

JEAN-MICHEL CORON

**Stabilisation des systèmes contrôlables et observables**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 4, n<sup>o</sup> 1  
(1995), p. 31-59

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1995\\_6\\_4\\_1\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_1_31_0)

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Stabilisation des systèmes contrôlables et observables<sup>(\*)</sup>

JEAN-MICHEL CORON<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Le texte ci-dessous est celui d'un exposé fait en octobre 93 à l'Université Paul-Sabatier (Toulouse) à l'occasion de la remise du *Prix Fermat* de recherches organisé par l'Université Paul-Sabatier et financé par la société Matra Marconi Space. Il présente quelques résultats récents sur le problème de la stabilisation par retour d'état (resp. de sortie) des systèmes contrôlables (resp. et observables).

**ABSTRACT.** — This text is the written version of a lecture given in october 93 at the University Paul Sabatier (Toulouse) in connection with the *Prix Fermat* organized by Paul Sabatier University and sponsored by Matra Marconi Space. Recent results on stabilization by means of state (resp. output) feedback law of controllable (resp. and observable) systems are presented.

---

### 1. Introduction

Considérons, pour commencer, un système (de contrôle) linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

où l'état du système est  $x \in \mathbb{R}^n$ , le contrôle  $u \in \mathbb{R}^m$  et où  $A$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons la notion classique de contrôlabilité qui a été introduite par Kalman en 1960.

---

<sup>(\*)</sup> Recu le 12 janvier 1994

<sup>(1)</sup> École Normale Supérieure de Cachan, C.N.R.S. URA 1611, Centre de Mathématiques et de leurs applications, 61 avenue du Président-Wilson, F-94235 Cachan Cedex (France)

**DÉFINITION 1.1.** — On dit que le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  est contrôlable si, étant donné deux états du système, c'est-à-dire deux points  $x_0$  et  $x_1$  de  $\mathbb{R}^n$ , et étant donné un temps  $T > 0$  il existe une application mesurable bornée  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui permet de passer de  $x_0$  à  $x_1$  au bout du temps  $T$ , ce qui signifie que la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

vérifie

$$x(T) = x_1. \quad (1.3)$$

Pour vérifier si un système linéaire est contrôlable on dispose du critère de Kalman; voir par exemple [35, Theorem 3].

**THÉORÈME 1.2.** — Le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  est contrôlable si et seulement si

$$\text{ev}\{A^i Bu \mid u \in \mathbb{R}^m, i \in [0, n-1]\} = \mathbb{R}^n$$

où  $\text{ev}\mathcal{F}$  désigne l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ .

La notion de contrôlabilité, qui est fondamentale en théorie du contrôle, est parfois insuffisante dans la pratique : on désire en plus souvent une certaine robustesse. On peut le comprendre facilement avec l'expérience du pendule inversé ou plus prosaïquement du balai qu'on essaie de faire tenir en équilibre sur un doigt. On se convainc facilement que, partant d'une position du balai arbitraire, on peut amener le balai à la verticale avec une vitesse nulle; il suffit ensuite de ne pas bouger le doigt et le problème est résolu. Malheureusement c'est impossible à réaliser dans la pratique : le balai ne sera pas exactement à la verticale et la vitesse ne sera pas exactement nulle et donc, si on arrête de bouger le doigt, le balai va tomber. En fait pour éviter que le balai ne tombe, on bouge le doigt en fonction de la position du balai et de sa vitesse : on applique au système une commande  $u(x)$  qui dépend de l'état  $x$  du système. On est donc conduit à chercher une application, appelée retour d'état,  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  s'annulant en 0 (position d'équilibre) tel que le système bouclé, c'est-à-dire  $\dot{x} = Ax + Bu(x)$ , admette l'origine comme point localement asymptotiquement stable, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \text{ tel que} \quad ((\dot{x} = Ax + Bu(x), |x(0)| < \eta) \implies (|x(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0)), \quad (1.4)$$

$\exists \delta > 0$  tel que

$$\left( (\dot{x} = Ax + Bu(x), |x(0)| < \delta) \implies \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \right) \right). \quad (1.5)$$

Pour le balai, on peut montrer qu'un tel retour d'état existe bien — voir d'ailleurs l'expérience du pendule inversé réalisée, au musée de la Villette, par le Centre d'Automatique et Systèmes de l'École des Mines. Il en est de même pour tous les systèmes linéaires contrôlables. Plus précisément, on a le résultat qui a été dégagé dans les années 60 et 70 [35, Theorem 7].

**THÉORÈME 1.3.** — *Si le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  est commandable, il existe une application linéaire  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que la système bouclé  $\dot{x} = Ax + Bu(x)$  admette l'origine comme point localement asymptotiquement stable.*

Un des buts de cet exposé est de regarder dans quelle mesure ce résultat subsiste pour les systèmes non linéaires. Dans la section 2 de cet article, on rappellera des conditions nécessaires ou suffisantes pour la contrôlabilité (locale) des systèmes non linéaires. Dans la section 3, on donnera des conditions nécessaires de stabilisabilité asymptotique des systèmes non linéaires par retour d'état qui montreront que, généralement, les systèmes non linéaires même contrôlables ne sont pas localement asymptotiquement stabilisables par retour d'état. Par contre, on verra dans la section 4 que beaucoup de conditions suffisantes de contrôlabilité locale impliquent la stabilisabilité asymptotique locale par retour d'état *instationnaire périodique en temps* : on cherche maintenant à stabiliser non pas avec un “ $u(x)$ ” mais avec un “ $u(x, t)$ ”.

Souvent dans la pratique on ne mesure pas tout l'état  $x$  du système mais seulement une partie  $y = h(x)$  de l'état du système, appelée observation ou sortie. Les retours d'état ne sont alors plus admissibles ; seuls sont autorisés les retours de sortie, c'est-à-dire les contrôles qui dépendent de  $y$  seulement. Il est alors naturel de se demander si on peut stabiliser asymptotiquement le système à l'aide d'un retour de sortie au lieu d'un retour d'état. Pour cela il est clairement intéressant que l'observation soit assez “riche”. Pour préciser le mot riche, on introduit, dans le cas linéaire, la notion d'observabilité, duale de la contrôlabilité et aussi dégagée par Kalman.

DÉFINITION 1.4. — Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Hx \quad (1.6)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  le contrôle,  $y \in \mathbb{R}^p$  la sortie et où  $A$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $H$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ . On dit que ce système est observable si, pour tout  $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  avec  $a_0 \neq a_1$  et pour tout temps  $T > 0$ , il existe une application mesurable bornée  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

$$\{t \in [0, T] \mid h(x_0(t)) = h(x_1(t))\} \neq [0, T]$$

où  $(x_i; i \in \{0, 1\})$  sont solutions des problèmes de Cauchy

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu(t), \quad x_i(0) = a_i. \quad (1.7)$$

Comme pour la contrôlabilité on dispose d'un critère de Kalman pour l'observabilité [35, Theorem 17].

THÉORÈME 1.5. — Le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Hx$  est observable si et seulement si

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid CA^i x = 0, \forall i \in [0, n-1]\} = \{0\}. \quad (1.8)$$

Une question naturelle est alors : supposons que le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Hx$  est à la fois contrôlable et observable peut-on le stabiliser asymptotiquement à l'aide d'un retour de sortie c'est-à-dire, existe-il une application  $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  (régulière) telle que le système bouclé  $\dot{x} = Ax + Bu(Hx)$  admette l'origine comme point localement asymptotiquement stable? Il n'en est rien comme le montre l'exemple simple suivant.

EXEMPLE 1.6 [35, Exemple 6.2.1]. — Prenons  $n = 2, m = p = 1$  considérons le système

$$\dot{x} = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1. \quad (1.9)$$

Alors ce système est contrôlable et observable mais, il n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour de sortie.

Pour remédier à ce fait, on introduit la notion de stabilisation asymptotique par retour de sortie *dynamique* : on autorise la commande  $u$  à dépendre non seulement de  $y$  mais d'une variable  $z$ , dont la dynamique est régie par une équation différentielle que l'on choisit. Plus précisément, on introduit la définition suivante.

**DÉFINITION 1.7.** — *Le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Hx$  est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique si, pour un entier  $k$  au moins, le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{z} = v, \quad \tilde{y} = (Hx, z) \quad (1.10)$$

*où l'état du système est  $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , le contrôle  $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  et la sortie  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$  est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour de sortie.*

On a alors le théorème suivant [35, Theorem 25].

**THÉORÈME 1.8.** — *Si le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Hx$  est contrôlable et observable, il est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour de sortie dynamique.*

L'objectif de la section 5 est de donner un théorème analogue pour les systèmes non linéaires. De nouveau, il sera important d'autoriser une dépendance par rapport au temps des retours de sortie.

## 2. Rappels sur la contrôlabilité locale

Soit un système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le contrôle et où  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  satisfait

$$f(0, 0) = 0. \quad (2.2)$$

Plusieurs définitions de contrôlabilité locale sont possibles. Dans cet article on utilise la définition suivante, où le mot local porte à la fois sur le temps, l'état et le contrôle.

**DÉFINITION 2.1.** — *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement contrôlable si pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un réel  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $x_0 \in B_\eta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \eta\}$  et pour tout  $x_1 \in B_\eta$ , il existe une application mesurable  $u : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que*

$$|u(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.3)$$

$$(\dot{x} = f(x, u(t)), x(0) = x_0) \implies (x(\varepsilon) = x_1). \quad (2.4)$$

On ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité locale, mais on connaît des conditions nécessaires et des conditions suffisantes puissantes de contrôlabilité locale. On va se limiter à rappeler une condition nécessaire et une condition suffisante en renvoyant pour une étude plus complète aux articles de Kawski [25], Bianchini-Stefani [3] et Agrachev-Gamkrelidze [1]. Pour la condition nécessaire, on introduit la définition suivante.

**DÉFINITION 2.2.** — Soit, pour  $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $a(x_0, u_0)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par

$$\left\{ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial u^\alpha}(x_0, u_0) \mid \alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \geq 1 \right\} \cup \mathbf{Br}_2 \left\{ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial u^\alpha}(\cdot, u_0) \mid \alpha \in \mathbb{N}^m \right\}(x_0),$$

où  $\mathbf{Br}_2 \mathcal{F}$  désigne l'ensemble des crochets de Lie itérés de longueur au moins deux des champs de vecteur de  $\mathcal{F}$  et où

$$\mathbf{Br}_2 \mathcal{F}(x_0) = \{g(x_0) \mid g \in \mathbf{Br}_2 \mathcal{F}\}.$$

On dit que le système  $\dot{x} = f(x, u)$  satisfait la condition de rang d'accessibilité forte en  $(x_0, u_0)$  si

$$a(x_0, u_0) = \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Rappelons que la longueur d'un crochet de Lie itéré est le nombre de champs de vecteurs, comptés avec leur multiplicité, qui apparaissent dans ce crochet. Par exemple, la longueur de

$$g = \left[ \frac{\partial f}{\partial u^i}(\cdot, u_0), \left[ \frac{\partial f}{\partial u^i}(\cdot, u_0), \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(\cdot, u_0) \right] \right]$$

est 3, et  $g(x_0)$  appartient à  $a(x_0, u_0)$ . Remarquons que cette définition diffère légèrement de celle utilisée d'habitude — qui, avec par exemple les notations de [34, p. 549], s'écrit  $\dim \mathcal{L}_0(x) = n$  —. Toutefois cette définition, qui coïncide d'ailleurs avec la définition habituelle si  $f$  est analytique ou polynomiale par rapport à  $u$ , est mieux adaptée au problème de stabilisation. On a le théorème suivant qui est dû à Sussmann et Jurdjevic [42].

**THÉORÈME 2.3.** — Si la fonction  $f$  est analytique et si le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement contrôlable alors, la condition de rang d'accessibilité forte en  $(0, 0)$  est satisfaite.

Remarquons que cette condition nécessaire de contrôlabilité locale est en fait suffisante dans plusieurs cas importants :

- i) les systèmes linéaires  $\dot{x} = Ax + Bu$  (théorème 1.2) où plus généralement les systèmes tels que  $f(x, -u) = -f(-x, u)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall u \in \mathbb{R}^m$  — théorème dû à Brunovsky [5] —;
- ii) les systèmes affines sans dérivées, c'est-à-dire les systèmes tels que pour certaines fonctions  $(f_1, \dots, f_m)$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

— théorème dû à Chow [6] —.

Malheureusement cette condition nécessaire n'est généralement pas suffisante comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.4. — Prenons  $n = m = 1$  et  $f(x, u) = u^2$ . Alors la condition d'accessibilité forte en  $(0, 0)$  est satisfaite ( $\partial^2 f / \partial u^2(0, 0) \neq 0$ ) et pourtant  $\dot{x} = u^2$  n'est pas localement contrôlable car  $\dot{x} = u^2$  implique  $x(\varepsilon) \geq x(0)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

Donnons maintenant une condition suffisante de contrôlabilité locale. Pour simplifier son énoncé limitons-nous au cas où  $f$  est affine, c'est-à-dire

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^m \quad (2.6)$$

(pour le cas général voir [9, sect. 5]). Soit  $\text{Br}(f)$  l'ensemble des crochets de Lie itérés de champs de vecteurs dans  $\{f_0, \dots, f_m\}$ . Pour  $g$  dans  $\text{Br}(f)$  soit  $\delta_i(g)$  le nombre de fois où  $f_i$  apparaît dans  $g$ . Par exemple, si  $m = 3$  et

$$g = [[[f_1, f_2], [f_0, f_1]], f_2] \quad (2.7)$$

alors  $\delta_0(g) = 1, \delta_1(g) = 2, \delta_2(g) = 2, \delta_3(g) = 0$ . On a alors le théorème suivant dû à Sussmann (cas particulier de [40, Theorem 7.3]).

THÉORÈME 2.5. — Si le système  $\dot{x} = f(x, u)$  satisfait la condition de rang d'accessibilité forte en  $(0, 0)$  et, si pour un  $\theta$  dans  $[0, 1]$  on a, pour tout  $g$  dans  $\text{Br}(f)$ ,

$$g(0) \in \text{ev} \left\{ \bar{g}(0) \mid \bar{g} \in \text{Br}(f), \theta \delta_0(\bar{g}) + \sum_{i=1}^m \delta_i(\bar{g}) < \theta \delta_0(g) + \sum_{i=1}^m \delta_i(g) \right\}, \quad (2.8)$$

alors le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement contrôlable.



Notons que cette condition a été améliorée par Bianchini et Stefani dans [2], [3]. Le cas particulier  $\theta = 0$  est la condition de Hermes [22], [40]; ce cas particulier permet de retrouver les cas i) et ii) mentionnés ci-dessus.

### 3. Conditions nécessaires de stabilisation par retour d'état

Notons d'abord que par exemple le système avec  $n = m = 1$ ,  $\dot{x} = x - u^3$  est localement commandable mais qu'il n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état de classe  $C^1$ , pourtant si  $u(x) = (2x)^{1/3}$  le système bouclé  $\dot{x} = x - (2x)^{3/3} = -x$  admet l'origine comme point asymptotiquement stable. On voit donc que l'on est naturellement conduit à considérer des retours d'état seulement continus. Il est alors important de préciser ce que l'on entend par 0 est asymptotiquement stable pour un champ de vecteur juste continu; on adopte la définition suivante.

**DÉFINITION 3.1.** — Soit  $X \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  avec  $X(0) = 0$ . On dit que 0 est localement asymptotiquement stable pour  $\dot{x} = X(x)$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que} \quad ((\dot{x} = X(x), |x(0)| < \delta) \implies (|x(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0)), \quad (3.1)$$

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que} \quad \left( (\dot{x} = X(x), |x(0)| < \eta) \implies \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \right) \right). \quad (3.2)$$

Si de plus dans (3.2) on peut prendre  $\eta = +\infty$ , on dit que 0 est globalement asymptotiquement stable pour  $\dot{x} = X(x)$ .

Dans (3.1) comme (3.2) par  $\dot{x} = X(x)$ , nous désignons toute solution maximale de cette équation; nous utiliserons cette convention tout au long de cet article, y compris quand  $X$  dépend de  $t$ . On sait, résultat dû à Kurzweil [26], que même avec  $X$  seulement continu le fait que 0 soit localement asymptotiquement stable entraîne l'existence d'une fonction de Lyapunov de classe  $C^\infty$ .

Rerarquons que l'on pourrait considérer des retours d'état discontinus; dans cette direction voir le travail pionnier de Sussmann [39], celui de Rosier [32], ainsi que [17]. Nous nous limiterons ici à des retours d'état continus et adoptons donc les définitions suivantes.

**DÉFINITION 3.2.** — *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement (resp. globalement) asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état statique stationnaire continu s'il existe une application continue  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  s'annulant en 0 tel que le système bouclé  $\dot{x} = f(x, u(x))$  admette 0 comme point localement (resp. globalement) asymptotiquement stable.*

**DÉFINITION 3.3.** — *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement (resp. globalement) asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu s'il existe un entier  $k$  tel que le système*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{z} = v, \quad (3.3)$$

où l'état est  $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  et le contrôle  $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ , soit localement (resp. globalement) asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état statique stationnaire continu. Par convention si  $k = 0$ , le système (3.3) est  $\dot{x} = f(x, u)$ .

Il résulte de ces définitions qu'un système localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état statique stationnaire continu est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu. Si la réciproque est vraie pour les systèmes linéaires, elle est fautive pour les systèmes non linéaires [16, Prop. 1].

On a vu dans la section 1 qu'un système linéaire localement contrôlable est localement (et en fait globalement) asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état statique stationnaire. On peut montrer qu'il en est de même pour les systèmes localement contrôlables analytiques quand  $n = 1$  [12, Theorem 2.2], et M. Kawski a montré dans [24] que c'est aussi vrai pour les systèmes analytiques affines contrôlables avec  $n = 2, m = 1$ . Malheureusement le théorème suivant, dû à Brockett [4], montre qu'il y a beaucoup de systèmes localement contrôlables qui ne sont pas localement asymptotiquement stabilisables à l'aide d'un retour d'état statique, ou même dynamique, stationnaire.

**THÉORÈME 3.4.** — *Si le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu alors l'image par  $f$  de tout voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  est un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ .*

Comme Brockett dans [4], on prend par exemple  $n = 3, m = 2$  et

$$f(x, u) = (u_1, u_2, x_1 u_2 - x_2 u_1). \quad (3.4)$$

Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est affine sans dérive. Il vérifie la condition de rang d'accessibilité forte en  $(0, 0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  — et même en tout  $(x, u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  —. Donc, d'après le théorème de Chow, voir section 2, il est localement contrôlable. Mais  $f$  défini par (3.4) a son image incluse dans  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3) \setminus \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \neq 0\}$  et donc d'après le théorème 3.4, le système  $\dot{x} = f(x, u)$  n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu.

Il est naturel de se demander si  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement contrôlable, analytique — pour un contre-exemple avec  $C^\infty$  au lieu d'analytique voir [12, sect. 2] — et si  $f$  image tout voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  en un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  entraînent que  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu. Il n'en est malheureusement rien. On a la condition suivante qui est un peu plus forte que celle donnée par le théorème 3.4.

**PROPOSITION 3.5** [7]. — *Si le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu alors, pour tout réel positif  $\varepsilon$ ,*

$$f_* \left( \sigma_{n-1} \left( \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid |x| + |u| < \varepsilon, f(x, u) \neq 0\} \right) \right) = \sigma_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad (3.5)$$

où  $\sigma_{n-1}(A)$  désigne le groupe d'homotopie stable d'ordre  $n - 1$  de  $A$ .

Pour une définition des groupes d'homotopie stable voir par exemple [46]. Rappelons juste que

$$\sigma_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Considérons alors le système, avec  $n = 2, m = 1$ ,

$$\dot{x} = f(x, u) = (x_2^3 - 3(x_1 - u)^2 x_2, (x_2 - u)^3 - 3(x_1 - u)x_2^2). \quad (3.7)$$

On voit facilement que ce système vérifie la condition de rang d'accessibilité forte en  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ . Comme de plus on a  $f(x, -u) = -f(-x, u)$ , le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement contrôlable. Mais on a, pour tout réel positif  $\varepsilon$ ,

$$f_* \left( \sigma_1 \left( \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \mid |x| + |u| < \varepsilon, f(x, u) \neq 0\} \right) \right) = 3\sigma_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}). \quad (3.8)$$

Donc d'après la proposition 3.5 et (3.6), le système  $\dot{x} = f(x, u)$  n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu. On ne connaît pas de système analytique localement contrôlable, satisfaisant (3.5), qui ne soit pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état dynamique stationnaire continu. Un candidat possible est, avec  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,

$$\dot{x}_1 = u^2(x_1 - x_2), \quad \dot{x}_2 = u^2(x_2 - u). \quad (3.9)$$

#### 4. Stabilisation par retour d'état stationnaire

L'objet de cette section est de montrer que dans de nombreux cas où le système est contrôlable l'utilisation de retour d'état *instationnaire*, c'est-à-dire dépendant du temps, permet par contre de stabiliser asymptotiquement le système. L'intérêt du retour d'état instationnaire comparé à des retours d'état stationnaires pour le problème de la stabilisation a été remarqué d'abord par Sontag et Sussmann dans [37] pour  $n = 1$ , par Wang dans [44] pour des systèmes linéaires décentralisés et par Samson pour le système (3.4); voir aussi le travail de Kapitsa en 1951 décrit dans [27, chap. 2, § 30].

Introduisons d'abord quelques définitions.

DÉFINITION 4.1. — Soit  $T > 0$ , soit  $X \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  avec

$$X(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

$$X(x, t + T) = X(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

On dit que 0 est localement asymptotiquement stable pour  $\dot{x} = X(x, t)$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que, } \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

$$\left( (\dot{x} = X(x, t), |x(\tau)| < \delta) \implies (|x(t)| < \varepsilon, \forall t \geq \tau) \right),$$

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que, } \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

$$\left( (\dot{x} = X(x, t), |x(\tau)| < \eta) \implies \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \right) \right).$$

Si de plus dans (4.4) on peut prendre  $\eta = +\infty$ , on dit que 0 est globalement asymptotiquement stable pour  $\dot{x} = X(x, t)$ .

**DÉFINITION 4.2.** — Soit  $T > 0$ . On dit que  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement (resp. globalement) asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état statique instationnaire  $T$ -périodique par rapport au temps de classe  $C^r$  s'il existe une application  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^r$  telle que

$$u(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

et, pour  $\dot{x} = f(x, u(x, t))$ ,

$$0 \text{ est localement (resp. globalement) asymptotiquement stable.} \quad (4.7)$$

Notre premier résultat sur la stabilisation des systèmes à l'aide de retours d'état instationnaires concerne les systèmes sans dérive.

**THÉORÈME 4.3** [8]. — Soit  $T > 0$  et soit  $\dot{x} = f(x, u) = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$  un système affine sans dérive. Supposons que pour tout  $(x_0, u_0) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m)$  alors,  $\dot{x} = f(x, u)$  satisfait la condition de rang d'accessibilité forte en  $(x_0, u_0)$ . Alors pour tout temps  $T > 0$ , le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est globalement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état statique instationnaire  $T$ -périodique par rapport au temps de classe  $C^\infty$ .

Donnons rapidement une esquisse de la démonstration. L'idée principale est de fabriquer un premier retour  $\bar{u}$  statique instationnaire  $T$ -périodique par rapport au temps de classe  $C^\infty$  vérifiant

$$\bar{u}(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}(x, t)) \Rightarrow x(0) = x(T), \quad (4.9)$$

et, pour tout  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , le système linéarisé autour de la trajectoire  $x(x_0, t)$  définie par

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, \bar{u}(x, t)), \quad x(x_0, 0) = x_0 \quad (4.10)$$

est contrôlable sur  $[0, T]$ . Rappelons que le système linéarisé autour de  $x(x_0, t)$  est le système linéarisé instationnaire

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v, \quad (4.11)$$

où l'état du système est  $y \in \mathbb{R}^n$ , le contrôle  $v \in \mathbb{R}^m$ , et où

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(x_0, t), u(x(x_0, t), t)), \quad (4.12)$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(x_0, t), u(x(x_0, t), t)). \quad (4.13)$$

Si un tel  $\bar{u}$  existe, il est intuitivement clair, et en fait facile de démontrer, qu'en perturbant un peu  $\bar{u}$  de façon convenable, on obtient un  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$  satisfaisant (4.5), (4.6) et

$$(\dot{x} = f(x, u(x, t)), x(0) \neq 0) \implies (|x(T)| < |x(0)|). \quad (4.14)$$

Ce qui implique que 0 est globalement asymptotiquement stable pour  $\dot{x} = f(x, u(x, t))$ . Mentionnons d'ailleurs que Pomet dans [31] a donné une méthode élégante et explicite pour construire un tel  $u$  à partir de  $\bar{u}$  (voir aussi [15]). Notons aussi que, si on se donne  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , il résulte de nos hypothèses et de [34] qu'il existe  $u_{x_0} \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$  telle que, si  $\dot{x} = f(x, u_{x_0}(t))$ ,  $x(0) = x_0$ , alors  $x(T) = x_0$  et le système linéarisé autour de  $x(\cdot)$  est contrôlable sur  $[0, T]$ . Toutefois, la méthode proposée dans [34] ne permet pas de montrer l'existence de  $\bar{u}$ .

Pour assurer (4.9), on remarque qu'il suffit d'imposer

$$u(x, T - t) = -u(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

En effet, (4.15) implique que  $x(x_0, T - t) = x(x_0, t)$  pour tout  $t$  dans  $[0, T]$  et donc (4.9) en prenant  $t = 0$ . Pour assurer la commandabilité du linéarisé autour de  $x(x_0, t)$ , on peut utiliser un théorème qui nous dit, grossièrement, que pour des retours d'état génériques instationnaires les algèbres d'accessibilité des linéarisés sont les mêmes que les algèbres d'accessibilité du système non linéaire. Pour énoncer ce théorème introduisons quelques notations. Soit  $\Omega$  un ouvert  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  non vide. On munit  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  de la topologie suivante, qui est une modification de la topologie usuelle de Whitney : soit  $(K_i; i \in \mathbb{N})$  une suite croissante de compacts de  $\Omega$  dont la réunion vaut  $\Omega$  et qui vérifie

$$K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad (4.16)$$

alors  $V \subset C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  est un voisinage de  $u_0 \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  s'il existe une suite  $(k_i; i \in \mathbb{N})$  d'entiers et une suite  $(\varepsilon_i; i \in \mathbb{N})$  de réels strictement positifs telles que  $u \in V$  si, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$|\partial^\alpha(u - u_0)|(x) < \varepsilon_i, \quad \forall x \in K_i, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ avec } |\alpha| \leq k_i. \quad (4.17)$$

Notons que  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  muni de cette topologie est un espace de Baire. Soit maintenant  $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et soit  $(x_0, t_0) \in \Omega$ . On définit

$$a_\ell((x_0, t_0); u) := \text{ev} \left\{ \left( \frac{d}{dt} - A(t) \right)^i B(t) \Big|_{t=t_0} v \mid v \in \mathbb{R}^m, i \geq 0 \right\} \quad (4.18)$$

où  $A$  et  $B$  sont toujours définis par (4.12) et (4.13) mais avec  $x(x_0, t)$  définie maintenant par

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, u(x, t)), \quad x(x_0, t_0) = x_0. \quad (4.19)$$

Grosso modo,  $a_\ell((x_0, t_0); u)$  est l'algèbre d'accessibilité calculée en  $(x_0, t_0)$  du système linéaire  $\dot{y} = A(t)y + B(t)v$ . On vérifie facilement que, pour tout  $u$  dans  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ,

$$a_\ell((x_0, t_0); u) \subset a(x_0, u(x_0, t_0)), \quad \forall (x_0, t_0) \in \Omega. \quad (4.20)$$

On dira que  $u$  sature  $f$  sur  $\Omega$  si les inclusions de (4.20) sont toutes des inégalités. On a alors le théorème suivant montré dans [10].

**THÉORÈME 4.4.** — *L'ensemble des applications  $u$  dans  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  qui saturent  $f$  est résiduel dans  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ .*

Rappelons qu'un ensemble résiduel de  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  est intersection dénombrable d'ouverts denses et donc, comme  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  est un espace de Baire, un tel ensemble est en particulier dense dans  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ .

On applique le théorème 4.4 en procédant de façon suivante. Soit  $\varepsilon \in C^0(\mathbb{R}^n; (0, +\infty))$  une fonction telle que pour tout  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T/2]; \mathbb{R}^m)$  vérifiant  $|u(x, t)| < \varepsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T/2]$  alors, pour tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}^n$  la solution — maximale — de  $\dot{x} = f(x, u(x, t)), x(0) = x_0$  a un domaine de définition contenant  $[0, T/2]$ . Soit  $\Omega = (\mathbb{R}^n / \{0\}) \times (0, T/2)$  et soit  $U$  l'ensemble des applications  $u$  de  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  telles que

$$|u(x, t)| < \varepsilon(x), \quad \forall (x, t) \in \Omega, \quad (4.21)$$

et, pour tout  $((x, t), \alpha) \in \Omega \times \mathbb{N}^{n+1}$  tel que  $|\alpha| |x| t ((T/2) - t) \leq 1$ ,

$$|\partial^\alpha u(x, t)| < |x| t \left( \frac{T}{2} - t \right). \quad (4.22)$$

Alors  $U$  est un ouvert non vide de  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . D'après le théorème 4.4, il existe un  $\bar{u}$  dans  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$  qui sature  $f$  sur  $\Omega$ . On prolonge  $\bar{u}$  à  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  en imposant

$$\bar{u}(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.23)$$

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}\left(x, \frac{T}{2}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.24)$$

$$\bar{u}(x, T - t) = -\bar{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad (4.25)$$

$$\bar{u}(x, t + T) = \bar{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

Alors,  $\bar{u}$  possède bien toutes les propriétés demandées. En particulier, le fait que, pour tout  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , le linéarisé autour de la trajectoire  $x(x_0, t)$  définie par (4.10) soit contrôlable sur  $[0, T]$  vient de ce que  $\bar{u}$  sature  $f$  sur  $\Omega$ , que  $\dot{x} = f(x, u)$  satisfait la condition de rang d'accessibilité forte en tout point de  $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m$  et du critère de type Kalman de contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires : pour que le système linéaire instationnaire  $\dot{y} = A(t)y + B(t)v$  soit contrôlable sur  $[0, T]$  il suffit [35, Corollary 3.5.17] qu'il existe  $\bar{t} \in [0, T]$  tel que

$$\text{ev} \left\{ \left( \frac{d}{dt} - A(t) \right)^i B(t) \Big|_{t=\bar{t}} v \mid i \geq 0, v \in \mathbb{R}^m \right\} = \mathbb{R}^n. \quad (4.27)$$

Dans notre cas, cette condition sera satisfaite pour tout  $\bar{t}$  dans  $(0, T) \setminus \{T/2\}$ .

#### Remarques 4.5

i) Il a été remarqué par Sontag dans [36] que l'existence de  $\bar{u}$  peut aussi être déduite, si  $f$  est analytique, d'un résultat de Sussmann sur l'observabilité [38].

ii) La méthode précédente peut aussi être utilisée pour démontrer la contrôlabilité locale de certains systèmes. La stratégie est la suivante : essayer de trouver des trajectoires permettant, en partant de 0, de revenir en 0 et telles que le linéarisé autour de ces trajectoires soit contrôlable. On trouvera dans [13] une application de cette méthode — appelée méthode du retour — à la contrôlabilité de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 2.

Regardons maintenant le cas des systèmes avec dérive. En regardant de nouveau le cas du système  $n = m = 1$ ,  $\dot{x} = x - u^3$ , on voit que, même si



on considère des retours d'état *instationnaires*, on ne peut pas se limiter à des retours d'état instationnaires de classe  $C^\infty$  ou même de classe  $C^1$ . De nouveau, on va considérer des retours d'état (instationnaires) continus. Dans ce cas, on peut espérer une stabilisation en temps fini, et même petit, au lieu d'asymptotique. On introduit donc la définition suivante.

**DÉFINITION 4.6.** — *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours d'état instationnaires continus si pour tout temps  $T > 0$ , il existe  $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$  et  $\varepsilon$  dans  $]0, +\infty[$  tels que*

$$u(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.28)$$

$$u(x, t + T) = x(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall s \in \mathbb{R}, \quad (4.29)$$

$$((\dot{x} = f(x, u(x, t)), |x(s)| < \varepsilon) \implies (x(s + T) = 0)), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (4.30)$$

$$(\dot{x} = f(x, u(x, t)), x(\tau) = 0) \implies (x(t) = 0, \forall t \geq \tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (4.31)$$

Il résulte facilement de (4.28) à (4.31) que 0 est localement asymptotiquement stable pour  $\dot{x} = f(x, u(x, t))$  [11, Lemma 2.15] et donc, si  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours d'état instationnaires continus, il est, pour tout temps  $T > 0$ , localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état statique instationnaire  $T$ -périodique par rapport au temps et continu.

Pour énoncer notre prochain théorème nous avons besoin d'une dernière définition.

**DÉFINITION 4.7.** — *Pour le système  $\dot{x} = f(x, u)$ , 0 est localement continûment atteignable en temps petit si pour tout temps  $\tau > 0$  il existe  $u$  appartenant à  $C^0(\mathbb{R}^n; L^1(]0, \tau[; \mathbb{R}^m))$  et un réel  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$\sup \left\{ |u(a)(t)| \mid t \in ]0, \tau[ \right\} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } a \rightarrow 0, \quad (4.32)$$

$$(\dot{x} = f(x, u(x(0), t)), |x(0)| < \varepsilon) \implies x(\tau) = 0. \quad (4.33)$$

Remarquons qu'en utilisant une méthode due à Kawski [25] — voir aussi [22] — on a montré dans [9, Lemma 3.1 et sect. 5], que de “nombreuses” conditions suffisantes de contrôlabilité locale impliquent que 0 est localement continûment atteignable en temps petit. C'est en particulier, le cas pour la

condition de Sussmann (théorème 2.5) et aussi pour son amélioration par Bianchini et Stefani [2, corollaire p. 970]. On sait [14, 2. Step 3] que, si  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours d'état statiques instationnaires continus, alors 0 est localement continûment atteignable en temps petit. Le théorème suivant, montré dans [11], présente des cas où la réciproque est vraie.

THÉORÈME 4.8. — *Supposons que*

$$0 \text{ est localement continûment atteignable en temps petit,} \quad (4.34)$$

$$n \geq 4, \quad (4.35)$$

$$\dot{x} = f(x, u) \text{ satisfait la condition de rang d'accessibilité forte en } (0, 0). \quad (4.36)$$

Alors  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours d'état statiques instationnaires continus.

Remarquons que, d'après [42], (4.34) implique (4.36) si  $f$  est analytique. On ne sait pas si l'hypothèse  $n \geq 4$  peut être supprimée. On a toutefois la proposition suivante.

PROPOSITION 4.9. — *Si  $n = 1$ ,  $f$  est analytique et si 0 est localement continûment atteignable en temps petit, alors  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours d'état stationnaires continus.*

Démonstration de la proposition 4.9. — Soit

$$A = \{(x, u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid x > 0, s > 0, sf(x, u) < -x\}. \quad (4.37)$$

Comme 0 est localement continûment atteignable en temps petit, on voit facilement — raisonner par l'absurde — que

$$(0, 0, 0) \in \bar{A}. \quad (4.38)$$

Comme  $f$  est analytique,  $A$  est semi-analytique. Il résulte alors du lemme de sélection des courbes [47] qu'il existe une application analytique  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ ,  $\tau \rightarrow \gamma(\tau) = (\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau), \bar{s}(\tau))$  telle que

$$\gamma(0) = (0, 0, 0), \quad (4.39)$$

$$\gamma(\tau) \in A, \quad \forall \tau \in [-1, 1] \setminus \{0\}. \quad (4.40)$$

Utilisant l'analyticité de  $\gamma$ , (4.37), (4.39) et (4.40), on obtient l'existence d'un réel  $\varepsilon > 0$ , d'une application continue  $\varphi : [0, \varepsilon] \rightarrow [-1, 1]$  telle que

$$\varphi(0) = 0, \quad \bar{x}(\varphi(x)) = x, \quad \forall x \in [0, \varepsilon]. \quad (4.41)$$

Utilisant de nouveau l'analyticité de  $\gamma$ , (4.37), (4.39) et (4.40), on obtient l'existence de  $\eta_+$  dans  $]0, 1[$  tel que, pour  $\tau > 0$  assez petit,

$$\bar{s}(\tau) \geq x(\tau)^{\eta_+}. \quad (4.42)$$

Soit alors  $u_+ \in C^0([0, +\infty); \mathbb{R}^m)$  une application continue telle que pour  $x > 0$  assez petit

$$u_+(x) = \bar{u}(\varphi(x)). \quad (4.43)$$

Il résulte de (4.37), de (4.39), (4.40), (4.41), (4.42) et (4.43) que, pour  $x > 0$  assez petit,

$$f(x, u_+(x)) < -x^{1-\eta_+}. \quad (4.44)$$

Notons que de (4.39), (4.41) et (4.43), il vient

$$u_+(0) = 0. \quad (4.45)$$

Procédant de la même façon pour les " $x \leq 0$ ", on obtient l'existence d'une application continue  $u_- : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$  et d'un réel  $\eta_-$  dans  $]0, 1[$  tels que

$$u_-(0) = 0$$

et, pour  $x < 0$  avec  $|x|$  assez petit,

$$f(x, u_-(x)) > |x|^{1-\eta_-}. \quad (4.46)$$

Il suffit finalement de définir  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  par

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x) & \text{si } x \geq 0, \\ u_-(x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Alors  $u$  est continue, s'annule en 0 et vérifie, grâce à (4.44) et (4.46),

$$(\dot{x} = f(x, u(x)), x(0) = 0) \implies (x(t) = 0, \forall t \geq 0) \quad (4.47)$$

et, pour tout  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que} \\ &(\dot{x} = f(x, u(x)), |x(0)| < \varepsilon) \implies (x(t) = 0, \forall t \geq T), \end{aligned} \quad (4.48)$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 4.9.

Notons que cette proposition est fautive si on remplace  $f$  analytique par  $f$  de classe  $C^\infty$  (voir [12]); toutefois dans ce cas on a toujours (4.38), ce qui implique — voir [37] — que le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un retour d'état instationnaire continu périodique en temps.

Donnons maintenant les idées principales de la démonstration du théorème 4.8. On procède en quatre étapes.

*Première étape.* — Soit  $T > 0$ . Utilisant (4.34), (4.36) et une version "boucle ouverte" du théorème 4.4, on montre qu'il existe  $u_1 \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$  et  $\varepsilon_1 > 0$  tels que

$$u_1 \in C^\infty((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0, T]; \mathbb{R}^m), \quad (4.49)$$

$$u_1 = 0 \text{ sur } (\mathbb{R}^n \times \{T\}) \cup (\{0\} \times [0, T]), \quad (4.50)$$

$$x^1(a, T) = 0, \quad \forall a \in B_{\varepsilon_1} := \{a \in \mathbb{R}^n \mid |a| < \varepsilon_1\}, \quad (4.51)$$

$$\forall a \in B_{\varepsilon_1} \setminus \{0\} \text{ le linéarisé autour de } x^1(a, \cdot) \text{ est contrôlable} \\ \text{par le contrôle impulsion en tout temps } \bar{t} \in [0, T], \quad (4.52)$$

où  $x^1(a, \cdot)$  est la solution du problème de Cauchy

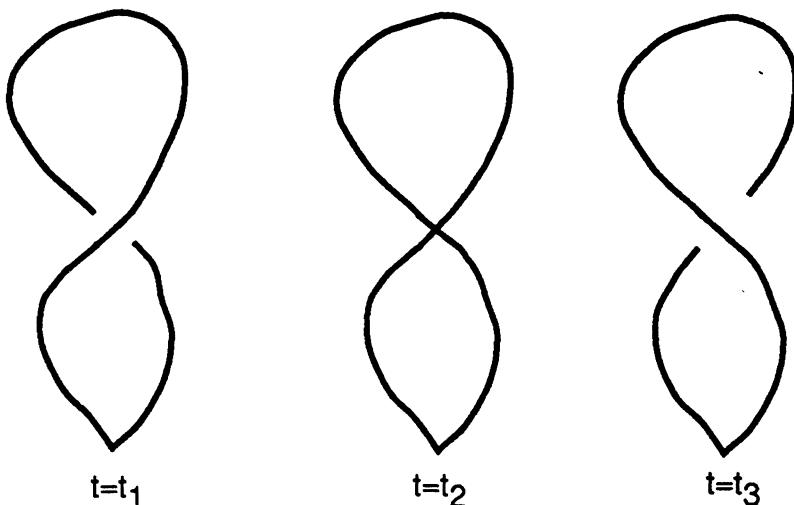
$$\frac{\partial x^1}{\partial t} = f(x^1, u_1(a, t)), \quad x^1(a, 0) = a. \quad (4.53)$$

La contrôlabilité par contrôle impulsion signifie que (4.27) est satisfait. Cette contrôlabilité par contrôle impulsion donne de la "souplesse" aux trajectoires. Cette souplesse sera importante pour les deux prochaines étapes.

*Deuxième étape.* — Soit  $\gamma$  une sous-variété fermée de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  de dimension 1 telle que  $\gamma \subset B_{\varepsilon_1}$ . Modifiant légèrement  $u_1$  d'une façon convenable, on obtient une fonction  $u_2$  dans  $C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$  satisfaisant toutes les conditions demandées à  $u_1$  et vérifiant aussi, pour tout temps  $t \in [0, T]$ ,

$$a \in \gamma \rightarrow x^2(a, t) \text{ est un plongement de } \gamma \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (4.54)$$

où  $x^2(a, \cdot)$  est maintenant la solution du problème de Cauchy (4.53) avec  $u_2$  à la place de  $u_1$ . Ici on se sert de  $n \geq 4$ . Si  $n = 3$  (ou  $n \leq 3$ ), cela n'est plus vrai comme le montre le dessin suivant qui représente  $x^1(\cdot, t)$  à trois temps  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < T$



Si on ne modifie que légèrement  $u_1$  le croisement, qui se produit au temps  $t = t_2$ , continuera à se produire si  $n = 3$  en un temps  $t'_2 \in ]t_1, t_3[$  et donc (4.54) ne sera pas satisfait. Par contre dès la dimension 4, il y a suffisamment de "place" pour faire disparaître le croisement. La démonstration de cette étape est directement inspirée de la preuve classique du théorème de plongement de Whitney.

*Troisième étape.* — On déduit de l'étape précédente l'existence de  $u_3^*$  dans  $C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$  satisfaisant (4.49), (4.50) et d'un voisinage  $V$  de  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tels que

$$a \in V \implies x^3(a, T) = 0 \quad (4.55)$$

et, pour tout temps  $t$  dans  $[0, T[$ ,

$$a \in V \longrightarrow x^3(a, t) \text{ est un prolongement de } V \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (4.56)$$

Maintenant  $x^3(a, \cdot)$  est la solution du problème de Cauchy (4.53) avec  $u_3^*$  à la place de  $u_1$ . La propriété de plongement (4.55) permet de transformer la commande en boucle ouverte (c'est-à-dire qui dépend de la condition initiale  $a$ )  $u_3^*$  en une commande en boucle fermée (c'est-à-dire indépendante de la condition initiale) : il existe  $u_3 \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$  s'annulant sur  $\{0\} \times [0, T]$  tel que

$$(\dot{x} = f(x, u_3(x, t)), x(0) \in V) \implies (x(T) = 0). \quad (4.57)$$

On peut aussi s'arranger pour que, pour tout  $\tau$  dans  $[0, T]$ ,

$$(\dot{x} = f(x, u_3(x, t)), x(\tau) = 0) \implies (x(t) = 0, \forall t \in [\tau, T]): \quad (4.58)$$

*Quatrième étape.* — Dans cette dernière étape, on montre l'existence d'une sous-variété fermée de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  de dimension 1,  $\gamma$ , incluse dans  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < \varepsilon_1\}$ , telle que pour tout voisinage  $V$  de  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  il existe  $u_4 \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$  s'annulant sur  $\{0\} \times [0, T]$  et  $\varepsilon_4 > 0$  tels que

$$(\dot{x} = f(x, u_4(x, t)), |x(0)| < \varepsilon_4) \implies (x(T) \in V \cup \{0\}) \quad (4.59)$$

et, pour tout  $\tau \in [0, T]$ ,

$$(\dot{x} = f(x, u_4(x, t)), x(\tau) = 0) \implies (x(t) = 0, \forall t \in [\tau, T]). \quad (4.60)$$

Finalement à l'aide de  $u_3$  et  $u_4$ , on construit une application  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  par

$$u(x, t) = u_4(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad (4.61)$$

$$u(x, t) = u_3(x, t - T), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]T, 2T[, \quad (4.62)$$

$$u(x, t + 2T) = u(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (4.63)$$

Alors

$$u \in C^0(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}T); \mathbb{R}^m), \quad (4.64)$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \{0\} \times \mathbb{R}, \quad (4.65)$$

$$(\dot{x} = f(x, u(x, t)), |x(0)| < \varepsilon_4) \implies x(2T) = 0 \quad (4.66)$$

et, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

$$(\dot{x} = f(x, u(x, t)), x(\tau) = 0) \implies (x(t) = 0, \forall t \geq \tau). \quad (4.67)$$

On en déduit facilement que (4.30) est satisfait avec  $4T$  au lieu de  $T$  et pour  $\varepsilon$  assez petit. Comme  $T$  est arbitraire cela termine la démonstration du théorème 4.8 (modulo un petit problème de discontinuité sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}T$  qui est traité dans [11]).

*Remarque 4.10.* — Sussmann [39, Appendix] a montré qu'on ne peut pas remplacer dans le théorème 4.8 localement par globalement.

## 5. Stabilisation par retour de sortie

Nous considérons le système

$$\dot{x} = f(x, u), \quad h = h(x), \quad (5.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande et  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie (ou l'observation). On suppose toujours que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  satisfait (2.2); on suppose l'application  $h$  est de classe  $C^\infty$  et que, et ceci sans restreindre la généralité,

$$h(0) = 0. \quad (5.2)$$

On cherche maintenant à stabiliser à l'aide de retours de sortie au lieu de retours d'état. On a vu dans la section 1 qu'il est important de considérer des retours de sortie *dynamiques*. On introduit donc les définitions suivantes.

**DÉFINITION 5.1.** — *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours de sortie statiques instationnaires continus si, pour tout temps  $T > 0$ , il existe  $u \in C^0(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$  et  $\varepsilon$  dans  $]0, +\infty[$  tels que*

$$u(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

$$u(y, t + T) = u(y, t), \quad \forall y \in \mathbb{R}^p, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

$$((\dot{x} = f(x, u(h(x), t)), |x(s)| < \varepsilon) \implies x(s + T) = 0), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

$$((\dot{x} = f(x, u(h(x), t)), x(\tau) = 0) \implies (x(t) = 0, \forall t \geq \tau)), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

DÉFINITION 5.2.— *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours de sortie dynamiques instationnaires continus si, pour un certain entier  $k \geq 0$ , le système*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{z} = v, \quad \bar{y} = \bar{h}(x, z) = (h(x), z), \quad (5.7)$$

où l'état est  $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , le contrôle  $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  et la sortie  $\bar{y} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours de sortie statiques instationnaires continus; par convention si  $k = 0$  le système (5.7) est le système (5.1).

Comme dans le cas des retours d'état statiques, pour que  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $u = h(x)$  soit localement stabilisable en temps fini à l'aide de retours de sortie dynamiques instationnaires il est nécessaire que 0 soit localement continûment atteignable en temps petit; une question naturelle est alors : quelle hypothèse — la plus faible possible bien sûr — faire sur  $h$  pour que cette condition nécessaire soit suffisante? Pour donner notre hypothèse introduisons d'abord quelques notations. Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^m$  et  $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ , soit  $f_{\bar{u}}^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  définie par

$$f_{\bar{u}}^\alpha(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial u^\alpha}(x, \bar{u}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.8)$$

Soit  $O$  le sous-espace vectoriel de  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^p)$  engendré par les applications  $\omega$  telles que, pour tout entier  $r \geq 0$  et pour une suite  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  de multi-indices dans  $\mathbb{N}^m$ ,

$$\omega(x, u) = L_{f_u^{\alpha_1}} \dots L_{f_u^{\alpha_r}} f, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m, \quad (5.9)$$

où  $L_{f_u^{\alpha_i}}$  dénote la dérive de Lie par rapport à  $f_u^{\alpha_i}$  et où par convention, si  $r = 0$ , le membre de droite de (5.9) est  $h(x)$ . Remarquons si  $f$  est affine par rapport à  $u$ ,  $O$  est l'espace des observations ([35, remarque 5.4.2] par exemple). Introduisons notre dernière définition.

DÉFINITION 5.3.— *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x)$  est localement Lie-0-observable s'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$\forall a \in B_\varepsilon \setminus \{0\}, \quad \exists q \in \mathbb{N} \text{ tel que } L_{f_0}^q h(a) \neq 0, \quad (5.10)$$

avec  $f_0(x) = f(x, 0)$  et la convention habituelle  $L_{f_0}^0 h = h$ , et tel que, pour tout  $(a_1, a_2) \in B_\varepsilon^2$  et pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$  avec  $|u| < \varepsilon$ , on a

$$(\omega(a_1, u) = \omega(a_2, u), \quad \forall \omega \in O) \implies (a_1 = a_2). \quad (5.11)$$



On a alors le théorème suivant, montré dans [14].

**THÉORÈME 5.4.** — *Si, pour le système  $\dot{x} = f(x, u)$ , 0 est localement continûment atteignable et si le système  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x)$  est localement Lie 0-observable alors le système  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x)$  est localement stabilisable en temps petit à l'aide de retours de sortie dynamiques instationnaires continus.*

*Démonstration.* — Donnons les principales étapes de la démonstration de ce théorème.

*Première étape.* — Soit  $T > 0$ . Utilisant l'hypothèse "Lie-0-observable" et une version "observation" du théorème 4.4 (voir [10, Corollary 1.15]), on montre qu'il existe  $u^*$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^p \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$  et un réel  $\varepsilon^* > 0$  tels que

$$u^*(y, T) = u^*(y, 0) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p, \quad (5.12)$$

$$u^*(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.13)$$

et pour tout  $(a_1, a_2)$  dans  $B_{\varepsilon^*}^2$  et pour tout  $s$  dans  $]0, T[$

$$(h_{a_1}^{(i)}(s) = h_{a_2}^{(i)}(s), \quad \forall i \in \mathbb{N}) \implies (a_1 = a_2) \quad (5.14)$$

avec  $h_a(s) := h(x^*(a, s))$ , où  $x^*$  est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = f(x^*, u^*(h(x^*), t)), \quad x^*(a, 0) = a. \quad (5.15)$$

Notons que, si  $f$  est analytique, on peut utiliser à la place de [10, Corollary 1.15] un théorème dû à Sussmann sur l'observabilité [38, Theorem 2] (voir aussi [45, Lemma 2.1]).

*Deuxième étape.* — Dans cette étape on montre que si  $q = 2n + 1$  alors, pour une suite strictement croissante de  $q + 1$  réels  $t_0, \dots, t_q$  dans  $]0, T[$  prise "au hasard", l'application  $K : B_{\varepsilon^*} \rightarrow (\mathbb{R}^p)^q$  définie par

$$K(a) = \left( \int_{t_0}^{t_1} (s - t_0)(t_1 - s)h_a(s) ds, \dots, \int_{t_0}^{t_q} (s - t_0)(t_q - s)h_a(s) ds \right) \quad (5.16)$$

est injective. On en déduit facilement qu'il existe une application continue  $\theta = (\mathbb{R}^p)^q \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

$$\theta \circ K(u) = x^*(a, T), \quad \forall a \in \overline{B}_{\varepsilon^*/2}.$$

*Troisième étape.* — Dans cette dernière étape, on commence par déduire du fait que 0 est localement continûment atteignable l'existence de  $\bar{u}$  dans  $C^0(\mathbb{R}^p \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$  et de  $\bar{\varepsilon} > 0$  tels que

$$\bar{u}(a, T) = \bar{u}(a, 0) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^p, \quad (5.17)$$

$$\bar{u}(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.18)$$

$$(\dot{x} = f(x, \bar{u}(x(0), t)), |x(0)| < \bar{\varepsilon}) \implies (x(T) = 0); \quad (5.19)$$

pour une démonstration de l'existence de ce  $\bar{u}$  voir [11, Lemma 2.3].

On considère ensuite "l'extension dynamique" de  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x)$  définie par

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.20)$$

$$\dot{z} = v = (v_1, \dots, v_q, v_{q+1}) \in \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{pq+n} \quad (5.21)$$

avec

$$z = (z_1, \dots, z_q, z_{q+1}) \in \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{pq+n};$$

pour ce système, on définit la sortie

$$\tilde{h}(x, z) = (h(x), z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{pq+n}. \quad (5.22)$$

Pour  $s \in \mathbb{R}$ , soit

$$s^+ = \max(s, 0) \quad (5.23)$$

$$\text{sgn } s = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Finalement pour  $r$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  et pour  $b = (b_1, \dots, b_r)$  dans  $\mathbb{R}^r$  soit

$$b^{1/3} = (|b_1|^{1/3} \text{sgn } b_1, \dots, |b_r|^{1/3} \text{sgn } b_r). \quad (5.25)$$

On définit alors  $u : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{pq+n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $v : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{pq+n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{pq+n}$  en demandant pour tout  $(y, z)$  dans  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{pq+n}$  et pour tout  $i$  dans  $[1, q]$

$$u(y, z, t) = u^*(y, t), \quad \forall t \in [0, T[, \quad (5.26)$$

$$v_i(y, z, t) = -t(t_0 - t)^+ z_i^{1/3} + (t - t_0)^+ (t_i - t)^+ y, \quad \forall t \in [0, T[, \quad (5.27)$$

Jean-Michel Coron

$$v_{q+1}(y, z, t) = -t(t_q - t)^+ z_{q+1}^{1/3} + 6 \frac{(T - t)^+(t - t_q)^+}{(T - t_q)^3} \theta(z_1, \dots, z_q), \quad (5.28)$$

$$u(y, z, t) = \bar{u}(z_{q+1}, t - T), \quad \forall t \in [T, 2T[, \quad (5.29)$$

$$v(y, z, t) = 0, \quad \forall t \in [T, 2T[, \quad (5.30)$$

$$u(y, z, t) = 0, \quad \forall t \in [2T, 3T[, \quad (5.31)$$

$$v(y, z, t) = -(t - 2T)^+(3T - t)^+ z^{1/3}, \quad \forall t \in [2T, 3T[, \quad (5.32)$$

$$u(y, z, t) = u(y, z, t + 3T), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.33)$$

$$v(y, z, t) = v(y, z, t + 3T), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.34)$$

Alors  $u$  et  $v$  sont continues et s'annulent sur  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ . Soit  $(x, z)$  une solution (maximale) du problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(x, u(\tilde{h}(x, z), t)), \quad \dot{z} = v(\tilde{h}(x, z), t). \quad (5.35)$$

On voit facilement que, si  $|x(0)| + |z(0)|$  est assez petit,

$$z_i(t_0) = 0, \quad \forall i \in [1, q], \quad (5.36)$$

$$(z_1(t), \dots, z_q(t)) = K(x(0)), \quad \forall t \in [t_q, T], \quad (5.37)$$

$$z_{q+1}(T) = \theta \circ K(x(0)) = x(T), \quad (5.38)$$

$$x(T) = 0, \quad \forall t \in [2T, 3T], \quad (5.39)$$

$$z(3T) = 0. \quad (5.40)$$

De plus, il est par ailleurs facile de voir que, pour tout réel  $s$ ,

$$((x(s), z(s)) = (0, 0)) \implies ((x(t), z(t)) = (0, 0), \forall t \geq s), \quad (5.41)$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Remarques 5.5*

- i) Dans la preuve ci-dessus, on a divisé le travail en deux parties : identification et stabilisation. Une telle approche apparaît déjà dans un travail de Lozano-Leal [28]. Elle a été aussi utilisée précédemment par Mazenc et Praly dans [29] pour obtenir un résultat dans le même esprit que le théorème 5.4. Notre construction ci-dessus est aussi à rapprocher de [9, sect. 3]. Notons aussi que, comme [29], nous utilisons d'abord une commande telle que la sortie permet de distinguer les points.
- ii) Il y a une très vaste littérature sur le problème de la stabilisation par retour de sortie. Mentionnons en particulier [33], [23], [19] et surtout [43] et [29].
- iii) Il résulte de [30] ou ses références que la version globale du théorème 5.4 est fausse.

**Bibliographie**

- [1] AGRECHEV (A.A.) et GRAMKRELIDZE (R.V.) . — *Local controllability and semi-group of diffeomorphisms*, Preprint, Steklov Math. Institute, 1993.
- [2] BIANCHINI (R.M.) et STEFANI (G.) . — *Sufficient conditions of local controllability*, Proc. of 25th conference on Decision and Control, Athens, Greece (Dec. 1986), pp. 967-970.
- [3] BIANCHINI (R.M.) et STEFANI (G.) . — *Controllability along a trajectory: a variational approach*, SIAM J. Control and Optimization 31 (1993), pp. 900-927.
- [4] BROCKETT (R.W.) . — *Asymptotic stability and feedback stabilization*, Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millman et H. J. Sussmann (eds), Birkhäuser, Basel-Boston, 1983.
- [5] BRUNOVSKY (P.) . — *Local controllability of odd systems*, Banach Center Publications 1 (1974), pp. 39-45.
- [6] CHOW (W.L.) . — *Über systeme von linearen partiellen differentialgleichungen ester ordnung*, Math. Ann. 117 (1940-41), pp. 98-105.
- [7] CORON (J.-M.) . — *A necessary condition for feedback stabilization*, Systems and Control Letters 14 (1990), pp. 227-232.
- [8] CORON (J.-M.) . — *Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift*, Math. Control Signals and Systems 5 (1992), pp. 295-312.
- [9] CORON (J.-M.) . — *Links between local controllability and local continuous stabilization*, Preprint, Université Paris-Sud et ETH Zürich (oct. 1991), et NOLCOS'92, M. Fliess (éd.), Bordeaux (24-26 juin 1992), pp. 477-482.
- [10] CORON (J.-M.) . — *Linearized control systems and applications to smooth stabilization*, SIAM J. Control and Optimization 32 (1994), pp. 358-386.

- [11] CORON (J.-M.) .— *On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback laws*, Prépublication, ENS de Cachan (octobre 1992) à paraître dans SIAM J. Control and Optimization.
- [12] CORON (J.-M.) .— *Stabilization of controllable systems*, Prépublication, ENS de Cachan (avril 1993).
- [13] CORON (J.-M.) .— *Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels*, C.R. Acad. Sci. Paris 317 (1993), pp. 271-276.
- [14] CORON (J.-M.) .— *On the stabilization by output feedback law of controllable and observable systems*, Prépublication, ENS de Cachan (octobre 1993).
- [15] CORON (J.-M.) et POMET (J.-B.) .— *A remark on the design of time-varying stabilizing feedback laws for controllable systems without drift*, NOLCOS'92, M. Fliess (éd.), Bordeaux (24-26 juin 1992), pp. 413-417.
- [16] CORON (J.-M.) et PRALY (L.) .— *Adding an integrator for the stabilization problem*, Systems and Control Letters 17 (1991), pp. 89-104.
- [17] CORON (J.-M.) et ROSIER (L.) .— *A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization*, SIAM Journal Math. Syst. Estimation and Control 4 (1994), pp. 67-84.
- [18] DAYAWANSA (W.P.), MARTIN (C.) et KNOWLES (G.) .— *Asymptotic stabilization of a class of smooth two dimensional systems*, SIAM J. on Control and Optimization 28 (1990), pp. 1321-1349.
- [19] ESFANDIARI (F.) et KHALIL (H.K.) .— *Output feedback stabilization of fully linearizable systems*, International Journal of Control (1992), à paraître.
- [20] HERMANN (R.) et KRENER (A.J.) .— *Nonlinear controllability and observability*, IEEE Transactions on Automatic Control 22 (1977), pp. 728-740.
- [21] HERMES (H.) .— *Discontinuous vector fields and feedback control*, Differential Equations and Dynamical Systems, J. K. Hale et J.-P. La Salle (éds.), Academic Press, New-York - London (1967).
- [22] HERMES (H.) .— *On the synthesis of a stabilizing feedback control via Lie algebraic methods*, SIAM J. on Control and Optimization 18 (1980), pp. 352-361.
- [23] ISIDORI (A.) .— *Nonlinear Control Systems* (Second edition), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg (1989).
- [24] KAWSKI (M.) .— *Stabilization of nonlinear systems in the plane*, Systems and Control Letters 12 (1989), pp. 169-175.
- [25] KAWSKI (M.) .— *Higher-order small-time local controllability*, Nonlinear Controllability and Optimal Control, H. J. Sussmann (éd.), Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 113, Marcel-Dekker, Inc., New-York (1990), pp. 431-467.
- [26] KURZWEIL (J.) .— *On the inversion of Ljapunov's second theorem on stability of motion*, Amer. Math. Soc. 24 (1956), pp. 19-77.
- [27] LANDAU (L.) et LIFCHITZ (E.) .— *Physique théorique, mécanique* Mir, Moscou (1988).
- [28] LOZANO-LEAL (R.) .— *Robust adaptative regulation without persistent excitation*, IEEE Transactions on Automatic Control 34 (1989), pp. 1260-1267.

- [29] MAZENC (F.) et PRALY (L.) .— *Global stabilization for nonlinear systems*, Preprint, ENSMP, CAS (janvier 1993).
- [30] MAZENC (F.), PRALY (L.) et DAYAWANSA (W.P.) .— *Global stabilization by output feedback: examples and counter-examples*, Preprint, ENSMP, CAS (avril 1993) à paraître dans *Systems and Control Letters*.
- [31] POMET (J.-B.) .— *Explicit design of time-varying stabilizing control law for a class of controllable systems without drift*, *Systems and Control Letters* 18 (1992), pp. 147-158.
- [32] ROSIER (L.) .— *Inverse of Lyapunov's second theorem for measurable functions*, NOLCOS'92, M. Fliess (éd.), Bordeaux (24-26 juin 1992), pp. 655-660.
- [33] SONTAG (E.D.) .— *Conditions for abstract nonlinear regulation*, *Information and Control* 51 (1981), pp. 105-127.
- [34] SONTAG (E.D.) .— *Finite dimensional open-loop control generators for nonlinear systems*, *International Journal of Control* 47 (1988), pp. 537-556.
- [35] SONTAG (E.D.) .— *Mathematical control Theory*, Text in Applied Mathematics 6, Springer-Verlag, New-York - Berlin - Heidelberg (1990).
- [36] SONTAG (E.D.) .— *Universal nonsingular controls*, *Systems and Control Letters* 19 (1992), pp. 221-224.
- [37] SONTAG (E.D.) et SUSSMANN (H.J.) .— *Remarks on continuous feedback*, *IEEE CDC*, Albuquerque 2 (1980), pp. 916-921.
- [38] SUSSMANN (H.J.) .— *Single-input observability of continuous-time systems*, *Math. Systems Theory* 12 (1979), pp. 371-393.
- [39] SUSSMANN (H.J.) .— *Lie brackets and local controllability: a sufficient condition for scalar input systems*, *SIAM J. on Control and Optimization* 21 (1983), pp. 686-713.
- [40] SUSSMANN (H.J.) .— *A general theorem on local controllability*, *SIAM J. on Control and Optimization* 25 (1987), pp. 158-194.
- [41] SUSSMANN (H.J.) .— *Subanalytic sets and feedback control*, *J. Differential Equations* 31 (1979), pp. 31-52.
- [42] SUSSMANN (H.J.) et JURDJEVIC (V.) .— *Controllability of nonlinear systems*, *Journal Differential Equations* 12 (1972), pp. 95-116.
- [43] TEEL (A.) et PRALY (L.) .— *Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback*, Prépublication, Fontainebleau (janvier 1993) à paraître dans *SIAM J. on Control and Optimization*.
- [44] WANG (S.H.) .— *Stabilization of decentralized control systems via time-varying controllers*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC 27 (1982), pp. 741-744.
- [45] WANG (Y.) et SONTAG (E.D.) .— *Order of input/output differential equations and state space dimensions*, Prépublication, Florida Atlantic University, (mars 1993).
- [46] WHITEHEAD (G.W.) .— *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics 61, Springer-Verlag, New-York - Berlin - Heidelberg (1978).
- [47] WHITNEY (H.) et BRUHAT (F.) .— *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels*, *Comm. Math. Helv.* 33 (1959), pp. 132-160.