ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-ANDRÉ MARTI
SILVERE PAUL NUIRO
VINCENT VALMORIN

Algèbres différentielles et problème de Goursat non linéaire à données irrégulières

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 1 (1998), p. 135-159
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_1_135_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 1, 1998

Algèbres différentielles et problème de Goursat non linéaire à données irrégulières(*)

JEAN-ANDRÉ MARTI, SILVERE PAUL NUIRO et VINCENT VALMORIN(1)

RÉSUMÉ. — Si les données d'un certain problème de Goursat non linéaire sont trop irrégulières, celui-ci ne peut être ni posé ni a fortiori résolu dans un espace de distributions.

Nous construisons alors une "algèbre de Goursat" dans laquelle le problème a une solution unique dont les singularités sont précisées par une analyse microlocale paramétrique. Et une étude qualitative de la solution montre la singularité qui l'empêche d'être associée à une distribution.

ABSTRACT. — A non linear Goursat problem with highly irregular data might not have a formulation and even less a solution in a distribution space.

We construct a "Goursat algebra" in which the problem has a unique solution. Informations about the singularities of the solution can be obtained from a parametric microlocal analysis. A qualitative study of the solution shows the singularity which presents it from being associated with a distribution.

1. Introduction

Le problème de Goursat [6] est à l'origine un problème mixte hyperbolique d'ordre deux en dimension deux à données portées par une droite caractéristique et une autre courbe monotone. Il a été étudié sous divers

(*) Reçu le 11 janvier 1996, accepté le 7 avril 1997

(1) Université des Antilles et Guyane, Faculté des Sciences Exactes et Naturelles, Département de Mathématiques et Informatique, Campus de Fouillole, 97159-Pointe-à-Pitre
e-mail :
jean-andre.marti@univ-ag.fr; paul.nuiro@univ-ag.fr; v.valmorin@univ-ag.fr

angles. Ce problème (cf. [6], [5]) consiste initialement à chercher, comme fonction de deux variables réelles, une solution U de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_x \partial_y U(x,y) = F\big(x,\, y,\, U(x,y),\, \partial_x U(x,y),\, \partial_y U(x,y)\big)$$

vérifiant les conditions mixtes

$$\begin{cases} U(x,0) = \Phi(x) \\ U\big|_\Gamma = \Theta\big|_\Gamma \end{cases}$$

où Θ est une fonction donnée au voisinage d'une courbe croissante Γ passant par l'origine.

Particularisant Γ et F, on cherche, dans cet article, une solution U généralisée, dans un sens qui sera discuté, du problème de Goursat suivant :

$$\begin{cases} \partial_x \partial_y U = F(\,\cdot\,,\,\cdot\,, U) \\ U\big|_{\{y=0\}} = \Phi \\ U\big|_{\{x=0\}} = \Psi\,. \end{cases} \tag{P}$$

où Φ et Ψ sont des fonctions généralisées (par exemple des distributions) d'une variable. Γ est ici l'hyperplan $\{x = 0\}$ et F est a priori une fonction non linéaire de ses arguments.

La notation $F(\,\cdot\,,\,\cdot\,, U)$ étend, d'une manière qui sera précisée ci-dessous, l'expression

$$(x,y) \longrightarrow F\big(x, y, U(x,y)\big)$$

au cas où U est une fonction généralisée des deux variables x et y.

Le problème périodique associé à (P) a été étudié dans le cadre des algèbres de fonctions généralisées périodiques (cf. [11], [12]).

Lorsque les données sont trop irrégulières pour que le critère de Hörmander sur le spectre singulier de U n'en permette la restriction au sens des distributions, il faut remarquer que le problème ne peut être ni correctement posé ni, a fortiori, résolu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Et la non-linéarité de

F relativement à U ne fait que renforcer cette impossibilité. Dans ce cas, la théorie des algèbres différentielles de fonctions généralisées ([2], [1], [3]) est le cadre adéquat pour donner un sens au problème et le résoudre. Elle est particulièrement adaptée à l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires, à données irrégulières; et les travaux de H. A. Biagioni [1], J.-F. Colombeau [2], Y. V. Egorov [3], M. Oberguggenberger [8] et de E. Rosinger [9] en donnent beaucoup d'exemples.

En effet, étant donné un faisceau $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}^d$ d'algèbres de fonctions généralisées, on peut toujours y injecter le faisceau $\mathcal{D}'$ par un morphisme d'espaces vectoriels, ce qui permet en particulier pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, de multiplier les (images des) distributions dans $\mathcal{A}(\Omega)$ sinon dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ sans contredire le théorème bien connu de Schwartz [10]. On définit aussi une notion plus générale d'association, précisée plus loin, qui permet de relier distributions et fonctions généralisées sur lesquelles on peut effectuer multiplications et autres opérations non linéaires.

Mais le passage d'une fonction généralisée à la distribution dont elle est l'image ou à laquelle elle est associée entraîne toujours une perte d'information due à la structure topologique de $\mathcal{D}'$. C'est une raison supplémentaire pour préférer l'utilisation de $\mathcal{A}$ à celle de $\mathcal{D}'$. Enfin, la restriction des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ à des sous-variétés de dimension quelconque s'effectue de façon naturelle, alors que cette opération, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, exige des régularités partielles incompatibles avec le problème posé ici quand, par exemple, les données sont associées à des mesures de Dirac.

Pour la résolution de ces cas, on propose alors une construction algébrique adaptée. Celle-ci prendra la forme d'un “ triplet de Goursat ” constitué d'un anneau et de deux algèbres définies par des propriétés topologiques reliées à la structure du problème. On montre qu'il en existe alors une solution généralisée.

Les rapports entre les singularités des données et celle de la solution sont précisées par une analyse microlocale faisant intervenir la notion de spectre singulier paramétrique [7]. Et on peut préciser, quand les données sont associées à des mesures de Dirac, que cette solution peut se décomposer en la somme de deux termes dont l'un est associé à une distribution et l'autre est une fonction généralisée ne s'y réduisant pas en général. La structure de la solution explique l'impossibilité de résoudre le problème dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ et justifie le point de vue adopté ici.

2. Solution généralisée d'un problème de Goursat

La recherche d'une solution dans une algèbre de fonctions généralisées commence par l'étude d'une classe de problèmes réguliers qui nécessitent d'abord une hypothèse sur la fonction F.

On fera ainsi, pour tous les développements ultérieurs, l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})\,; \\ \forall\, K \Subset \mathbb{R}^2, \quad \sup\limits_{\substack{(x,y)\in K \\ z\in\mathbb{R}}} \left|\partial_z F(x,y,z)\right| \leq +\infty\,, \end{cases} \tag{H1}$$

où la notation $K \Subset \mathbb{R}^d$ signifie : K est un compact inclus dans $\mathbb{R}^d$.

2.1 Le problème de Goursat dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$

THÉORÈME 2.1.— *Si les données Φ et Ψ vérifient*

$$\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,, \quad \Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \quad et \quad \Phi(0) = \Psi(0)\,,$$

alors le problème (P) admet une unique solution U dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Preuve.— La démonstration se fait en deux étapes.

a) Existence d'une solution

En posant $U_0(x,y) = \Phi(x) + \Psi(y) - \Phi(0)$, le problème (P) s'écrit sous la forme intégrale suivante :

$$U(x,y) = U_0(x,y) + \int_0^x \int_0^y F\big(\xi, \eta, U(\xi,\eta)\big)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\,.$$

On définit alors la suite $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n(x,y) = U_0(x,y) + \int_0^x \int_0^y F\big(\xi, \eta, U_{n-1}(\xi,\eta)\big)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\,.$$

Soient $\lambda > 0$, $K = \left[-\lambda\,,\,\lambda\right]^2$, $(x,y) \in K$ et Q_{xy} le rectangle de sommets $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$ et (x,y). On peut poser, conformément à l'hypothèse (H1),

$$\kappa = 1 + \sup_{\substack{(\xi,\eta)\in K \\ t\in\mathbb{R}}} \left|\partial_z F(\xi,\eta,t)\right|.$$

On peut écrire

$$F(\xi,\eta,t)-F(\xi,\eta,r)=(t-r)\int_0^1 \partial_z F\big(\xi,\,\eta,\,r+\sigma(t-r)\big)\,\mathrm{d}\sigma$$

d'où

$$\forall\ (\xi,\eta)\in Q_{xy}\,,\quad \big|F\big(\xi,\,\eta,\,U_0(\xi,\eta)\big)\big|\le\big|F(\xi,\eta,0)\big|+\kappa\big\|U_0\big\|_{\infty,\,Q_{xy}}$$

où par définition, pour tout compact $H\subset\mathbb{R}^2$,

$$\big\|U_0\big\|_{\infty,\,H}=\sup_{(x,y)\in H}\big|U_0(x,y)\big|\,.$$

En posant $V_n=U_n-U_{n-1}$, on a

$$V_1(x,y)=\int_0^x\int_0^y F\big(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta)\big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,,$$

d'où

$$\big|V_1(x,y)\big|\le\phi_K|xy|\,,$$

en posant

$$\phi_K=\big\|F(\,\cdot\,,\,\cdot\,,0)\big\|_{\infty,\,K}+\kappa\big\|U_0\big\|_{\infty,\,K}\,.$$

D'autre part,

$$V_2(x,y)=\int_0^x\int_0^y\Big(F\big(\xi,\eta,U_1(\xi,\eta)\big)-F\big(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta)\big)\Big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,,$$

d'où

$$\big|V_2(x,y)\big|\le\left|\int_0^x\int_0^y\kappa\big|V_1(x,y)\big|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right|\le\kappa\phi_K\frac{|xy|^2}{4}\,.$$

En procédant par récurrence, on obtient

$$\big|V_n(x,y)\big|\le\kappa^{n-1}\phi_K\frac{|xy|^n}{(n!)^2}\,,$$

de sorte que

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*\,,\quad\big\|V_n\big\|_{\infty,\,K}\le\kappa^{n-1}\phi_K\frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2}$$

ce qui assure que la série $\sum_{n\geq 1} V_n$ converge uniformément sur K et par suite sur tout compact de $\mathbb{R}^2$. Il en est donc de même de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge par conséquent vers une fonction U continue sur $\mathbb{R}^2$.

La relation définissant la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ montre que

$$U(x,y) = U_0(x,y) + \int_0^x \int_0^y F\big(\xi,\eta,U(\xi,\eta)\big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,,$$

ce qui entraîne par récurrence que $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et que U est solution de (P).

b) Unicité de la solution

Soit V une autre solution de (P). Posant $W = V - U$, on obtient alors

$$W(x,y) = \int_0^x \int_0^y \Big(F\big(\xi,\eta,V(\xi,\eta)\big) - F\big(\xi,\eta,U(\xi,\eta)\big)\Big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,,$$

Avec les notations précédentes, soit $(x,y) \in K$. Puisque Q_{xy} est contenu dans K, on a

$$\big|W(x,y)\big| \leq \kappa|y| \left|\int_0^x \sup_{\eta\in[-\lambda\,,\,\lambda]} \big|W(\xi,\eta)\big|\,\mathrm{d}\xi\right|\,,$$

de sorte que

$$\forall\, x \in [-\lambda\,,\,\lambda]\,,\quad E(x) = \sup_{\eta\in[-\lambda\,,\,\lambda]} \big|W(x,\eta)\big| \leq \kappa\lambda \left|\int_0^x E(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\,.$$

Ainsi $E = 0$, via le lemme de Gronwall, d'où $W = 0$, ce qui prouve l'unicité de la solution de (P). □

2.2 Algèbre de fonctions généralisées

Pour tous les développements ultérieurs, dès que l'on parlera de ε, il sera sous entendu $\varepsilon \in\ ]0\,,\,1]$, sauf mention contraire. On utilise ici des algèbres $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ ($d = 1, 2$), obtenues en quotientant une sous-algèbre de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^d) = \big[\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)\big]^{]0\,,1]}$ par un idéal convenable et l'algèbre associé $\mathcal{C}$ des constantes généralisées [8], de sorte qu'on peut écrire : $U = \mathrm{Cl}\big(u_\varepsilon\big)_\varepsilon$ et $U(x) = \mathrm{Cl}\big(u_\varepsilon(x)\big)_\varepsilon \in \mathcal{C}$ pour tout $U \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$. En fait, comme les algèbres de fonctions généralisées forment un faisceau $\mathcal{A}$, on définit, de manière analogue, l'algèbre $\mathcal{A}(\Omega)$ pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$.

On énonce trois définitions essentielles pour la clarté des développements ultérieurs.

- Une fonction généralisée $G = \mathrm{Cl}(g_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ et une distribution $\mathbf{S} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ sont dites associées et on note $G \approx \mathbf{S}$ lorsque

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon = \mathbf{S} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)\,.$$

- On appelle restriction à la sous-variété

$$\left\{x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d) : x_j = 0\right\} \subset \mathbb{R}^d$$

de la fonction généralisée $G = \mathrm{Cl}(g_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$, la fonction généralisée

$$G\big|_{\{x_j=0\}} = \mathrm{Cl}\big(x \to g_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_d)\big)_\varepsilon\,.$$

Cette restriction appartient à une sous-algèbre de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ qui s'identifie canoniquement à l'algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{d-1})$.

- On appelle valeur ponctuelle de la fonction généralisée $G = \mathrm{Cl}(g_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$, au point $x \in \mathbb{R}^d$, la constante généralisée

$$G(x) = \mathrm{Cl}\big(g_\varepsilon(x)\big)_\varepsilon \in \mathcal{C}\,.$$

2.2.1 L'algèbre d'Egorov

Introduisant l'idéal $\mathcal{I}_E(\mathbb{R}^d)$, de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$, définie par

$$\mathcal{I}_E(\mathbb{R}^d) = \Big\{(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d) \mid \forall\, K \Subset \mathbb{R}^d,\ \exists\, \mu \in\,]0\,,1]\,,$$
$$\forall\, \varepsilon \in\,]0\,,\mu[\,,\ f\big|_K = 0\Big\}\,,$$

on définit l'algèbre $\mathcal{A}_E(\mathbb{R}^d) = \mathcal{X}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{I}_E(\mathbb{R}^d)$ des fonctions généralisées d'Egorov (cf. [3]). À cette algèbre correspond un anneau des constantes généralisées, noté $\mathcal{C}_E$, obtenu en quotientant l'espace $\mathbb{R}^{]0,1]}$ des suites généralisées réelles, indicées par $\varepsilon \in\,]0\,,1]$, par l'idéal

$$\mathcal{I}_E = \Big\{(m_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{R}^{]0,1]} \mid \exists\, \mu \in\,]0\,,1]\,,\ \forall\, \varepsilon \in\,]0\,,\mu[\,,\ m_\varepsilon = 0\Big\}\,.$$

2.2.2 L'algèbre « simplifiée » de Colombeau

On désigne par $\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^d)$ la sous-algèbre de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$ des familles $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ de fonctions qui sont à croissance modérée en ε^{-1}, c'est-à-dire que

$$\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^d) = \Big\{ (f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d) \mid \forall\, K \Subset \mathbb{R}^d,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \exists\, p \in \mathbb{R}^{*+},$$
$$\exists\, \mu \in\,]0\,,1]\,,\ \forall\, \varepsilon \in\,]0\,,\mu[\,,\ \sup_{x\in K} \left|\partial^\alpha f_\varepsilon(x)\right| \le \varepsilon^{-p} \Big\}$$

avec

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_d^{\alpha_d}} \text{ pour } z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \text{ et } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d.$$

Introduisant alors l'idéal $\mathcal{I}_C(\mathbb{R}^d)$ de $\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\mathcal{I}_C(\mathbb{R}^d) = \Big\{ (f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^d) \mid \forall\, K \Subset \mathbb{R}^d,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \forall\, q \in \mathbb{R}^{*+},$$
$$\exists\, \mu \in\,]0\,,1]\,,\ \forall\, \varepsilon \in\,]0\,,\mu[\,,\ \sup_{x\in K} \left|\partial^\alpha f_\varepsilon(x)\right| \le \varepsilon^{q} \Big\},$$

on définit l'algèbre « simplifiée » $\mathcal{A}_C(\mathbb{R}^d) = \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^d)/\mathcal{I}_C(\mathbb{R}^d)$ des fonctions généralisées de Colombeau [2]. À cette algèbre correspond un anneau des constantes généralisées, noté $\mathcal{C}_C$, obtenu en quotientant l'anneau des suites généralisées réelles indicées par $\varepsilon \in\,]0\,,1]$ à croissance modérée en ε^{-1} :

$$\mathbb{R}_M^{]0,1]} = \Big\{ (m_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{R}^{]0,1]} \mid \exists\, p \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists\, \mu \in\,]0\,,1]\,,$$
$$\forall\, \varepsilon \in\,]0\,,\mu[\,,\ |m_\varepsilon| \le \varepsilon^{-p} \Big\}$$

par l'idéal des suites à décroissance rapide en ε :

$$\mathcal{I}_C = \Big\{ (m_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{R}^{]0,1]} \mid \forall\, q \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists\, \mu \in\,]0\,,1]$$
$$\forall\, \varepsilon \in\,]0\,,\mu[\,,\ |m_\varepsilon| \le \varepsilon^{q} \Big\}.$$

2.2.3 Une algèbre avec exponentiation

A. Delcroix [4] propose la construction suivante :

i) soit n un entier naturel; on appelle exponentielle d'indice n, la fonction notée Exp_n définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, p \in \{1, \ldots, n\}\,,$$
$$\mathrm{Exp}_0(x) = x\,, \quad \mathrm{Exp}_p(x) = \exp\left(\mathrm{Exp}_{p-1}(x)\right)\ ;$$

ii) on dit qu'une famille $\left(\varphi_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$ est à croissance exponentielle modérée si

$$\forall\, K \Subset \Omega\,,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d\,,\ \exists\, p > 0\,,$$
$$\exists\, \eta \in\,]\,0\,,1\,]\,,\ \forall\, \varepsilon \in\,]\,0\,,\eta\,[\,,\quad \left\|\partial^\alpha \varphi_\varepsilon\right\|_{\infty,K} \le \mathrm{Exp}_p(\varepsilon^{-1})\ ;$$

iii) on dit qu'une famille $\left(\varphi_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$ est à croissance exponentielle rapide si

$$\forall\, K \Subset \Omega\,,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d\,,\ \exists\, q > 0\,,$$
$$\exists\, \eta \in\,]\,0\,,1\,]\,,\ \forall\, \varepsilon \in\,]\,0\,,\eta\,[\,,\quad \left\|\partial^\alpha \varphi_\varepsilon\right\|_{\infty,K} \le \left(\mathrm{Exp}_q(\varepsilon)^{-1}\right)^{-1}.$$

On démontre dans [4] que l'ensemble $\mathcal{X}_{\mathrm{Exp},M}(\mathbb{R}^d)$ des familles de fonctions à croissance exponentielle modérée est une sous-algèbre différentielle de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$ et que l'ensemble de $\mathcal{I}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance exponentiellement rapide est un idéal de $\mathcal{X}_{\mathrm{Exp},M}(\mathbb{R}^d)$. On appelle alors algèbre généralisée exponentielle, l'agèbre quotient

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{X}_{\mathrm{Exp},M}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{I}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^d)\,.$$

À cette algèbre correspond encore un anneau de constantes généralisées noté $\mathcal{C}_{\mathrm{Exp}}$, obtenu en quotientant l'espace des suites généralisées réelles indicées par $\varepsilon \in\,]\,0\,,1\,]$ à croissance exponentielle modérée :

$$\mathbb{R}^{]0,1]}_{\mathrm{Exp},M} = \Big\{\left(m_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathbb{R}^{]0,1]} \mid \forall\, p > 0\,,\ ,\ \exists\, \mu \in\,]\,0\,,1\,]\,,$$
$$\forall\, \varepsilon \in\,]\,0\,,\mu\,[\,,\ |m_\varepsilon| \le \mathrm{Exp}_p(\varepsilon^{-1})\Big\}\,.$$

par l'idéal des suites à décroissance exponentielle rapide :

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Exp}} = \Big\{\left(m_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathbb{R}^{]0,1]} \mid \forall\, q \in \mathbb{R}^{*+}\,,\ \exists\, \mu \in\,]\,0\,,1\,]\,,$$
$$\forall\, \varepsilon \in\,]\,0\,,\mu\,[\,,\ |m_\varepsilon| \le \left(\mathrm{Exp}_q(\varepsilon^{-1})\right)^{-1}\Big\}\,.$$

2.3 Structures algébriques adaptées au problème de Goursat

DÉFINITION 2.2.— *Soient A un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}^{]0,1]}$ des familles de réels muni des lois habituelles et I un idéal de A. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on définit les ensembles $\mathcal{H}_{d,A}$ et $\mathcal{J}_{d,I}$ tels que*

$$\mathcal{H}_{d,A} = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d) \mid \forall\, K \Subset \mathbb{R}^d,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \left(\|\partial^\alpha u_\varepsilon\|_{\infty,K} \right)_\varepsilon \in A \right\}$$

$$\mathcal{J}_{d,I} = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d) \mid \forall\, K \Subset \mathbb{R}^d,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \left(\|\partial^\alpha u_\varepsilon\|_{\infty,K} \right)_\varepsilon \in I \right\}$$

DÉFINITION 2.3.— *On dira qu'un sous-anneau E de $\mathbb{R}^{]0,1]}$ est stable par majoration si pour tout $(s_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{R}^{]0,1]}$, la propriété*

$$\exists\ (r_\varepsilon)_\varepsilon \in E \quad \textit{tel que} \quad \forall\, \varepsilon : |s_\varepsilon| \leq r_\varepsilon$$

entraîne qu'on a aussi $(s_\varepsilon)_\varepsilon \in E$.

PROPOSITION 2.4.— *On suppose que les ensembles A et I sont stables par majoration. Alors :*

i) $\mathcal{H}_{d,A}$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$ *;*

ii) $\mathcal{J}_{d,I}$ *est un idéal de* $\mathcal{H}_{d,A}$ *;*

iii) l'anneau des constantes généralisées associé à l'algèbre quotient $\mathcal{H}_{d,A}/\mathcal{J}_{d,I}$ *n'est autre que l'anneau quotient A/I.*

La démonstration de la stabilité de l'addition se fait sans difficultés grâce à la propriété de stabilité par majoration; celle de la multiplication utilise en outre la formule de Leibniz. Pour la propriété iii), il suffit de vérifier que l'anneau $\mathcal{H}_{d,A}$ (resp. $\mathcal{J}_{d,I}$) des familles de fonctions contantes de $\mathcal{H}_{d,A}$ (resp. $\mathcal{J}_{d,I}$) s'identifie à A (resp. à I).

DÉFINITION 2.5.— (Algèbres de Goursat) *On appelle algèbre de Goursat toute algèbre $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}_{d,A}/\mathcal{J}_{d,I}$ où A et I sont stables par majoration. Son anneau $\mathcal{C}_G$ de constantes généralisées s'identifie donc à A/I.*

THÉORÈME 2.6.— *Les algèbres de Egorov, de Colombeau et les algèbres " exponentielles " [4] sont des algèbres de Goursat.*

Preuve. — Il suffit de vérifier que l'on a

$$\mathcal{H}_{d,\mathbb{R}^{]0,1]}} = \mathcal{X}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathcal{J}_{d,\mathcal{I}_E} = \mathcal{I}_E(\mathbb{R}^d)\,,$$
$$\mathcal{H}_{d,\mathbb{R}_M^{]0,1]}} = \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathcal{J}_{d,\mathcal{I}_C} = \mathcal{I}_C(\mathbb{R}^d)\,,$$
$$\mathcal{H}_{d,\mathcal{X}_{\mathrm{Exp},M}} = \mathcal{X}_{\mathrm{Exp}\,M}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathcal{J}_{d,\mathcal{I}_{\mathrm{Exp}}} = \mathcal{I}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^d)\,.$$

DÉFINITION 2.7. — (Stabilité d'une algèbre par une fonction) *Soit $B : (x,z) \to B(x,z)$ une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ de fonctions généralisées est stable par B si, pour tout $U = \mathrm{Cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$, on a $B(\,\cdot\,,U) = \mathrm{Cl}\big(x \to B(x,u_\varepsilon(x))\big)_\varepsilon \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$.*

Exemple 2.8. — On considère les trois ensembles suivants :

$$\mathcal{F}_E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\,, \mathbb{R})\,,$$

$$\mathcal{F}_C = \Big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\,, \mathbb{R}) \mid \forall\, K \Subset \mathbb{R}^d,\ \forall\, \beta \in \mathbb{N}^{d+1}\,,\ \exists\, C > 0\,,$$
$$\exists\, m \in \mathbb{N}\,,\ \forall\,(x,z) \in K \times \mathbb{R}\,,\ \big|\partial^\beta f(x,z)\big| \le C\big(1+|z|\big)^m \Big\}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Exp}} = \Big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\,, \mathbb{R}) \mid \forall\, K \Subset \mathbb{R}^d,\ \forall\, \beta \in \mathbb{N}^{d+1}\,,\ \exists\, C > 0\,,$$
$$\exists\, m \in \mathbb{N}\,,\ \forall\,(x,z) \in K \times \mathbb{R}\,,\ \big|\partial^\beta f(x,z)\big| \le C\,\mathrm{Exp}_m\big(|z|\big) \Big\}\,.$$

Alors pour tout $B \in \mathcal{F}_E$ (resp. $\mathcal{F}_C$, $\mathcal{F}_{\mathrm{Exp}}$) l'algèbre $\mathcal{A}_E(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{A}_C(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^d)$) est stable par B.

DÉFINITION 2.9. — (Triplet de Goursat pour le problème (P), associé à la fonction F) *On appelle triplet de Goursat $\big(\mathcal{C}_G, \mathcal{A}_G(\mathbb{R}), \mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)\big)$ du problème (P) la donnée d'un anneau $\mathcal{C}_G$ de constantes généralisées associé à deux algèbres de Goursat $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^d)$ ($d = 1,\,2$) telles que $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$ soit stable par F.*

Exemple 2.10. — Si on prend F dans $\mathcal{F}_E$ (resp. $\mathcal{F}_C$, $\mathcal{F}_{\mathrm{Exp}}$), alors le triplet $\big(\mathcal{C}_E, \mathcal{A}_E(\mathbb{R}), \mathcal{A}_E(\mathbb{R}^2)\big)$ (resp. $\big(\mathcal{C}_C, \mathcal{A}_C(\mathbb{R}), \mathcal{A}_C(\mathbb{R}^2)\big)$, $\big(\mathcal{C}_{\mathrm{Exp}}, \mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}), \mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^2)\big)$) est un triplet de Goursat pour le problème (P) associé à F.

2.4 Résolution du problème de Goursat

THÉORÈME 2.11.— *On considère un triplet de Goursat* $(\mathcal{C}_G, \mathcal{A}_G(\mathbb{R}), \mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2))$ *du problème (P). Si les données* Φ *et* Ψ *vérifient*

$$\Phi \in \mathcal{A}_G(\mathbb{R}), \quad \Psi \in \mathcal{A}_G(\mathbb{R}) \quad et \quad \Phi(0) = \Psi(0),$$

alors le problème (P) admet une unique solution $U \in \mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$.

Preuve.— Les représentants $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ de Φ et Ψ peuvent être choisis tels que, pour tout ε, $\varphi_\varepsilon(0) = \psi_\varepsilon(0)$. On doit donc commencer par résoudre la famille de problèmes

$$\begin{cases} \partial_x \partial_y u_\varepsilon(x,y) = F\big(x, y, u_\varepsilon(x,y)\big) \\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi_\varepsilon(x) \\ u_\varepsilon(0,y) = \psi_\varepsilon(y) . \end{cases} \tag{P$_\varepsilon$}$$

la démonstration se fait en deux étapes.

a) Existence d'une solution

D'après le théorème 2.1, pour tout ε, le problème (P$_\varepsilon$) admet une unique solution u_ε dès lors que $\varphi_\varepsilon(0) = \psi_\varepsilon(0)$.

Il faut ensuite montrer que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{H}_{d,A}$. En gardant les notations précédemment introduites, on pose

$$u_{n,\varepsilon}(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \int_0^x \int_0^y F\big(\xi, \eta, u_{n-1,\varepsilon}(\xi,\eta)\big)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \quad n \geq 1,$$

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \varphi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(y) - \varphi_\varepsilon(0), \quad v_{n,\varepsilon}(x,y) = u_{n,\varepsilon}(x,y) - u_{n-1,\varepsilon}(x,y)$$

$$\phi_{K,\varepsilon} = \big\| F(\,\cdot\,,\,\cdot\,,0) \big\|_{\infty,K} + \kappa \big\| u_{0,\varepsilon} \big\|_{\infty,K},$$

où $K = \left[-\lambda\,,\,\lambda\right]^2$ ($\lambda > 0$) est un compact de $\mathbb{R}^2$. D'après la démonstration du théorème 2.1. on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \big\| v_{n,\varepsilon} \big\|_{\infty,K} \leq \kappa^{n-1} \phi_{K,\varepsilon} \frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \big\| u_\varepsilon \big\|_{\infty,K} &\leq \big\| u_{0,\varepsilon} \big\|_{\infty,K} + \sum_{n=1}^{\infty} \big\| v_{n,\varepsilon} \big\|_{\infty,K} \\ &\leq \big\| u_{0,\varepsilon} \big\|_{\infty,K} + \phi_{K,\varepsilon} \kappa^{-1} \exp(\kappa \lambda^2), \end{aligned}$$

qui est la majoration d'ordre 0, car $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ étant dans $\mathcal{A}_G(\mathbb{R})$, $(\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K})_\varepsilon$ et $(\phi_{K,\varepsilon})_\varepsilon$ appartiennent bien à A. En écrivant que

$$u_\varepsilon(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \int_0^x \int_0^y F(\xi,\, \eta,\, u_\varepsilon(\xi,\eta))\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\,,$$

on obtient les majorations d'ordre supérieur par récurrence, moyennant quelques calculs.

Enfin si $(d_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{J}_{d,I}$, alors on a

$$\big(\partial_x\partial_y(u_\varepsilon + d_\varepsilon)\big)_\varepsilon - \big(F(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\, u_\varepsilon + d_\varepsilon)\big)_\varepsilon \in \mathcal{J}_{d,I}$$

puisque

$$\mathrm{Cl}\left((x,y) \longrightarrow \int_0^1 \partial_z F\big(x,\, y,\, u_\varepsilon(x,y) + \sigma d_\varepsilon(x,y)\big)\, \mathrm{d}\sigma\right)$$

appartient à $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$ du fait que, pour tout $\sigma \in [\,0\,,\,1\,]$, $\mathrm{Cl}(u_\varepsilon + \sigma d_\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$ et que $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$ est stable par F.

Donc $U = \mathrm{Cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est une solution de (P) dans $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$.

b) Unicité de la solution

Soit $V = \mathrm{Cl}(v_\varepsilon)_\varepsilon$ une autre solution de (P); alors il existe

$$N = \mathrm{Cl}(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{J}_{d,I}\,, \quad R = \mathrm{Cl}(r_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{J}_{d,I}\,, \quad S = \mathrm{Cl}(s_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{J}_{d,I}$$

tels que

$$\begin{cases} \partial_x\partial_y v_\varepsilon(x,y) = F\big(x,y,v_\varepsilon(x,y)\big) + n_\varepsilon(x,y) \\ v_\varepsilon(x,0) = \varphi_\varepsilon(x) + r_\varepsilon(x) \\ v_\varepsilon(0,y) = \psi_\varepsilon(y) + s_\varepsilon(y)\ ; \end{cases}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) &+ \int_0^x \int_0^y F(\xi,\, \eta,\, v_\varepsilon(\xi,\eta))\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, + \\ &+ r_\varepsilon(x) + s_\varepsilon(y) - r_\varepsilon(0) + \int_0^x \int_0^y n_\varepsilon(\xi,\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\,. \end{aligned}$$

Posant $w_\varepsilon = v_\varepsilon - u_\varepsilon$ et raisonnant comme dans la démonstration précédente, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x,y) &= a_\varepsilon(x,y) + \\ &+ \int_0^x \int_0^y \left(w_\varepsilon(\xi,\eta) \int_0^1 \partial_z F\big(\xi,\, \eta,\, u_\varepsilon(\xi,\eta) + \sigma w_\varepsilon(\xi,\eta)\big)\, \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\,, \end{aligned} \tag{1}$$

avec $\left(a_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathcal{J}_{d,I}$. En gardant les notations précédentes, on a

$$\left|w_\varepsilon(x,y)\right| \leq \kappa|y| \left| \int_0^x \sup_{\eta\in[-\lambda\,,\,\lambda]} \left|w_\varepsilon(x,\eta)\right| \mathrm{d}\xi \right| + \left\|a_\varepsilon\right\|_{\infty,K}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [-\lambda\,,\,\lambda]\,, \quad e_\varepsilon(x) &= \sup_{\eta\in[-\lambda\,,\,\lambda]} \left|w_\varepsilon(\xi,\eta)\right| \\ &\leq \kappa\lambda \left| \int_0^x e_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right| + \left\|a_\varepsilon\right\|_{\infty,K}. \end{aligned}$$

Appliquant le lemme de Gronwall, comme précédemment, on obtient

$$\left\|w_\varepsilon\right\|_{\infty,K} \leq \exp(\kappa\lambda^2)\left\|a_\varepsilon\right\|_{\infty,K},$$

ce qui constitue l'estimation d'ordre 0.

À partir de cette estimation d'ordre 0 et de l'égalité (1), un raisonnement par récurrence conduit aux estimations d'ordre supérieur à l'aide de la stabilité de $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$ par F, ce qui induit l'unicité de la solution U dans $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^2)$. □

Remarque 2.12.— On a vu que si on prend F dans $\mathcal{F}_E$ (resp. $\mathcal{F}_C$, $\mathcal{F}_{\mathrm{Exp}}$), alors le triplet $\left(\mathcal{C}_E, \mathcal{A}_E(\mathbb{R}), \mathcal{A}_E(\mathbb{R}^2)\right)$ (resp. $\left(\mathcal{C}_C, \mathcal{A}_C(\mathbb{R}), \mathcal{A}_C(\mathbb{R}^2)\right)$, $\left(\mathcal{C}_{\mathrm{Exp}}, \mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}), \mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^2)\right)$) est un triplet de Goursat pour le problème (P) associé à F. Il en résulte, sous l'hypotèse :

$$\Phi\,,\ \Psi \in \mathcal{A}_E(\mathbb{R}) \quad (\text{resp. } \mathcal{A}_C(\mathbb{R}), \mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \Psi(0)$$

l'existence et l'unicité de la solution du problème de Goursat dans l'algèbre $\mathcal{A}_E(\mathbb{R}^2)$ (resp. $\mathcal{A}_C(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\mathbb{R}^2)$).

3. Spectre singulier paramétrique de la solution

3.1 Éléments d'analyse microlocale

Soient $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Il se peut que $U = \mathrm{Cl}\left(u_\varepsilon\right)_\varepsilon$ ne *soit pas associée à* une distribution au voisinage de x, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de voisinage ouvert V_x de x pour lequel $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(u_{\varepsilon\,|V_x}\right)$ appartienne à $\mathcal{D}'(V_x)$.

Mais dans ce cas, il se peut qu'il existe un réel r et un voisinage V_x de x tel que $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon\,|V_x})$ appartienne à $\mathcal{D}'(V_x)$ autrement dit que $\mathrm{Cl}(\varepsilon^r u_{\varepsilon\,|V_x})_\varepsilon$ appartienne à $\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(V_x)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(V_x)$ des éléments U associés à une distribution de $\mathcal{D}'(V_x)$ [7].

Par exemple, prenons

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,,\ \varphi \geq 0\,, \quad \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\varphi(x\varepsilon^{-1})\,.$$

Alors $U = \mathrm{Cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est une fonction généralisée dans $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ qui n'est pas (associée à) une distribution au voisinage de 0, mais pour $r \geq 1$, $\mathrm{Cl}(\varepsilon^r u_\varepsilon)_\varepsilon$ en est une.

Cela conduit au concept défini ci-après [7].

3.2 Spectre singulier paramétrique

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \Omega$ et $U = \mathrm{Cl}(u_\varepsilon) \in \mathcal{A}(\Omega)$, on pose

$$N_{\mathcal{D}',x}(U) = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists\ V_x \in \mathcal{V}(x)\,,\ \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon\,|V_x}) \in \mathcal{D}'(V_x) \right\}\,,$$

$\mathcal{V}(x)$ étant le filtre des voisinages ouverts de x. Il est facile de s'assurer que $N_{\mathcal{D}',x}(U)$ ne dépend pas de la représentation de U et que si $N_{\mathcal{D}',x}(U)$ contient un $r_0 \in \mathbb{R}$, il contient tous les $r \geq r_0$.

On définit alors la $\mathcal{D}'$-fibre au-dessus de x :

$$\Sigma_{\mathcal{D}',x}(U) = \mathbb{R}^+ \setminus N_{\mathcal{D}',x}(U)\,.$$

C'est soit un intervalle de la forme $[\,0\,,\,r\,[$ ou $[\,0\,,\,r\,]$, avec $r > 0$, soit $\mathbb{R}^+$, soit l'ensemble vide. On peut donc donner la *définition du spectre singulier paramétrique d'une fonction généralisée* suivante.

DÉFINITION 3.1.— *On définit le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de $U \in \mathcal{A}(\Omega)$ comme le sous-ensemble de $\Omega \times \mathbb{R}^+$:*

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U) = \left\{(x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \mid r \in \Sigma_{\mathcal{D}',x}(U)\right\}\,.$$

Remarque 3.2.— On voit que l'on a $\Sigma_{\mathcal{D}',x}(U) = \emptyset$ si et seulement s'il existe un voisinage V_x de x tel qu'on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\big(u_{\varepsilon\,|V_x}\big) \in \mathcal{D}'(V_x)$; c'est-à-dire si et seulement si x n'appartient pas au *$\mathcal{D}'$-support singulier* de U : $S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U)$ définit en [7].

Il en résulte que la projection sur Ω de $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U)$ est exactement $S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U)$.

3.3 Application au problème de Goursat

THÉORÈME 3.3.— *Soit* $U_0 = \mathrm{Cl}(u_{0,\varepsilon})$, *avec*

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \varphi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(y) - \varphi_\varepsilon(0)\,.$$

On suppose que pour tout $X \in S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U_0)$ *on a* $0 \in \Sigma_{\mathcal{D}',X}(U_0)$ *et que*

$$\forall\ K \Subset \mathbb{R}^2, \quad M_F(K) = \sup_{\substack{(x,y)\in K \\ z\in\mathbb{R}}} \big|F(x,y,z)\big| < +\infty\,. \tag{H2}$$

Alors le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de la solution U du problème de Goursat (P) est contenu dans le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de U_0.

Preuve.— Soient $(x,y) = X \in \mathbb{R}^2$ et $r \in N_{\mathcal{D}',X}(U_0)$. Il résulte de l'hypothèse sur $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U_0)$ qu'on a $r > 0$. On va montrer que l'on a alors $r \in N_{\mathcal{D}',X}(U)$. Par définition de $N_{\mathcal{D}',X}(U_0)$, il existe un voisinage V_X de X tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\varepsilon^r u_{0,\varepsilon\,|V_X}\Big) \in \mathcal{D}'(V_X)\,.$$

Soit $f \in \mathcal{D}(V_X)$. Il existe donc une distribution $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(V_X)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}^2} \varepsilon^r u_{0,\varepsilon}(x,y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathbf{T}(f)\,.$$

Calculons alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}^2} \varepsilon^r \big[u_\varepsilon(x,y) - u_{0,\varepsilon}(x,y)\big] f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Comme

$$u_\varepsilon(x,y) - u_{0,\varepsilon}(x,y) = \int_0^x \int_0^y F\big(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta)\big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

et que

$$\left|\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\int_0^x\int_0^y F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leq$$

$$\leq M_F(\operatorname{supp} f)\iint_{\operatorname{supp} f}|xy|\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty\,,$$

alors, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}^2}\varepsilon^r\left[u_\varepsilon(x,y)-u_{0,\varepsilon}(x,y)\right]f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^r\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\int_0^x\int_0^y F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}^2}\varepsilon^r u_\varepsilon(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}^2}\varepsilon^r u_{0,\varepsilon}(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathbf{T}(f)\,.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^r u_{\varepsilon\,|V_X}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^r u_{0,\varepsilon\,|V_X}\right)\in\mathcal{D}'(V_X)\,.$$

On a donc $r\in N_{\mathcal{D}',X}(U)$, ce qui prouve l'inclusion

$$N_{\mathcal{D}',X}(U_0)\subset N_{\mathcal{D}',X}(U)\,,$$

et par suite $\Sigma_{\mathcal{D}',X}(U)\subset\Sigma_{\mathcal{D}',X}(U_0)$ de sorte que

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U)\subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(U_0)\,.\ \square$$

Exemples 3.4. — Prenons $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi\geq 0$, $\int\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Rappelant que $\Phi = \mathrm{Cl}\left(\varphi_\varepsilon\right)_\varepsilon$ et $\Psi = \mathrm{Cl}\left(\psi_\varepsilon\right)_\varepsilon$, on considère les cas suivants :

1) $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(x\varepsilon^{-1})$ et $\psi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-1}\varphi(y\varepsilon^{-1})$; pour ce cas, on peut montrer que
$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}U\subset\mathbb{R}^2\times[0\,,1[\,;$$

2) $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(x\varepsilon^{-1})$ et $\psi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2}\varphi(y\varepsilon^{-1})$; dans ce cas, on a
$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}U\subset\mathbb{R}^2\times[0\,,2[\,.$$

4. Étude qualitative de la solution

Dans cette section, on considère le cas où

$$\forall\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad F(x,y,z)=zf_1(x)f_2(y)+g(x,y,z)$$
$$\Phi(0)=\Psi(0)\,,$$

où f_1, f_2 sont des fonctions appartenant à l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, la fonction g vérifiant les hypotèses (H1) et l'hypothèse (H3) suivante :

$$\forall\ K\Subset\mathbb{R}^2,\quad |g|_{\infty,K\times\mathbb{R}}=\sup_{\substack{(x,y)\in K\\ z\in\mathbb{R}}}|g(x,y,z)|<+\infty\,, \tag{H3}$$

de sorte que le théorème 2.11 s'applique ici. Le problème de Goursat auquel on s'intéresse ici s'énonce formellement ainsi :

$$\begin{cases}\partial_x\partial_y U(x,y)=f_1(x)f_2(y)U(x,y)+g\big(x,y,U(x,y)\big)\\ U\big|_{\{y=0\}}=\Phi\,,\quad U\big|_{\{x=0\}}=\Psi\,.\end{cases} \tag{P}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\theta_1(x)=\int_0^x f_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,\quad \theta_2(y)=\int_0^x f_2(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,,\quad h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-2}t^n\,,$$
$$\nu_1(x,y,\xi)=\theta_2(y)\big(\theta_1(x)-\theta_1(\xi)\big)\,,\quad \nu_2(x,y,\eta)=\theta_1(x)\big(\theta_2(y)-\theta_2(\eta)\big)\,.$$

On s'intéresse, dans un premier temps, au cas linéaire, associé à ce problème de Goursat non linéaire, ce qui permet de dégager certaines propriétés de la solution, utiles pour étudier, dans un second temps, le problème non linéaire.

4.1 Étude particulière du cas linéaire associé

Dans ce paragraphe, on étudie le problème

$$\begin{cases}\partial_x\partial_y V(x,y)=f_1(x)f_2(y)V(x,y)\\ V\big|_{\{y=0\}}=\Phi\,,\quad V\big|_{\{x=0\}}=\Psi\end{cases} \tag{P$_{\mathrm{lin}}$}$$

pour lequel on dispose du résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. — *L'unique solution du problème* (P$_{\mathrm{lin}}$) *est donnée par*

$$V=\mathrm{Cl}(v_\varepsilon)_\varepsilon$$

où

$$v_\varepsilon(x,y) = \varphi_\varepsilon(0)h\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big) + \int_0^x \varphi'_\varepsilon(\xi)h\big(\nu_1(x,y,\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \int_0^y \psi'_\varepsilon(\eta)h\big(\nu_2(x,y,\eta)\big)\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{2}$$

Preuve.— On vérifie aisément que V est solution du problème ($\mathrm{P_{lin}}$) en remarquant que la fonction h est l'unique solution développable en série entière du problème différentiel

$$th''(t) + h'(t) - h(t) = 0\,, \quad h(0) = 1\,. \square$$

Considérant deux fonctions φ et ψ, éléments de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \psi(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = \psi(0)\,, \tag{3}$$

on pose

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(x\varepsilon^{-1}) \quad \text{et} \quad \psi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-1}\psi(y\varepsilon^{-1})\,. \tag{4}$$

Il est clair que $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ convergent au sens des distributions respectivement vers δ_x et δ_y les mesures de Dirac à l'origine agissant sur les fonctions de la variable x et y respectivement.

THÉORÈME 4.2.— *On pose $\Phi = \mathrm{Cl}(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $\Psi = \mathrm{Cl}(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ avec φ_ε et ψ_ε définis par les formules (3) et (4). Alors il existe une fonction ω définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que*

$$\begin{cases} \omega\big|_\Lambda = 0 \quad \text{où } \Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \\ \omega\big|_{(\mathbb{R}^2\setminus\Lambda)} = 0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda) \\ V + \Phi(0)\big[h \circ (\theta_1 \otimes \theta_2)\big] \approx \mathbf{T}_\omega + \delta_x \otimes 1_y + 1_x \otimes \delta_y\,, \end{cases}$$

V étant la fonction généralisée définie au théorème 4.1, 1_x (resp. 1_y) la fonction, de la variable x (resp. de la variable y) constante valant 1 sur $\mathbb{R}$, $\mathbf{T}_\omega$ la distribution définie par la fonction ω.

Preuve.— À l'aide d'intégrations par parties, on déduit de (2) l'égalité :

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(x,y) &= v_\varepsilon(x,y) - \varphi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(y) + \varphi_\varepsilon(0)h\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big) \\ &= \theta_2(y)\int_0^x \varphi_\varepsilon(\xi)f_1(\xi)h'\big(\nu_1(x,y,\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi + \\ &\quad + \theta_1(x)\int_0^y \psi_\varepsilon(\eta)f_2(\eta)h'\big(\nu_2(x,y,\eta)\big)\,\mathrm{d}\eta\,. \end{aligned}$$

Des changements de variables adéquats dans cette dernière expression de v_ε conduisent à l'égalité suivante :

$$H_\varepsilon(x,y) = \theta_2(y)\int_0^{x\varepsilon^{-1}} \varphi(\xi)f_1(\varepsilon\xi)h'\big(\nu_1(x,y,\varepsilon\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \theta_1(x)\int_0^{y\varepsilon^{-1}} \psi(\eta)f_2(\varepsilon\eta)h'\big(\nu_2(x,y,\varepsilon\eta)\big)\,\mathrm{d}\eta\,,$$

d'où nous obtenons, d'une part, que

$$\big|H_\varepsilon(x,y)\big| \leq \big|\theta_2(y)\big|\int_{\mathbb{R}} \big|\varphi(\xi)f_1(\varepsilon\xi)h'\big(\nu_1(x,y,\varepsilon\xi)\big)\big|\,\mathrm{d}\xi + \\ + \big|\theta_1(x)\big|\int_{\mathbb{R}} \big|\psi(\eta)f_2(\varepsilon\eta)h'\big(\nu_2(x,y,\varepsilon\eta)\big)\big|\,\mathrm{d}\eta\,,$$

qui, en arguant du fait que φ et ψ sont à support compact, induit une majoration, sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, de la fonction $|H_\varepsilon|$ par une fonction continue indépendante de ε. D'autre part, à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on montre que, lorsque ε tend vers 0, H_ε converge simplement sur $\mathbb{R}^2$ vers la fonction ω définie par

$$\omega(x,y) = \\ = h'\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big)\,\mathrm{sign}_0(x)f_1(0)\theta_2(y)\int_0^\infty \varphi\big(\xi\,\mathrm{sign}_1(x)\big)\,\mathrm{d}\xi + \\ + h'\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big)\,\mathrm{sign}_0(y)f_2(0)\theta_1(x)\int_0^\infty \varphi\big(\eta\,\mathrm{sign}_1(y)\big)\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{5}$$

où $\mathrm{sign}_\sigma(t) = t\big|t\big|^{-1}$ si $t \in \mathbb{R}^*$ et $\mathrm{sign}_\sigma(0) = \sigma$ pour $\sigma \in \{0,1\}$. Ainsi, H_ε converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ vers la distribution $\mathbf{T}_\omega$ définie par la fonction ω. □

4.2 Étude du problème non linéaire

On garde les notations utilisées dans le paragraphe précédent et on rappelle, pour tous les développements ultérieurs, que

$$\Phi = \mathrm{Cl}\big(\varphi_\varepsilon\big)_\varepsilon \approx \delta_x \quad \text{et} \quad \Psi = \mathrm{Cl}\big(\psi_\varepsilon\big)_\varepsilon \approx \delta_y$$

avec φ_ε et ψ_ε définies par (3) et (4).

On met en évidence ici une condition suffisante pour que la solution U soit associée à une distribution.

THÉORÈME 4.3.— *Si*

$$\Phi(0) = \mathrm{Cl}\big(\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(0)\big)_\varepsilon = 0\,, \tag{6}$$

alors, il existe une fonction $\zeta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ telle que U, la solution du problème (P), vérifie

$$U \approx \mathbf{T}_\zeta + \mathbf{T}_\omega + \delta_x \otimes 1_y + 1_x \otimes \delta_y\,,$$

ω étant défini dans le théorème 4.2. De plus, nous avons

$$\zeta\big|_{(\mathbb{R}^2\setminus\Lambda)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda)\,.$$

Preuve.— Ici, on choisit φ et ψ telles que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Les fonctions généralisées U et V étant les solutions respectives des problèmes (P) et ($\mathrm{P_{lin}}$), alors la fonction $w_\varepsilon = u_\varepsilon + v_\varepsilon$ vérifie le système

$$\begin{cases} \partial_x\partial_y w_\varepsilon = (f_1 \otimes f_2)w_\varepsilon + g(\,\cdot\,,\,\cdot\,, u_\varepsilon) \\ w_\varepsilon(x,0) = w_\varepsilon(0,y) = 0\,, \end{cases}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x,y) = &\int_0^x \int_0^y f_1(\xi)f_2(\eta)w_\varepsilon(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\ + \\ &+ \int_0^x \int_0^y g\big(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta)\big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Soit $(x,y) \in K = \big[-\lambda\,,\,\lambda\big]^2$ ($\lambda > 0$) un compact de $\mathbb{R}^2$, avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [-\lambda\,,\,\lambda]\,, \quad e_\varepsilon(x) = &\sup_{\eta\in[-\lambda\,,\,\lambda]} \big|w_\varepsilon(x,\eta)\big| \\ &\le \lambda \big\|f_1 \otimes f_2\big\|_{\infty,K} \left|\int_0^x e_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| + \lambda^2 |g|_{\infty,K\times\mathbb{R}}\,, \end{aligned}$$

d'où, par application du lemme de Gronwall,

$$\big\|w_\varepsilon\big\|_{\infty,K} \le \lambda^2 |g|_{\infty,K\times\mathbb{R}} \exp\Big(\lambda^2 \big\|f_1 \otimes f_2\big\|_{\infty,K}\Big)\,, \tag{8}$$

ce qui assure que, pour tout $(x,y) \in K$, la suite $\big(w_\varepsilon(x,y)\big)_\varepsilon$ est bornée et, compte tenu de (7), que les suites

$$\Big(\big\|\partial_x w_\varepsilon\big\|_{\infty,K}\Big)_\varepsilon \quad \text{et} \quad \Big(\big\|\partial_y w_\varepsilon\big\|_{\infty,K}\Big)_\varepsilon$$

sont uniformément bornées par rapport à ε. Appliquant le théorème d'Ascoli, on peut affirmer que la famille $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(K)$; il existe donc une suite d'indices $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 0 et une fonction $w_0 \in \mathcal{C}^0(K)$ telles que

$$\lim_{k\to\infty} w_{\varepsilon_k} = w_0 \quad \text{dans } \mathcal{C}^0(K)\,.$$

Comme $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(y)) = 0$ pour $xy \neq 0$, $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ converge simplement vers ω sur $\mathbb{R}^2\backslash\Lambda$ (cf. théorème 4.2), et par suite $(u_{\varepsilon_k})_k$ converge simplement vers $w_0 + \omega$ sur $(\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda) \cap K$ donc presque partout dans K. Par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue aux intégrales de (7), on obtient

$$\begin{aligned} w_0(x,y) = &\int_0^x \int_0^y f_1(\xi) f_2(\eta) w_0(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\, + \\ &+ \int_0^x \int_0^y g\big(\xi,\eta, w_0(\xi,\eta) + \omega(\xi,\eta)\big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Si une fonction $\widetilde{w}_0 \in \mathcal{C}^0(K)$ vérifie (9), alors on obtient, en posant $b = w_0 - \widetilde{w}_0$, pour $(x,y) \in K$,

$$\big|b(x,y)\big| \leq \Big(\big\|f_1 \otimes f_2\big\|_{\infty,K} + \big|\partial_z g\big|_{\infty,K\times\mathbb{R}}\Big)\left|\int_0^x \int_0^y \big|b(\xi,\eta)\big|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right|,$$

de sorte que $b = 0$ par application du lemme de Gronwall à la fonction

$$x \in [-\lambda\,,\,\lambda] \longmapsto \sup_{\eta\in[-\lambda\,,\,\lambda]} \big|b(x,\eta)\big|\,.$$

L'unicité de w_0 assure que $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $\mathcal{C}^0(K)$. Par suite, $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^2$ vers une fonction $\zeta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ vérifiant l'égalité (9). Ainsi, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon = \zeta \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon = \mathbf{T}_\omega + \delta_x \otimes 1_y + 1_x \otimes \delta_y\,,$$

donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = \mathbf{T}_\zeta + \mathbf{T}_\omega + \delta_x \otimes 1_y + 1_x \otimes \delta_y \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)\,.$$

Soit $\Omega_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,,\ y > 0\big\}$; on va montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_1.

Soit $\widetilde{\omega}$ définie sur $\overline{\Omega}_1$ par (5) donnant ω sur Ω_1. Comme $\mathrm{mes}(\overline{\Omega}_1 \backslash \Omega_1) = 0$, on peut, dans la relation (9), remplacer w_0 par ζ et ω par $\widetilde{\omega}$. Dès lors, on peut montrer par récurrence que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_1 et on a le même résultat sur les autres quadrants. □

THÉORÈME 4.4.— *Soit U la solution du problème (P) et ω la fonction définie dans le théorème 4.2. Si*

$$\Phi(0) = \mathrm{Cl}\big(\varepsilon^{-1}\varphi(0)\big)_\varepsilon \neq 0$$

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{|z|\to\infty} g(x,y,z) = 0$$

$$\operatorname{mes}\Big(\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big) = 0\Big\}\Big) = 0\,,$$

alors on a

$$U + \Phi(0)\big[h \circ (\theta_1 \otimes \theta_2)\big] \approx \mathbf{T}_\omega + \delta_x \otimes 1_y + 1_x \otimes \delta_y\,.$$

Preuve.— Ici on choisit φ et ψ telles que $\varphi(0) = \psi(0) \neq 0$. Avec les notations de la démonstration du théorème 2.11, posons

$$\Pi_\varepsilon = \iint_K \big|g\big(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta)\big)\big|\ \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

de sorte que

$$\forall\ x \in [-\lambda\,,\ \lambda]\,, \quad e_\varepsilon(x) \le \lambda \big\| f_1 \otimes f_2 \big\|_{\infty,K} \left| \int_0^x e_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right| + \Pi_\varepsilon\,,$$

et, par application du lemme de Gronwall,

$$\big\| w_\varepsilon \big\|_{\infty,K} \le \Pi_\varepsilon \exp\Big(\lambda^2 \big\| f_1 \otimes f_2 \big\|_{\infty,K}\Big)\,. \tag{10}$$

Posons

$$\Xi = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0 \text{ et } h\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big) \neq 0\Big\}\ ;$$

il est clair que le complémentaire de Ξ est négligeable et, par ailleurs,

$$\forall\ (x,y) \in \Xi\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \big|\varphi_\varepsilon(0) h\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big)\big| = \infty$$

car $\varphi_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-1}\varphi(0) \neq 0$ et $h\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \Xi$. Comme

$$\forall\ (x,y) \in F\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\varphi_\varepsilon(0) h\big(\theta_1(x)\theta_2(y)\big) + v_\varepsilon(x,y) - \varphi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(y)\Big) = \omega(x,y)\,,$$

en tenant compte du fait que $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi_\varepsilon(x)+\psi_\varepsilon(y))=0$ pour $xy\neq 0$, on obtient que

$$\forall\ (x,y)\in\Xi\,,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left|v_\varepsilon(x,y)\right|=\infty\,.$$

Comme, d'après l'inégalité (8), la suite $\left(\left\|w_\varepsilon\right\|_{\infty,K}\right)_\varepsilon$ est uniformément bornée par rapport à ε, on en déduit que

$$\forall\ (x,y)\in\Xi\cap K\,,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left|u_\varepsilon(x,y)\right|=\infty$$

et, par suite,

$$\forall\ (x,y)\in\Xi\cap K\,,\quad \lim_{\varepsilon\to 0} g\big(x,y,u_\varepsilon(x,y)\big)=\infty\,.$$

Puisque $\mathrm{mes}(K\setminus\Xi\cap K)=0$, alors via (H3) et par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi_\varepsilon=0\,,$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé à l'aide de l'inégalité (10). □

Remarque 4.5.— Les deux théorèmes précédents font intervenir la constante généralisée $\Phi(0)=\mathrm{Cl}\big(\varepsilon^{-1}\varphi(0)\big)_\varepsilon$. Il est à remarquer que si cette constante n'est pas nulle, elle ne peut être associée à aucun nombre réel.

Exemples 4.6

1) Avec $F=0, \Phi=\mathrm{Cl}\big(\varphi_\varepsilon\big)_\varepsilon\approx\delta_x$ et $\Psi=\mathrm{Cl}\big(\psi_\varepsilon\big)_\varepsilon\approx\delta_y$, on a (théorème 4.1)

$$v_\varepsilon=\varphi_\varepsilon\otimes 1_y+1_x\otimes\psi_\varepsilon-\varphi_\varepsilon(0)\,.$$

Il en résulte qu'on a la décomposition $V=V_1+V_2$ avec

$$V_1=-\Phi(0)\quad\text{et}\quad V_2=\mathrm{Cl}\big(\varphi_\varepsilon\otimes 1_y+1_x\otimes\psi_\varepsilon\big)_\varepsilon\,.$$

On voit que V_2 est associée à la distribution $\delta_x\otimes 1_y+1_x\otimes\delta_y$, mais V_1 ne peut être associée à une distribution que si $\Phi(0)=0$.

2) On prend $f_1(x)=f_2(y)=1$ et $g(x,y,z)=-z\big(1+z^2\big)^{-1}$, alors

$$\theta_1(x)=\int_0^x f_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi=x\,,\quad \theta_2(y)=\int_0^y f_2(\eta)\,\mathrm{d}\eta=y\,,$$

et il est clair que toutes les hypothèses du théorème 4.4 sont satisfaites. En particulier, comme la fonction h, définie au début de la section 4, n'a que des zéros isolés, l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(\theta_1(x)\theta_2(y)) = 0\}$ est une réunion d'hyperboles, donc de mesure nulle. Et la solution U du problème (P) se décompose finalement en $U = U_1 + U_2$, avec

$$U_1 = -\dot{\Phi}(0)\left[h \circ (\mathrm{id}_x \otimes \mathrm{id}_y)\right] \quad \text{et} \quad U_2 = V_2 = \mathrm{Cl}\big(\varphi_\varepsilon \otimes 1_y + 1_x \otimes \psi_\varepsilon\big)_\varepsilon .$$

Cette solution peut aussi se décomposer en la somme de deux termes dont l'un est associé à une distribution et l'autre est une fonction généralisée ne s'y réduisant pas en général.

Références

[1] BIAGIONI (H. A.) .— *A nonlinear theory of generalized functions*, Lectures Notes in Math., Springer Verlag **1421** (1990).

[2] COLOMBEAU (J.-F.) .— *Elementary introduction to new generalized functions*, North Holland Math. Studies **113** (1985).

[3] EGOROV (Y. V.) .— *A contribution to the theory of generalized functions*, Russian Math. Surveys **45**, n° 5 (1990), pp. 1-49.

[4] DELCROIX (A.) .— *Une algèbre de fonctions généralisées stable par exponentielle*, Prépublication de l'Université des Antilles et de la Guyane (avril 1995).

[5] GARABEDIAN (P. R.) .— *Partial differential equations*, John Wiley & sons inc. (1964), pp. 117-119.

[6] GOURSAT (E.) .— *Cours d'analyse mathématique*, tome III, Gauthiers-Villars (1956).

[7] MARTI (J.-A.) .— *Analyse locale et microlocale des fonctions généralisées*, Prépublication de l'Université des Antilles et de la Guyane (mai, 1995).

[8] OBERGUGGENBERGER (M.) .— *Multiplication of distributions and application to partial differential equations*, Pitman Research Notes in Mathematics, Longman **259** (1992).

[9] ROSINGER (E.) .— *Generalized solutions of nonlinear partial differential equations*, North Holland Math. Studies **146** (1987).

[10] SCHWARTZ (L.) .— *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, **239** (1954), pp. 847-848.

[11] VALMORIN (V.) .— *Fonctions généralisées périodiques et applications*, Thèse de doctorat, Université des Antilles et de la Guyane (février, 1995).

[12] VALMORIN (V.) .— *Fonctions généralisées périodiques et problème de Goursat*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, **320** (1995), pp. 537-540.