

ABDELOUAHAB AROUCHE

Sur la complétion de la K -théorie équivariante

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 6, n° 3
(1997), p. 377-387

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_3_377_0

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la complétion de la K -théorie équivariante^(*)

ABDELOUAHAB AROUCHE⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Pour un foncteur M défini sur la catégorie des orbites d'un groupe de Lie compact Γ et une famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ , on calcule dans [J] la $I^M(\mathcal{F})$ -complétion de la K -théorie équivariante d'un Γ -espace X comme étant égale à $K_{\Gamma}^*(X \times E\mathcal{F})$ où $E\mathcal{F}$ est un objet final de la catégorie homotopique des Γ -espaces \mathcal{F} -énumérables. D'abord, on étudie la relation entre de telles complétions pour des foncteurs M différents. Ensuite, un exemple d'un tel foncteur est donné en se basant sur le travail de [B].

ABSTRACT. — It has been shown in [J], that for a functor M defined on the category of orbits of a Lie group Γ and a family \mathcal{F} of subgroups of Γ , the equivariant K -theory of a Γ -space X , completed with respect to the $I^M(\mathcal{F})$ -topology, is equal to $K_{\Gamma}^*(X \times E\mathcal{F})$ where $E\mathcal{F}$ is a terminal object in the category of \mathcal{F} -numerable Γ -spaces. First, we study the relation between such completions for different functors M . Then, we give an example of such a functor based on the work of [B].

1. Famille de sous-groupes et complétion

Soit Γ un groupe de Lie compact. Un ensemble \mathcal{F} de sous-groupes (fermés) est dit famille s'il est stable par sous-conjugaison.

Un Γ -espace est dit \mathcal{F} -énumérable s'il admet un Γ -recouvrement ouvert énumérable \mathcal{U} tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe une application équivariante $U \rightarrow \Gamma/\Lambda$, pour un $\Lambda \in \mathcal{F}$. La catégorie homotopique des Γ -espaces \mathcal{F} -énumérables admet un objet final noté $E\mathcal{F}$.

(*) Reçu le 5 mai 1995

(1) King Saud University, College of Sciences, Department of Mathematics, P. O. Box : 2455, Riyadh 11451 (Saudi Arabia)
e-mail : F40M014@KSU.EDU.SA

Étant donnée une théorie de cohomologie équivariante h_Γ , définie sur la catégorie des Γ -espaces compacts, on définit une théorie de procohomologie $h_\Gamma[\mathcal{F}]$ sur la même catégorie et ce, pour toute famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ :

$$h_\Gamma[\mathcal{F}](X) = \{h_\Gamma(X \times K) \mid K \subset E\mathcal{F}, K \text{ compact}\}.$$

Soit $M : \mathcal{O}_\Gamma \rightarrow \mathcal{A}^*$ un foncteur contravariant défini sur la catégorie des orbites de Γ et à valeurs dans la catégorie des anneaux gradués. On notera M_Λ sa valeur sur Γ/Λ . On définit l'idéal :

$$I_\Lambda^M = \ker\{M_\Gamma \rightarrow M_\Lambda\}.$$

Alors la \mathcal{F} -topologie sur tout M_Γ -module n'est autre que la topologie $I^M(\mathcal{F})$ -adique, où

$$I^M(\mathcal{F}) = \{I_\Lambda^M \mid \Lambda \in \mathcal{F}\}.$$

On montre (cf. [J, § 1.8]) que pour un Γ -espace compact quelconque, la projection $X \times E\mathcal{F} \rightarrow X$ définit un homomorphisme de pro-anneaux

$$p_X(\mathcal{F}) : h_\Gamma/I^M(\mathcal{F})(X) \longrightarrow h_\Gamma[\mathcal{F}](X).$$

Dans la suite, on prendra pour théorie de cohomologie la K -théorie équivariante K_Γ^* . Rappelons que pour tout Γ -espace (compact) X , $K_\Gamma^*(X) = K_\Gamma^0(X) \oplus K_\Gamma^1(X)$ où $K_\Gamma^0(X)$ est le groupe de Grothendieck des Γ -fibrés vectoriels complexes au-dessus de X et où $K_\Gamma^1(X)$ est défini à partir de Γ -fibrés au-dessus de la suspension de X . $K_\Gamma^*(X)$ est un anneau \mathbb{Z}_2 -gradué (cf. [S1]).

Soit Z un Γ -espace compact fixé et $\Lambda \subset \Gamma$ un sous-groupe. Considérons la catégorie \mathcal{C}_Z^Λ dont les objets sont Λ -espaces X munis d'une Λ -application $X \xrightarrow{\sigma} Z$. Un morphisme entre deux objets (X, σ) et (Y, τ) est une Λ -application $X \xrightarrow{f} Y$ telle que $\sigma = \tau \circ f$. Par exemple, si (X, σ) est un objet de \mathcal{C}_Z^Λ , alors pour tout Λ -espace Y , $(X \times Y, \sigma \circ \text{pr}_1)$ est aussi un objet de \mathcal{C}_Z^Λ et $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X$ est un morphisme dans \mathcal{C}_Z^Λ . Un objet de \mathcal{C}_Z^Γ peut être considéré comme objet de \mathcal{C}_Z^Λ pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$.

Si l'on pose

$$M_\Lambda = K_\Lambda^*(Z),$$

alors K_Γ^* est un module sur $M (= M(Z))$, c'est-à-dire pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$ et tout objet X de \mathcal{C}_Z^Λ , $K_\Lambda^*(X)$ est un M_Λ -module de telle sorte que la condition de compatibilité suivante soit vérifiée.

Pour tout objet X de \mathcal{C}_Z^Γ et tout sous-groupe Λ de Γ , le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_\Gamma \times K_\Gamma^*(X) & \longrightarrow & K_\Gamma^*(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\Lambda \times K_\Lambda^*(X) & \longrightarrow & K_\Lambda^*(X) \end{array}$$

Supposons Z tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées, pour toute famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ :

- (N) l'anneau M_Γ est noethérien et pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, l'homomorphisme $M_\Gamma \rightarrow M_\Lambda$ fait de M_Λ un M_Γ -module de type fini;
- ($\mathcal{R}_\mathcal{F}$) pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, la \mathcal{F} -topologie définie sur M_Λ par la restriction $M_\Gamma \rightarrow M_\Lambda$ coïncide avec la $\mathcal{F} \cap \Lambda$ -topologie sur M_Λ ; c'est-à-dire celle définie par les idéaux

$$\{\ker(M_\Lambda \rightarrow M_\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{F} \cap \Lambda\}.$$

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit X un objet de $\mathcal{C}_Z^\Gamma(X)$ tel que $K_\Lambda^*(X)$ soit un M_Λ -module de type fini, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$. Alors, pour toute famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ , l'application*

$$p_X(\mathcal{F}) : (K_\Gamma^*/I^M(\mathcal{F}))(X) \longrightarrow K_\Gamma^*[\mathcal{F}](X)$$

est un isomorphisme de pro-anneaux.

Preuve. — D'après [J, § 2.2], il suffit de montrer que, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, le morphisme $p_X(\mathcal{P}_\Lambda)$ est un isomorphisme, où \mathcal{P}_Λ est la famille des sous-groupes propres de Λ . À cette fin, pour un sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, considérons l'ensemble \mathcal{V} de toutes les représentations de Λ sans facteur trivial. Alors \mathcal{V} définit la famille de sous-groupes de Λ :

$$\mathcal{F}_\mathcal{V} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \{\Delta \leq \Lambda \mid V^\Delta \neq \{0\}\}.$$

La preuve du théorème 1.1 est contenue dans les paragraphes 1.2 à 1.5.

LEMME 1.2. — $\mathcal{P}_\Lambda = \mathcal{F}_\mathcal{V}$.

Preuve. — Soit $\Delta \in \mathcal{P}_\Lambda$. Il existe une représentation V de Λ et un point v de V tels que $\Delta = \Lambda_v$ (cf. [D, § I.5.5]). Ceci entraîne que $v \neq 0$, car $\Lambda_0 = \Lambda$ et Δ est propre. D'où, $V^\Delta \neq 0$. On peut supposer V sans facteur trivial, quitte à l'en débarrasser. D'où, $\Delta \in \mathcal{F}_\mathcal{V}$. Réciproquement, soit $\Delta \in \mathcal{F}_\mathcal{V}$. Il existe donc $V \in \mathcal{V}$ tel que $V^\Delta \neq 0$. Si $\Delta = \Lambda$, V aurait donc un facteur trivial, d'où la contradiction. Donc, $\Delta \in \mathcal{P}_\Lambda$. \square

PROPOSITION 1.3. — *La topologie définie par la famille d'idéaux principaux $\{e(V) \cdot K_\Lambda^*(Z) \mid V \in \mathcal{V}\}$ sur $K_\Lambda^*(Z)$, où $e(V)$ est la classe d'Euler de V , coïncide avec la $\mathcal{F}_\mathcal{V}$ -topologie.*

Preuve. — Voir [A] où l'on a une généralisation de [J, § 3.1].

LEMME 1.4. — *Si $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$, alors*

$$E(\mathcal{F}_\mathcal{V}) = \lim_n S\left(\overbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1} \oplus \cdots \oplus \overbrace{V_n \oplus \cdots \oplus V_n}\right).$$

Preuve. — Voir [J].

THÉORÈME 1.5. — *Dans les conditions du théorème 1.1,*

$$p_X(\mathcal{F}_\mathcal{V}) : (K_\Lambda^*/I^M(\mathcal{F}_\mathcal{V}))(X) \longrightarrow K_\Lambda^*[\mathcal{F}_\mathcal{V}](X)$$

est un isomorphisme de pro-anneaux.

Preuve. — (d'après [J]) D'après le lemme précédent,

$$K_\Lambda^*[\mathcal{F}_\mathcal{V}](X) = \{K_\Lambda^*(X \times SV^n) \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

où

$$V^n := \overbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1} \oplus \cdots \oplus \overbrace{V_n \oplus \cdots \oplus V_n}.$$

La suite exacte de Gysin,

$$\dots \xrightarrow{\delta} K_\Lambda^*(X) \xrightarrow{e(V^n)} K_\Lambda^*(X) \xrightarrow{\pi^*} K_\Lambda^*(SV^n \times X) \xrightarrow{\delta} \dots,$$

donne lieu à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow K/e(V^n) \cdot K \longrightarrow K_\Lambda^*(SV^n \times X) \longrightarrow {}_{e(V^n)}K \longrightarrow 0$$

où $K := K_\Lambda^*(X)$ et ${}_{e(V^n)}K := \{x \in K : e(V^n)x = 0\}$.

Pour prouver le théorème, on doit trouver, pour chaque n , un entier k et un morphisme $\beta_n : K_{\Lambda}^*(SV^{n+k} \times X) \rightarrow K/e(V^n) \cdot K$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 K/e(V^{n+k}) \cdot K & \longrightarrow & K_{\Lambda}^*(SV^{n+k} \times X) \\
 \downarrow & \swarrow \beta_n & \downarrow \\
 K/e(V^n) \cdot K & \longrightarrow & K_{\Lambda}^*(SV^n \times X)
 \end{array}$$

Or on a le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & K/e(V^{n+k}) \cdot K & \rightarrow & K_{\Lambda}^*(SV^{n+k} \times X) & \rightarrow & e(V^{n+k})K \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & & & \downarrow \times e(V^k) \\
 0 & \rightarrow & K/e(V^n) \cdot K & \rightarrow & K_{\Lambda}^*(SV^n \times X) & \rightarrow & e(V^n)K \rightarrow 0
 \end{array}$$

K étant de type fini sur $K_{\Lambda}^*(Z)$, on peut trouver un rang k tel que $e(V^k)K = e(V^{n+k})K$ pour tout n . Donc $e(V^k)$ annule $e(V^{n+k})K$, d'où l'existence de β_n . \square

COROLLAIRE 1.6. — *Si, en plus des conditions (N) et (R \mathcal{F}), Z est tel que M_{Λ} soit noethérien (comme anneau), pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, alors $p_Z(\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour toute famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ . C'est le cas, par exemple, si Z a un point fixe et vérifie : M_{Λ} est un $R(\Lambda)$ -module de type fini, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$.*

COROLLAIRE 1.7. — *Soit Z un Γ -espace compact tel que M vérifie les conditions (N) et (R \mathcal{F}). Supposons que Z admet un point fixe noté $+$. Alors $p_+(\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour toute famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ .*

Considérons le foncteur $L := M(\text{point})$. Dans [J], on montre que L vérifie les conditions (N) et (R \mathcal{F}) pour toute \mathcal{F} . On a alors (cf. [J]) le théorème 1.1 où l'on remplace M_{Λ} par $R(\Lambda)$, anneau des représentations complexes de Λ . D'où le résultat qui suit.

PROPOSITION 1.8. — Soit Z un Γ -espace compact tel que $M = M(Z)$ vérifie les conditions (N) et $(R_{\mathcal{F}})$ pour toute famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ . Si un objet X de $C_{\mathbb{Z}}^{\Gamma}$ est tel que $K_{\Lambda}^*(X)$ est de type fini à la fois sur M_{Λ} et L_{Λ} , pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, alors, pour toute famille \mathcal{F} , on a un isomorphisme de pro-systèmes :

$$(K_{\Gamma}^*/I^M(\mathcal{F}))(X) \cong (K_{\Gamma}^*/I^L(\mathcal{F}))(X).$$

Si Z est muni d'un point de base et si M_{Λ} est de type fini sur L_{Λ} , $\forall \Lambda \subset \Gamma$, il suffit alors que $K_{\Lambda}^*(X)$ soit de type fini sur L_{Λ} , $\forall \Lambda \subset \Gamma$. Dans ce dernier cas, on a, en particulier :

$$(K_{\Gamma}^*/I^M(\mathcal{F}))(Z) \cong (K_{\Gamma}^*/I^L(\mathcal{F}))(Z)$$

et

$$R(\Gamma)/I^M(\mathcal{F}) \cong R(\Gamma)/I^L(\mathcal{F}).$$

Remarque. — Examinons de près le dernier cas : si Z est muni d'un point de base, alors L_{Λ} est un sous-anneau de M_{Λ} , $\forall \Lambda \subset \Gamma$. On en déduit que

$$I_{\Lambda}^L \subset I_{\Lambda}^M, \quad \forall \Lambda \subset \Gamma.$$

En d'autres termes, la topologie $I^L(\mathcal{F})$ -adique sur tout M_{Γ} -module est plus fine que la $I^M(\mathcal{F})$ -adique. La proposition 1.8 affirme qu'elles sont en fait identiques, car les deux sont aussi définies par la famille d'idéaux (cf. [AS, § 2.3])

$$\{J_K = \ker(K_{\Gamma}^*(X) \longrightarrow K_{\Gamma}^*(X \times K))\}.$$

COROLLAIRE 1.9. — Soit Z un Γ -espace compact muni d'un point de base tel que $K_{\Lambda}^*(Z)$ soit un $R(\Lambda)$ -module de type fini pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$. Supposons que le foncteur $M = M(Z)$ vérifie la condition $(R_{\mathcal{F}})$, $\forall \mathcal{F}$. Alors, si X est un Γ -espace compact tel que $K_{\Lambda}^*(X)$ soit de type fini sur $R(\Lambda)$, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, on a un isomorphisme :

$$K_{\Gamma}^*(X)_{\hat{I}M(\mathcal{F})} \cong K_{\Gamma}^*(X)_{\hat{I}L(\mathcal{F})},$$

pour toute famille \mathcal{F} de sous-groupes de Γ . En particulier, on a les deux isomorphismes :

$$K_{\Gamma}^*(Z)_{\hat{I}M(\mathcal{F})} \cong K_{\Gamma}^*(Z)_{\hat{I}L(\mathcal{F})} \quad \text{et} \quad R(\Gamma)_{\hat{I}M(\mathcal{F})} \cong R(\Gamma)_{\hat{I}L(\mathcal{F})},$$

où $\hat{I}^M(\mathcal{F})$ (resp. $\hat{I}^L(\mathcal{F})$) désigne la complétion par rapport à la topologie $I^M(\mathcal{F})$ -adique (resp. $I^L(\mathcal{F})$ -adique).

Preuve. — La condition (N) est automatique (cf. [AM, § 7.2]), et un isomorphisme entre pro-systèmes entraîne un isomorphisme entre limites projectives.

2. Étude des conditions (N) et $(R_{\mathcal{F}})$

Soit Z un Γ espace compact muni d'un point de base.

La condition (N) est satisfaite si Z est une variété différentiable sur laquelle Γ agit différentiablement. Car alors, $K_{\Lambda}^*(Z)$ est de type fini sur le sous-anneau noethérien $R(\Lambda)$ pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$ [S1, § 5.4].

Un autre cas où la condition (N) est satisfaite est celui d'un espace compact Z sur lequel Γ opère trivialement et tel que $K^*(Z)$ soit noethérien. En effet, dans ce cas $K_{\Lambda}^*(Z) \cong K^*(Z) \otimes R(\Lambda)$ pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$ [S1, § 2.2]. Comme $R(\Gamma)$ est de type fini comme \mathbb{Z} -algèbre [S2, § 3.3], $K_{\Gamma}^*(Z)$ est de type fini comme $K^*(Z)$ -algèbre et est donc noethérien [AM, § 7.7]. De plus, $R(\Lambda)$ est un $R(\Gamma)$ -module de type fini pour tout $\Lambda \leq \Gamma$ [S2, § 3.2], donc la restriction $M_{\Gamma} \rightarrow M_{\Lambda}$ fait de ce dernier un M_{Γ} -module de type fini.

Hodgkin a construit dans [H] une suite spectrale

$$E_2^{**} = \text{Tor}_{R(\Gamma)}^{**}(K_{\Gamma}^*(X), K_{\Gamma}^*(Y)) \implies F_{\Gamma}^*(X, Y),$$

et a montré que dans certains cas, par exemple quand $\pi_1(\Gamma)$ est sans torsion et X ou Y est un Γ -espace libre, $F_{\Gamma}^*(X, Y) = F_{\Gamma}^*(X \times Y)$. Soit donc Γ un groupe de Lie compact tel que $\pi_1(\Gamma)$ soit sans torsion; si X est un Γ -espace libre, alors, pour tout sous-groupe $\Lambda \leq \Gamma$, il existe une suite spectrale :

$$E_2^{**} = \text{Tor}_{R(\Gamma)}^{**}(K_{\Gamma}^*(X), R(\Lambda)) \implies K_{\Lambda}^*(X).$$

Sur ce, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. — *Si $\pi_1(\Gamma)$ est sans torsion et si X est un Γ -espace libre tel que $K_{\Gamma}^*(X)$ soit de type fini sur $R(\Gamma)$, alors X vérifie la condition (N).*

Preuve. — Comme la suite spectrale

$$E_2^{**} = \text{Tor}_{R(\Gamma)}^{**}(K_{\Gamma}^*(X), R(\Lambda)) \implies K_{\Lambda}^*(X)$$

est convergente, il suffit de voir que $\text{Tor}_{R(\Gamma)}^{**}(K_{\Gamma}^*(X), R(\Lambda))$ est de type fini sur $R(\Gamma)$, car $R(\Gamma)$ est noethérien. Or $R(\Lambda)$ est de type fini sur $R(\Gamma)$ d'après [S2, § 3.2], et $K_{\Gamma}^*(X)$ l'est par hypothèse. On conclut grâce à [R, § 9.21]. \square

PROPOSITION 2.2. — *Soit Z un Γ -espace compact muni d'un point de base. Si,*

$$\forall \Lambda \leq \Gamma, \quad \ker(K_{\Lambda}^*(Z) \longrightarrow R(\Lambda))$$

est formé d'éléments nilpotents, alors $M = M(Z)$ vérifie la condition $(R_{\mathcal{F}})$.

Preuve. — D'après [G, sect. I, § 1.2.7], on a une bijection :

$$\text{Spec } M_{\Lambda} \longrightarrow \text{Spec } R(\Lambda), \quad \forall \Lambda \leq \Gamma.$$

On procède alors comme dans [J, § 4.3].

COROLLAIRE 2.3. — *Soit Z un Γ -espace trivial (compact) connexe. Alors $M = M(Z)$ vérifie la condition $(R_{\mathcal{F}})$.*

Preuve. — Il suffit de montrer que

$$\forall \Lambda \leq \Gamma, \quad \ker(K_{\Lambda}^*(Z) \longrightarrow R(\Lambda))$$

est formé d'éléments nilpotents. Soit donc $\zeta \in K_{\Lambda}^*(X)$ tel que $\zeta_+ = 0$. L'ensemble $\{z \in Z \mid \zeta_z = 0\}$ est à la fois ouvert et fermé, et est donc égal à Z . Finalement, $\zeta \in K_{\Lambda,1}^*(Z)$ dont les éléments sont nilpotents [S1, § 5.1].

De façon générale, pour qu'un Γ -espace Z tel que dans la proposition 2.1 vérifie :

$$\forall \Lambda \leq \Gamma, \quad \ker(K_{\Lambda}^*(Z) \longrightarrow R(\Lambda))$$

est formé d'éléments nilpotents (et est donc nilpotent car $K_{\Lambda}^*(Z)$ est devenu noethérien), il suffit d'avoir la condition géométrique : pour tout $\zeta \in K_{\Lambda}^*(Z)$ et pour tout $z \in Z$, il existe un ouvert U_z tel que pour tout $z' \in U_z$, $\zeta_{z'} = \zeta_z$; ce qui rend l'application $\zeta : Z \rightarrow \bigcup_{z \in Z} R(\Lambda_z)$ continue et localement constante. La connexité de Z achève alors la preuve. La condition géométrique est en particulier réalisée si Z est Γ -trivial, car alors $\Lambda_{z'} = \Lambda_z$ sur un U_z ; la proposition [S1, § 1.2] nous permet de conclure. \square

Dans son article [B], A. Bojanowska a généralisé aux anneaux de la K -théorie équivariante la notion de support d'un idéal premier de l'anneau de représentation, qui a été inaugurée par [S2].

DÉFINITION 2.4. — Soit C la famille des sous-groupes cycliques de Γ . Soit X un Γ -espace. On définit la catégorie $C(\Gamma, X)$ comme suit : les objets de $C(\Gamma, X)$ sont les paires (Σ, c) où $\Sigma \in C$ et $c \subset X^\Sigma \neq \emptyset$ est une composante connexe.

$$\text{Mor}((\Sigma, c), (\Sigma', c')) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\Sigma\gamma^{-1} \subset \Sigma', \gamma(c) \supset c'\} / \sim,$$

où $\gamma \sim \gamma'$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \gamma'\sigma\gamma'^{-1}$. On notera $[\gamma]$ le morphisme défini par γ .

DÉFINITION 2.5. — Soit X un Γ -espace, et soit (Σ, c) un objet de $C(\Gamma, X)$.

On note $i_{\Sigma, c} : \text{Spec } R(\Sigma) \rightarrow \text{Spec } K_\Gamma^*(X)$ l'application induite par l'inclusion de l'orbite Γ/Σ dans X . Soit $p \in \text{Spec } K_\Gamma^*(X)$. On dit que l'objet (Σ, c) de $C(\Gamma, X)$ est un support de l'idéal p si :

- (a) il existe un idéal $q \in \text{Spec } R(\Sigma)$ tel que $i_{\Sigma, c}(q) = p$;
- (b) il n'existe pas un sous-groupe propre $\Sigma_1 \subset \Sigma$ et un idéal $q_1 \in \text{Spec } R(\Sigma_1)$ tel que $i_{\Sigma_1, c_1}(q_1) = p$ et $c_1 = c$.

La condition (b) étant équivalente à la suivante [B, § 4.3] :

- (b') il n'existe pas de sous-groupe $\Sigma_1 \subset \Sigma$, ni un idéal $q_1 \in \text{Spec } R(\Sigma_1)$ tel que q soit l'image de q_1 par l'application sur les spectres induite par l'inclusion $\Sigma_1 \subset \Sigma$.

On a alors le théorème suivant (cf. [B, § 4.4]).

THÉORÈME 2.6. — Soit X un Γ -(ENR). Alors :

- (a) chaque idéal premier de $K_\Gamma^*(X)$ a son support déterminé à un isomorphisme près dans $C(\Gamma, X)$;
- (b) si (Σ, c) est un support de l'idéal $p \in \text{Spec } K_\Gamma^*(X)$ et $q, q' \in \text{Spec } R(\Sigma)$ sont tels que $i_{\Sigma, c}(q) = i_{\Sigma, c}(q') = p$, alors il existe un morphisme $[\gamma] : (\Sigma, c) \rightarrow (\Sigma, c)$ tel que $[\gamma]_*(q) = q'$.

Soit X un Γ -(ENR). Considérons, pour un sous-groupe Λ de Γ , le morphisme de restriction

$$K_{\Gamma}^*(X) \xrightarrow{r} K_{\Lambda}^*(X)$$

qui induit l'application

$$r^* : \text{Spec } K_{\Lambda}^*(X) \longrightarrow \text{Spec } K_{\Gamma}^*(X).$$

Alors on a la proposition suivante .

PROPOSITION 2.7

(a) Soit $(P, Q) \in \text{Spec } K_{\Lambda}^*(X) \times \text{Spec } K_{\Gamma}^*(X)$ tel que $Q = r^*(P)$; soient (Σ', c') et (Σ'', c'') leurs supports respectifs. Alors, $(\Sigma') = (\Sigma'')$, où (Σ') désigne la classe de conjugaison de Σ' .

(b) Sous la condition (N), si $Q \in \text{Spec } K_{\Gamma}^*(X)$ contient le noyau

$$I_{\Lambda}^{\Gamma} = \ker\{r : K_{\Gamma}^*(X) \rightarrow K_{\Lambda}^*(X)\},$$

alors il existe un idéal $P \in \text{Spec } K_{\Lambda}^*(X)$ tel que $Q = r^*(P)$.

Preuve

(a) Il existe $R' \in \text{Spec } R(\Sigma')$ tel que $P = i_{\Sigma', c'}^{\Lambda}(R')$ où $i_{\Sigma', c'}^{\Lambda} : \text{Spec } R(\Sigma') \rightarrow \text{Spec } K_{\Lambda}^*(X)$. D'où $i_{\Sigma', c'}^{\Gamma}(R') = r^*(P) = Q$. En outre, il existe $R'' \in \text{Spec } R(\Sigma'')$ tel que $i_{\Sigma'', c''}^{\Gamma}(R'') = Q$. D'après [B, § 4.2], il existe (Σ, c) , objet de $C(\Gamma, X)$, et $R \in \text{Spec } R(\Sigma)$ et aussi des morphismes

$$[\gamma'] : (\Sigma, c) \longrightarrow (\Sigma', c'), \quad [\gamma''] : (\Sigma, c) \longrightarrow (\Sigma'', c'')$$

tels que $[\gamma']_*(R) = R'$ et $[\gamma'']_*(R) = R''$. En particulier, on a

$$\gamma' \Sigma \gamma'^{-1} \leq \Sigma', \quad \gamma'' \Sigma \gamma''^{-1} \leq \Sigma''.$$

Notons $\Sigma'_1 = \gamma' \Sigma'^{-1} \leq \Sigma'$, alors il existe $R'_1 \in \text{Spec } R(\Sigma'_1)$ tel que R' soit l'image de R'_1 par l'application induite sur les spectres par l'inclusion $\Sigma'_1 \subset \Sigma'$. D'après la proposition 2.5 (b'), on conclut que $(\Sigma) = (\Sigma')$. De la même façon, on montre que $(\Sigma) = (\Sigma'')$.

(b) Comme Q contient I_{Λ}^{Γ} , il peut être identifié à un élément de $\text{Spec}(K_{\Gamma}^*(X)/I_{\Lambda}^{\Gamma})$. Or $\bar{r} : K_{\Gamma}^*(X)/I_{\Lambda}^{\Gamma} \rightarrow K_{\Lambda}^*(X)$ est un monomorphisme.

De plus, $K_{\Lambda}^*(X)$ est de type fini sur $K_{\Gamma}^*(X)/I_{\Lambda}^{\Gamma}$ d'après la condition (N). Le théorème de Cohen-Seidenberg [Bo, § 5.2.1.1] assure donc la surjectivité de l'application \bar{r}^* sur les spectres. \square

Suivant les méthodes de [J, § 4.3], on montre le théorème suivant dont la proposition 2.7 est un ingrédient important.

THÉORÈME 2.8. — *Soit X un Γ -(ENR). Si le foncteur $M_{\Lambda} := K_{\Lambda}^*(X)$ satisfait à la condition (N), alors il satisfait aussi à la condition $(R_{\mathcal{F}})$.*

Références

- [A] AROUCHE (A.) . — *K-théorie équivariante et théorie de complétion pour l'espace classifiant associé au lissage des actions continues d'un groupe de Lie compact*, Thèse, Université de Nantes (1994).
- [AM] ATIYAH (M. F.) et MACDONALD (I. G.) . — *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [AS] ATIYAH (M. F.) et SEGAL (G. B.) . — *Equivariant K-theory and completion*, J. Diff. Geom. **3** (1969), pp. 1-18.
- [B] BOJANOWSKA (A.) . — *The spectrum of equivariant K-theory*, Math. Zeitschrift **183** (1983), pp. 1-19.
- [Bo] BOURBAKI (N.) . — *Algèbre commutative*, Chap. 5-6, Paris, Hermann, 1964.
- [D] TOM DIECK (T.) . — *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin - New-York (1987).
- [G] GROTHENDIECK (A.) . — *Eléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. IHES **4** (1960).
- [H] HODGKIN (L.) . — *The equivariant Künneth theorem in K-theory*, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, **496** (1976), pp. 1-100.
- [J] JACKOWSKI (S.) . — *Families of subgroups and completion*, J. Pure Appl. Algebra **37** (1985), pp. 167-179.
- [R] ROTMAN (J. J.) . — *An introduction to homological algebra*, Academic Press, New-York, 1979.
- [S1] SEGAL (G. B.) . — *Equivariant K-theory*, Publ. Math. IHES **34** (1968).
- [S2] SEGAL (G. B.) . — *The representation ring for a compact Lie group*, Publ. Math. IHES **34** (1968).