{m}}(\Omega)\}, \quad (88)$$

$\eta$  étant le nombre défini au Lemme 24.

De plus nous avons l'estimation

$$\|u_0\|_{W^{k_1 + \vec{t}, p}(\Omega)} + \sum_{S \in \mathcal{S}, (\lambda, \mu, k) \in \Lambda_S^1(k_1, p, 0)} |c_{S, \lambda, \mu, k}| \quad (89)$$

$$+ \sum_{S \in \mathcal{S}, (k, \nu) \in \Lambda_S^2(k_1, p)} |d_{S, k, \nu}| \leq C(\|[f, g]\|_{X^{k_1, p}(\Omega)}).$$

*Preuve.* — Posons  $w = \sum_{S \in \mathcal{S}} \Phi_S w_S$ , avec  $w_S \in H_v^{\overline{m}}(C_S)$ . En utilisant (85) et les inégalités de Hardy, nous avons  $[\tilde{f}, \tilde{g}] = [f, g] - [L, B]w \in Y_0^{k_1, p}(\Omega)$ . Alors, par le Corollaire 27 il existe une unique solution  $\tilde{u} \in H_v^{\overline{m}}(\Omega)$  du problème (3)-(4) avec  $[\tilde{f}, \tilde{g}]$  comme second membre qui admet le développement

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \sum_{S \in \mathcal{S}, (\lambda, \mu, k) \in \Lambda_S^1(k_1, p, 0)} c_{S, \lambda, \mu, k}(\tilde{u}) \Phi_S \sigma^{S, \lambda, \mu, k},$$

où  $\tilde{u}_0 \in V_0^{k_1 + \frac{1}{2}}(\Omega)$  et  $c_{S,\lambda,\mu,k}(\tilde{u})$  est une forme linéaire continue de  $\tilde{u}$ . On pose  $u = \tilde{u} + w$  et puisque  $w \in H_v^{\overline{m}}(\Omega)$ , alors  $u$  est l'unique solution du problème (3)-(4). Finalement,  $w$  dépendant continûment de  $[f, g]$  et utilisant l'estimation (57) pour  $\tilde{u}_0$  on obtient (89).  $\square$

Pour  $p = 2$ , on utilise un argument d'interpolation comme au Théorème 5.27 de [21] ou dans [23].

**THÉORÈME 38.** — *Soit  $p = 2$ . Sous les conditions I à III, supposons que  $[L, B]$  est injectif modulo les polynômes sur  $S^{k_1-1}(C_S)$  et que la droite  $Re\lambda = k_1 - 1$  ne contient aucune valeur propre de  $\mathcal{A}_S(\lambda)$  sauf peut-être pour  $\lambda = k_1 - 1$ , pour tout  $S \in \mathcal{S}$ .*

*Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 37, alors la conclusion de ce Théorème 37 reste valable.*

*Preuve.* — La démonstration est analogue au Théorème 7.4 de [23].  $\square$

## 5.2. Opérateurs à coefficients variables.

Dans cette partie on considère le problème (3)-(4) avec coefficients dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ . Comme cela a déjà été dit nous savons que la solution faible possède la régularité optimale loin des sommets. Pour étudier la régularité près d'un sommet nous utiliserons les résultats précédents et des arguments de perturbation, il sera donc nécessaire de supposer ici que chaque  $m_{il}$  est non nul.

Considérons tout d'abord l'opérateur de trace-transmission

$$\begin{aligned} F : H_v^{\overline{m}}(\Omega) &\rightarrow Y = \prod_{\Gamma, h=1, \dots, m'_\Gamma} H^{-r_{\Gamma h} - \frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\rightarrow (B_{\Gamma h}(u))_{\Gamma h} \end{aligned}$$

où nous rappelons que les conditions  $B_{\Gamma h}(u) = 0$ , pour  $h \in \{1, \dots, m'_\Gamma\}$ , correspondent aux conditions stables.

Etablissons maintenant une équivalence entre les conditions de recouvrement et la coercivité faible de la forme  $a_1$ .

Etablissons d'abord la

**PROPOSITION 39.** — *Supposons que l'on a l'hypothèse H1 et qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|u\|_{\overline{m}, 2, \Omega}^2 \leq C(Re a_1(u, u) + \|u\|_{0, 2, \Omega}^2 + \|Fu\|_Y^2), \forall u \in H_v^{\overline{m}}(C_S) \quad (90)$$



alors pour tout  $\Gamma \in \mathcal{A}$  et pour tout  $x \in \Gamma$ , il existe une constante  $C_1$  telle que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_i} \|u_{il}\|_{H^{m_{il}}(\mathbb{R}_+^2)}^2 &\leq C_1 \left( \sum_{i \in I_S} \sum_{l=1}^{N_i} \omega_{il} \sum_{l'=1}^{N_i} \sum_{|\alpha|=m_{il'}, |\beta|=m_{il}} \right. \\ &\quad \left. \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}_+^2} a_{iil'}^{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_{il'}(y) D^\beta \overline{u_{il}}(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \sum_{h=1}^{m'_\Gamma} \left\| \sum_{i \in I_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_i} B_{\Gamma h}^{il,0}(x, D) u_{il} \right\|_{H^{-\tau_{\Gamma h} - \frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \right) \end{aligned} \quad (91)$$

pour tout  $u_{il} \in H^{m_{il}}(\mathbb{R}_+^2)$ ,  $\forall i \in I_\Gamma$ ,  $\forall l = 1, \dots, N_i$ , où  $\|\cdot\|_{H^{m_{il}}(\mathbb{R}_+^2)}$  représente la semi-norme de  $H^{m_{il}}(\mathbb{R}_+^2)$

*Preuve.* — On utilise des arguments analogues à la Proposition 8.1 de [7] où l'on obtient d'abord le résultat pour une fonction  $u$  ayant un support dans une boule de centre  $x$  et de rayon assez petit, le terme  $\operatorname{Re} b(u, u)$  étant absorbé par une inégalité d'interpolation comme les termes non principaux de  $a$ . Ensuite le changement de variable  $u_\nu = (\nu^{m_{il}} u_{il}(\frac{\cdot}{\nu}))$  et l'hypothèse **H1** donnent (91) pour des fonctions à support compact et enfin on conclut en raisonnant par densité.  $\square$

**THÉORÈME 40.** — *Sous l'hypothèse **H1**, la forme sesquilinéaire  $a_1$  vérifie*

$$\|u\|_{m,2,\Omega}^2 \leq C(\operatorname{Re} a_1(u, u) + \|u\|_{0,2,\Omega}^2 + \|Fu\|_Y^2), \forall u \in H_v^{\overline{m}}(\Omega) \quad (92)$$

*si et seulement si le problème (3)-(4) associé à  $a_1$  vérifie les conditions **I,II**.*

*De plus si l'image de  $F$  est fermée dans  $Y$ , (90) est équivalente à*

$$\|u\|_{m,2,\Omega}^2 \leq C(\operatorname{Re} a_1(u, u) + \|u\|_{0,2,\Omega}^2), \forall u \in V \quad (93)$$

*Preuve.* — Avec l'aide de la proposition 39, on utilise les mêmes arguments que dans le Théorème 2.6 et la Proposition 2.7 de [23].  $\square$

Pour étudier la régularité de la solution faible à chaque sommet de  $\Omega$ , nous fixons  $S \in \mathcal{S}$  et nous considérons l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$  qui est la partie principale de  $[L, B]$  gelée en  $S$ . On note  $F^S$  l'opérateur égal à la partie principale de  $F$  gelée en  $S$ :

$$F^S u = (B_{\Gamma h}^{0,S}(u))_{\Gamma h}, \quad \Gamma \in \mathcal{A}_S, h = 1, \dots, m'_\Gamma.$$

Considérons maintenant l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$  défini sur  $C_S$  et définissons

$$W_S = \{u \in H_v^{\overline{m}}(C_S) : \text{satisfaisant } F^S u = 0 \}.$$

Notons  $a^S$  la forme sesquilinéaire définie sur  $H_v^{\vec{m}}(C_S)$  par

$$a^S(u, v) = \sum_{i \in I_S} \sum_{l=1}^{N_i} \omega_{il} \sum_{l'=1}^{N_i} \sum_{|\alpha|=m_{il'}, |\beta|=m_{il}} \int_{\Omega_{S_i}} a_{il'l}^{\alpha\beta}(S) D^\alpha u_{il'} D^\beta \overline{v_{il}} dx. \quad (94)$$

Supposons que la condition **III** est vérifiée par l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$ . Dans la démarche de la sous-section 3.2 et avec l'hypothèse **H1**,  $a^S$  est la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$ . Nous avons le

**LEMME 41.** — *Sous les conditions I et II, supposons que l'opérateur  $[L_0(S), B_0(S)]$  vérifie la condition III et que l'on a l'hypothèse H1, alors nous avons*

$$\operatorname{Re} a^S(u, u) \geq C |u|_{H^{\vec{m}}(C_S)}^2, \quad \forall u \in W_S. \quad (95)$$

*Preuve.* — Grâce à (90) et aussi en procédant comme dans la Proposition 8.1 de [7] on obtient (95) en utilisant le même changement de variable que dans la Proposition 39.  $\square$

**THÉORÈME 42.** — *Avec les hypothèses du Lemme (41), supposons que  $[L_0(S), B_0(S)]$  est injectif modulo les polynômes sur  $S^{k_1-1}(C_S)$  et que la droite  $\operatorname{Re} \lambda = k_1 - 1$  ne contient aucune valeur propre sauf peut-être pour  $\lambda = k_1 - 1$ . Alors l'opérateur*

$$[L_0(S) + I, B_0(S)] : H^{k_1 + \vec{t}}(C_S) \cap H_v^{\vec{m}}(C_S) \rightarrow X^{k_1, 2}(C_S)$$

est de Fredholm d'indice  $\geq -N_S$  où  $N_S = \#\Lambda_{S, l}^1 + \#\Lambda_S^2(k_1, 2)$ , où  $\Lambda_S^1 = \{(\lambda, \mu, k) \in \Lambda_S^1(k_1, 2, 0) : \sigma^{S, \lambda, \mu, k} \text{ n'est pas un polynôme}\}$  et  $\Lambda_S^2(k_1, 2)$  est donné en (88).

*Preuve.* — On suit la même démonstration que le Théorème 8.2 de [23].  $\square$

Nous définissons maintenant les fonctions singulières associées à notre problème (voir le paragraphe 5.9 de [7]) avant d'énoncer le résultat de décomposition: écrivons les opérateurs  $l_i^{ll'}$  qui constituent  $L(x)$  sous la forme

$$l_i^{ll'}(x, Dx) = \sum_{|\alpha| \leq s_{il} + t_{il'}} a_\alpha(x) D_x^\alpha.$$

Pour  $j \in \mathbb{N}, S \in S$ , posons

$$l_{i, j, S}^{ll'}(x, Dx) = \sum_{s_{il} + t_{il'} - j \leq |\alpha| \leq s_{il} + t_{il'}} \sum_{|\beta| = j + |\alpha| - (s_{il} + t_{il'})} D^\beta a_\alpha(S) \frac{x^\beta}{\beta!} D_x^\alpha.$$

De même si les opérateurs de bord et de transmission  $B_{\Gamma h}^{il}(x, D_x)$  s'écrivent sous la forme

$$B_{\Gamma h}^{il}(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq r_{\Gamma h} + t_{ii}} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

on pose

$$B_{\Gamma h, j, S}^{il}(x, D_x) = \sum_{r_{\Gamma h} + t_{ii} - j \leq |\alpha| \leq r_{\Gamma h} + t_{ii}} \left( \sum_{|\beta| = j + |\alpha| - (r_{\Gamma h} + t_{ii})} D^\beta a_\alpha(S) \frac{x^\beta}{\beta!} D_x^\alpha \right).$$

Finalement on note

$$[L(x), B(x)]_{j, S} = \left[ \left( \sum_{l'=1}^{N_i} l_{i, j, S}^{l'}(x, D_x) \right)_{il}, \left( \sum_{i \in I_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_i} B_{\Gamma h, j, S}^{il}(x, D_x) \right)_{\Gamma h} \right]. \quad (96)$$

L'opérateur  $[L(x), B(x)]_{0, S}$  est donc égal à  $[L_0(S), B_0(S)]$ .

**DÉFINITION 43.** — Si  $\sigma^{S, \lambda, \mu, k}$  est une fonction singulière de  $[L_0(S), B_0(S)]$ , on construit par récurrence sur  $j$ :

$$\sigma_0^{S, \lambda, \mu, k} = \sigma^{S, \lambda, \mu, k},$$

$\sigma_j^{S, \lambda, \mu, k}$  est une solution de

$$[L_0(S), B_0(S)] \sigma_j^{S, \lambda, \mu, k} = - \sum_{p=0}^{j-1} [L(x), B(x)]_{j-p, S} \sigma_p^{S, \lambda, \mu, k}.$$

De façon analogue, nous définissons les fonctions  $e_j^{S, k, \nu}$  pour  $(k, \nu) \in \Lambda_S^2(k_1, 2)$ .

Enfin on pose (pour l'entier  $k_1$  donné)

$$\tau^{S, \lambda, \mu, k} = \sum_{\text{Re } \lambda + j \leq k_1 - 1} \sigma_j^{S, \lambda, \mu, k},$$

$$E^{S, k, \nu} = \sum_{k+j \leq k_1 - 1} e_j^{S, k, \nu}.$$

L'existence de ces fonctions provient du fait que sur  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{A}_S(\lambda)^{-1}$  est méromorphe (voir [7], Lemme 4.17).

Pour notre problème avec coefficients variables, nous introduisons une hypothèse sur les opérateurs de bord et de transmission qui ont un sens dans  $H_v^{\overline{m}}$ : cette hypothèse traduit le fait que l'on prend le second membre encore dans  $X^{l, 2}(C_S)$ .

**Hypothèse H2.** — Pour chaque  $\Gamma_h, h \in \{1, \dots, m'_\Gamma\}$  et chaque indice  $i$  et  $l$  tel que  $B_{\Gamma_h}^{il}$  soit non nul et de degré inférieur strictement à  $t_{il} + r_{\Gamma_h}$ , on suppose que  $\eta_{\Gamma_h} \geq \deg(B_{\Gamma_h}^{il}) - r_{\Gamma_h} - m_{il}$ . Ainsi si  $u_{il} \in H_v^{m_{il}}(C_i)$ , alors  $B_{\Gamma_h}^{il} u_{il}$  est dans  $H^{\circ - \eta_{\Gamma_h} - r_{\Gamma_h} - \frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

**THÉORÈME 44.** — Avec les hypothèses du Théorème (42) et l'hypothèse H2, alors il existe des opérateurs  $[\widetilde{L}(x), \widetilde{B}(x)]$  qui coïncident avec  $[L(x), B(x)]$  dans un voisinage de  $S$  et chaque solution  $u \in H_v^{\overline{m}}(C_S)$  de

$$[\widetilde{L}(x), \widetilde{B}(x)]u = [\widetilde{f}, 0], \text{ avec } \widetilde{f} \in H^{k_1 - \overline{s}}(C_S), \quad (97)$$

admet la décomposition en partie régulière et singulière suivante:

$$u = u_0 + \sum_{(\lambda, \mu, k) \in \Lambda_{S, k_1}^1} c_{S, \lambda, \mu, k} \Phi_S \tau^{S, \lambda, \mu, k} + \sum_{(k, \nu) \in \Lambda_S^2(k_1, 2)} d_{S, k, \nu} \Phi_S E^{S, k, \nu}. \quad (98)$$

où  $u_0 \in H^{k_1 + \overline{t}}(C_S)$ , les coefficients  $c_{S, \lambda, \mu, k}$  et  $d_{S, k, \nu}$  étant dans  $\mathcal{C}$ .

*Preuve.* — On construit tout d'abord pour  $\rho > 0$  l'opérateur  $Q_\rho = [I + L_0(S) + L_\rho(x), B_0(S) + B_\rho(x)]$  défini par

$$L_\rho = ((l_\rho)_i^{ll'}) \text{ avec } (l_\rho)_i^{ll'} = \eta(r(x))(\rho^{m_{ii} + m_{ii'}} l_i^{ll'}(\rho x, \rho^{-1} D_x) - l_i^{ll'}(x, D_x)) \text{ et}$$

$$B_\rho = ((B_\rho^{il})_{\Gamma_h}) \text{ avec } (B_\rho^{il})_{\Gamma_h} = \eta(r(x))(\rho^{r_{\Gamma_h} + t_{il}} B_{\Gamma_h}^{il}(\rho x, \rho^{-1} D_x) - B_{\Gamma_h}^{il}(x, D_x)),$$

où  $\eta$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , indéfiniment différentiable égale à 1 sur l'intervalle  $[0, 1]$  et nulle sur  $[2; +\infty[$  et  $r(x)$  représente la distance de  $x$  au sommet  $S$ . Utilisant les mêmes arguments que [7], section 10.C, on montre que l'opérateur  $[L_\rho, B_\rho]$  est une petite perturbation de  $[I + L_0(S), B_0(S)]$  pour au moins un  $\rho$  assez petit et donc  $Q_\rho$  a les mêmes propriétés d'indice. Il en est de même pour l'opérateur  $Q$  déduit de  $Q_\rho$  par le changement de variable  $x \rightarrow \rho x$ . Enfin l'opérateur  $Q'$  composé de  $Q$  avec l'isomorphisme  $u \mapsto (\rho^{-m_{ii}} u_{il})$  a aussi les mêmes propriétés d'indice que  $[L_0(S) + I, B_0(S)]$  et grâce à H1, il coïncide avec l'opérateur  $[L(x) + I, B(x)]$  dans un voisinage de  $S$ . On pose alors  $[\widetilde{L}(x), \widetilde{B}(x)] = Q' - I$ . Finalement pour une solution de (97), on obtient la décomposition (98) en raisonnant comme dans le Théorème 10.1" de [7].  $\square$

On peut finalement énoncer le résultat pour le domaine  $\Omega$ , pour des opérateurs à coefficients variables dont la démonstration est analogue à celle du Théorème 8.6 de [23].

**THÉORÈME 45.** — *Supposons que l'opérateur  $[L(x), B(x)]$  vérifie les conditions I à III et l'hypothèse H2, supposons aussi que  $[L_0(S), B_0(S)]$  vérifie la condition III, l'hypothèse H1 et soit injectif modulo les polynômes sur  $S^{k_1-1}(C_S)$  et que la droite  $Re\lambda = k_1 - 1$  ne contient aucune valeur propre de  $\mathcal{A}_s(\lambda)$  sauf peut-être pour  $\lambda = k_1 - 1$ . Soit  $u \in V$  une solution du problème  $[L(x), B(x)] = [f, 0]$  avec  $f$  dans  $H^{k_1-\vec{s}}(\Omega)$ , alors cette solution admet dans un voisinage de  $S$  la décomposition suivante:*

$$u = u_0 + \sum_{(\lambda, \mu, k) \in \Lambda_{S, k_1}^1} c_{S, \lambda, \mu, k} \Phi_{ST}^{S, \lambda, \mu, k} + \sum_{(k, \nu) \in \Lambda_S^2(k_1, 2)} d_{S, k, \nu} \Phi_S E^{S, k, \nu}. \quad (99)$$

où  $u_0 \in H^{k_1+\vec{t}}(\Omega)$ , les coefficients  $c_{S, \lambda, \mu, k}$  et  $d_{S, k, \nu}$  étant dans  $\mathcal{C}$ .

*Remarque 46.* — Dans le théorème précédent, nous avons considéré les conditions de bord et de transmission homogène (c'est à dire  $\varphi = 0$ ). On peut considérer le cas  $\varphi \neq 0$ , en établissant les Théorèmes 42 et 44 pour  $p \neq 2$ . Ensuite procédant comme au Corollaire 27, on conclura par un argument d'interpolation.  $\square$

### 5.3. Fonction singulière duale égale à une constante

Le choix de  $V$  comme sous espace de  $H_v^{\vec{m}}(\Omega)$  est justifié par la formule de Green (33) et dans les exemples de la section 2.4 ce choix est naturel. Une question intéressante est de connaître l'incidence sur la solution lorsque  $V$  est pris comme espace variationnel à la place de  $\tilde{V}$  sous espace de  $H^{\vec{m}}(\Omega)$  quand ce dernier est l'espace naturel.

Montrons cela sur un exemple.

Soit  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]0, 1[$  et notons  $S$  le point  $(0, 0)$ .

Posons  $\Gamma^- = ]-1, 0[ \times \{0\}$ ,  $\Gamma^+ = ]0, 1[ \times \{0\}$ ,  $\Gamma_1 = \{-1\} \times ]0, 1[$ ,  $\Gamma_2 = \{1\} \times ]0, 1[$  et  $\Gamma_3 = ]-1, 1[ \times \{1\}$ . Ainsi  $\partial\Omega = \Gamma^- \cup \Gamma^+ \cup \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$ . En fait, on assimile  $\Omega$  à un polygone avec 5 côtés où  $S$  est l'un des sommets et où l'angle en ce sommet est plat.

Les équations considérées sont

$$\rho \Delta^2 u = f \text{ sur } \Omega, \quad (100)$$

$$Mu = Nu = 0 \text{ sur } \Gamma^-, \quad (101)$$

$$Mu = Nu = 0 \text{ sur } \Gamma^+, \quad (102)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, i = 1, 2, 3, \quad (103)$$

où les opérateurs frontières  $M$  et  $N$  sont définis par (20) et (21).

Posons maintenant  $V = \{u \in H^2(\Omega) / u(S) = 0 \text{ et } u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, i = 1, 2, 3\}$  et  $\tilde{V} = \{u \in H^2(\Omega) / u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, i = 1, 2, 3\}$  (notons ici que  $V$  et  $\tilde{V}$  sont différents) et considérons  $a$  la forme bilinéaire définie sur  $H^2(\Omega)$  par

$$a(u, v) = \rho \int_{\Omega} (\Delta u \cdot \Delta \bar{v} - (1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right\}) dx dy.$$

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , le problème associé aux équations (100-103) est de trouver  $u \in \tilde{V}$  solution de

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx dy, \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (104)$$

Appliquant la Remarque 17 et prenant  $V$  comme espace variationnel la solution  $u$  obtenue après calcul possède la décomposition

$$u = u_{reg} + c_S \Phi_S \sigma^S, \quad (105)$$

où  $u_{reg}$  possède la régularité optimale près du sommet  $S$  (nous avons inclus les singularités provenant des autres sommet dans  $u_{reg}$ ) et  $\sigma^S$  est l'unique fonction singulière correspondant au sommet  $S$  donnée par

$$\sigma^S(r, \theta) = r^2 \left( -c + \frac{c^2}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\theta - \theta \sin 2\theta \right) + r^2 \ln r (c + \cos 2\theta), \quad (106)$$

avec  $c = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$ .

D'autre part par un calcul direct nous avons le

LEMME 47. — *La fonction  $u_{reg}$  donnée par (105) vérifie*

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u_{reg} \bar{v} = a(u, v) + \int_{\Gamma^-} (M u_{reg} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} - N u \bar{v}) d\tau + \int_{\Gamma^+} (M u_{reg} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} - N u \bar{v}) d\tau,$$

pour tout  $v \in \tilde{V}$ .

La formule de Green vérifiée par la fonction singulière  $\Phi_S \sigma^S$  est donnée par le

LEMME 48. — La fonction  $\sigma^S$  donnée par (106) vérifie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2(\Phi_S \sigma^S) \bar{v} &= a(\Phi_S \sigma^S, v) + \int_{\Gamma^-} (M(\Phi_S \sigma^S) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} - N(\Phi_S \sigma^S) \bar{v}) d\tau \\ &+ \int_{\Gamma^+} (M(\Phi_S \sigma^S) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} - N(\Phi_S \sigma^S) \bar{v}) d\tau \\ &+ \overline{kv(0)}, \end{aligned}$$

pour tout  $v \in \tilde{V}$ , où  $k = 4(\frac{2+c}{1+c})\pi \neq 0$ .

*Preuve.* — Notons  $\mathcal{D}_\varepsilon$  le demi cercle de centre  $S$  inclus dans  $\Omega$  de rayon  $\varepsilon$ . En appliquant la formule de Green sur  $\Omega - \mathcal{D}_\varepsilon$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2(\Phi_S \sigma^S) \bar{v} &= a(\Phi_S \sigma^S, v) + \int_{\Gamma^-} (M(\Phi_S \sigma^S) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} - N(\Phi_S \sigma^S) \bar{v}) d\tau \\ &+ \int_{\Gamma^+} (M(\Phi_S \sigma^S) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} - N(\Phi_S \sigma^S) \bar{v}) d\tau \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} \mathcal{M} \sigma^S(\varepsilon, \theta) (-\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}(\varepsilon, \theta)) \varepsilon d\theta \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} -\mathcal{N} \sigma^S(\varepsilon, \theta) \bar{v}(\varepsilon, \theta) \varepsilon d\theta, \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  étant des opérateurs d'ordre respectifs 2 et 3.

A cause de la forme de  $\sigma^S$ , il est clair que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} \mathcal{M} \sigma^S(\varepsilon, \theta) (-\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}(\varepsilon, \theta)) \varepsilon d\theta = 0$ .

Maintenant grâce aux injections de Sobolev nous avons pour  $\alpha \in ]0, 1[$  fixé l'estimation suivante

$$|v(\varepsilon, \theta) - v(0)| \leq cste \varepsilon^\alpha.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} -\mathcal{N} \sigma^S(\varepsilon, \theta) \bar{v}(\varepsilon, \theta) \varepsilon d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi (h_1(\theta) + \ln \varepsilon h_2(\theta)) d\theta \overline{v(0)},$$

où nous avons posé  $-\mathcal{N} \sigma^S(\varepsilon, \theta) \varepsilon = h_1(\theta) + \ln \varepsilon h_2(\theta)$ .

Un calcul donne  $\int_0^\pi h_1(\theta) = 4(\frac{2+c}{1+c})\pi = k$  et  $h_2(\theta) = 0$ , d'où le résultat.

Notons que la fonction  $v = 1$  est la fonction duale de  $\sigma^S$  et ainsi le fait d'avoir  $k \neq 0$  provient du Théorème 3.1 de [16]  $\square$

Nous pouvons maintenant conclure: puisque  $u = u_{reg} + c_S \Phi_S \sigma^S$  est solution de (104),  $u$  satisfait les équations (100)-(103). Appliquant alors le Lemme 47 et le Lemme 48 nous obtenons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx dy = \int_{\Omega} \Delta^2 u \bar{v} dx dy = a(u, v) + c_S \overline{kv(0)}, \forall v \in \tilde{V}.$$

Ainsi  $c_S = 0$ . En conclusion nous voyons sur cet exemple que la résolution du problème dans l'espace  $V$  introduit une singularité qui n'apparaît pas lorsque que l'on résoud dans l'espace  $\tilde{V}$ .

Dans le cas général, cette situation peut se présenter lorsque l'exposant singulier  $\lambda = 2$  est de multiplicité algébrique au moins égale à 2 (cas extrêmement rare). Dans ce cas la décomposition (99) de  $u$  solution dans  $\tilde{V}$  n'est pas incorrecte mais seulement imprécise.

## Bibliographie

- [1] AGMON (S.). — *The coerciveness problem for integro-differential forms*, J. d'Analyse Math., **6**, 182-223, 1958.
- [2] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). — *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II*, Com. on Pure and Applied Math., **12**, 1959, 623-727; **17**, 1964, 35-92.
- [3] AGRANOVITCH (M.S.) and VISHIK (M.I.). — *Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type*, Russian Math. Surveys, **19**, 1964, 53-157.
- [4] CIARLET (P.G.). — *Plates and junctions in elastic multi-structures*, RMA **14**, Masson, Paris, 1990.
- [5] CONCA (C.), PLANCHARD (J.), THOMAS (B.) et VANNINATHAN (M.). — *Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure. Applications aux faisceaux tubulaires*, Ed. Eyrolles, Paris, 1994.
- [6] COSTABEL (M.), DAUGE (M.) and LAFRANCHE (Y.). — *Fast semi-analytic computation of elastic edge singularities*, Preprint, Univ. Rennes, 1998.
- [7] DAUGE (M.). — *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains. Smoothness And Asymptotics of Solutions*, Lecture Notes in Math., Vol.1341, Springer, Berlin 1988.
- [8] DAUGE (M.) and NICAISE (S.). — *Oblique derivative and interface problems on polygonal domains and networks*, Comm. PDE **14**, 1147-1192, 1989.
- [9] KONDRATIEV (V.A.). — *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc., **16**, 1967, 227-313.
- [10] LAGNESE (J.E.). — *Controllability of systems of interconnected membranes*, Disc. Cont. Dynamical Syst., **1**, 1995, 17-33.
- [11] LAGNESE (J.E.), LEUGERING (G.) and SCHMIDT (E.J.P.G.). — *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [12] LE DRET (H.). — *Problèmes variationnels dans les multi-domaines. Modélisation des jonctions et applications*, RMA **19**, Masson, Paris, 1991.



- [13] LIONS (J.-L.) and MAGENES (E.). — *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, T. 1, Dunod, 1968.
- [14] LUMER (G.). — *Espaces ramifiés et diffusions sur les réseaux topologiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **291**, 1980, 627-630.
- [15] MAGHNOUJI (A.) and NICAISE (S.). — *On a coupled problem between the plate equation and the membrane equation on polygons*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, Vol. 2, n°2, 1992.
- [16] MAZ'YA (V.G.) and PLAMENESKII (B.A.). — *Coefficients in the asymptotics of the solutions of elliptic boundary value problems in a cone*, J.of Soviet Math., **9**, 1978, 750-764.
- [17] MAZ'YA (V.G.) and PLAMENESKII (B.A.). — *Estimates in  $L_p$  and in Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary*, Amer. Math. Soc.Trans., **123**, 1984, 1-56.
- [18] MERCIER (D.) et NICAISE (S.). — *Existence results for general systems of differential equations on one-dimensional networks and prewavelets approximation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 4, N°2, 1998, 273-300.
- [19] MORAND (H. J.-P.) et OHAYON (R.). — *Interactions Fluides-Structures*, RMA **13**, Masson, Paris, 1992.
- [20] NICAISE (S.). — *Problèmes aux limites sur les réseaux deux-dimensionnels polygonaux topologiques*, J. Math. Pures et Appl., **67**, 93-113, 1998.
- [21] NICAISE (S.). — *Polygonal interface problems*, Series "Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik", **39**, Peter Lang Verlag, 1993.
- [22] NICAISE (S.) and SÄNDIG (A.M.). — *General Interface Problems-I*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **17**, 1994, 395-429.
- [23] NICAISE (S.) and SÄNDIG (A.M.). — *General Interface Problems-II*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **17**, 1994, 431-450.