Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Olivier Vivolo

Sur la non-intégrabilité de potentiels quartiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, nº 3 (1997), p. 535-556

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_3_535_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VI, n° 3, 1997

Sur la non-intégrabilité de potentiels quartiques(*)

OLIVIER VIVOLO(1)

RÉSUMÉ. — Nous appliquons le théorème de Ziglin à une généralisation quartique du potentiel d'Hénon-Heiles. Cela nous permettra d'obtenir des conditons de non-intégrabilité analytique au sens de Liouville sur les coefficients du potentiel.

ABSTRACT. — We apply the Ziglin theorem to a quartic generalization of the Hénon-Heiles' potential. This enables us to get analytic conditions of Liouville nonintegrability on coefficients of potential.

1. Introduction

Considérons le potentiel généralisé de Hénon-Heiles [HH].

$$V(x,y) = \frac{a}{2}\,x^2 + \frac{b}{2}\,y^2 + cx^2y + \frac{1}{3}\,dy^3\,.$$

Si $c = 0$, le potentiel est séparable et le système hamiltonien correspondant est complètement intégrable au sens de Liouville. Si $c \neq 0$, alors le système est plus difficile à résoudre, avec une transformation linéaire, on se ramène à étudier

$$V(x,y) = \frac{a}{2}\,x^2 + \frac{b}{2}\,y^2 + x^2y + \frac{1}{3}\,dy^3\,. \tag{1}$$

(*) Reçu le 4 septembre 1995

(1) Université Paul-Sabatier, Laboratoire Émile-Picard, U.M.R. 5580, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex (France)

Il est connu que ce système est complètement intégrable au sens de Liouville :

- pour a et b quelconques et $d = 6$ [BSV] ;
- pour $a = b$ et $d = 1$ [AS] ;
- pour $b = 16\,a$ et $d = 16$ ([CTW], [GDP]).

Dans ces cas, la deuxième intégrale du mouvement est un polynôme. Sous la condition $a = b \neq 0$, la non-existence d'une autre intégrale du mouvement analytique au voisinage d'un ensemble de niveau de l'énergie $H = \text{const}$, a été démontrée par [Zi] et [It] dans les cas $d \neq 1$, 2 ou 6. Il faut noter que la non-intégrabilité du potentiel (1) n'est pas démontrée dans les cas :

- $a \neq b$,
- $a = b = 0$,
- $a = b \neq 0$ et $d = 2$.

Nous allons considérer la généralisation suivante du potentiel (1) :

$$V(x, y) = \frac{a}{2}\,x^2 + \frac{b}{2}\,y^2 + x^2 y + \frac{dy^3}{3} + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2 y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}\,.$$

Nous allons trouver des conditions nécessaires de non-intégrabilité analytique. Pour cela, nous employons le théorème de Ziglin [Zi].

En considérant un potentiel de degré 4, l'application de ce théorème en est rendue difficile du fait que l'on ne dispose pas de formules analogues à celles que Ito utilise pour le potentiel d'Hénon–Heiles pour calculer la famille de solutions Γ_h [It]. En effet, on est ramené au problème d'inversion de Jacobi, sur une surface de Riemann de genre 1 qui est définie par un polynôme de degré 4. Il est nécessaire de connaître ses racines en fonction des coefficients pour connaître la solution explicitement.

Nous allons contourner cette difficulté, en utilisant la méthode de Poincaré–Lindstëdt [P2], en développant la solution vérifiant $x(0) = \varepsilon$ et $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t\,(0) = 0$ par rapport au petit paramètre ε. Quand on recherche, par des méthodes perturbatives des solutions périodiques, il apparaît des termes séculaires dans les développements en série de solutions périodiques. Lindstëdt (1882) a mis au point une méthode lui permettant d'éliminer ces termes séculaires [Li]. Sa méthode consiste à supposer que la fréquence admet un développement en série du paramètre de perturbation. Poincaré, en 1886, a montré sa légitimité en prouvant la convergence des séries [P1].

Nos principaux résultats sont les théorèmes 1, 2, 3 et 4.

2. Théorème de Ziglin

Soit (Σ, ω) une variété complexe et symplectique, ω une forme symplectique non dégénérée sur Σ. Soit $H : \Sigma \to \mathbb{C}$ un hamiltonien holomorphe, et soit X_H le champ de vecteurs associé défini par $\mathrm{d}H = i_{X_H}\omega$. Alors l'image des courbes intégrales $z = z(t)$ non constantes d'énergie h, vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = X_H\big|_z \quad \text{et} \quad H\big(z(t)\big) = h\,,$$

est une surface de Riemann $\Gamma \subset \Sigma_h = H^{-1}\big(\{h\}\big)$. L'équation linéarisée du système, le long de $z(t)$, induit une équation différentielle linéaire sur le fibré normal $N := \big(T(\Sigma_h)\big|_\Gamma\big)/T(\Gamma)$ appelée équation variationnelle.

Prenons $\Sigma = \mathbb{C}^4$, $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p = \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_2$ et $z(t) = \big(q(t), p(t)\big)$, une courbe intégrable complexe de X_H. L'équation variationnelle est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = J H_{zz}\big(z(t)\big)\zeta\,,$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

et

$$H_{zz} = \begin{pmatrix} H_{qq} & H_{qp} \\ H_{pq} & H_{pp} \end{pmatrix}$$

où

$$H_{qq} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial q_j}\right)_{i,j=1,2}, \quad H_{pp} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_j}\right)_{i,j=1,2}$$

$$H_{qp} = H_{pq} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial p_j}\right)_{i,j=1,2}.$$

Si la solution $z(t)$, vérifie $q_1(t) = p_1(t) = 0$, alors l'équation variationnelle se simplifie

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_1}{\mathrm{d}t^2} + H_{q_1q_1}\big(z(t)\big)\xi_1 = 0\,, \quad \eta_1 = \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_2}{\mathrm{d}t^2} + H_{q_2q_2}\big(z(t)\big)\xi_2 = 0\,, \quad \eta_2 = \frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3}$$

En remarquant que le 1-forme $\mathrm{d}H$ est un intégrale première de (3), on peut résoudre explicitement pour ξ_2. Ainsi l'équation variationnelle se réduit à (2). Il est alors essentiel d'étudier la monodromie de cette équation. Considérons une famille de solutions fondamentales $\{\phi(t), \psi(t)\}$. Soit $\{\widetilde{\phi}(t), \widetilde{\psi}(t)\}$ le prolongement analytique de ϕ et ψ le long d'un lacet $\gamma \subset \Gamma$ tel que $\gamma(0) = z_0$. Alors il existe une matrice constante $\rho(\gamma)$ tel que

$$\{\widetilde{\phi}(t), \widetilde{\psi}(t)\} = \{\phi(t), \psi(t)\}\, \rho(\gamma)\,.$$

En fait, $\rho(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma] \in \pi_1(\Gamma, z_0)$. Le groupe de monodromie de l'équation variationnelle est l'image M de la représentation $\rho : \pi_1(\Gamma, z_0) \longrightarrow \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ obtenue par prolongement d'un système fondamental de solutions Φ autour de lacets basés en $z_0 \in \Gamma$. Nous allons considérer ces deux propositions :

HYPOTHÈSE 1

Il existe une famille Γ_h (dépendant analytiquement de l'énergie h) de solutions non triviales du système hamiltonien s'exprimant par des fonctions elliptiques du temps complexe et se trouvant dans un plan invariant par le flot de l'hamiltonien H.

Soient $g_1(h)$ et $g_2(h)$ les matrices de monodromie relatives aux deux périodes de la famille de solutions Γ_h. Posons $g(h)$ le commutateur de $g_1(h)$ et $g_2(h)$,

$$g(h) = g_1(h)\, g_2(h)\, g_1^{-1}(h)\, g_2^{-1}(h)\,.$$

HYPOTHÈSE 2

Les valeurs propres de $g(h)$ sont indépendantes de h.

Maintenant nous pouvons énoncer le thérème de Ziglin.

THÉORÈME DE ZIGLIN

Soit H un hamiltonien défini par

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2}\,(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$$

où $V(x, y)$ est un polynôme en x et y. Si H vérifie les hypothèses 1 et 2 et si de plus H a une autre integrale première qui est analytique dans un voisinage de la famille Γ_h et fonctionnellement indépendante avec H, alors soit $g(h) = \mathrm{Id}$, soit $\mathrm{Tr}\, g_1$ et $\mathrm{Tr}\, g_2$ sont indépendantes de h.

3. Application du théorème de Ziglin

Nous allons appliquer le théorème de Ziglin au système hamiltonien H défini sur $(\mathbb{C}^4, \omega)$ où ω est la structure symplectique standard et

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + x^2y + \frac{dy^3}{3} + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}. \quad (4)$$

3.1 Calcul des plans invariants par le flot de H

Pour utiliser le théorème de Ziglin nous avons besoin de chercher un espace vectoriel invariant par le flot de H. D'abord rappelons comment on peut trouver une sous-variété invariante.

PROPOSITION 1.— *Soit X un champ de vecteurs polynomial sur $\mathbb{C}^n$, $F \in \mathbb{C}[x]$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Posons $F^0 = F$, $F^n = X(F^{n-1})$, $n > 0$, $I = \langle F^0, F^1, \ldots \rangle$ l'idéal engendré par F^n dans $\mathbb{C}[X]$ et $V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0 \; \forall\, f \in I\}$. Alors :*

1) il existe n_0 tel que $I = \langle F^0, F^1, \ldots, F^{n_0} \rangle$;

2) $V(I)$ est une variété invariante par le flot de X.

Démonstration.— 1) est une conséquence du théorème des zéros d'Hilbert et 2) est évident.

Posons $X = X_H$, où H est défini par (4), on a

$$F = x + \mu y\,, \quad F^1 = p_x + \mu p_y$$
$$F^2 = \alpha x^3 + \beta\mu x^2 y + \mu x^2 + \beta x y^2 + 2xy + ax + \gamma\mu y^3 + d\mu y^2 + \mu a y\,.$$

Soit $I = \langle F, F^1 \rangle$. L'idéal I est premier et donc $F^2 \in I$ si et seulement si $F^2|_{V(I)} = 0$, c'est-à-dire

$$\mu\big((\beta - \alpha)\mu^2 + \gamma - \beta\big)y^3 + \mu(d - 2 + \mu^2)y^2 + \mu(b - a)y = 0\,.$$

On est obligé de prendre soit $\mu = 0$, soit

$$\mu^2 = 2 - d = \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha} \quad \text{et} \quad a = b\,;$$

on aura donc au maximum deux plans invariants par le flot de H. Dans la suite, on considèrera trois hamiltoniens :

$$H_1 = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + x^2y + \frac{dy^3}{3} + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}$$

$$H_2 = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}(x^2+y^2) + x^2y + \frac{d}{3}y^3 + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}$$

$$H_3 = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}(x^2+y^2) + x^2y + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right)y^3 + + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}\,.$$

Le flot de H_1 et de H_2 possède un plan invariant et celui de H_3 possède deux plans invariants. Nous rechercherons dans le prochain paragraphe, pour H_1 et H_2, une famille de solutions périodiques notée Γ_h dans le plan $x = 0$; et, pour H_3, on recherchera une famille dans le plan $x = 0$, notée aussi Γ_h, et une autre notée Λ_h dans le plan $x + \mu y = 0$ où $\mu^2 = (\beta-\gamma)/(\beta-\alpha)$. Posons

$$x = \frac{q_1 - \mu q_2}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad y = \frac{\mu q_1 + q_2}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Pour H_1, le potentiel dans le plan $x = 0$ est

$$V(0,y) = \frac{\gamma}{4}y^4 + \frac{1}{3}dy^3 + \frac{b}{2}y^2, \quad V_{xx}(0,y) = \beta y^2 + 2y + a\,.$$

Pour H_2,

$$V(0,y) = \frac{\gamma}{4}y^4 + \frac{1}{3}dy^3 + \frac{a}{2}y^2, \quad V_{xx}(0,y) = \beta y^2 + 2y + a\,.$$

Et pour H_3

$$V(0,y) = \frac{\gamma}{4}y^4 + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\right)y^3 + \frac{a}{2}y^2, \quad V_{xx}(0,y) = \beta y^2 + 2y + a\,.$$

En coordonnées (q,p), on a

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p_x + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}p_y = \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_2\,.$$

Dans le plan donné par $q_1 = x + \mu y = 0$ où $\mu^2 = (\beta-\gamma)/(\beta-\alpha)$, le potentiel de H_3 est

$$V(0,q_2) = \frac{1}{4}\,\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{2\beta-\alpha-\gamma}\,q_2^4 + \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{2\beta-\alpha-\gamma}}\,q_2^3 + \frac{a}{2}\,q_2$$

$$V_{q_1q_1}(0,q_2) = \frac{-\beta^2 + 2(\alpha+\gamma)\beta - 3\alpha\gamma}{2\beta-\alpha-\gamma}\,q_2^2 + 2\frac{\gamma-\alpha}{\sqrt{(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha-\gamma)}}\,q_2 + a.$$

3.2 Existence de solutions périodiques

En utilisant le fait que les solutions sont dans une surface de niveau, nous voyons qu'elles vérifient : $(\mathrm{d}q_2/\mathrm{d}t)^2 = 2(h - V(0,q_2))$ avec $V(0,q_2)$ polynôme de degré 4 en q_2. Soit

$$\frac{\mathrm{d}q_2}{\sqrt{2(h - V(0,q_2))}} = \mathrm{d}t\,, \quad q_2 = q_2(t)\,.$$

Cela revient à résoudre le problème d'inversion de Jacobi. Comme la surface de Riemann de $\{z^2 = 2(h - V(0,q_2))\}$ est de genre 1, q_2 est une fonction elliptique de $t \in \mathbb{C}/\Lambda$ où Λ est le réseau période, de rang 2, de la fonction q_2. Comme les coefficients de $2(h - V(0,q_2))$ sont réels, il existe une période purement réelle et une purement imaginaire. On peut exprimer q_2 en fonction de t en utilisant des formules standard [Ba]. Pour cette raison, il faut mettre $\mathrm{d}q_2/\sqrt{2(h - V(0,q_2))}$ sous forme de Weierstrass ou sous forme de Jacobi. Ces transformations nécessitent de connaître les racines du polynôme $V(0,q_2) - h$, qui sont des fonctions algébriques des coefficients. Pour contourner cette difficulté, nous allons utiliser la méthode de Poincaré–Lindstëdt.

3.3 Calcul de $g(h)$

En prenant

$$q_2(t,h) = \frac{a_{-n}}{t^n} + \frac{a_{-n+1}}{t^{n-1}} + \cdots$$

et en l'injectant dans l'équation différentielle, on obtient $n = 1$ et a_{-1} vérifie

$$a_{-1}^2 = -2a_{-1}^4 \times \left(\text{coeff. de plus haut degré dans } V(0,q_2)\right).$$

Il y a donc deux valeurs possibles de a_{-1}, c'est-à-dire on a deux pôles d'ordre 1 dans le parallélogramme période de $q_2(t,h)$, et cela pour chaque famille de solutions. Calculons les valeurs propres de la matrice $g(h)$. Pour cela il est d'abord nécessaire de le faire autour de chaque pôle. Elle est du type

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi\zeta_1} & * \\ 0 & e^{2i\pi\zeta_2} \end{pmatrix},$$

où ζ_i sont les racines de l'équation indicielle :

$$\zeta(\zeta - 1) + q = 0\,,$$

et

$$q = a_{-1}^2 \times \left(\text{terme de plus haut degré dans } V_{q_1 q_1}(0, q_2)\right).$$

On a

$$\zeta_1 = \frac{1+\sqrt{1-4q}}{2} \quad \text{et} \quad \zeta_2 = \frac{1-\sqrt{1-4q}}{2}.$$

La matrice $g(h)$ correspond au produit des deux matrices autour de chacun des pôles. Comme les deux pôles ont des résidus opposés et dans l'équation indicielle il n'intervient que le carré du résidu du pôle considéré, ces deux matrices sont les mêmes. Soit

$$g(h) = \begin{pmatrix} e^{4i\pi\zeta_1} & * \\ 0 & e^{4i\pi\zeta_2} \end{pmatrix}.$$

On remarque que les valeurs propres de $g(h)$ sont indépendantes de h. Si on a $g(h) = \mathrm{Id}$, alors nous avons obligatoirement $\sqrt{1-4q} = k$, $k \in \mathbb{N}$, soit

$$q = \frac{1-k^2}{4}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La famille Γ_h de H_1, H_2 et H_3 donne $q = -2\beta/\gamma$ et donc

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{k^2-1}{8}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La famille Λ_h de H_3 donne

$$q = -2\frac{\beta^2 + 2(\alpha+\gamma)\beta - 3\alpha\gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma}$$

et donc

$$\frac{(\alpha+\gamma)\beta - \alpha\gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma} = \frac{k^2-9}{16}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.4 Calcul d'une solution périodique du système

Nous allons calculer une solution périodique de période réelle du système

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2(h - P_4(y))$$

où

$$P_4(y) = \frac{p_2}{2}\,y^2 + \frac{p_3}{3}\,y^3 + \frac{p_4}{4}\,y^4\,. \tag{5}$$

PROPOSITION 2.— *Si $p_2 > 0$, alors en prenant ε suffisamment petit, la solution du système ci-dessus de conditions initiales $y(0) = \varepsilon$ et $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t\,(0) = 0$ est périodique (de période $2\pi/\omega(\varepsilon)$) admet un développement par rapport à ε suivant :*

$$\begin{aligned} y(\tau,\varepsilon) = {} & \cos(\tau)\varepsilon + (\cos 2\tau + 2\cos\tau - 3)\frac{p_3}{6p_2}\,\varepsilon^2 + \\ & + \Big((9p_4p_2 + 6p_3^2)\cos 3\tau + 32\,p_3^2\cos 2\tau + \\ & \quad + (58\,p_3^2 - 9p_4p_2)\cos\tau - 96\,p_3^2\Big)\frac{1}{288\,p_2^2}\,\varepsilon^3 + \\ & + \Big((9p_4p_2 + 2p_3^2)\cos 4\tau + (27\,p_4p_2 + 18\,p_3^2)\cos 3\tau + \\ & \quad + (192\,p_3^2 - 288\,p_4p_2)\cos 2\tau + \\ & \quad + (238\,p_3^2 - 315\,p_4p_2)\cos\tau + 567\,p_4p_2) - 450\,p_3^2\Big)\frac{p_3}{864\,p_2^3}\,\varepsilon^4 + \cdots \end{aligned}$$

où $\tau = \omega(\varepsilon)t$ et $\omega(\varepsilon)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon) = \sqrt{p_2} + \frac{9p_4p_2 - 10\,p_3^2}{24\,p_2^{3/2}}\,\varepsilon^2 + \frac{p_3(9p_4p_2 - 10\,p_3^2)}{36\,p_2^{5/2}}\,\varepsilon^3 + \\ - \frac{380\,p_3^4 - 860\,p_4p_2p_3^2 + 63\,p_4^2p_2^2}{768\,p_2^{7/2}}\,\varepsilon^4 + \cdots \end{aligned}$$

Remarque.— Le développement de $y(\tau,\varepsilon)$ par rapport à ε sont les premiers termes d'une série de type

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} A_{i,k}\cos(it) + B_{i,k}\sin(it) + C_k\right)\varepsilon^k\,,$$

où $\tau = \omega(\varepsilon)t$ et $\omega(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\omega_k\varepsilon^k$, connue sous le nom de série de Poincaré–Lindstëdt. Bien que les séries de $y(\tau,\varepsilon)$ et de $\omega(\varepsilon)$ soient convergentes [P2], nous n'aurons besoin dans la suite que des premiers termes.

Démonstration.— Si le hessien de $H = p_y^2/2 + P_4(y)$ en 0 est défini positif, alors on a l'existence de la solution périodique de conditions initiales $p_y(0) = 0$ et $y(0) = \varepsilon$ pour ε suffisamment petit, c'est-à-dire si $p_2 > 0$. On a le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p_y \\ \dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = -(p_4 y^3 + p_3 y^2 + p_2 y) . \end{cases}$$

Cherchons, en utilisant la méthode de Poincaré– Lindstëdt [P2], une solution périodique. Forçons la période de y à être 2π, en posant $\tau = \omega(\varepsilon)t$ et en supposant que $y(\tau + 2\pi) = y(\tau)$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \omega(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = p_y \\ \omega(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}\tau} = -(p_4 y^3 + p_3 y^2 + p_2 y) , \end{cases}$$

de conditions initiales

$$\begin{cases} y(0,\varepsilon) = \varepsilon \\ p_y(0,\varepsilon) = 0 . \end{cases}$$

Soit

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \omega_3\varepsilon^3 + \omega_4\varepsilon^4 + \cdots$$

et

$$y(\tau,\varepsilon) = y_1(\tau)\,\varepsilon + y_2(\tau)\,\varepsilon^2 + y_3(\tau)\,\varepsilon^3 + y_4(\tau)\,\varepsilon^4 + \cdots$$

Nous recherchons la solution vérifiant $y(0) = \varepsilon$ et $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t(0) = 0$, nous imposerons pour cela que

$$y_1(0) = 1 , \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\tau}(0) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\tau}(0) = y_i(0) = 0 , \quad \forall\, i > 1 .$$

Le système à l'ordre 1 est

$$\begin{cases} \omega_0(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\tau} = p_{y_1} \\ \omega_0(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}p_{y_1}}{\mathrm{d}\tau} = -p_2 y_1 \end{cases}$$

de conditions initiales

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ p_{y_1}(0) = 0\,. \end{cases}$$

La solution est

$$y_1(\tau) = \cos\left(\tau\frac{\sqrt{p_2}}{\omega_0}\right)\,.$$

Si $p_2 > 0$ et $\omega_0 = \sqrt{p_2}$, on a une solution 2π-périodique

$$y_1(\tau) = \cos\tau\,.$$

On fait de même à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \omega_0(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\tau} + \omega_1(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\tau} = p_{y_2} \\ \omega_0(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}p_{y_2}}{\mathrm{d}\tau} + \omega_1(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}p_{y_1}}{\mathrm{d}\tau} = -p_3y_1^2 - p_2y_2 \end{cases}$$

de conditions initiales

$$\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ p_{y_2}(0) = 0\,. \end{cases}$$

La solution est

$$y_2(\tau) = \frac{p_3}{6p_2}(\cos 2\tau + 2\cos\tau - 3) + \omega_1\frac{\tau\sin(\tau)}{\sqrt{p_2}}\,.$$

Nous avons alors

$$\omega_1 = 0$$

et

$$y_2(\tau) = \frac{p_3}{6p_2}(\cos 2\tau + 2\cos\tau - 3)\,.$$

À l'ordre 3, nous avons

$$\begin{cases} \omega_0(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}\tau} + \omega_2(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\tau} = p_{y_3} \\ \omega_0(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}p_{y_3}}{\mathrm{d}\tau} + \omega_2(\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}p_{y_1}}{\mathrm{d}\tau} = -p_4y_1^3 - 2p_3y_1y_2 - p_2y_3 \end{cases}$$

de conditions initiales

$$\begin{cases} y_3(0) = 0 \\ p_{y_3}(0) = 0\,. \end{cases}$$

La solution est

$$y_3(\tau) = \left(\frac{5p_3^2}{12\,p_2^2} + \frac{\omega_2}{\sqrt{p_2}} - \frac{3p_4}{8\,p_2}\right)\tau\sin\tau + \Big((9p_4p_2 + 6p_3^2)\cos 3\tau +$$

$$+ 32\,p_3^2\cos 2\tau + (58\,p_3^2 - 9p_4p_2)\cos\tau - 96\,p_3^2\Big)\frac{1}{288\,p_2^2}\,.$$

Il faut prendre

$$\omega_2 = \frac{9p_4p_2 - 10\,p_3^2}{24\,p_2^{3/2}}\,,$$

et la solution est

$$y_3(\tau) = \Big((9p_4p_2 + 6p_3^2)\cos 3\tau + 32\,p_3^2\cos 2\tau +$$

$$+ (58\,p_3^2 - 9p_4p_2)\cos\tau - 96\,p_3^2\Big)\frac{1}{288\,p_2^2}\,.$$

On réitère le processus pour trouver l'expression de $y(\tau,\varepsilon)$ et de ω données dans la proposition 2.

Remarque.— Si $p_2 < 0$, nous pouvons aussi obtenir une solution périodique avec la méthode de Poincaré–Lindstëdt. Pour cela il faut faire le changement de variables

$$t = \sqrt{-1}\,\theta\,, \quad z = \sqrt{-1}\,p_y$$

et on obtient un système qui vérifie l'hypothèse de la proposition 2. Ce qui nous permet d'obtenir une solution périodique à période purement imaginaire et dont les premiers termes sont donnés par la formule de la proposition 2 (où $\tau = \omega(\varepsilon)\theta$) :

$$y(\tau,\varepsilon) = \cos(\tau)\varepsilon + (\cos 2\tau + 2\cos\tau - 3)\frac{p_3}{6p_2}\,\varepsilon^2 +$$

$$+ \Big((9p_4p_2 + 6p_3^2)\cos 3\tau + 32\,p_3^2\cos 2\tau +$$

$$+ (58\,p_3^2 - 9p_4p_2)\cos\tau - 96\,p_3^2\Big)\frac{1}{288\,p_2^2}\,\varepsilon^3 +$$

$$+ \Big((9p_4p_2 + 2p_3^2)\cos 4\tau + (27\,p_4p_2 + 18p_3^2)\cos 3\tau +$$

$$+ (192\,p_3^2 - 288\,p_4p_2)\cos 2\tau +$$

$$+ (238\,p_3^2 - 315\,p_4p_2)\cos\tau + 567\,p_4p_2 - 450\,p_3^2\Big)\frac{p_3}{864\,p_2^3}\,\varepsilon^4 + \cdots$$

et

$$\omega(\varepsilon) = \sqrt{-p_2} + \frac{9p_4p_2 - 10\,p_3^2}{24\,(-p_2)^{3/2}}\,\varepsilon^2 + \\ + \frac{p_3(9p_4p_2 - 10\,p_3^2)}{36\,(-p_2)^{5/2}}\,\varepsilon^3 - \frac{380\,p_3^4 - 840\,p_4p_2p_3^2 + 64\,p_4^2p_2^2}{768\,(-p_2)^{7/2}}\,\varepsilon^4 + \cdots$$

3.5 Calcul de la trace de la matrice de monodromie $g_1(h)$

D'après la discussion précédente, nous avons une solution périodique de période réelle si $p_2 > 0$ ou imaginaire si $p_2 < 0$; nous allons calculer la trace de la matrice de monodromie associée à cette solution. Pour cela nous allons introduire le développement par rapport à ε de $y(\tau, \varepsilon)$ et celui de $\omega(\varepsilon)$ dans l'équation variationnelle. On pose

$$V_{xx}(0, y) = v_0 + v_1 y + v_2 y^2 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Xi}{\mathrm{d}t^2} + V_{xx}\big(0\,,\, y(t, \varepsilon)\big)\,\Xi(t) = 0\,.$$

Soit

$$\frac{\mathrm{d}^2\Xi}{\mathrm{d}\tau^2} + V_{xx}\big(0\,,\, y(\tau, \varepsilon)\big)\,\omega^{-2}\Xi(\tau) = 0\,.$$

Posons

$$P(\tau, \varepsilon) = V_{xx}\big(0\,,\, y(\tau, \varepsilon)\big)\,\omega^{-2}\,.$$

Pour calculer la trace de la matrice de monodromie de l'équation variationnelle, on utilise le fait qu'il existe un système fondamental de solutions $\{\phi(\tau, \varepsilon), \psi(\tau, \varepsilon)\}$ tel que

$$\phi(0, \varepsilon) = 1\,, \quad \psi(0, \varepsilon) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}(0, \varepsilon) = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}(0, \varepsilon) = 1\,.$$

On a

$$g_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \phi(2\pi, \varepsilon) & \psi(2\pi, \varepsilon) \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}(2\pi, \varepsilon) & \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}(2\pi, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{Tr} g_1(\varepsilon) = \phi(2\pi, \varepsilon) + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}(2\pi, \varepsilon)\,.$$

Comme $P(\tau,\varepsilon)$ est analytique en ε, les solutions ϕ et ψ le sont également. Posons

$$\begin{aligned}
\phi(\tau,\varepsilon) &= \phi_0(\tau) + \phi_1(\tau)\,\varepsilon + \phi_2(\tau)\,\varepsilon^2 + \phi_3(\tau)\,\varepsilon^3 + \cdots\\
\psi(\tau,\varepsilon) &= \psi_0(\tau) + \psi_1(\tau)\,\varepsilon + \psi_2(\tau)\,\varepsilon^2 + \psi_3(\tau)\,\varepsilon^3 + \cdots\\
P(\tau,\varepsilon) &= P_0(\tau) + P_1(\tau)\,\varepsilon + P_2(\tau)\,\varepsilon^2 + P_3(\tau)\,\varepsilon^3 + \cdots
\end{aligned}$$

On obtient les systèmes

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2\phi_0}{\mathrm{d}\tau^2} + P_0(\tau)\,\phi_0 = 0\,, & \dfrac{\mathrm{d}^2\phi_n}{\mathrm{d}\tau^2} + P_0(\tau)\,\phi_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k(\tau)\,\phi_{n-k} = 0\,,\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}\tau^2} + P_0(\tau)\,\psi_0 = 0\,, & \dfrac{\mathrm{d}^2\psi_n}{\mathrm{d}\tau^2} + P_0(\tau)\,\psi_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k(\tau)\,\psi_{n-k} = 0
\end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases}
\phi_0(0) = 1\,, \quad \dfrac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\tau}(0) = 0\\[2ex]
\psi_0(0) = 0\,, \quad \dfrac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}\tau}(0) = 1\\[2ex]
\phi_n(0) = \dfrac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}\tau}(0) = \psi_n(0) = \dfrac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}\tau}(0) = 0\,.
\end{cases}$$

Les solutions sont

$$\begin{aligned}
\phi_n(\tau) &= \int_0^\tau \psi_0(v-\tau)\sum_{k=1}^{n} P_k(v)\phi_{n-k}(v)\,\mathrm{d}v\,,\\
\psi_n(\tau) &= \int_0^\tau \psi_0(v-\tau)\sum_{k=1}^{n} P_k(v)\psi_{n-k}(v)\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

et

$$\phi_n(\tau) + \frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \int_0^\tau \sum_{k=1}^{n} P_k(v) R_{n-k}(v,\tau)\,\mathrm{d}v\,,$$

$$\frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0} = \phi_n(2\pi) + \frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}\tau}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} P_k(v) R_{n-k}(v,2\pi)\,\mathrm{d}v$$

où

$$R_j(v,\tau) = \phi_j(v)\,\psi_0(v-\tau) - \psi_j(v)\,\phi_0(v-\tau)\,.$$

PROPOSITION 3.— *Si* $(p_2 - 4v_0)v_0p_2 \neq 0$, *alors la trace de la matrice de monodromie* $g_1(h)$ *est*

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} g_1 = {} & 2\cos\left(2\pi\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right) + \\ & + \Big(v_0p_2\big(9p_4(p_2-4v_0) - 2p_3(5p_3 + 12\,v_1) + 24v_2p_2\big) + \\ & - 6p_2^2\big(v_1(v_1-p_3) + v_2p_2\big) + 40\,v_0^2p_3^2\Big)\times \\ & \times\sin\left(2\pi\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right)\frac{\pi}{6p_2^2\sqrt{v_0p_2}\,(p_2-4v_0)}\,\varepsilon^2 + \cdots\end{aligned}$$

Démonstration.— Nous trouvons

$$\phi_0(\tau) = \cos\left(\tau\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right), \quad \psi_0(\tau) = \sqrt{\frac{p_2}{v_0}}\sin\left(\tau\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Tr} g_1(0) = 2\cos\left(2\pi\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right),$$

et

$$\begin{aligned}\phi_1(\tau) = {} & \frac{v_1}{\sqrt{p_2}\,(p_2-4v_0)}\left(2\sqrt{v_0}\sin\left(\tau\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right)\sin\tau + \right. \\ & \left. + \sqrt{p_2}\cos\left(\tau\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right)(\cos\tau - 1)\right) \\ \psi_1(\tau) = {} & \frac{v_1}{\sqrt{v_0}\,(p_2-4v_0)}\left(2\sqrt{v_0}\cos\left(\tau\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right)\sin\tau + \right. \\ & \left. - \sqrt{p_2}\sin\left(\tau\sqrt{\frac{v_0}{p_2}}\right)(\cos\tau + 1)\right)\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = 0\,.$$

C'est ainsi que l'on obtient le résultat de la proposition 3, par souci de concision nous ne donnerons pas l'expression de $\phi_2(\tau)$ et de $\psi_2(\tau)$. □

PROPOSITION 4.— *Si* $p_2 = 4v_0$, *alors la trace de la matrice de monodromie* $g_1(h)$ *est*

$$\operatorname{Tr} g_1 = -2 - \frac{v_1^2\pi^2}{16\,v_0^2}\,\varepsilon^2 + \cdots$$

Démonstration.— Pour la même raison que précédemment nous ne donnerons pas l'expression de $\phi_2(\tau)$ et de $\psi_2(\tau)$.

PROPOSITION 5.— *Si $v_0 = p_2$, alors la trace de la matrice de monodromie $g_1(h)$ est*

$$\operatorname{Tr} g_1 = 2 - \frac{\pi^2 O_1 O_2}{144\, v_0^4}\, \varepsilon^4 + \cdots$$

avec

$$O_1 = 10\, p_3^2 + 3v_0(v_2 - 3p_4) - 7v_1 p_3 + v_1^2$$
$$O_2 = 10\, p_3^2 + 9v_0(v_2 - p_4) - 5v_1(p_3 + v_1)$$

Démonstration.— On remarque d'après la proposition 3, que

$$\operatorname{Tr} g_1 = 2 + \cdots$$

Il nous faut calculer les prochains termes. On réitère le processus et nous trouvons que

$$\left.\frac{\mathrm{d}^3 \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^3}\right|_{\varepsilon=0} = 0\,.$$

De même, nous avons

$$\left.\frac{\mathrm{d}^4 \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^4}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\pi^2}{6v_0^4} \times O_1 O_2$$

avec

$$O_1 = 10\, p_3^2 + 3v_0(v_2 - 3p_4) - 7v_1 p_3 + v_1^2$$
$$O_2 = 10\, p_3^2 + 9v_0(v_2 - p_4) - 5v_1(p_3 + v_1)\,. \ \square$$

3.6 Application du théorème de Ziglin à H_1, H_2 et H_3

Nous allons remplacer les coefficients de (5) et (6) par ceux de H_1, H_2 et H_3. Pour H_1, on obtient :

- si $b \neq 4a$, alors on utilise la proposition 3

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\pi M}{3b^2\sqrt{ab}\,(b-4a)} \sin\left(2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

où

$$M = (b - 4a)(6b^2\beta - 9ab\gamma - 12\, bd + 10\, ad^2) + 24\, b^2\ ;$$

• si $b = 4a$, alors on utilise la proposition 4

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\pi^2}{2a^2}\,.$$

Pour H_2, on utilise la proposition 5

$$\left.\frac{\mathrm{d}^4 \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^4}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\pi^2 O_1 O_2}{6a^4}$$

où

$$O_1 = 9a(\beta - \gamma) + 10\,(d+1)(d-2)$$

$$O_2 = 3a(\beta - 3\gamma) + 10\,(d-1)\left(d - \frac{2}{5}\right)\,.$$

Pour H_3, on utilise la proposition 5 ; en considérant la famille Γ_h, on a

$$\left.\frac{\mathrm{d}^4 \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^4}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\pi^2 LN}{6a^4(\beta-\alpha)^4}\,;$$

et avec Λ_h, on a

$$\left.\frac{\mathrm{d}^4 \operatorname{Tr} g_1}{\mathrm{d}\varepsilon^4}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{2\pi^2 PN}{3a^4(\beta-\alpha)^2(2\beta-\alpha-\gamma)}$$

où

$$L = 3a(3\gamma - \beta)(\beta-\alpha)^2 + 6\beta(\alpha-\gamma) - \left(4\alpha - \frac{13}{4}\gamma\right)^2 + \frac{9}{16}\gamma^2$$

$$P = 3a\beta(\beta-\alpha) + 2(-5\beta + 4\alpha + \gamma)$$

$$N = (\gamma - \beta)\left(10\,(3\alpha - 2\beta - \gamma) + 9a(\alpha-\beta)^2\right)\,.$$

Considérons les cinq conditions :

(C1) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{k^2-1}{8}$ ou $M = 0$;

(C1′) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{k^2-1}{8}$;

(C2) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{k^2-1}{8}$ ou $O_1 O_2 = 0$;

(C3) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{k^2-1}{8}$ ou $LN = 0$;

(C4) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{(\alpha+\gamma)\beta - \alpha\gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma} = \dfrac{k^2-9}{16}$ ou $PN = 0$.

Le théorème de Ziglin nous donne enfin les résultats suivants.

THÉORÈME 1.— *Soient* $ab\gamma \neq 0$ *et* $a/b \neq n^2/4$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. *Si le système défini par l'hamiltonien*

$$H_1(p_x, p_y, x, y) = \\ = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + x^2y + \frac{dy^3}{3} + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}$$

est intégrable (c'est-à-dire s'il possède une autre intégrale première qui est analytique dans un voisinage de la famille Γ_h*), alors (C1) est vraie.*

THÉORÈME 2.— *Soit* $a\gamma \neq 0$. *Si le système défini par l'hamiltonien*

$$H_1(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + a\left(\frac{x^2}{2} + 2y^2\right) + x^2y + \frac{dy^3}{3} + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}$$

est intégrable (c'est-à-dire s'il possède une autre intégrale première qui est analytique dans un voisinage de la famille Γ_h*), alors (C1') est vraie.*

THÉORÈME 3.— *Soit* $a\gamma \neq 0$. *Si le système défini par l'hamiltonien*

$$H_2(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}(x^2+y^2) + x^2y + \frac{d}{3}y^3 + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}$$

est intégrable (c'est-à-dire s'il possède une autre intégrale première qui est analytique dans un voisinage de la famille Γ_h*), alors (C2) est vraie.*

THÉORÈME 4.— *Soit* $a(\alpha-\beta)(\beta^2-\alpha\gamma)(\alpha+\gamma-2\beta) \neq 0$. *Si le système défini par l'hamiltonien*

$$H_3(p_x, p_y, x, y) = \\ = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}(x^2+y^2) + x^2y + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right)y^3 + \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4}$$

est intégrable (c'est-à-dire s'il possède une autre intégrale première qui est analytique dans un voisinage de la famille Γ_h *et de* Λ_h*), alors (C3) et (C4) sont vraies.*

COROLLAIRE .— *Si un système hamiltonien de la forme (4) possède une autre intégrale première qui est analytique dans un voisinage de la famille* Γ_h, *alors ses coefficients sont dans un ensemble de codimension* 1 *dans l'espace de tous les paramètres.*

3.7 Recherche d'hamiltoniens intégrables

Nous allons rechercher des hamiltoniens intégrables grâce aux théorèmes précédents.

Exemple 1.— Considérons

$$H(p_x,p_y,x,y)=\frac{p_x^2}{2}+\frac{p_y^2}{2}+\frac{a}{2}(x^2+y^2)+x^2y+\frac{d}{3}y^3+\frac{\alpha x^4}{4}+\frac{\beta x^2y^2}{2}+\frac{\gamma y^4}{4}.$$

Nous allons supposer que $d=4$ et que l'on peut appliquer le théorème 4, c'est-à-dire le système défini par H est intégrable au sens du théorème 4, d s'écrit en fonction de α, β et γ. Cela nous donne la condition

$$\gamma=3\beta-2\alpha.$$

On supposera que (C3) est vérifiée grâce à

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{3}{8}.$$

On obtient ainsi

$$\beta=6\alpha,\quad \gamma=16\,\alpha.$$

Quant à (C4), supposons que $P=0$, on en déduit que $\alpha=2/9\,a$. Nous obtenons l'expression de H.

$$H=\frac{1}{2}p_x^2+\frac{1}{2}p_y^2+\frac{a}{2}(x^2+y^2)+x^2y+\frac{4}{3}y^3+\frac{2}{36\,a}(x^4+12\,x^2y^2+16\,y^4).$$

H est un bon candidat pour être intégrable. En fait, il appartient à une famille plus générale où $\mu=4/3$ et $a=b$ dans notre cas,

$$H'=\frac{1}{2}p_x^2+\frac{1}{2}p_y^2+\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}y^2+x^2y+\mu y^3+\frac{2-\mu}{4(4a-b)}(x^4+12\,x^2y^2+16\,y^4). \tag{7}$$

Ravoson [Ra] a démontré que (7) est intégrable au sens de Liouville, en utilisant une structure bi-hamiltonienne, il a calculé une fonction K en involution avec (7).

$$K = (4a - b - 4y)p_x^2 + 4xp_xp_y + 4x^2y^2 + 4ax^2y + a(4a-b)x^2 + \\ + \frac{4-\mu}{2}x^4 + 4\frac{2-\mu}{4a-b}(x^4y + 2x^2y^3)\,.$$

Exemple 2.— Considérons à nouveau

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}(x^2+y^2) + x^2y + \frac{d}{3}y^3 + \frac{\alpha}{4}(x^4+y^4) + \frac{\beta x^2y^2}{2}\,.$$

Nous allons supposer cette fois-ci que $d = 1$. De même, appliquons lui le théorème 3. Nous supposerons que $O_2 = 0$ (ainsi (C2) sera vérifiée). Si $O_2 = 0$, alors $\beta = 3\alpha$. On obtient H :

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{a}{2}(x^2+y^2) + x^2y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{x^4}{2} + 3x^2y^2 + \frac{y^4}{2}\right)\,. \tag{8}$$

Si on prend

$$K = p_xp_y + axy + xy^2 + \frac{1}{3}x^3 + \alpha(xy^3 + x^3y)\,,$$

elle est en involution et fonctionnellement indépendante avec H, le système hamiltonien est intégrable au sens de Liouville. Nous généralisons le système de Hénon–Heiles pour $a = b$ et $d = 1$, en un potentiel quartique (8). De plus, H se sépare dans les coordonnées cartésiennes

$$x = \lambda - \mu\,, \quad y = \lambda + \mu\,.$$

Exemple 3.— Nous considérons cette fois

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + a\left(\frac{x^2}{2} + 2y^2\right) + x^2y + 2y^3 + \frac{\alpha x^4}{2} + \frac{\beta x^2y^2}{2} + \frac{\gamma y^4}{4} \tag{9}$$

une généralisation de Hénon–Heiles au cas $d = 6$ et restreint à $b = 4a$. En appliquant le théorème 2, si (9) est intégrable alors (C1′) est vraie, pour cela nous supposerons que

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{3}{8}\,.$$

On voudrait savoir si cet hamiltonien (9) est bien intégrable. En fait si on suppose que

$$\gamma = 16\,\alpha\,,$$

alors (9) est séparable dans les coordonnées paraboliques

$$x^2 = -4uv\,, \quad y = u + v\,.$$

En résumé, l'hamiltonien

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + a\left(\frac{x^2}{2} + 2y^2\right) + x^2y + 2y^3 + \alpha\left(\frac{x^4}{2} + 3x^2y^2 + 4y^4\right)$$

est intégrable, il peut être trouvé aussi dans [Ra].

Remerciements

Je remercie L. Gravilov pour l'aide et l'intérêt qu'il a apportés à ce travail.

Références

[A] ARNOLD (V. I.) .— *Équations différentielles ordinaires*, Ed. Mir Moscou (1988).

[AS] AISAWA (Y.) et SAITÔ (N.) .— *On the stability of isolating integrals: I effect of the perturbation in the potential function*, J. Phys. Soc., Japon, **32** (1972), pp. 1636-1640.

[BSV] BOUNTIS (T.), SEGUR (H.) et VIVALDI (F.) .— *Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé Property*, J. Phys. Rev. **A25** (1982), pp. 1257-1264.

[Ba] BATEMAN (H.) et ERDELYI (A.) .— *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill New-York (1955).

[CTW] CHANG (Y. F.), TABOR (M.) et WEISS (J.) .— *Analytic structure of the Henon–Heiles Hamiltonian in integrable and nonintegrable regimes*, J. Math. Phys. **23** (1982), pp. 513-538.

[GDP] GRAMMATICOS (B.), DORIZZI (B.) et PADJEN (R.) .— *Painlevé property and integrals of motion for the Henon–Heiles system*, Phys. Lett. **A89** (1982), pp. 111-113.

[HH] HENON (M.) et HEILES (C.) .— *The Applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, Astrophys. **63** (1964), pp. 73-78.

[It] ITO (H.) .— *Non Integrablity of Hénon–Heiles System and a Theorem of Ziglin*, Kodai Math. **J8** (1985), pp. 120-138.

[Li] LINDSTËDT (A.) .— *Mémoire de l'Académie de Saint-Pétersbourg,* (1882).

[P1] POINCARÉ (H.) .— *Sur une méthode de M. Lindstëdt,* Bulletin Astronomique Tome III (1886), p. 57.

[P2] POINCARÉ (H.) .— *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* Tome II, Dover Publi. New-York, 1957 (chap. IX et XIII).

[Ra] RAVOSON (V.) .— *(r, s)-Structure bi-hamiltonienne, séparabilité, paires de Lax et intégrabilité,* Thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour (1992).

[Zi] ZIGLIN (S. L.) .— *Branching of Solutions and Non-existence of First Integrals in Hamiltonian Mechanics,* Funct. Anal. Appl. **16** (1983), pp. 181-169; Funct. Anal. Appl. **17** (1983), pp. 6-17.