

ALBERT RAUGI

**Dépassement des sommes partielles de v.a.r.
indépendantes équidistribuées sans moment d'ordre 1**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 9, n^o 4
(2000), p. 723-734

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_4_723_0

© Université Paul Sabatier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Dépassement des sommes partielles de v.a.r. indépendantes équidistribuées sans moment d'ordre 1 (*)

ALBERT RAUGI ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes positives de loi commune μ . Nous étudions la nature de la série $\sum 1_{\{X_{n+1} > F(S_n)\}}$, pour une fonction strictement croissante et non bornée F sur \mathbb{R}_+ . En particulier, pour la fonction $F(x) = cx$, $c > 0$, nous montrons que cette série est convergente ou divergente, \mathbb{P} -p.s., selon que μ possède ou non un moment d'ordre 1. Nous établissons aussi une "loi forte des grands nombres" pour certaines marches aléatoires sans moment d'ordre 1.

ABSTRACT. — Let $(X_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of independent non negative real valued random variables with a common law μ . Let F be an increasing and unbounded function on \mathbb{R}_+ . We study the convergence of the series $\sum 1_{\{X_{n+1} > F(S_n)\}}$. In particular, for the function $F(x) = cx$, $c > 0$, we prove that this series converges \mathbb{P} -a.s. if $E[X_1] < +\infty$ and diverges \mathbb{P} -a.s. if $E[X_1] = +\infty$. We also establish a "law of large numbers" for some random walks with undefined mean.

1. Introduction

Soit μ une mesure de probabilité sur les boréliens de \mathbb{R}_+ , différente de la mesure de Dirac en zéro. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes positives de loi commune μ , définie sur un espace probabilisé

(*) Reçu le 26 avril 1999, accepté le 20 décembre 2000

(1) IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
raugi@univ-rennes1.fr

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout entier $n \geq 1$, nous posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Nous désignons par H et Γ les fonctions sur \mathbb{R}_+ définies par :

$$H(t) = \mu(]t, +\infty[) \quad \text{et} \quad \Gamma(t) = \int_0^t H(u) \, du = \mathbb{E}[\min\{X_1, t\}].$$

Dans [1], il est montré que lorsque H est de l'ordre de $\frac{1}{t}$ au voisinage de l'infini, alors les séries $\sum_{n \geq 1} 1_{\{X_{n+1} > S_n\}}$ et $\sum_{n \geq 1} H(S_n)$ divergent.

Nous considérons une fonction strictement croissante et non bornée F sur \mathbb{R}_+ et nous nous intéressons à la divergence presque sûre des séries

$$\sum_{n \geq 1} 1_{\{X_{n+1} > F(S_n)\}}, \quad \sum_{n \geq 1} H \circ F(S_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[H \circ F(S_n)]. \quad (1)$$

2. Enoncés des résultats

• Nature des séries (1).

(2.1) THÉORÈME. — *Avec les notations précédentes, nous avons :*

i) *Les séries (1) sont de même nature.*

ii) *Si $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$, les séries (1) convergent ou divergent, \mathbb{P} -p.s., selon que l'intégrale $\int_0^{+\infty} H \circ F(t) \, dt$ est finie ou pas.*

iii) *Si $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$, les séries (1) convergent ou divergent, \mathbb{P} -p.s., selon que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{H \circ F(t)}{\Gamma(t)} \left(1 - \frac{tH(t)}{\Gamma(t)}\right) dt$ est finie ou pas.*

(2.2) COROLLAIRE. — *Pour tout réel $c > 0$, les séries*

$$\sum_{n \geq 1} 1_{\{X_{n+1} > cS_n\}}, \quad \sum_{k \geq 0} H(cS_n) \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[H(cS_n)]$$

convergent ou divergent, \mathbb{P} -p.s., selon que $\mathbb{E}[X_1]$ est finie ou pas.

• Loi forte des grands nombres.

(2.3) Hypothèse. — Nous introduisons la condition suivante :

$$\text{il existe un réel } a \in]0, 1[\text{ tel que } \int_0^{+\infty} \frac{t H^2(t)}{(\Gamma(t))^{2(1-a)}} dt < +\infty. \quad (C_1)$$

L'inégalité

$$\int_t^{2t} u H^2(u) \Gamma^{-2}(u) du \geq H^2(2t) \Gamma^{-2}(2t) \int_t^{2t} u du \geq 3/2 t^2 H^2(2t) \Gamma^{-2}(2t)$$

montre que cette condition est plus forte que la condition

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t H(t) / \Gamma(t) = 0 \tag{C_2}$$

qui est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une loi faible des grands nombres pour le processus $(S_n)_{n \geq 1}$ (cf. [4], VII.7, p.236 ; [5]). La condition (C_2) assure que la fonction Γ est à variation lente au sens de Karamata (i.e. $\Gamma(rt)/\Gamma(t)$ tend vers 1, pour tout $r > 0$, quand t tend vers $+\infty$). Il suffit de remarquer que :

$$\Gamma(x) = \Gamma(1) \exp \left(\int_1^x \frac{H(t)}{\Gamma(t)} dt \right) = \Gamma(1) \exp \left(\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right);$$

où $\varepsilon(t) = t H(t) / \Gamma(t)$.

On notera aussi que, sous la condition (C_2) , l'intégrale de l'assertion *iii* du théorème (2.1) peut être remplacée par l'intégrale $\int_1^{+\infty} H \circ F(t) / \Gamma(t) dt$.

Pour $H(t) \underset{+\infty}{\sim} \exp \left(\int_2^t \frac{1}{u \text{Log log } u} du \right) / t \text{Log Log } t$ la condition (C_2) est satisfaite alors que la condition (C_1) ne l'est pas.

(2.4) THÉORÈME. — *Supposons que $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$ et que la condition (C_1) soit satisfaite. Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, appelons $(T_n(\alpha))_{n \geq 1}$ le processus défini par :*

$$T_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \min\{X_k, n \Gamma^{1-\alpha}(n)\}.$$

Alors : *i) Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, le processus $(T_n(\alpha) / n \Gamma(n))_{n \geq 1}$ converge \mathbb{P} -presque sûrement vers 1, quand n tend vers $+\infty$.*

ii) Pour tout $\alpha \in [0, a]$, $T_n(\alpha) \leq S_n \leq \max\{X_k : 1 \leq k \leq n\} + T_n(\alpha)$.

3. Démonstration des résultats

• Démonstration des assertions *i*) et *ii*) du théorème (2.1).

Le fait que les séries (1) soient de même nature découle des deux lemmes suivants. Le premier est une extension classique du lemme de Borel-Cantelli (cf [6], corollaire de la proposition IV-6-3).

(3.1) LEMME. — Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{F} . Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r., à valeurs dans $[0, 1]$, adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ (i.e. pour tout entier $n \geq 1$, la v.a.r. Z_n est \mathcal{F}_n -mesurable).

Alors
$$\left\{ \sum_{n \geq 1} Z_n < +\infty \right\} = \left\{ \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] < +\infty \right\}, \mathbb{P} - p.s.$$

(3.2) LEMME. — Considérons l'espace produit $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la probabilité produit $\mathbb{P} = \otimes \mu$. Nous désignons par $(X_n)_{n \geq 1}$ les applications coordonnées de Ω et par θ l'opérateur de décalage sur Ω (i.e. $\forall n \geq 1, X_n \circ \theta = X_{n+1}$). Pour tout entier $n \geq 1$, nous notons \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les v.a.r. $X_k, 1 \leq k \leq n$. Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. à valeurs dans $[0, 1]$, adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ et vérifiant $\forall n \geq 1, Z_n \circ \theta \geq Z_{n+1}$.

Si $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k] = +\infty$ alors $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n Z_k / \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k] \right) \geq 1, \mathbb{P} - p.s.$

Preuve. — Pour tout entier $n \geq 1$, posons $F_n = \sum_{k=1}^n Z_k / \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k]$. La v.a.r. $F = \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n$ est θ -sous-invariante (i.e. $F \circ \theta \geq F$) et par suite θ -presque sûrement invariante (i. e. $F \circ \theta = F, \mathbb{P} - p.s.$). Noter que, pour tout réel positif a , la v.a.r. \mathbb{P} -intégrable $F_a = F \wedge a$ est θ -sous-invariante et vérifie $\mathbb{E}[F_a \circ \theta] = \mathbb{E}[F_a]$ grâce à l'invariance de \mathbb{P} par θ . D'après la loi 0-1 de Kolmogorov, la v.a.r. F est donc \mathbb{P} -p.s. constante.

Il suffit alors de montrer que la suite de v.a.r. $(F_n)_{n \geq 1}$ est équi-intégrable ; en effet dans ce cas on sait que l'on a l'inégalité de Fatou-Lebesgue

$$\mathbb{E}[\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n] \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[F_n] = 1.$$

Pour cela nous montrons que $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[F_n^2] < +\infty$. Pour tous entiers ℓ et k supérieurs ou égaux à 1, nous avons :

$$\mathbb{E}[Z_\ell Z_{\ell+k}] \leq \mathbb{E}[Z_\ell Z_k \circ \theta^\ell] = \mathbb{E}[Z_\ell] \mathbb{E}[Z_k]$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right)^2\right] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k] + 2 \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} \mathbb{E}[Z_\ell] \mathbb{E}[Z_{k-\ell}] \leq 3 \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k]\right)^2,$$

pour n assez grand pour que $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k] \geq 1$. D'où le résultat. \square

Lorsque $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$, il résulte de la loi forte des grands nombres et de la décroissance de la fonction $H \circ F$ que : pour tout $\varepsilon > 0$, pour \mathbb{P} -presque

tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $N(\omega)$ tel que pour tout entier $n \geq N(\omega)$,

$$H \circ F(n(\mathbb{E}[X_1] + \varepsilon)) \leq H \circ F(S_n(\omega)) \leq H \circ F(n(\mathbb{E}[X_1] - \varepsilon)).$$

Or, pour tout réel $r > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} H \circ F(rn)$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} H \circ F(t) dt$. D'où la seconde assertion du théorème (2.1). \square

• **Préparatifs au cas $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$.**

(3.3). — Dorénavant nous supposons que $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$. Nous considérons la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{\Gamma(x)} = \frac{t}{\mathbb{E}[\min\{X_1, x\}]} = \frac{1}{\mathbb{E}[\min\{X_1/x, 1\}]}.$$

La dernière égalité montre que : la fonction φ peut être prolongée par continuité en zéro par $\varphi(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

La fonction H est positive, décroissante et continue à droite sur \mathbb{R}_+^* . La fonction Γ est croissante, continue, dérivable à droite et à gauche, avec

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma'_d(x) = H(x) \quad \text{et} \quad \Gamma'_g(x) = H(x-0).$$

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+ : H(x-0) < H(x)\}$ est dénombrable. La fonction Γ est donc Lebesgue-presque partout dérivable. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = \mathbb{E}[X] = +\infty$. La fonction φ est continue, dérivable à droite et à gauche sur \mathbb{R} , et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'_d(x) = \frac{\Gamma(x) - x H(x)}{\Gamma^2(x)} = \frac{\mathbb{E}[X_1 1_{\{X_1 \leq x\}}]}{\Gamma^2(x)}.$$

On en déduit donc que la fonction φ est croissante et même strictement croissante sur un intervalle $[s, +\infty[$, $s > 0$. De plus $\forall x \geq 0$, $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'_d(t) dt$.

• **Démonstration de l'assertion *iii* du théorème (2.1).**

L'assertion *iii* du théorème (2.1) résulte de l'encadrement classique suivant concernant la mesure "potentiel" (cf. [3], lemme 1).

(3.4) LEMME. — Pour tout entier $k \geq 1$, nous notons μ^{k*} la k -ième convolée de μ et nous appelons G la mesure "potentiel" $\sum_{k \geq 0} \mu^{k*}$, où μ^0 est la mesure de Dirac δ_0 en zéro.

Alors, pour tout réel strictement positif t , $\varphi(t) \leq G([0, t]) \leq 2\varphi(t)$.

Preuve. — De la relation $(\delta_0 - \mu) * G = \delta_0$, il s'ensuit que

$$\forall x \geq 0, \int_0^x ((\delta_0 - \mu) * G)([0, t]) dt = \int_0^x \delta_0([0, t]) dt ;$$

c'est-à-dire $\forall x \geq 0$, $\int_0^x \int_0^{+\infty} 1_{[0, t]}(u) H(t-u) dG(u) dt = x$. Par application du théorème de Fubini et changement de variable $v = t - u$, il vient, pour tout $x \geq 0$,

$$x = \int_0^{+\infty} 1_{[0, x]}(u) \left(\int_u^x H(t-u) dt \right) dG(u) = \int_0^{+\infty} 1_{[0, x]}(u) \Gamma(x-u) dG(u).$$

De la croissance de la fonction Γ , il résulte alors que, pour tout $x \geq 0$,

$$\Gamma(x/2)G([0, x/2]) \leq \int_0^{+\infty} 1_{[0, x/2]}(u) \Gamma(x-u) dG(u) \leq x \leq \Gamma(x)G([0, x]).$$

D'où le résultat. \square

En posant $S_0 = 0$, nous avons, via le théorème de Fubini,

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[H \circ F(S_n)] = \int_0^{+\infty} H \circ F(t) dG(t) = \int_0^{+\infty} G([0, F^{-1}(u)]) d\mu(u)$$

et par suite, en tenant compte du lemme (3.4),

$$\int_0^{+\infty} \varphi(F^{-1}(u)/2) d\mu(u) \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[H \circ F(S_n)] \leq 2 \int_0^{+\infty} \varphi(F^{-1}(u)) d\mu(u).$$

Or $\varphi(x/2) = \varphi(x)(\Gamma(x)/2\Gamma(x/2)) \geq \varphi(x)(\Gamma(x/2)/2\Gamma(x/2)) = \varphi(x)/2$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi(F^{-1}(u)) d\mu(u) &= \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \int_0^{F^{-1}(u)} \varphi'_d(y) dy d\mu(u) \\ &= \varphi(0) + \int_0^{+\infty} H \circ F(y) \varphi'_d(y) dy. \end{aligned}$$

D'où l'assertion *iii*) du théorème (2.1). \square

• **Démonstration du corollaire (2.2)** .

Nous venons de montrer que les séries (1) convergent, \mathbb{P} -p.s., si et seulement si $\mathbb{E}[\varphi(F^{-1}(X_1))] < +\infty$. Pour $F(t) = ct$ avec $c > 0$, les séries (1) convergent si et seulement si $\mathbb{E}[\varphi(c^{-1}X_1)] < +\infty$. Le corollaire résulte alors du lemme suivant.

(3.5) LEMME. — *Soit X une variable aléatoire réelle. Si $\mathbb{E}[X] = +\infty$, alors $\mathbb{E}[\varphi(X)] = +\infty$.*

Preuve. — Nous avons :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] - \varphi(0) = \int_0^{+\infty} H(u) \varphi'_d(t) dt = \int_0^{+\infty} H(t)\Gamma^{-1}(t)(1-tH(t)\Gamma^{-1}(t)) dt.$$

Si la mesure de probabilité μ vérifie l'hypothèse (C_2) , la dernière intégrale est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} H(t)\Gamma^{-1}(t) dt$ qui diverge. Si μ ne vérifie pas la condition (C_2) , alors l'inégalité

$$\forall t > 0, \mathbb{E}[\varphi(X)1_{\{X>t\}}] \geq H(t)\varphi(t) = tH(t)\Gamma^{-1}(t)$$

montre que nécessairement $\mathbb{E}[\varphi(X)] = +\infty$. \square

• **Démonstration du théorème (2.4)** .

Cette démonstration résultera de trois lemmes.

Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, nous posons :

$$\varphi_\alpha(t) = t^\alpha(\varphi(t))^{1-\alpha}.$$

Les fonctions φ_α sont strictement croissantes sur un intervalle $[s, +\infty[$, $s > 0$. Nous notons β_α la fonction réciproque de φ_α et nous supposons que s est assez grand pour que $\Gamma(s) > 1$. Pour tout $t \geq s$, $\varphi(t) \leq t$; il s'ensuit que $\varphi_\alpha(t)$ croît en α et $\beta_\alpha(t)$ décroît en α . Pour alléger l'écriture, nous notons β la fonction β_0 .

(3.6) LEMME. — *Nous avons :*

i) *Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout réel $t > s$, $\beta_\alpha(t) = t (\Gamma(\beta_\alpha(t)))^{1-\alpha}$.*

ii) *Sous l'hypothèse (C_1) de (2.3), pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\Gamma(\beta_\alpha(t)) \underset{+\infty}{\sim} \Gamma(t)$.*

iii) *Appelons G_α la fonction $x \rightarrow x^{-2}\Gamma^{-2}(x) \int_{\beta_\alpha(s)}^{\beta_\alpha(x)} u H(u) du$. La fonction G_1 est intégrable sur $[s, +\infty[$. Sous l'hypothèse (C_1) , la fonction G_α est intégrable sur $[s, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]0, 1]$.*

iv) Sous l'hypothèse (C₁), pour tout r > 0, la fonction t H²(r β_α(t)) est intégrable sur [s, +∞[.

Preuve. — La première assertion est évidente.

Des diverses monotonies soulignées auparavant, il résulte que

$$1 \leq \Gamma(\beta_\alpha(t))/\Gamma(t) \leq \Gamma(\beta(t))/\Gamma(t).$$

Il suffit donc de montrer l'assertion *ii*), pour α = 0. Nous avons

$$\begin{aligned} \text{Log } \frac{\Gamma(\beta(t))}{\Gamma(t)} &= \int_t^{\beta(t)} \frac{H(u)}{\Gamma(u)} du \\ &\leq \sqrt{\int_t^{\beta(t)} \frac{u H^2(u)}{\Gamma^{2(1-\alpha)}(u)} du} \sqrt{\int_t^{\beta(t)} \frac{\Gamma^{-2\alpha}(u)}{u} du} \\ &\leq C \Gamma^{-\alpha}(t) \sqrt{\text{Log } \frac{\beta(t)}{t}} \quad (\text{hypothèse (C}_2\text{)}) \\ &\leq C \Gamma^{-\alpha}(t) \sqrt{\text{Log } \Gamma(\beta(t))} \\ &\leq C \Gamma^{-\alpha}(t) \sqrt{\text{Log } \frac{\Gamma(\beta(t))}{\Gamma(t)} + \text{Log } \Gamma(t)}. \end{aligned}$$

Considérons la fonction $g(t) = \text{Log } \frac{\Gamma(\beta(t))}{\Gamma(t)}$. Soit $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle tendant vers +∞ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t_n) = \lambda \in [0, +\infty]$ et $g(t_n) > 0$, pour tout $n \geq 0$. L'inégalité précédente, nous donne

$$\forall n \geq 0, \sqrt{g(t_n)} \leq C \sqrt{\frac{1}{\Gamma^{2\alpha}(t_n)} + \frac{\text{Log } \Gamma(t_n)}{\Gamma^{2\alpha}(t_n)g(t_n)}}$$

qui implique λ = 0. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. D'où l'assertion *ii*).

Nous montrons la seconde affirmation de *iii*) ; la première se démontrant de la même façon. D'après les assertions *i*) et *ii*), $\Gamma(t) \sim \Gamma(\beta_\alpha(t))$. Nous sommes donc amenés à prouver l'intégrabilité de la fonction

$$L(t) = t^{-2} \Gamma^{-2}(\beta_\alpha(t)) \int_{\beta_\alpha(s)}^{\beta_\alpha(t)} u H(u) du.$$

Notons tout d'abord que l'égalité de définition de φ_α nous donne, en prenant les dérivées logarithmiques :

$$\frac{\varphi'_\alpha(t)}{\varphi_\alpha(t)} = \frac{\alpha}{t} + (1 - \alpha) \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq \frac{\alpha}{t} + (1 - \alpha) \frac{H(t)}{t} \leq 1/t.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \int_s^{+\infty} L(t) dt &= \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{\int_{\beta_\alpha(s)}^t u H(u) du}{\Gamma^2(t) \varphi_\alpha^2(t)} \varphi'_\alpha(t) dt \\
 &\leq \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{\int_{\beta_\alpha(s)}^t u H(u) du}{t^2 \Gamma^{1+\alpha}(t)} dt \\
 &\leq \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} u H(u) \int_u^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \Gamma^{1+\alpha}(t)} du \\
 &\leq \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{u H(u)}{\Gamma^{1+\alpha}(u)} \int_u^{+\infty} \frac{dt}{t^2} du \\
 &\leq \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{H(u)}{\Gamma^{1+\alpha}(u)} du = \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-\alpha}(\beta_\alpha(s)) < +\infty.
 \end{aligned}$$

L'assertion iv) résulte de :

$$\int_s^{+\infty} u H^2(r \beta_\alpha(u)) du \leq \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{u H^2(ru)}{\Gamma^{2-2\alpha}(u)} du < +\infty \quad \square.$$

Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout réel $t \geq s$, posons :

$$T_t(\alpha) = \sum_{k=1}^{[t]} X_k \wedge \beta_\alpha(t) + \{t\} X_{[t]+1} \wedge \beta_\alpha(t);$$

où $[t]$ et $\{t\}$ désigne respectivement les parties entière et fractionnaire de t . Alors nous avons le résultat suivant :

(3.7) LEMME. — *Supposons que $\mathbf{E}[X_1] = +\infty$. Si la condition (C_1) est satisfaite, alors pour tout $\alpha \in]0, 1]$, le processus $(T_t(\alpha)/t\Gamma(t))_{t \geq s}$ converge \mathbf{P} -p.s. vers 1, quand t tend vers $+\infty$. Lorsque seulement la condition (C_2) est satisfaite, cette convergence a lieu pour $\alpha = 1$.*

Preuve. — Pour $t \geq s$, nous avons :

$$\mathbf{E}[T_t] = t \mathbf{E}[X_1 \wedge \beta_\alpha(t)] = t \Gamma(\beta_\alpha(t)).$$

Pour $\alpha = 1$, $\mathbf{E}[T_t] = t\Gamma(t)$. Pour $\alpha \in [0, 1[$, $\mathbf{E}[T_t] \underset{+\infty}{\sim} t\Gamma(t)$, d'après les assertions i) et ii) du lemme (3.6).

De même, nous avons :

$$\text{var}(T_t) = t \text{var}(X_1 \wedge \beta_\alpha(t)) \leq t \mathbf{E}[X_1^2 \wedge \beta_\alpha^2(t)] = t \int_0^{\beta_\alpha(t)} 2uH(u) du.$$

D'où la majoration,

$$\text{var}\left(\frac{T_t}{t\Gamma(t)}\right) \leq 2 t \frac{\int_0^{\beta_\alpha(t)} u H(u) du}{t^2\Gamma^2(t)}.$$

Pour tout réel $r > 1$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\frac{T_{r^n}}{r^n\Gamma(r^n)}\right) &\leq 2 r^n \frac{\int_0^{\beta_\alpha(r^n)} u H(u) du}{r^{2n}\Gamma^2(r^n)} \\ &\leq \frac{2}{r-1} \frac{r^{2(n+1)}\Gamma^2(r^{n+1})}{r^{2n}\Gamma^2(r^n)} \int_{r^n}^{r^{n+1}} \frac{\int_0^{\beta_\alpha(t)} u H(u) du}{t^2\Gamma^2(t)} dt. \\ &\leq \frac{2r^2}{r-1} \frac{\Gamma^2(r^{n+1})}{\Gamma^2(r^n)} \int_{r^n}^{r^{n+1}} \frac{\int_0^{\beta_\alpha(t)} u H(u) du}{t^2\Gamma^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Lorsque la condition (C_2) est satisfaite, Γ est une fonction à variation lente. De l'assertion *iii*) du lemme (3.6), il résulte alors que la série $\sum \text{var}\left(\frac{T_{r^n}}{r^n\Gamma(r^n)}\right)$ converge pour tout $r > 1$. D'où l'on déduit la convergence \mathbb{P} -p.s. vers 1 de la suite de v.a.r. $(T_{r^n}/r^n\Gamma(r^n))_{n \geq 1}$, pour tout $r > 1$.

Pour tout réel $t \geq s$, considérons l'entier $n = \left[\frac{\text{Log}t}{\text{Log}r}\right]$. Nous avons $r^n \leq t \leq r^{n+1}$ et par suite

$$\frac{T(r^n)}{r^{n+1}\Gamma(r^{n+1})} \leq \frac{T(t)}{t\Gamma(t)} \leq \frac{T(r^{n+1})}{r^n\Gamma(r^n)}.$$

Comme Γ est une fonction à variation lente, la convergence précédente montre que, \mathbb{P} -p.s.,

$$\frac{1}{r} \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{T(t)}{t\Gamma(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{T(t)}{t\Gamma(t)} \leq r.$$

On obtient le résultat voulu, en faisant tendre r vers 1. \square

Le lemme suivant est inspiré du lemme 2 de [2].

(3.8) LEMME. — *Plaçons nous sous les hypothèses du théorème (2.4). Soit $\alpha \in [0, a]$. Pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $N(\omega)$ tel que, pour tout entier $n \geq N(\omega)$, il existe au plus un entier k de $\{1, \dots, n\}$ pour lequel $X_k > \beta_\alpha(n)$.*

Preuve. — Soit $r \in]0, 1[$. Pour tout entier $p \geq 1$, posons :

$$A_p = \bigcup_{1 \leq \ell < k \leq p} \{X_\ell > r \beta_\alpha(p)\} \cap \{X_k > r \beta_\alpha(p)\}.$$

Nous avons

$$\mathbb{P}[A_p] \leq \sum_{1 \leq \ell < k \leq p} H^2(r \beta_\alpha(p)) \leq p^2 H^2(r \beta_\alpha(p)).$$

Or, pour tout entier m , nous avons

$$2^{2m} H^2(r \beta_\alpha(2^m)) \leq 2^2 \int_{2^{m-1}}^{2^m} t H^2(r \beta_\alpha(t)) dt.$$

D'après l'assertion *iv*) du Lemme (3.6), la série $\sum_{m \geq 0} \mathbb{P}[A_{2^m}]$ est convergente et, pour \mathbb{P} -presque tout ω , il existe un entier $N_1(\omega) \geq \log_2 s$ tel que, pour tout entier $m \geq N_1(\omega)$, il existe au plus un entier k de $\{1, \dots, 2^m\}$ pour lequel $X_k \geq r \beta_\alpha(2^m)$. Il s'ensuit que pour tout entier $n > 2^{N_1(\omega)}$, il existe au plus un entier k de $\{1, \dots, 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}\}$ pour lequel $X_k \geq r \beta_\alpha(2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1})$. Ce qui implique qu'il existe au plus un entier k de $\{1, \dots, n\}$ tel que $X_k \geq r' \beta_\alpha(n)$, avec $r' = r \sup_{p \geq s} \beta(2p)/\beta(p)$. On notera que, comme $\beta(t) \sim t \Gamma(t)$ et Γ est à variation lente, la quantité $\sup_{p \geq s} \beta(2p)/\beta(p)$ est finie. On obtient le résultat voulu, en choisissant r de façon que $r' \leq 1$. \square

L'assertion *i*) du théorème (2.4) résulte des lemmes (3.6) et (3.7), en notant que, pour tous réels $\alpha_1, \alpha, \alpha_2$ vérifiant $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq 1$,

$$X_1 \wedge \beta_{\alpha_2}(t) \leq X_1 \wedge t \Gamma^{1-\alpha}(t) \leq X_1 \wedge \beta_{\alpha_1}(t),$$

pour t suffisamment grand. L'assertion *ii*) résulte du lemme (3.8).

(3.9) *Remarques.*

1) Si la mesure de probabilité μ vérifie l'hypothèse (C_2) , alors on vérifie facilement que la mesure de probabilité $\varphi(\mu)$ vérifie l'hypothèse (C_1) .

2) Sous l'hypothèse (C_1) , on peut obtenir l'assertion *iii*) du théorème (2.1) à partir du théorème (2.4). Soit $\alpha \in]0, a]$. D'après les assertions *i*) et *ii*), pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $N(\omega)$ tel que, pour tout $n \geq N(\omega)$,

$$\frac{1}{2} \beta(n) \leq S_n(\omega) \leq \max\{X_k(\omega) : 1 \leq k \leq n\} + 2 \beta(n).$$

On voit facilement que, pour tout $r > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} H \circ F(r\beta(n))$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} H \circ F(t)/\Gamma(t) dt$. Lorsque cette intégrale converge, de la décroissance de $H \circ F$, il résulte que la série $\sum_{n \geq 1} H \circ F(S_n)$ converge, \mathbb{P} -presque sûrement. Lorsque l'intégrale diverge, nous montrons la

divergence, \mathbb{P} -p.s., de la série $\sum_{n \geq 1} H \circ F(M_n + 2\beta(n))$, où $M_n = \max \{X_k : 1 \leq k \leq n\}$.

Pour tout entier n , nous avons :

$$\sum_{k=1}^n H \circ F(M_k + 2\beta(k)) \geq \sum_{k=1}^n H \circ F(4\beta(k)) 1_{\{M_k \leq 2\beta(k)\}}$$

Appelons Z la v.a.r. positive $\sum_{k \geq 1} H \circ F(4\beta(k)) 1_{\{M_k \leq 2\beta(k)\}}$. Pour tout entier naturel p , nous avons :

$$\mathbb{E}[Z 1_{\{Z \leq p\}}] = \sum_{k \geq 1} H \circ F(4\beta(k)) \mathbb{P}[\{M_k \leq 2\beta(k)\} \cap \{Z \leq p\}].$$

Or

$$\mathbb{P}[\{M_k \leq 2\beta(k)\}] = (1 - H(2\beta(k)))^k \geq 1 - kH(2\beta(k))$$

et $kH(2\beta(k)) = \beta(k)H(2\beta(k))/\Gamma(\beta(k))$ tend vers zéro quand k tend vers l'infini, car Γ est à variation lente et la condition C_2 est satisfaite. On en déduit que $\mathbb{P}[\{M_k \leq 2\beta(k)\} \cap \{Z \leq p\}]$ tend vers $\mathbb{P}\{Z \leq p\}$ quand k tend vers l'infini. Comme la série $\sum_{k \geq 1} H \circ F(4\beta(k))$ diverge, nous avons nécessairement $\mathbb{P}\{Z \leq p\} = 0$, pour tout entier naturel p . D'où le résultat.

□

Bibliographie

- [1] CONZE (J.-P.), GUIVARC'H (Y.), RAUGI (A.). — *Dépassement des sommes partielles pour des v.a. sans moment*, Séminaire de Rennes, 1998.
- [2] DIAMOND (H.-G.), VAALER (J.-D.). — *Estimates for partial sums of continued fraction partial quotients*, Pacific J. of Math, Vol. 122, No 1, 1986.
- [3] ERICKSON (K.-B.). — *The strong law of large number when the mean is undefined*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 185, 1973, p. 371-381.
- [4] FELLER (W.). — *An introduction to probability Theory and its applications*, vol II, John Wiley & Sons, 1971.
- [5] KESTEN (H.), MALLER (R.-A.). — *Ratios of trimmed sums and order statistis*, Ann. Probab., 20, 1992, p. 1805-1842.
- [6] NEVEU (J.). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1970.