

PHILIPPE CASTILLON

Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 7, n^o 3 (1998), p. 379-400

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_3_379_0

© Université Paul Sabatier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique⁽¹⁾

PHILIPPE CASTILLON⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de donner une interprétation cinématique des méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans \mathbb{H}^3 . On obtient une construction par des roulettes analogue à celle de Delaunay dans \mathbb{R}^3 . La famille de courbes à faire rouler contient les analogues hyperboliques des ellipses, des hyperboles, et une surprenante famille de "paraboles".

ABSTRACT. — The purpose of this paper is to give a kinematic interpretation for the generating curve of revolution surfaces with constant mean curvature in \mathbb{H}^3 which is similar to Delaunay's rolling construction in \mathbb{R}^3 . The family of curves we have to roll to obtain the generating curves of these revolution surfaces contains generalized ellipses, hyperbolas and a surprising family of "parabolas".

0. Introduction

En 1841, C. Delaunay [De] trouvait un moyen amusant de construire les surfaces de révolution dans \mathbb{R}^3 à courbure moyenne constante : leurs méridiennes sont les trajectoires d'un foyer d'une conique qui roule sans glissement sur l'axe de révolution. Des résultats analogues ont été obtenus par W. Y. Hsiang et W. C. Yu pour les sous-variétés $\mathcal{O}(n-1)$ -invariantes de \mathbb{R}^n (cf. [HW, théorème 2]), par H. Rosenberg et R. Sá Earp pour les surfaces spéciales de \mathbb{R}^3 (cf. [RE, théorème 4.3]), et par I. Sterling pour les hypersurfaces de type σ_ℓ dans \mathbb{H}^n et S^n (cf. [St]).

⁽¹⁾ Reçu le 30 mai 1996, accepté le 7 avril 1997

⁽¹⁾ Université Grenoble I, Institut Fourier, B. P. 74, F-38402 St-Martin-d'Hères Cedex (France)

e-mail : philippe.castillon@fourier.ujf-grenoble.fr

En appendice de [De], J. Sturm apporte une preuve plus géométrique du théorème de Delaunay. Le but de cet article est de montrer que la démarche de Sturm s'adapte au cas hyperbolique et permet d'obtenir une interprétation cinématique analogue à celle de Delaunay.

1. Équation différentielle vérifiée par la méridienne et équation de la roulante

Soit G le sous-groupe des isométries de \mathbb{H}^3 laissant une géodésique Γ point par point invariante. Plaçons-nous dans le modèle de la boule, soit

$$B^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$$

munie de sa métrique hyperbolique. Prenons pour Γ la géodésique $v = w = 0$. Les éléments de G sont alors les rotations euclidiennes d'axe $v = w = 0$ restreintes à B^3 . Dans la suite, on notera

$$B^2 = \{(u, v, w) \in B^3 \mid w = 0\} \quad \text{et} \quad B^2_+ = \{(u, v, 0) \in B^2 \mid v \geq 0\}.$$

Chaque orbite de G coupe B^2_+ orthogonalement en un point unique, et l'espace B^3 est engendré par l'action de G sur B^2_+ .

Soit s l'abscisse curviligne de Γ telle que $\Gamma(0) = 0$. Prenons sur B^2_+ les coordonnées de Fermi : soient $m \in B^2_+$ et p sa projection hyperbolique sur Γ , la première coordonnée x de m est l'abscisse de p sur Γ et la deuxième coordonnée y de m est $d(m, p)$ où d est la distance hyperbolique. Dans ces coordonnées, la métrique hyperbolique sur B^2_+ s'écrit (cf. [Bu, p. 4]) :

$$g_{B^2_+} = \cosh^2 y \, dx^2 + dy^2.$$

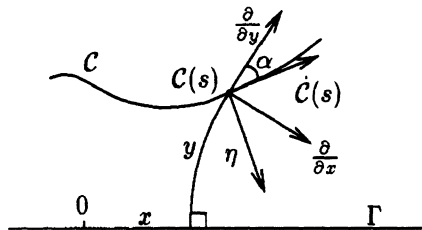


Fig. 1.1

Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique

Soit $\mathcal{C}(s)$ une courbe de B_+^2 paramétrée par l'abscisse curviligne, et soit M la surface de B^3 engendrée par l'action de G sur \mathcal{C} . Notons $x(s)$ et $y(s)$ les coordonnées de $\mathcal{C}(s)$, et $\alpha(s)$ l'angle de $\partial/\partial y$ à $\dot{\mathcal{C}} = d\mathcal{C}/ds$. On a

$$\dot{\mathcal{C}} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y} \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}.$$

Soit

$$\eta = \frac{\cos \alpha}{\cosh y} \frac{\partial}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}$$

un vecteur unitaire normal à M , et soit ν le champ de vecteurs tangents aux orbites de G . Pour des raisons de symétrie, $\dot{\mathcal{C}}$ et ν sont les directions principales de courbure de M . Soit D la connexion riemannienne de \mathbb{H}^3 , notons

$$k_1 = \langle D_{\dot{\mathcal{C}}}\dot{\mathcal{C}}, \eta \rangle \quad \text{et} \quad k_2 = \langle D_{\nu}\nu, \eta \rangle$$

les courbures principales de M , et $H = (k_1 + k_2)/2$ la courbure moyenne de M , un calcul donne le résultat suivant.

PROPOSITION 1.1. — *La courbure moyenne H de M vérifie*

$$2H = \frac{d\alpha}{ds} + \sin \alpha (\tanh y + \coth y).$$

Supposons dorénavant que la courbure moyenne de M est constante. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2. — *La méridienne d'une surface de révolution M à courbure moyenne constante H vérifie l'équation différentielle*

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = K$$

où K est une constante.

Preuve. — Soit

$$F = -H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds},$$

en utilisant le fait que

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = \cos \alpha,$$

le calcul donne $dF/ds = 0$. \square

Montrons maintenant que l'équation

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = K \quad (1.1)$$

est vérifiée par la trajectoire d'un point lié à une courbe qui roule sans glissement sur une géodésique; on va chercher une équation de la roulante à partir de l'équation différentielle (1.1). Pour ce faire, adoptons la méthode utilisée par Sturm (cf. [De, pp. 319-320]).

Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , et $F \in N$. Considérons sur N les coordonnées polaires centrées en F , l'angle étant pris par rapport à une géodésique de référence k . Dans ces coordonnées, la métrique de N s'écrit (cf. [Bu, p. 3]) :

$$g_N = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

Soit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ une courbe de N , Γ la géodésique de B^2 d'équation $v = 0$ et $\varphi(t, m) : I \times N \rightarrow B^2$ le roulement sans glissement de γ sur Γ (définition A.7). Soit $\mathcal{C}(t) = \Phi_t(F)$ la trajectoire de F , et soient $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de Fermi de $\mathcal{C}(t)$. On note s l'abscisse curviligne de \mathcal{C} , et on passe en variable s .

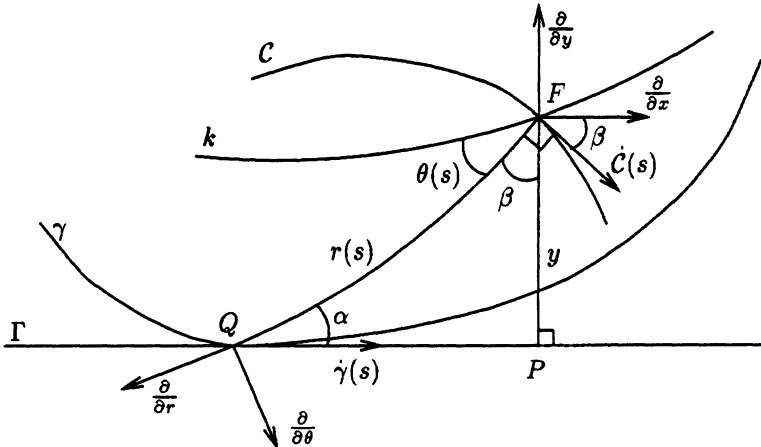


Fig. 1.2

Sur la figure 1.2, on a représenté dans B^2 l'image par Φ_s de γ et k , et l'image par Φ_{s*} de $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta$ et $\dot{\gamma}(s)$.

Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique

Soit β l'angle de $\partial/\partial x$ à $\dot{C}(s)$, et α l'angle entre Γ et la géodésique joignant Q à F . Le roulement étant sans glissement, on a $QF\dot{C} = \pi/2$ donc $\widehat{QFP} = \beta$ (prop. A.9).

Supposons que $C(s)$ vérifie l'équation (1.1), on veut en déduire une équation vérifiée par $r(s)$ et $\theta(s)$. Comme

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\cos \beta}{\cosh y},$$

on déduit des relations dans le triangle hyperbolique (QFP) (cf. [Bu, p. 33]) que

$$\cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \cosh r \sin \alpha. \quad (1.2)$$

De plus, on a

$$\sinh y = \sinh r \sin \alpha. \quad (1.3)$$

D'autre part, on a

$$\dot{\gamma}(s) = \|\dot{\gamma}(s)\| \left(-\cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \alpha}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{\dot{\theta} \sinh r}{\sqrt{r^2 + \sinh^2 r \dot{\theta}^2}}. \quad (1.4)$$

En reportant les relations (1.2), (1.3) et (1.4) dans l'équation (1.1), on obtient

$$-H + \coth r = K \left(\frac{d \coth r}{d\theta} \right)^2 + \frac{K}{\sinh^2 r}.$$

En posant $u = \coth r$, on obtient

$$d\theta = \frac{\pm du}{\sqrt{\frac{K-H}{K} + \frac{u}{K} - u^2}},$$

et en intégrant, on trouve

$$\tanh r = \frac{2K}{1 + \sqrt{4K^2 - 4HK + 1} \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Finalement, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 1.3. — *Soit Γ une géodésique de \mathbb{H}^2 , et soit C la méridienne d'une surface de révolution d'axe Γ et à courbure moyenne constante. Soient N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , $F \in N$ et (r, θ) les coordonnées polaires centrées en F . Alors il existe dans N une courbe $\gamma_{e,p}$ d'équation polaire $\tanh r = p/(1 + e \cos \theta)$, $e \geq 0$, $p \in \mathbb{R}$, telle que C soit la courbe décrite par F lorsque $\gamma_{e,p}$ roule sans glissement sur Γ .*

Ivan Sterling a étudié un problème similaire dans le cadre plus général des hypersurfaces de révolution de type σ_ℓ dans \mathbb{H}^{n+1} et S^{n+1} ; il obtient une équation intégrale de la roulante (cf. [St, théorème 1]). D'autre part, il remarque que dans le cas des surfaces à courbure moyenne constante cette équation s'intègre, et il obtient le résultat de la proposition 1.3 (cf [St, p. 196]).

2. Les courbes d'équation $\tanh r = p/(1 + e \cos \theta)$ dans \mathbb{H}^2

Soient r et θ les coordonnées polaires de \mathbb{H}^2 centrées en un point F , et prises par rapport à une géodésique de référence k ($r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in U_F \mathbb{H}^2$, le cercle unité tangent en F à \mathbb{H}^2). On identifiera dans la suite $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ et $U_F \mathbb{H}^2$. On adoptera les notations suivantes :

- si $E \in \mathbb{H}^2$, on notera d_E la fonction définie par $d_E(x) = d(E, x)$ où d est la distance hyperbolique;
- si $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, on notera b_ν la fonction de Busemann centrée en ν qui s'annule en F (pour la définition des fonctions de Busemann, voir [Ba]);
- si g est une géodésique orientée par un champ normal η , on notera d_g la fonction définie par

$$d_g(x) = \begin{cases} d(g(u), x) & \text{si } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)) \text{ avec } r \geq 0, \\ -d(g(u), x) & \text{si } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)) \text{ avec } r < 0. \end{cases}$$

On appellera fonction de type distance les fonctions $\pm d_E$ avec $E \in \mathbb{H}^2$, $\pm b_\nu$ avec $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, et d_g avec g une géodésique orientée de \mathbb{H}^2 .

Soit $\gamma_{e,p}$, $e \geq 0$, $p \geq 0$ la courbe d'équation polaire $\tanh r = p/(1 + e \cos \theta)$. Dans ce qui suit, on supposera $p < 1 + e$ (sinon on a $p/(1 + e \cos \theta) \geq 1$ et $\gamma_{e,p}$ est vide). L'équation de $\gamma_{e,p}$ nous fait songer aux coniques de \mathbb{R}^2 , montrons que $\gamma_{e,p}$ a des propriétés analogues.

Pour tout θ , soit $u_\theta \in T_{\gamma_{e,p}(\theta)}\mathbb{H}^2$ le symétrique de $-\partial/\partial r$ par rapport au vecteur $\dot{\gamma}_{e,p}(\theta)$, et soit $g_\theta(s) = \exp_{\gamma_{e,p}(\theta)}(su_\theta)$. La géodésique g_θ est obtenue par réflexion par rapport à la normale à $\gamma_{e,p}$ en $\gamma_{e,p}(\theta)$ de la géodésique issue de F .

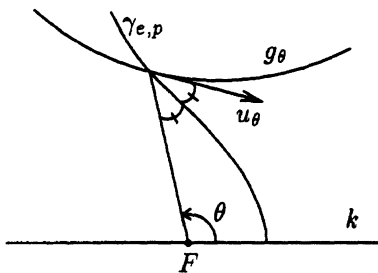


Fig. 2.1

On construit ainsi une famille de géodésiques associée à $\gamma_{e,p}$ qui a les propriétés suivantes.

PROPOSITION 2.1

- Si $p < 1 - e$, toutes les géodésiques g_θ sont concourantes au point

$$\tilde{F} = \left(\arg \tanh \left(\frac{2ep}{1 - e^2 - p^2} \right), \pi \right) \quad \text{et} \quad \dot{g}_\theta(s) = \nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s)).$$

- Si $p < e - 1$, toutes les géodésiques g_θ sont concourantes au point

$$\tilde{F} = \left(\arg \tanh \left(\frac{2ep}{e^2 + p^2 - 1} \right), 0 \right) \quad \text{et} \quad \dot{g}_\theta(s) = \nabla(-d_{\tilde{F}})(g_\theta(s)).$$

- Si $p = 1 - e$, pour tout θ , g_θ a un point à l'infini dans la direction π (on a $\lim_{s \rightarrow -\infty} g_\theta(s) = \pi$) et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla b_\pi(g_\theta(s))$.
- Si $p = e - 1$, pour tout θ , g_θ a un point à l'infini dans la direction 0 (on a $\lim_{s \rightarrow +\infty} g_\theta(s) = 0$) et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla(-b_0)(g_\theta(s))$.
- Si $p > 1 - e$ et $p > e - 1$, pour tout θ , g_θ est orthogonale à la géodésique g d'équation polaire

$$\tanh \rho(\alpha) = \frac{A}{\cos \alpha} \quad \text{où} \quad A = \frac{e^2 + p^2 - 1}{2ep},$$

et $\dot{g}_\theta(s) = \nabla d_g(g_\theta(s))$ pour un orientation adéquate de g .

Preuve. — La démonstration est uniquement calculatoire. \square

Comme conséquence, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.2. — *La valeur de la fonction $d_F + \delta$ est constante le long de chaque composante connexe de $\gamma_{e,p}$, ou δ est la fonction suivante :*

- si $p < 1 - e$, $\delta = d_{\tilde{F}}$;
- si $p < e - 1$, $\delta = -d_{\tilde{F}}$;
- si $p = 1 - e$, $\delta = b_\pi$;
- si $p = e - 1$, $\delta = -b_0$;
- si $p > 1 - e$ et $p > e - 1$, $\delta = d_g$.

Preuve. — D’après la proposition 2.1, les géodésiques g_θ sont des lignes de gradient de la fonction δ : on a $\nabla\delta(\gamma_{e,p}(\theta)) = \dot{g}_\theta(0) = u_\theta$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(d_F(\gamma_{e,p}(\theta)) + \delta(\gamma_{e,p}(\theta)) \right) &= \left\langle \dot{\gamma}_{e,p}(\theta), \nabla d_F(\gamma_{e,p}(\theta)) + \nabla\delta(\gamma_{e,p}(\theta)) \right\rangle \\ &= \left\langle \dot{\gamma}_{e,p}(\theta), \frac{\partial}{\partial r}(\gamma_{e,p}(\theta)) + u_\theta \right\rangle \\ &= 0 \quad \text{par construction de } u_\theta. \quad \square \end{aligned}$$

Les courbes $\gamma_{e,p}$ ont donc des propriétés focales analogues à celles des coniques euclidiennes :

- pour $p < 1 - e$ on a les ellipses ;
- pour $p < e - 1$ on a les hyperboles ;
- pour $p = 1 - e$ ou $p = e - 1$ les $\gamma_{e,p}$ ont une propriété analogue à celle des paraboles euclidiennes ;
- pour $p > 1 - e$ et $p > e - 1$, on a une nouvelle famille de “paraboles”.

De plus, ces propriétés focales caractérisent les courbes $\gamma_{e,p}$; en effet, on obtient par le calcul la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3. — *Soit $F \in \mathbb{H}^2$, et soit γ une courbe connexe vérifiant $d_F + \delta = a$ le long de γ , où δ est une fonctions de type distance. Il existe $p > 0$ et $e > 0$ tels que pour tout $m \in \gamma$ les coordonnées polaires de m centrées en F soient de la forme $(\theta, r(\theta))$ avec*

$$\tanh r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Remarque. — Un calcul analogue à celui de la preuve du corollaire 2.2 montre que la ligne de gradient de δ passant par $\gamma(\theta)$ s'obtient par réflexion sur la tangente à γ en $\gamma(\theta)$ de la géodésique issue de F .

3. Résolution de l'équation par les roulettes

On montre dans cette section que les propriétés focales des courbes $\gamma_{e,p}$ permettent de montrer que la trajectoire du foyer vérifie l'équation (1.1). La preuve est une adaptation au cas hyperbolique de celle de Sturm (cf. [De, pp. 319-320]). Elle utilise notamment les résultats de trigonométrie hyperbolique suivants.

PROPOSITION 3.1

(i) Soient x, y et z des points de \mathbb{H}^2 , et soient $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ et $c = d(z, x)$. On a alors

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

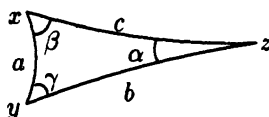


Fig. 3.1

(ii) Soient x et y des points de \mathbb{H}^2 , θ un point du bord, et soient $a = d(x, y)$, $b = b_\theta(y)$ et $c = b_\theta(x)$. On a alors

$$e^c = e^b \cosh a - e^b \sinh a \cos \gamma, \quad \frac{e^b}{\sin \beta} = \frac{e^c}{\sin \gamma}.$$

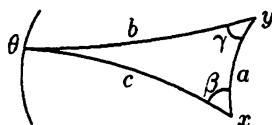


Fig. 3.2

(iii) Soient x et y des points de \mathbb{H}^2 , g une géodésique, et soient $a = d(x, y)$, $b = d_g(y)$ et $c = d_g(x)$. On a alors

$$\sinh c = \cosh a \sinh b - \sinh a \cosh b \cos \gamma .$$

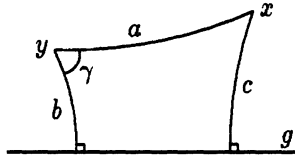


Fig. 3.3

Preuve. — Pour le point (i), voir [Bu, p. 33]. Le point (ii) se déduit de (i) par passage à la limite.

Pour le point (iii), γ est défini comme étant l'angle entre $-\nabla d_g(y)$ et $\exp_y^{-1}(x)$. Notons p_x et p_y les projections de x et y sur g , $d = d(p_x, p_y)$ et $e = d(p_y, x)$.

Si $b = 0$, l'identité se déduit des relations dans le triangle (yxp_x) .

Supposons $b \neq 0$. Des relations dans le triangle (xpx_p) , on déduit que $\cosh e = \cosh d \cosh c$ et, des relations dans le triangle (xyp_y) , on déduit $\cosh e = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$ (cette égalité reste vraie pour $b < 0$ compte tenu de la définition de γ). On a donc

$$\cosh d \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma . \quad (3.1)$$

D'autre part, on a (cf. [Bu, pp. 38])

$$\cosh a = \cosh b \cosh c \cosh d - \sinh b \sinh c . \quad (3.2)$$

En reportant (3.1) dans (3.2) et en divisant par $\sinh b$ qui est non nul, on obtient le résultat voulu. \square

Dans ce qui suit, on notera $MN = d(M, N)$ où M et N sont des points de \mathbb{H}^2 et d est la distance hyperbolique.

THÉORÈME 3.2. — Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , soit $F \in N$, et soit γ une courbe connexe de N vérifiant $d_F + \delta = a$ le long de γ , où δ est une fonctions de type distance. Soit C la trajectoire de F lorsque γ roule sans glissement sur une géodésique Γ de \mathbb{H}^2 . La courbe C vérifie l'équation

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = K$$

où s est l'abscisse curviligne de C , et $x(s)$ et $y(s)$ sont les coordonnées de Fermi de $C(s)$ relatives à Γ . En particulier, elle engendre une surface de révolution M d'axe Γ et à courbure moyenne constante. De plus, la valeur H de la courbure moyenne vérifie

- si $\delta = \pm d_{\tilde{F}}$, $\tilde{F} \in N$, alors $|H| = \coth |a| > 1$;
- si $\delta = \pm b_\nu$, $\nu \in \partial_\infty N$, alors $|H| = 1$;
- si $\delta = d_g$, g une géodésique orientée de N , alors $|H| = \tanh |a| < 1$.

Preuve. — On vérifie par le cacul que la courbure de γ ne s'annule pas, compte tenu de la remarque A.11, on peut supposer que C est paramétrée par l'abscisse curviligne. On fait la preuve dans trois cas :

- (1) $\delta = d_{\tilde{F}}$ avec $\tilde{F} \in N$;
- (2) $\delta = b_\nu$ avec $\nu \in \partial_\infty N$, quitte à modifier la valeur de a , on supposera de plus que $\delta(F) = 0$;
- (3) $\delta = d_g$ où g est une géodésique orientée de N , et $d_g > 0$ le long de γ .

Dans les autres cas, la preuve est analogue à l'un de ces trois cas.

Dans la suite de la preuve on traite les trois cas en parallèle, les numéros entre parenthèse dans les énoncés des identités 1 à 10 renvoyant à chacun d'entre eux.

Soit γ une courbe de N vérifiant $d_F + \delta = a$, on note $c = \delta(F)$ (c est la distance interfocale). Dans le deuxième cas, on a $c = 0$.

Soit $\varphi(s, m) : I \times N \rightarrow \mathbb{H}^2$ le roulement sans glissement de γ sur Γ , où s est l'abscisse curviligne de C (définition A.7).

Sur les figures, on a représenté dans \mathbb{H}^2 l'image de γ par l'isométrie Φ_s du mouvement plan sur plan hyperbolique. Le point P est la projection de F sur Γ , Q est le point de contact, et la géodésique h est la ligne de gradient de δ qui passe par Q .

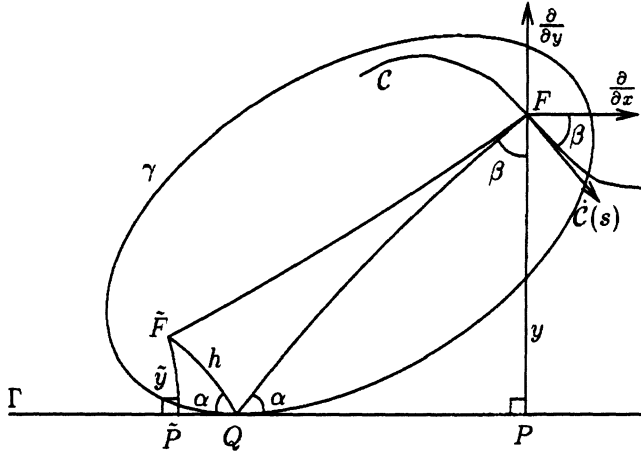


Fig. 3.4 $\delta = d_{\tilde{F}}$.

Premier cas : \tilde{P} est la projection de \tilde{F} sur Γ . On note $\tilde{y} = \tilde{F}\tilde{P}$.

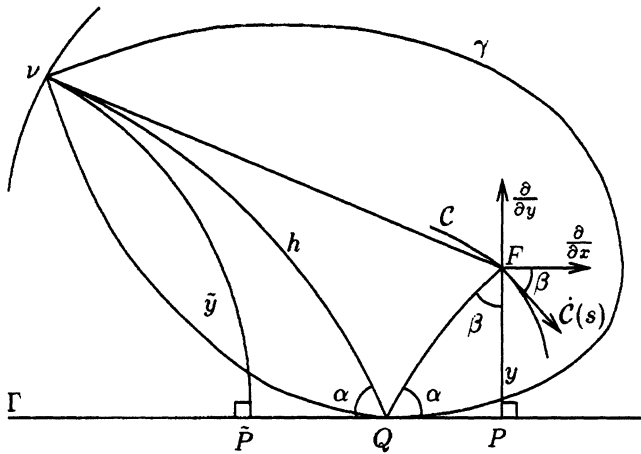


Fig. 3.5 $\delta = b_\nu$.

Deuxième cas : \tilde{P} est le point de Γ qui minimise δ le long de Γ .
On note $\tilde{y} = b_\nu(\tilde{P})$.

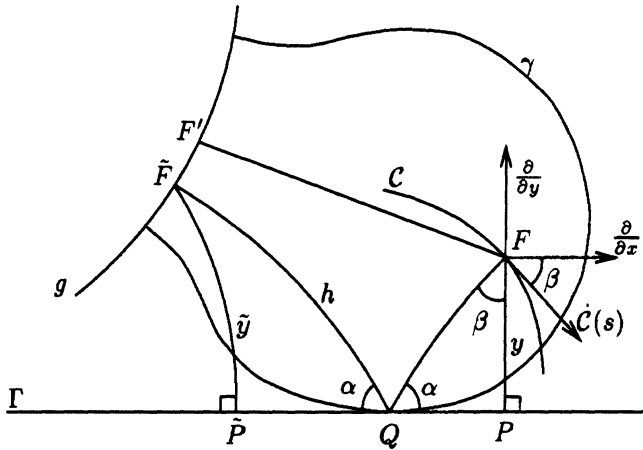


Fig. 3.6 $\delta = d_g$.

Troisième cas : F' est la projection de F sur g , \tilde{F} est la projection de Q sur g et \tilde{P} est la projection \tilde{F} sur Γ . On note $\tilde{y} = \tilde{F}\tilde{P}$.

Dans les trois cas, on note β l'angle de $\partial/\partial x$ à $\dot{C}(s)$; le roulement étant sans glissement, on a $QFC = \pi/2$ donc $\widehat{QFP} = \beta$. D'autre part, d'après la remarque 2.4, la géodésique h fait avec Γ le même angle que la géodésique (QF) ; on note α cet angle. Des relations dans le triangle (QFP) on déduit dans les trois cas l'identité 1.

Identité 1. — $\sinh y = \sinh QF \sin \alpha$

De même, des relations dans le triangle $(Q\tilde{F}\tilde{P})$ ou $(Q\theta\tilde{P})$, on déduit l'identité 2.

Identité 2

(1) $\sinh \tilde{y} = \sinh Q\tilde{F} \sin \alpha$,

(2) $e^{\tilde{y}} = e^{b_\theta(Q)} \sin \alpha$,

(3) $\sinh \tilde{y} = \sinh Q\tilde{F} \sin \alpha$.

Dans les trois cas, on a $dx/ds = \cos \beta / \cosh y$, on déduit donc des relations dans le triangle hyperbolique (QFP) l'identité 3.

Identité 3. — $\cosh^2 y(dx/ds) = \cosh QF \sin \alpha$.

En prenant les cosinus et sinus hyperboliques de l'expression $d_F + \delta = a$, on obtient les identités suivantes.

Identité 4

$$(1) \cosh a = \cosh QF \cosh Q\tilde{F} + \sinh QF \sinh Q\tilde{F},$$

$$(2) e^a = e^{b_\theta(Q)} \cosh QF + e^{b_\theta(Q)} \sinh QF,$$

$$(3) \sinh a = \cosh QF \sinh Q\tilde{F} + \sinh QF \cosh Q\tilde{F}.$$

Identité 5

$$(1) \sinh a = \cosh QF \sinh Q\tilde{F} + \sinh QF \cosh Q\tilde{F},$$

$$(2) e^a = e^{b_\theta(Q)} \cosh QF + e^{b_\theta(Q)} \sinh QF,$$

$$(3) \cosh a = \cosh QF \cosh Q\tilde{F} + \sinh QF \sinh Q\tilde{F}.$$

En appliquant la proposition 3.1 au polygône hyperbolique $(QF\tilde{F})$, $(QF\theta)$ ou $(QFF'\tilde{F})$, on obtient l'identité 6.

Identité 6

$$(1) \cosh c = \cosh QF \cosh Q\tilde{F} - \sinh QF \sinh Q\tilde{F} \cos(\pi - 2\alpha),$$

$$(2) 1 = e^{b_\theta(Q)} \cosh QF - e^{b_\theta(Q)} \sinh QF \cos(\pi - 2\alpha),$$

$$(3) \sinh c = \cosh QF \sinh Q\tilde{F} - \sinh QF \cosh Q\tilde{F} \cos(\pi - 2\alpha).$$

En faisant la demi-différence des identités 4 et 6, et en utilisant l'identité 1, on obtient l'identité 7.

Identité 7

$$(1) \frac{\cosh a - \cosh c}{2} = \sinh y \sinh \tilde{y},$$

$$(2) \frac{e^a - 1}{2} = e^{\tilde{y}} \sinh y,$$

$$(3) \frac{\sinh a - \sinh c}{2} = \sinh y \cosh Q\tilde{F} \sin \alpha.$$

En faisant la demi-somme des identités 4 et 6, et en utilisant l'identité 7, on obtient l'identité 8.

Identité 8

$$(1) \cosh QF \cosh Q\tilde{F} = \frac{\cosh a + \cosh c}{2} - \frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha,$$

$$(2) e^{b\theta(Q)} \cosh QF = \frac{e^a + 1}{2} - \frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha,$$

$$(3) \cosh QF \sinh Q\tilde{F} = \frac{\sinh a + \sinh c}{2} - \frac{\sinh a - \sinh c}{2 \sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha.$$

En multipliant les identités 5 et 3 membre à membre et en utilisant les identités 1 et 7, on obtient l'identité 9.

Identité 9

$$(1) \sinh a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \\ = \sinh^2 y \left(\frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sin^2 \alpha} + \cosh QF \cosh Q\tilde{F} \right) + \frac{\cosh a - \cosh c}{2},$$

$$(2) e^a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \\ = \sinh^2 y \left(\frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \alpha} + e^{b\theta(Q)} \cosh QF \right) + \frac{e^a - 1}{2},$$

$$(3) \cosh a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \\ = \sinh^2 y \left(\frac{\sinh a - \sinh c}{2 \sin^2 \alpha} + \cosh QF \sinh Q\tilde{F} \right) + \frac{\sinh a - \sinh c}{2}.$$

Finalement, on obtient le résultat voulu en reportant l'identité 8 dans l'identité 9.

Identité 10

$$(1) -\coth a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sinh a},$$

$$(2) -\sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{e^a - 1}{2 e^a},$$

$$(3) -\tanh a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\sinh a - \sinh c}{2 \cosh a}.$$

Ceci termine la preuve pour les trois cas envisagés. Les autres trois autres cas sont les suivants :

- (4) $\delta = -d_{\tilde{F}}$ avec $\tilde{F} \in N$;
- (5) $\delta = -b_\nu$ avec $\nu \in \partial_\infty N$, quitte à modifier la valeur de a , on suppose de plus que $\delta(F) = 0$;
- (6) $\delta = d_g$ où g est une géodésique orientée de N , et $d_g < 0$ le long de γ .

En suivant des étapes similaires à celles qui précèdent, on trouve le résultat suivant.

Identité 10'

- (4) $-\coth a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\cosh a - \cosh c}{2 \sinh a}$,
- (5) $-\sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{e^{-a} - 1}{2e^{-a}}$,
- (6) $-\tanh a \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\sinh a - \sinh c}{2 \cosh a}$.

La valeur de la courbure moyenne de la surface engendrée par la trajectoire de F se lit sur l'équation qu'on obtient. \square

On retrouve dans ce résultat la classique séparation des trois types de sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique.

D'autre part, la constante K donnée par la proposition 1.2 se lit également sur l'équation; elle est déterminée par les paramètres a et c . De plus, comme l'a montré W. Y. Hsiang [Hs, théorème 2], la constante K caractérise la géométrie de M . On peut notamment à partir des valeurs de H et K (et donc à partir des valeurs de a et c) étudier les propriétés de plongement de M (cf. [Hs] et [Go]). Il résulte de cette étude que si $\delta = d_{\tilde{F}}$ ou $\delta = b_\nu$, on obtient une surface plongée; si $\delta = -d_{\tilde{F}}$ ou $\delta = -b_\nu$, on obtient une surface non plongée; si $\delta = d_g$, la situation est plus complexe et diffère suivant les valeurs de H (cf. [Go]).

A. Appendice

Le mouvement plan sur plan hyperbolique

On définit dans cet appendice ce qu'est le roulement sans glissement d'une courbe sur une autre; on procède par analogie avec le cas euclidien.

Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique

DÉFINITION A.1. — Soit N une variété isométrique à \mathbb{H}^2 , I un intervalle de \mathbb{R} . Un mouvement plan sur plan hyperbolique de N sur \mathbb{H}^2 est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \varphi : I \times N &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ (t, n) &\mapsto \varphi(t, n) \end{aligned}$$

telle que φ soit C^2 , et pour tout $t \in I$, $\varphi(t, \cdot)$ soit une isométrie.

Par la suite, on notera aussi $\Phi_t = \varphi(t, \cdot)$.

DÉFINITION A.2. — Soient $x \in \mathbb{H}^2$ et $n_t = \Phi_t^{-1}(x) \in N$. Le point n_t est appelé le t -coïncidant de x . Le champ des vitesses à l'instant t , V_t , est défini par

$$V_t(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \varphi(s, n_t).$$

Dans ce qui suit, φ désigne un mouvement plan sur plan hyperbolique, et V_t désigne son champ des vitesses à l'instant t . Le champ V_t a les propriétés suivantes.

PROPOSITION A.3. — Pour tout $t \in I$, V_t est équiprojectif au sens suivant : pour toute géodésique c de \mathbb{H}^2 , l'application

$$s \mapsto \langle V_t(c(s)), \dot{c}(s) \rangle$$

est constante le long de c .

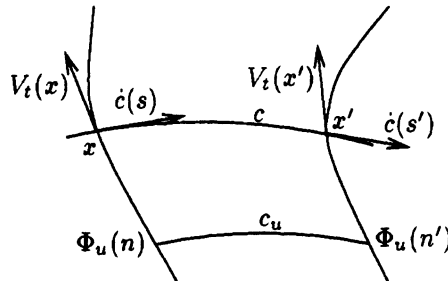


Fig. A.1

Preuve. — Soit c une géodésique de \mathbb{H}^2 paramétrée par la longueur d'arc. Soient $s, s' \in \mathbb{R}$ et $x = c(s), x' = c(s')$. On note $n = \Phi_t^{-1}(x) \in N$ et $n' = \Phi_t^{-1}(x') \in N$. Soient c_u la géodésique joignant $\Phi_u(n)$ à $\Phi_u(n')$ et $\mathcal{L}(u) = d_{\mathbb{H}^2}(\Phi_u(n), \Phi_u(n'))$. Comme les Φ_u sont des isométries, $\mathcal{L}(u)$ est constante, et en appliquant la formule de la variation première, on obtient :

$$0 = \frac{d}{du} \mathcal{L}(u) \Big|_{u=t} = \langle V_t(x'), \dot{c}(s') \rangle - \langle V_t(x), \dot{c}(s) \rangle. \quad \square$$

PROPOSITION A.4. — Pour tout $t \in I$, et tout $x \in \mathbb{H}^2$, l'endomorphisme

$$\begin{aligned} A_t(x) : T_x \mathbb{H}^2 &\rightarrow T_x \mathbb{H}^2 \\ X &\mapsto (D_X V_t)(x) \end{aligned}$$

est antisymétrique.

Preuve. — Soit $X \in T_x \mathbb{H}^2$ et $c(s) = \exp_x(sX)$, d'après la proposition A.3, on a

$$0 = \frac{d}{ds} \langle V_t(c(s)), \dot{c}(s) \rangle \Big|_{s=0} = \langle D_{\dot{c}(0)} V_t, \dot{c}(0) \rangle = \langle A_t(x)X, X \rangle. \quad \square$$

Pour tout $t \in I$, le champ des vitesses V_t permet donc de définir un champ d'endomorphismes. Ces endomorphismes étant antisymétriques, on en déduit que le champ V_t est de Killing [KN, p. 237]. De plus, on a la propriété suivante.

PROPOSITION A.5. — Soit $x \in \mathbb{H}^2, X \in T_x \mathbb{H}^2$, et $y = \exp_x(X)$. Pour tout $t \in I$, on a la relation

$$P|_y^x(V_t(y)) = V_t^T(x) + \cosh \|X\| V_t^N(x) + \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X$$

où $P|_y^x$ désigne le transport parallèle le long de la géodésique joignant y à x , et les exposants T et N désignent les composantes tangente et normale à X .

Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique

Pour démontrer cette proposition, on commence par prouver le lemme suivant.

LEMME A.6. — Soit $a(u)$ une courbe de \mathbb{H}^2 , X un champ de vecteurs le long de a , et $b(u) = \exp_{a(u)}(X(u))$. On a alors

$$\begin{aligned} \dot{b}(u) &= P_{a(u)}^{b(u)} \left(\dot{a}(u)^T + \cosh \|X(u)\| \dot{a}(u)^N \right) \\ &\quad + (D_{\dot{a}}X)(u)^T + \frac{\sinh \|X(u)\|}{\|X(u)\|} (D_{\dot{a}}X)(u)^N \end{aligned}$$

où $P_{a(u)}^{b(u)}$ désigne le transport parallèle le long de la géodésique joignant $a(u)$ à $b(u)$, et les exposant T et N désignent les composantes tangente et normale à $X(u)$

Preuve. — Soit

$$G(s, u) = \exp_{a(u)}(sX(u)) \quad \text{et} \quad J_u(s) = \frac{\partial G}{\partial u}(u, s).$$

J_u est un champ de Jacobi qui vérifie

$$J_u(0) = \dot{a}(u) \quad \text{et} \quad \frac{dJ_u}{ds}(0) = (D_{\dot{a}}X)(u)$$

D'autre part, on a $\dot{b}(u) = J_u(1)$. Le résultat s'obtient en intégrant l'équation des champs de Jacobi dans \mathbb{H}^2 . \square

Preuve de la proposition A.5

Soit $a(u) = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}(x)$, $b(u) = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}(y)$, et $X(u) = \exp_{a(u)}^{-1}(b(u))$. Par définition, on a $\dot{a}(t) = V_t(x)$, $\dot{b}(t) = V_t(y)$ et $(D_{\dot{a}}X)(t) = A_t X$. La proposition se déduit alors du lemme et du fait que A_t est antisymétrique. \square

On peut maintenant définir le roulement sans glissement.

DÉFINITION A.7. — Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $R : I \rightarrow N$, $B : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ deux courbes C^1 telles que pour tout $t \in I$, $\dot{R}(t) \neq 0$, $\dot{B}(t) \neq 0$ et $\|\dot{R}(t)\| = \|\dot{B}(t)\|$. Soit Φ_t l'isométrie positive définie par $\Phi_t(R(t)) = B(t)$ et $\Phi_{t*}(\dot{R}(t)) = \dot{B}(t)$. Le roulement sans glissement de R sur B est le mouvement plan sur plan hyperbolique défini par $\varphi(t, n) = \Phi_t(n)$. La courbe R est appelée la roulante et B la base.

Dans la suite, φ désigne le mouvement plan sur plan défini par le roulement sans glissement d'une roulante R sur une base B , et V_t est son champ des vitesses.

LEMME A.8. — On a $V_t(B(t)) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, on a

$$V_t(x) = P|_{B(t)}^x \left(\frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right)$$

où $X = \exp_{B(t)}^{-1}(x)$

Preuve. — On a $B(t) = \varphi(t, R(t))$, donc

$$\begin{aligned} \dot{B}(t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, R(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial n}(t, R(t)) \cdot \dot{R}(t) \\ &= V_t(B(t)) + \Phi_{t*}(\dot{R}(t)) \end{aligned}$$

Par définition de $\dot{B}(t)$, on $V_t(B(t)) = 0$. Le résultat du lemme est alors une conséquence de la proposition A.5. \square

Le roulement sans glissement a la propriété suivante.

PROPOSITION A.9. — Soit $\mathcal{C}(t) = \varphi(t, n)$ la trajectoire d'un point $n \in N$, le vecteur $\dot{\mathcal{C}}(t)$ est orthogonal à la géodésique joignant $B(t)$ à $\mathcal{C}(t)$.

Preuve. — Soit $X = \exp_{B(t)}^{-1}(\mathcal{C}(t))$ et soit $g(s) = \exp_{B(t)}(sX)$ la géodésique joignant $B(t)$ à $\mathcal{C}(t)$. Par le lemme A.8, on a

$$\dot{\mathcal{C}}(t) = P|_{B(t)}^{\mathcal{C}(t)} \left(\frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right).$$

Comme $A_t X$ est orthogonal à $\dot{g}(0) = X$, par transport parallèle, $\dot{\mathcal{C}}(t)$ est orthogonal à $\dot{g}(1)$. \square

En considérant \mathbb{H}^2 comme un hyperplan hyperbolique de \mathbb{H}^3 , on peut écrire l'endomorphisme $A_t(B(t))$ sous la forme

$$A_t(B(t))X = \rho(t) \frac{\partial}{\partial z} \wedge X$$

où $\partial/\partial z$ est vecteur unitaire normal à \mathbb{H}^2 .

Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique

PROPOSITION A.10. — Si B est une géodésique, alors

$$\rho(t) = -\langle \eta(t), D_{\dot{R}}\dot{R} \rangle,$$

où η est un champ de vecteur normal à R convenablement choisi.

Preuve. — On peut supposer sans perte de généralité que les courbes B et R sont paramétrées par l'abscisse curviligne. On se fixe $t \in I$, et on cherche à calculer $\rho(t)$.

Pour tout $s \in I$, soit $\nu(s) = \partial/\partial z \wedge \dot{B}(s)$, et soit $x = \exp_{B(t)}(\dot{B}(t))$. On a

$$V_t(x) = P|_{B(t)}^x (\sinh 1 \rho(t) \nu(t)). \quad (\text{A.1})$$

Soit $n = \Phi_t^{-1}(x) \in N$, $Y(s) = \exp_{R(s)}^{-1}(n)$ et $\eta(s) = \Phi_{s*}^{-1}(\nu(s))$. On a notamment

$$n = \exp_{R(t)}(\dot{R}(t)) \quad \text{et} \quad Y(t) = \dot{R}(t).$$

En dérivant, à l'aide du lemme A.6, l'expression $n = \exp_{R(s)}(Y(s))$, en se plaçant en $s = t$ et en prenant l'image par Φ_{t*} , on trouve

$$0 = \dot{B}(t) + \langle D_{\dot{R}}Y, \dot{R} \rangle \dot{B}(t) + \sinh 1 \langle D_{\dot{R}}Y, \eta \rangle \nu(t). \quad (\text{A.2})$$

D'autre part, la trajectoire du point n s'écrit $\Phi_s(n) = \exp_{B(s)}(X(s))$ avec $X(s) = \Phi_{s*}(Y(s))$. Comme $Y = \langle Y, \dot{R} \rangle \dot{R} + \langle Y, \eta \rangle \eta$, on a

$$X = \langle Y, \dot{R} \rangle \dot{B} + \langle Y, \eta \rangle \nu$$

et

$$(D_{\dot{B}}X)(t) = \langle D_{\dot{R}}Y, \dot{R} \rangle \dot{B}(t) + \left(\langle D_{\dot{R}}Y, \eta \rangle - \langle D_{\dot{R}}\dot{R}, \eta \rangle \right) \nu(t). \quad (\text{A.3})$$

On a utilisé le fait que \dot{R} et \dot{B} sont de norme constante, le fait que B est une géodésique et le fait qu'en $s = t$ on a $\langle Y, D_{\dot{R}}\eta \rangle = -\langle D_{\dot{R}}\dot{R}, \eta \rangle$.

En utilisant le lemme A.6 et les expressions (A.2) et (A.3), on obtient

$$V_t(x) = \frac{d}{ds} \Phi_s(n) \Big|_{s=t} = P|_{B(t)}^x \left(-\sinh 1 \langle D_{\dot{R}}\dot{R}, \eta \rangle \nu \right),$$

et en comparant avec l'identité (A.1), on obtient la proposition. \square

Remarque A.11. — Soit $\mathcal{C}(t) = \varphi(t, n)$ la trajectoire d'un point $n \in N$, on a

$$\dot{\mathcal{C}}(t) = V_t(\mathcal{C}(t)) = P|_{B(t)}^{\mathcal{C}(t)} \left(\frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right)$$

où $X = \exp_{B(t)}^{-1}(\mathcal{C}(t))$. Si $n \notin R$ on a $X \neq 0$, et si de plus la courbure de R ne s'annule pas, on a $\dot{\mathcal{C}}(t) \neq 0$. On peut en particulier paramétrer \mathcal{C} par l'abscisse curviligne.

Bibliographie

- [Ba] BALLMANN (W.) .— *On spaces of nonpositive curvature*, Birkhäuser, 1995.
- [Bu] BUSER (P.) .— *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [De] DELAUNAY (C.) .— *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pure et Appl. **16** (1841), pp. 309-320.
- [Go] GOMES (J. M.) .— *Spherical surfaces with constant mean curvature in hyperbolic space*, Bol. Soc. Bras. Mat. **18**, n° 2 (1987), pp. 49-73.
- [Hs] HSIANG (W. Y.) .— *On generalization of theorems of A. D. Alexandrov and C. Delaunay on hypersurfaces of constant mean curvature*, Duke Math. J. **49**, n° 3 (1982), pp. 485-496.
- [HW] HSIANG (W.) and YU (W. C.) .— *A generalization of a theorem of Delaunay*, J. Diff. Geom. **16** (1981), pp. 161-177.
- [KN] KOBAYASHI (S.) et NOMIZU (K.) .— *Foundations of differential geometry I*, Interscience, New-York, 1963.
- [RE] ROSENBERG (H.) et SÁ EARP (R.) .— *The geometry of properly embedded special surfaces in \mathbb{R}^3 ; e.g. surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive*, Duke Math. J. **73**, n° 2 (1994), pp. 291-306.
- [St] STERLING (I.) .— *A Generalization of a theorem of Delaunay to rotational W -hypersurfaces of σ_ℓ -type in H^{n+1} and S^{n+1}* , Pacific J. Math. **127**, n° 1 (1987), pp. 187-197.