EDGARD BAVENCOFFE

PPCM de suites de polynômes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 1, n° 2 (1992), p. 147-168

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1992_6_1_2_147_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. I, n° 2, 1992

PPCM de suites de polynômes

EDGARD BAVENCOFFE[1]

RÉSUMÉ. — On étudie ici la limite $r(\mathbf{P})$, pour n tendant vers l'infini, du rapport entre le degré du PPCM et le degré du produit des n premiers termes de quelques suites $\mathbf{P} = \big(P_k(T)\big)$ de polynômes. On s'est intéressé aux suites définies, pour w racine primitive m-ième de l'unité, par $P_k(T) = T^{kn} - w$, $P_k(T) = T^{km+q} - w$ et $P_k(T) = (T^{k(nm+1)} - w)/(T^k - w)$. Ce problème est lié à celui de la détermination de la limite du rapport entre les logarithmes du PPCM et du produit des n premiers termes d'une suite récurrente binaire.

ABSTRACT. — In this paper, we are interested in the limit $r(\mathbf{P})$, when n tends to infinity, of the quotient of the LCM and the product of the n first terms in a sequence $\mathbf{P} = \big(P_k(T)\big)$ of polynomials. We give this limit for the sequences defined by $P_k(T) = T^{kn} - w$, $P_k(T) = (T^{k(nm+1)} - w)/(T^k - w)$, and $P_k(T) = T^{km+q} - w$ where w is a m-th primitiv root of unity. This problem is linked with this to determine the limite of the quotient of the logarithm of LCM and product of the n first terms of a binary recurrent sequence.

1. Introduction

P étant une suite $\big(P_k(T) \mid k \geq n_0\big)$ de polynômes unitaires et à coefficients dans $\mathbb{C}$, on note respectivement $\Pi(n, T, \mathbf{P})$ et $M(n, T, \mathbf{P})$ le produit et le PPCM des polynômes $\big(P_k(T) \mid n_0 \leq k \leq n\big)$.

On se propose ici d'étudier le quotient $r(n, \mathbf{P})$ du degré de $M(n, T, \mathbf{P})$ par le degré de $\Pi(n, T, \mathbf{P})$ et de montrer que pour certaines suites $\mathbf{P}$, la suite $r(n, \mathbf{P})$ admet une limite $r(\mathbf{P})$ lorsque n tend vers l'infini, et on donne la valeur de celle-ci.

[1] Université de Caen, Dépt. de Mathématiques, Esplanade de la Paix, 14032 Caen Cedex (France)

Cette question est liée au problème suivant : étant donnée une suite $\mathbf{U} = \big(u(k) \mid k \geq n_0\big)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$, on note respectivement $\Pi(n, \mathbf{U})$ et $M(n, \mathbf{U})$ le produit et le PPCM des nombres $\big(|u(k)| \mid n_0 \leq k \leq n\big)$, on considère le quotient $r(n, \mathbf{U})$ du logarithme de $M(n, \mathbf{U})$ par le logarithme de $\Pi(n, \mathbf{U})$, et on cherche sous quelles conditions la suite $\big(r(n, \mathbf{U})\big)$ admet une limite $r(\mathbf{U})$ lorsque n tend vers l'infini.

Il s'avère que si les suites $\mathbf{U}$ et $\mathbf{P}$ sont associées par la relation $u(k) = Q_k(\alpha, \beta)$, où $Q_k(X, Y)$ est le polynôme homogène associé à $P_k(T)$ et où α et β sont deux complexes tels que $u(k)$ soit entier relatif non nul, alors pour quelques suites $\mathbf{P}$ et sous réserve de quelques conditions imposées à α et β, les suites $r(n, \mathbf{U})$ et $r(n, \mathbf{P})$ convergent et ont même limite.

Cette idée a été utilisée par J.-P. Bézivin [5] pour démontrer que si α et β sont les racines d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}^*$ telle que $\alpha\beta$ ne soit pas nul et telle que α/β ne soit pas racine de l'unité, alors pour tout entier $m \geq 2$ et pour les suites $\mathbf{P}$ et $\mathbf{U}$ définies par :

$$P(T) = \frac{T^m - 1}{T - 1}, \quad \mathbf{P} = \big(P(T^k) \mid k \geq 1\big)$$

$$u(k) = \frac{\alpha^{mk} - \beta^{mk}}{\alpha^k - \beta^k}, \quad \mathbf{U} = \big(u(k) \mid k \geq 1\big),$$

on a :

$$r(\mathbf{U}) = r(\mathbf{P}) = \frac{6\,H(m)}{(m-1)L(m)\pi^2},$$

expression dans laquelle on a posé :

$$L(m) = \prod_{\substack{p|m \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad H(m) = \sum_{\substack{d>1 \\ d|m}} \frac{d}{m}\,\varphi(d)\varphi\Big(\frac{m}{d}\Big),$$

$\varphi(m) =$ indicateur d'Euler de m.

Ce théorème généralise des formules analogues obtenues par Matiyasevich et Guy [1], Davis [2], Kiss et Matyas [3] et par Akiyama [4], et concernant la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = aF_{n+1} + bF_n$. Leurs résultats ont été étendus aux quotients de nombres de Lehmer par James P. Jones et Peter Kiss [6]. Dans tous les cas, les démonstrations sont de nature arithmétique.

2. Remarques concernant le problème général

Sans faire une étude complète, on peut s'interroger sur le cas de polynômes de la forme $P(T^n)$. Il est évident que la détermination du PPCM $M(N, T, \mathbf{P})$ repose essentiellement sur l'étude des racines communes à deux termes de la suite $\mathbf{P}$.

Si $P(z^n) = P(z^k) = 0$, alors $z^n = \alpha$ et $z^k = \beta$ sont deux zéros de $P(T)$. Ceci conduit à définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des complexes en posant $(\alpha \approx \beta) \Leftrightarrow$ (il existe des entiers n et k, et un complexe z tels que $z^n = \alpha$ et $z^k = \beta$). Le polynôme $P(T)$ peut alors être mis sous la forme d'un produit de polynômes $Q_k(T)$ tels que pour toute racine α de $Q_i(T)$ et toute racine β de $Q_j(T)$ on ait $(\alpha \approx \beta) \Leftrightarrow (i = j)$. Le PPCM des $P(T^n)$ est alors le produit des PPCM des $Q_k(T^n)$.

Notons que, pour cette relation, une racine de l'unité est équivalente à, et seulement à, toutes les racines de l'unité (ce qui conduit à s'intéresser à des polynômes $P(T)$ dont tous les zéros sont des racines de l'unité).

Notons aussi que si $P(T) = T - u$, et si $P(T^n)$ et $P(T^k)$ ont une racine commune z, on a $z^n = z^k = u \Rightarrow z^{n-k} = 1$. Dans ce cas, u est racine de l'unité. On en déduit que si $\mathbf{P}$ est la suite $(T^n - u)$, et si u n'est pas racine de l'unité, alors $\Pi(n, T, \mathbf{P}) = M(n, T, \mathbf{P})$ et on a donc $r(\mathbf{P}) = 1$.

3. Notations

Pour tous entiers $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on pose :

$$(n, m) = \text{PGCD} \quad n \text{ et de } m$$

$$\phi(n, s, m, T) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,nm)=1 \\ k \equiv s \bmod m}}^{nm} \left(T - \operatorname{Exp}\left(\frac{2\pi i k}{nm}\right)\right) \quad \text{pour } (s, m) = 1$$

$$\phi_n(T) = n\text{-ième polynôme cyclotomique}$$

$$\varphi(n) = \text{indicateur d'Euler de } n$$

$$\Omega_1(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ premier}}} \left(\frac{p}{p+1}\right), \quad \Omega_2(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

4. Résultats

Dans ce qui suit, m est entier fixé ≥ 1, w est la racine $\mathrm{Exp}(2\pi i/m)$ de l'unité, et r est entier premier avec m.

THÉORÈME 1.— *n et N étant des entiers ≥ 1, la suite $\mathbf{P}$ étant définie par la relation $k \geq 1 \Rightarrow P_k(T) = T^{nk} - w^r$, on a :*

$$M(N,T,\mathbf{P}) = \prod_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m} \ \prod_{\substack{b|n \\ (b,m)=1}} \ \prod_{\substack{c=1 \\ (b,c)=1}}^{N/a} \phi\Big(\frac{nc}{b}, s, m, T\Big) \tag{1}$$

où le paramètre s est défini par $abs \equiv r \bmod m$

$$r(\mathbf{P}) = \frac{6m\,\Omega_1(nm)\Omega_2(m)\Omega_3(n,m)}{\varphi(m)\pi^2} \tag{2}$$

où

$$\Omega_3(n,m) = \sum_{\substack{k|n \\ (a,m)=1}} \frac{\varphi(d)}{kd}, \quad \textit{avec } d = \mathrm{PGCD}\Big(k, \frac{n}{k}\Big) .$$

COROLLAIRE 1.— *N étant entier ≥ 1, la suite $\mathbf{P}$ étant définie par la relation $k \geq 1 \Rightarrow P_k(T) = T^k - w^r$, on a :*

$$M(N,T,\mathbf{P}) = \prod_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m} \ \prod_{c=1}^{N/a} \phi(c, s, m, T) \tag{3}$$

où le paramètre s est défini par $as \equiv r \bmod m$

$$r(\mathbf{P}) = \frac{6m\,\Omega_1(m)\Omega_2(m)}{\varphi(m)\pi^2} . \tag{4}$$

THÉORÈME 2.— *m étant ≥ 2, N et d étant entiers ≥ 1, q et r étant entiers premiers avec m, q étant tel que $1 \leq q \leq m$, la suite $\mathbf{P}$ étant définie par la relation $k \geq 0 \Rightarrow P_k(T) = \big(T^{d(km+q)} - w^r\big)$, on a :*

$$M(N,T,\mathbf{P}) = \prod_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m} H(x, a, s, m, T^d) , \tag{5}$$

où

$$\begin{cases} qs \equiv ar \bmod m & 1 \leq s \leq m \\ ac \equiv q \bmod m & 1 \leq c \leq m \\ x = \dfrac{Nm - (ac - q)}{mc} & \\ H(x, a, s, m, T) = \displaystyle\prod_{0 \leq b \leq x} \phi(a + bm,\ s, m, T)\,. & \end{cases}$$

La condition $q \leq m$ pouvant être supprimée, on a :

$$r(\mathbf{P}) = \frac{6m\,\Omega_1(m)\Omega_2(m)}{\varphi(m)\pi^2}\,. \tag{6}$$

COROLLAIRE 2.— *Les notations étant celles du théorème 2, m étant égal à $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$ ou $\mathbf{6}$, q et r prenant en conséquence les valeurs $\mathbf{1}$ et $m-1$, on a :*

$$M(N, T, \mathbf{P}) = H(N, q, r, m, T^d)H\left(\frac{N - m + q + 1}{m - 1}, m - q,\ m - r,\ m, T^d\right). \tag{7}$$

La limite $r(\mathbf{P})$ donnée par (6) prend ici les valeurs suivantes :

m	3	4	6
$r(\mathbf{P})$	$\dfrac{135}{16\,\pi^2}$	$\dfrac{80}{9\,\pi^2}$	$\dfrac{234}{25\,\pi^2}$

(8)

THÉORÈME 3.— *n et N étant entiers ≥ 1, la suite $\mathbf{P}$ étant définie par la relation*

$$k \geq 1 \Rightarrow P_k(T) = \frac{T^{k(nm+1)} - w^r}{T^k - w^r}\,,$$

on a :

$$M(N, T, \mathbf{P}) = \prod_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m} \prod_{\substack{\beta \geq 2 \\ \beta | (nm+1)}} \prod_{\substack{c=1 \\ (c,b)=1}}^{h} \phi(c\beta, s, m, T) \tag{9}$$

où les paramètres b, h et s sont définis par :

$$\begin{cases} \beta \nmid a \Rightarrow h = N/a \\ \beta \mid a \Rightarrow h = N/(a + m) \\ b\beta = nm + 1 \\ abs \equiv r \bmod m \end{cases}$$

$$r(\mathbf{P}) = \frac{6\Omega_1(m)\Omega_1(nm+1)}{n\varphi(m)\pi^2} \sum_{a=1}^{m} \sum_{\beta \geq 2} \frac{\beta\varphi(d)}{k^2 d} \tag{10}$$

où

$$\begin{cases} b\beta = nm+1 & \\ d = (b,\beta) & \\ k = a & si\ \beta \nmid a \\ k = a+m & si\ \beta \mid a. \end{cases}$$

Corollaire 3.— *N étant entier ≥ 1, n étant ≥ 2, la suite $\mathbf{P}$ étant définie par la relation*

$$k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad P_k(T) = \frac{T^{kn}-1}{T^k-1},$$

on a :

$$M(N,T,\mathbf{P}) = \prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^{N} \phi_{kn/d}(T) \tag{11}$$

$$R(\mathbf{P}) = \frac{6n\,\Omega_1(n)\Omega_4(n)}{(n-1)\pi^2} = \frac{6H(n)}{(n-1)L(n)\pi^2} \tag{12}$$

où

$$\Omega_4(n) = \sum_{\substack{k<n \\ k|n}} \frac{\varphi(d)}{kd}, \quad avec\ d = \mathrm{PGCD}\left(k, \frac{n}{k}\right)$$

et où $L(n)$ et $H(n)$ sont définis dans le théorème cité dans l'introduction, et donc $r(\mathbf{P})$ = limite donnée dans [5].

5. Résultats préliminaires

Lemme 1.— *Pour $x > 1$ et pour tous entiers naturels m et n, on a :*

$$\sum_{\substack{k \leq x \\ (k,n)=1}} \varphi(km) = \frac{3mx^2\Omega_1(mn)\varphi(d)}{\pi^2 d} + \mathrm{O}(x\log x), \tag{13}$$

avec $d = (m,n)$.

Résultats utilisés

Ce lemme a été démontré par Mertens (théorème 3.7 dans [7]) dans le cas $m = n = 1$, par J.-P. Bézivin ([5], lemme 5) lorsque $n > 1$, par J.-P. Jones et P. Kiss ([6], lemmes 6, 7, 8) lorsque m et n sont premiers entre eux.

Démonstration dans le cas où $(m, n) > 1$

On procède par récurrence sur le PGCD (m, n) et on utilise le lemme 8 de l'article de J.-P. Jones et P. Kiss [6]. On pose :

$$A(m, n, x) = \sum_{\substack{k \leq x \\ (k,n)=1}} \varphi(km)$$

$$B(m, n, x) = \frac{3mx^2\, \Omega_1(mn)\varphi(d)}{\pi^2 d} + \mathrm{O}(x \log x)$$

avec $d = (m, n)$.

Le lemme cité affirme que si $d = 1$, alors $A(m, n, x) = B(m, n, x)$.

On suppose la relation démontrée pour $(m, n) < d$. Soit p un facteur premier de d. On pose $d = \delta p^e$, $m = ap^\alpha$ et $n = bp^\beta$ où p ne divise pas le produit δab. Les nombres premiers avec b se partagent en nombres premiers avec n et en nombres divisibles par p et premiers avec b :

$$A(m, b, x) = \sum_{\substack{k \leq x \\ (k,n)=1}} \varphi(km) + \sum_{\substack{kp \leq x \\ (k,b)=1}} \varphi(kpm) = A(m, n, x) + A\left(pm, b, \frac{x}{p}\right)$$

$$(m, b) = (pm, b) = \delta < d \Rightarrow \begin{cases} A(m, b, x) = B(m, b, x) \\ A\left(pm, b, \frac{x}{p}\right) = B\left(pm, b, \frac{x}{p}\right) \end{cases}$$

$$A(m, n, x) = B(m, b, x) - B\left(pm, b, \frac{x}{p}\right) \quad \text{et} \quad \Omega_1(mn) = \Omega_1(mb) = \Omega_1(pmb)$$

$$A(m, n, x) = \frac{3mx^2\, \Omega_1(mn)\varphi(\delta)}{\pi^2 \delta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \mathrm{O}(x \log x)\,.$$

Le résultat découle alors de l'égalité

$$\frac{\varphi(d)}{d} = \left(\frac{p-1}{p}\right) \left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right)\,.$$

LEMME 2.— *Pour $x > 1$ et pour tous entiers naturels m et n premiers entre eux, on a :*

$$\sum_{0\leq k\leq x} \varphi(km+n) = \frac{3m^2x^2\,\Omega_1(m)}{\pi^2\varphi(m)} + \mathrm{O}(x\log(x))\,. \tag{14}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} C(m,n,x) &= \sum_{k\leq x}\varphi(km+n) = \sum_{k\leq x}\sum_{d|km+n}\frac{\mu(d)(km+n)}{d} \\ &= \sum_{d\leq mx+n}\frac{\mu(d)S(d,x)}{d}\,, \end{aligned}$$

avec

$$S(d,x) = \sum_{\substack{k\leq x\\ d|(km+n)}}(km+n) \quad \text{et} \quad \mu(d) = \text{fonction de Möbius.}$$

On note que si $(d,m) > 1$, alors la condition $(m,n) = 1$ implique que $d \nmid (km+n)$ et donc $S(d,x) = 0$. D'où :

$$C(m,n,x) = \sum_{\substack{d\leq mx+n\\ (d,m)=1}}\frac{\mu(d)S(d,x)}{d}\,.$$

Après des calculs sans grand intérêt, on vérifie que si $(d,m) = 1$, on a :

$$\frac{mx^2}{2d} - \frac{3mx}{2} \leq S(d,x) \leq \frac{mx^2}{2d} + (m+2n)x$$

soit

$$\left|S(d,x) - \frac{mx^2}{2d}\right| \leq Mx\,, \quad \text{avec } M = \frac{3m+4n}{2}\,,$$

$$\frac{mx^2K(m,n,x)}{2} - MxL(m,n,x) \leq C(m,n,x)$$

$$C(m,n,x) \leq \frac{mx^2K(m,n,x)}{2} + MxL(m,n,x)$$

avec

$$K(m,n,x) = \sum_{\substack{d \leq mx+n \\ (d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} \quad \text{et} \quad L(m,n,x) = \sum_{\substack{d \leq mx+n \\ (d,m)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d}.$$

Compte tenu de la relation

$$\prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} K(m,n,x) &= \sum_{(d,m)=1} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) = \prod_{\substack{p \nmid m \\ p \text{ premier}}} (1 - p^{-2}) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2} \prod_{\substack{p \mid m \\ p \text{ premier}}} (1 - p^{-2})^{-1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{6m\,\Omega_1(m)}{\pi^2 \varphi(m)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La conclusion résulte de :

$$1 \leq L(m,n,x) \leq \sum_{d=1}^{mx+n} \frac{1}{d} \leq 1 + \log(mx+n)$$

$$\frac{mx^2 K(m,n,x)}{2} = \frac{3m^2x^2\,\Omega_1(m)}{\pi^2 \varphi(m)} + \mathrm{O}(x)$$

$$\left| C(m,n,x) - \frac{mx^2 K(m,n,x)}{2} \right| \leq MxL(m,n,x) = \mathrm{O}(x \log x).$$

LEMME 3. — *a, b, c, m et s étant des entiers naturels tels que :*

(1) $(s,m) = 1$,

(2) $(a,m) = 1$,

(3) $ac \equiv s \bmod m$,

(4) tous les diviseurs premiers de b divisent m ;

w étant la racine $\mathrm{Exp}(2\pi i/m)$ *de l'unité,* $\phi(n, s, m, T)$ *étant le polynôme*

$$\prod_{\substack{1\leq k\leq nm \\ (k,nm)=1 \\ k\equiv s \bmod m}} \left(T - \mathrm{Exp}\left(\frac{2\pi ik}{nm}\right)\right)$$

on a :

$$\phi(ab, s, m, T) = w^{c\varphi(a)}\phi_a(T^b w^{-c})\,. \tag{15}$$

Démonstration

Compte tenu des conditions (1) et (4), la condition d'être premier avec abm est, pour les k qui sont congrus à s modulo m équivalente à $(k, a) = 1$. D'autre part, on peut supposer que s satisfait à $1 \leq s \leq m$:

$$\phi(ab, s, m, T) = \prod_{k\in E} \left(T - \mathrm{Exp}\left(\frac{2\pi ik}{abm}\right)\right)$$

$E = \big(k \mid 1 \leq k \leq abm\,,\ (k, a) = 1\,,\ k \equiv s \bmod m\big)$

$E = \big(k = s + m(ax + y) \mid 0 \leq x \leq b - 1\,,\ 0 \leq y \leq a - 1\,,\ (s + my,\ a) = 1\big)$

$$\begin{aligned}\phi(ab, s, m, T) &= \prod_{\substack{y=0 \\ (s+my,a)=1}}^{a-1} \prod_{x=0}^{b-1} \left(T - \mathrm{Exp}\left(\frac{2\pi i(s + my)}{abm}\right) \mathrm{Exp}\left(\frac{2\pi ix}{b}\right)\right) \\ &= \prod_{\substack{y=0 \\ (s+my,a)=1}}^{a-1} \left(T^b - \mathrm{Exp}\left(\frac{2\pi i(s + my)}{am}\right)\right)\,.\end{aligned}$$

Soit d et q tels que $dm = 1 + aq$

$$p \mid (s + my,\ a) \Rightarrow p \mid \big(d(s + my)),\ a\big) \Rightarrow p \mid (ds + y + yaq,\ a) \Rightarrow p \mid (ds + y)$$
$$p \mid (ds + y,\ a) \Rightarrow p \mid (ds + y + aqy,\ a) \Rightarrow p \mid (ds + dmy,\ a) \Rightarrow p \mid (s + my)$$

donc

$$(s + my,\ a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (ds + y,\ a) = 1\,.$$

On pose $y = u - ds$ et donc $(s + my,\ a) = 1 \Leftrightarrow (u, a) = 1$

$$\phi(ab, s, m, T) = \prod_{\substack{u=ds \\ (u,a)=1}}^{a-1+ds} \left(T^b - \mathrm{Exp}\left(\frac{2\pi i(s + mu - mds)}{am}\right)\right)$$

$$\frac{s(1-md)}{am} = -\frac{qs}{m}, \quad qs \equiv qac = c(dm-1) \equiv -c \bmod m$$

$$\operatorname{Exp}\left(\frac{2\pi i s(1-md)}{am}\right) = \operatorname{Exp}\left(\frac{2\pi i c}{m}\right) = w^c$$

$$\phi(ab, s, m, T) = \prod_{\substack{u=ds \\ (u,a)=1}}^{a-1+ds} \left(T^b - w^c \operatorname{Exp}\left(\frac{2\pi i u}{a}\right)\right).$$

Par changement d'indice $u \to v \equiv u \bmod a$ et $1 \leq v \leq a$, on obtient

$$\phi(ab, s, m, T) = \prod_{\substack{v=1 \\ (v,a)=1}}^{a} \left(T^b - w^c \operatorname{Exp}\left(\frac{2\pi i v}{a}\right)\right) = w^{c\varphi(a)} \phi_a(T^b w^{-c})\,..$$

Lemme 4. — *m et r étant premiers entre eux, w étant la racine $\operatorname{Exp}({}^{2\pi i}/{}_m)$ de l'unité, pour tout entier n on a la relation :*

$$T^n - w^r = \prod_{\substack{d=1 \\ d|n \\ (d,m)=1}}^{n} \phi\Big(\frac{n}{d}, s, m, T\Big), \tag{16}$$

où le paramètre s est défini par la congruence $ds \equiv r \bmod m$.

Démonstration

Ceci est une conséquence du lemme 3. Il existe des entiers a et b, uniques, satisfaisant aux conditions (2) et (4) du lemme 3 et tels que $n = ab$. Les diviseurs de n qui sont premiers avec m sont alors les diviseurs de a. Dès lors, le paramètre c qui intervient dans la relation (15) pour l'indice a/d est défini par la congruence $s \equiv ac/d \bmod m$, c'est-à-dire $ac \equiv ds \equiv r \bmod m$. Il ne dépend donc pas du diviseur d. Il suffit ensuite d'appliquer la relation classique $T^a - 1 = \prod \phi_d(T)$ où d parcourt l'ensemble des diviseurs de a.

Lemme 5. — *m et s étant premiers entre eux, le degré du polynôme $\phi(n, s, m, T)$ est égal à $\varphi(nm)/\varphi(m)$.*

Démonstration

Il existe des entiers a et b, uniques, satisfaisant aux conditions (2) et (4) du lemme 3 et tels que $n = ab$. Le degré du polynôme $\phi(n, s, m, T)$ est, compte tenu de la relation (15), égal à $b\varphi(a)$. Les diviseurs premiers de bm sont exactement ceux de m et on a donc $\varphi(bm) = b\varphi(m)$. D'où :

$$\varphi(nm) = \varphi(abm) = \varphi(bm)\varphi(a) = b\varphi(m)\varphi(a) = \varphi(m) \times \deg\big(\phi(n,s,m,T)\big)\,.$$

LEMME 6.— *s_1 et s_2 étant deux entiers premiers avec m, les polynômes $\phi(n_1,s_1,m,T)$ et $\phi(n_2,s_2,m,T)$ sont soit premiers entre eux, soit identiques. L'identité a lieu si et seulement si $n_1 = n_2$ et $s_1 \equiv s_2 \bmod m$.*

Démonstration

Si $\phi(n_1,s_1,m,z) = \phi(n_2,s_2,m,z)$, alors z est racine primitive mn_1-ième et mn_2-ième de l'unité, et donc $n_1 = n_2 = n$. Dans ce cas $\mathrm{Exp}(2\pi i s_1/m) = z^n = \mathrm{Exp}(2\pi i s_2/m)$ et donc $s_1 \equiv s_2 \bmod m$, d'où l'identité des deux polynômes s'ils ne sont pas premiers entre eux.

6. Principe de la démonstration des théorèmes

P étant la suite $\big(P_k(T)\big)$, on écrit chaque polynôme sous forme de produit de polynômes $\phi(q,s,m,T)$ en utilisant le lemme 4. Le PPCM $M(N,T,\mathbf{P})$ est le produit des polynômes $\phi(q,s,m,T)$ distincts qui apparaissent dans ces produits car, d'après le lemme 6, ces polynômes sont premiers entre eux ou identiques.

On détermine le degré de $M(N,T,\mathbf{P})$ en utilisant le lemme 5. Une estimation de la valeur asymptotique de ce degré lorsque N tend vers l'infini est obtenue par application des lemmes 1 ou 2. On en déduit la valeur de la limite $r(\mathbf{P})$.

7. Démonstration du théorème 1

Construction de $M(N,T,\mathbf{P})$

$$T^{nk} - w^r = \prod_{\substack{d=1\\ d|nk\\ (d,m)=1}}^{kn} \phi\Big(\frac{nk}{d}, s, m, T\Big)$$

où le paramètre s est défini modulo m par la congruence $ds \equiv r \bmod m$.

Les polynômes associés à (k,d) et (k',d') sont premiers entre eux sauf s'ils sont identiques, ce qui se produit si et seulement si $k'/d' = k/d$ et $s' \equiv s \bmod m$, où s et s' sont définis par $d's' \equiv ds \equiv r \bmod m$.

Afin de faire apparaître les couples (k,d) associés à un même polynôme, on fait intervenir la fraction irréductible c/b qui est égale à k/d. Les indices k et d sont donc définis par $k = ca$ et $d = ba$, où c et b sont premiers entre eux. Le produit ca parcourt l'ensemble 1 à N. Le produit ba parcourt l'ensemble des diviseurs de can qui sont premiers avec m. Ceci se traduit par les conditions $b \mid n$, $(b,m) = 1$ et $(a,m) = 1$.

Les polynômes identiques sont définis pour un même couple (c,d) et pour des coefficients a et a' tels que $ba \equiv ba' \bmod m$. Le paramètre a est donc défini modulo m.

En résumé, on obtient tous les polynômes, et on les obtient une seule fois, en posant $k = ca$, $d = ba$ avec les conditions $b \mid n$, $(b,m) = 1$, $(c,b) = 1$, $1 \le a \le m$, $1 \le ca \le N$. D'où l'expression (1).

Limite $r(\mathbf{P})$

$$\text{degré } M(N,T,\mathbf{P}) = \sum_{\substack{a \le m \\ (a,m)=1}} \sum_{\substack{b \mid n \\ (b,m)=1}} \sum_{\substack{c \le N/a \\ (b,c)=1}} \frac{\varphi(mnc/b)}{(m)} .$$

D'après le lemme 1 :

$$\sum_{\substack{c \le N/a \\ (c,b)=1}} \varphi\Big(\frac{cmn}{b}\Big) = \frac{3mnN^2\,\Omega_1(mn)\varphi(d)}{\pi^2 ba^2 d} + \mathrm{O}(N \log N) ,$$

avec

$$d = \mathbf{PGCD}\left(\frac{mn}{b}, b\right) = \mathbf{PGCD}\left(\frac{n}{b}, b\right) , \quad \text{car } (b,m) = 1 .$$

$$\text{degré } M(N,T,\mathbf{P}) = \frac{3mnN^2\,\Omega_1(mn)}{\pi^2\varphi(m)} \sum_{\substack{a \le m \\ (a,m)=1}} \frac{1}{a^2} \sum_{\substack{b \mid n \\ (b,m)=1}} \frac{\varphi(d)}{bd} + \mathrm{O}(N \log N),$$

où $d = \left(\frac{n}{b}, b\right)$.

$$\text{degré } M(N,T,\mathbf{P}) = \frac{3mnN^2\,\Omega_1(mn)\Omega_2(m)\Omega_3(n,m)}{\pi^2\varphi(m)} + \mathrm{O}(N \log N) ,$$

avec

$$\Omega_3(n,m) = \sum_{\substack{b|n \\ (k,m)=1}} \frac{\varphi(d)}{kd}, \quad \text{où } d = \mathrm{PGCD}\Big(k, \frac{n}{k}\Big).$$

La conclusion résulte de cette estimation de degré $M(N,T,\mathbf{P})$ et de degré $\Pi(N,T,\mathbf{P}) = \sum_{1\leq n\leq N} nk = \frac{nN^2}{2} + \mathrm{O}(N)$.

8. Démonstration du corollaire 1

Pour $n = 1$, la relation (1) se simplifie car l'indice b du second produit prend uniquement la valeur 1, la condition sur c d'être premier avec b est toujours vérifiée, et le paramètre s ne dépend que de a.

Quant à la relation (4), elle n'est que la traduction de (2) et de la remarque que $\Omega_3(1,m) = 1$.

9. Démonstration du théorème 2

Construction de $M(N,T,\mathbf{P})$

$$T^{d(km+q)} - w^r = \prod_i \phi(j,s,m,T^d),$$

avec

$$\begin{cases} 1 \leq i \text{ et } i \mid nm+q \text{ et } (i,m) = 1 \\ j \text{ est défini par } ij = km+q \\ s \text{ est défini, modulo } m, \text{ par } is \equiv r \bmod m. \end{cases}$$

La condition $(i,m) = 1$ est toujours satisfaite car $(q,m) = 1$ et $i \mid (nm+q)$. Le paramètre s, défini par $qs \equiv ijs \equiv jr \bmod m$ et $1 \leq s \leq m$, est associé à j indépendamment de n car $(q,m) = 1$.

Si deux polynômes $\phi(j,s,m,T^d)$ et $\phi(j',s',m,T^d)$ ont une racine commune z, alors z^d est racine commune de $\phi(j,s,m,T)$ et de $\phi(j',s',m,T)$. D'après le lemme 6, ces polynômes sont alors identiques et $j = j'$, $s \equiv s' \bmod m$. Le PPCM $M(N,T,\mathbf{P})$ est donc le produit des polynômes distincts

$\phi(j, s, m, T^d)$ qui apparaissent dans le développement des $\left(T^{d(km+q)} - w^r\right)$ pour $1 \leq k \leq N$

$$M(N, T, \mathbf{P}) = \prod_j \phi(j, s, m, T^d),$$

avec

$$\begin{cases} s \text{ est défini, modulo } m, \text{ par } qs \equiv jr \bmod m; \\ \text{il existe } k \text{ tel que } 1 \leq k \leq N \text{ et } j \mid (km+q). \end{cases}$$

Les diviseurs j d'un nombre de la forme $(km + q)$ sont premiers avec m. Réciproquement, si j est un entier premier avec m, il est indice acceptable dans ce produit si son plus petit multiple de la forme $(km + q)$ est tel que $1 \leq k \leq N$.

Soit donc $j \geq 1$ et premier avec m. Cet entier s'écrit $a + bm$ où a et b sont entiers, $1 \leq a \leq m$, et $(a, m) = 1$. Il existe c unique tel que $1 \leq c \leq m$, et $ac \equiv q \bmod m$. Le plus petit multiple de j qui soit de la forme $km + q$ avec $k \geq 1$ est $c(a + bm)$. La seule condition est $c(a + bm) \leq Nm + q$. Le paramètre s est défini modulo m par la congruence $qs \equiv jr \equiv ar \bmod m$.

D'où l'expression de $M(N, T, \mathbf{P})$:

$$M(N, T, \mathbf{P}) = \prod_{a,b} \phi(a + bm,\ s,\ m,\ T^d),$$

avec

$$\begin{cases} 1 \leq a \leq m \text{ et } (a, m) = 1 \\ c \text{ est défini par } 1 \leq c \leq m,\ ac \equiv q \bmod m \\ 0 \leq b \text{ et } c(a + bm) \leq Nm + q \\ s \text{ est défini, modulo } m, \text{ par } qs \equiv ar \bmod m, \end{cases}$$

résultat qui se traduit immédiatement par la relation (5).

Limite $r(\mathbf{P})$

Dans l'expression (5) de $M(N, T, \mathbf{P})$, le paramètre a est premier avec m et il est donc de même des paramètres $(a + bm)$ qui interviennent dans $H(x, a, s, m, T)$. Une application immédiate du lemme 3 est que si $(n, m) = (s, m) = 1$ alors le degré de $\phi(n, s, m, T)$ est $\varphi(n)$. On déduit que :

$$\begin{aligned} (a, m) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{degré } \phi(a + bm,\ s,\ m, T) = \varphi(a + bm) \\ &\Rightarrow \quad \text{degré } H(x, a, s, m, T) = \sum_{0 \leq b \leq x} \varphi(a + bm). \end{aligned}$$

On applique le lemme 2. Compte tenu de l'expression (5), on obtient :

$$\text{degré } M(N,T,\mathbf{P}) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m} \frac{3dm^2x^2\Omega_1(m)}{\pi^2\varphi(m)} + \mathrm{O}\big(x\log(x)\big)$$

avec

$$\begin{cases} 1 \leq c \leq m\,, \quad ac \equiv q \bmod m \\ x = \dfrac{Nm+q-ac}{mc}\,, \end{cases}$$

$$\text{degré } M(N,T,\mathbf{P}) = \mathrm{O}\big(N\log(N)\big) + \frac{3dN^2m^2\Omega_1(m)}{\pi^2\varphi(m)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m} \frac{1}{c^2}$$

où c est défini par $1 \leq c \leq m$, $ac \equiv q \bmod m$.

a et c sont univoquement associés et tous deux parcourent l'ensemble des nombres premiers avec m et inférieurs ou égaux à m

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m} \frac{1}{c^2} = \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} \frac{1}{c^2} = \Omega_2(m)$$

$$\text{degré } M(N,T,\mathbf{P}) = \frac{3dm^2\Omega_1(m)\Omega_2(m)N^2}{\pi^2\varphi(m)} + \mathrm{O}\big(N\log(N)\big)\,.$$

La conclusion résulte de cette estimation de degré $M(N,T,\mathbf{P})$ et de

$$\text{degré } \Pi(N,T,\mathbf{P}) = \sum_{0\leq k\leq N} d(km+q) = \frac{dmN^2}{2} + \mathrm{O}(N)\,.$$

Supprimer la condition $q \leq m$ revient à une translation de l'indice k dans la suite P et, donc, est sans incidence sur la valeur asymptotique du degré de $M(N,T,\mathbf{P})$ ou de $\Pi(N,T,\mathbf{P})$.

10. Démonstration du corollaire 2

On se place dans le cas où $m = 3$, 4 ou 6. Les nombres premiers avec m et inférieurs à m sont 1 et $m-1$. Les paramètres q, r, a et c du théorème 2 prennent donc les valeurs :

$$a = q \quad \Rightarrow \quad c = 1 \quad s = r \quad x = N$$

$$a = m-q \quad \Rightarrow \quad c = m-1 \quad s = m-r \quad x = \frac{N-m+q+1}{m-1}\,.$$

11. Démonstration du théorème 3

Construction de $M(N, T, \mathbf{P})$

$$Q(T^k) = \frac{T^{k(nm+1)} - w^r}{T^k - w^r} = \frac{\prod \phi(q, s, m, T)}{\prod \phi(q', s', m, T)}$$

où les paramètres q, s, q' et s' sont définis par :

$$\begin{aligned} q &= \frac{k(nm+1)}{d} \quad d \mid k(nm+1) \quad (d, m) = 1 \quad ds \equiv r \bmod m \\ q' &= \frac{k}{d'} \quad d' \mid k \quad (d', m) = 1 \quad d's' \equiv r \bmod m\,. \end{aligned}$$

Dans chacun des produits, un même polynôme ϕ n'apparaît qu'une fois. Si un polynôme $\phi(q', s', m, T)$ apparaît au dénominateur, il est associé à un entier d' et il apparaît au numérateur, comme polynôme $\phi(q, s, m, T)$ associé à $d = d'(nm+1)$ car pour cette valeur de d, on a $q = q'$, $(d, m) = 1$ et $s \equiv s' \bmod m$

$$Q(T^k) = \prod_{q \in E(k)} \phi(q, s, m, T)$$

$$E(k) = \left(q \;\middle|\; q \mid k(nm+1)\,,\ d = \frac{k(nm+1)}{q}\,,\ (d, m) = 1\,,\ (nm+1) \nmid d \right)$$

s étant défini par $1 \le s \le m$, $ds \equiv r \bmod m$.

$M(N, T, \mathbf{P}) = \prod \phi(q, s, m, T)$ où les couples (q, s) sont tels que $1 \le s \le m$ et tels qu'il existe d et k satisfaisant à

$$\begin{cases} 1 \le k \le N\,, \quad dq = k(nm+1)\,, \quad (d, m) = 1 \\ (nm+1) \nmid d\,, \quad ds \equiv r \bmod m\,. \end{cases} \tag{7.1}$$

Ces conditions (7.1) étant satisfaites, il existe un et un seul quadruplet (x, a, b, c) défini par :

$$\begin{cases} x = (d, k)\,, \quad k = cx\,, \quad d = bx \\ a \equiv x \bmod m\,, \quad 1 \le a \le m\,. \end{cases} \tag{7.2}$$

Ce quadruplet vérifie les relations :

$$\begin{cases} 1 \leq a \leq m\,, \quad (a,m) = 1\,, \quad a \equiv x \bmod m \\ b \mid (nm+1)\,, \quad (nm+1) \nmid bx \\ (b,c) = 1\,, \quad 1 \leq cx \leq N\,. \end{cases} \tag{7.3}$$

Réciproquement, si (x,a,b,c) satisfait à (7.3), les éléments q, s, k et d sont alors définis par (7.4) et ils satisfont aux conditions (7.3) :

$$\begin{cases} bq = c(nm+1)\,, \quad abs \equiv r \bmod m\,, \quad 1 \leq s \leq m \\ k = cx\,, \quad d = bx \end{cases} \tag{7.4}$$

Reste la question de l'unicité de l'occurence d'un couple (q,s). Deux couples (b,c) et (b',c') distincts définissent des valeurs q et q' distinctes. Pour un même couple (b,c), et donc pour q fixé, des valeurs a et a' distinctes définissent des valeurs s et s' distinctes. On obtient donc une et une seule fois tous les couples valides (q,s) en prenant tous les triplets (a,b,c) pour lesquels il existe un x tel que le quadruplet (a,b,c,x) satisfasse aux relations (7.3) et en leur adjoignant un et un seul de ces éléments x. Notons que (7.3) $\Rightarrow b \leq nm$. Soit donc un triplet (a,b,c) satisfaisant aux conditions (7.5) extraites des conditions (7.3) et complétées par $b \leq nm$

$$\begin{cases} 1 \leq a \leq m\,, \quad (a,m) = 1 \\ b \mid (nm+1)\,, \quad b \leq nm\,, \quad (b,c) = 1\,. \end{cases} \tag{7.5}$$

Les conditions (7.3) seront satisfaites dès lors que $(nm+1) \nmid bx$ et $1 \leq cx \leq N$.

On définit β par $b\beta = nm+1$. La condition que $(nm+1)$ ne divise pas bx est équivalente à $\beta \nmid x$. D'où :

$\beta \nmid a \Rightarrow x = a$ convient

$\beta \mid a \Rightarrow \beta \nmid (a+m)$ car $(a,m) = 1 \Rightarrow x = a+m$ convient.

Les couples (q,s) qui satisfont aux conditions (7.1) sont ceux qui sont définis par (7.4), par les triplets (a,b,c) qui vérifient(7.5), par la valeur de x qui vient d'être obtenue, et par la condition (7.6) qui en découle :

$$\begin{cases} \beta \text{ étant défini par } b\beta = (nm+1) \\ \text{si } \beta \nmid a \text{ alors } ac \leq N \\ \text{si } \beta \mid a \text{ alors } c(a+m) \leq N\,. \end{cases} \tag{7.6}$$

En résumé, le PPCM $M(N,T,\mathbf{P})$ est le produit des $\phi(q,s,m,T)$ tels que $bq = c(nm+1)$ et $abs \equiv r \bmod m$, les paramètres a, b et c satisfaisant aux relations (7.5) et (7.6).

Limite $r(\mathbf{P})$

$$\text{Degré } M(N,P,\mathbf{P}) = \sum_{\substack{1\le a\le m\\ (a,m)=1}} \sum_{\substack{\beta\ge 2\\ \beta|(nm+1)}} \sum_{\substack{1\le c\le h\\ (c,b)=1}} \frac{\varphi(c\beta m)}{\varphi(m)},$$

où les paramètres b et h sont définis par :

$$\begin{cases} \beta\nmid a \Rightarrow h = N/a \\ \beta \mid a \Rightarrow h = N/(a+m) \\ b\beta = nm+1\,. \end{cases}$$

Avec ces définitions : d'après le lemme 1 :

$$\sum_{\substack{1\le c\le h\\ (c,b)=1}} \frac{\varphi(c\beta m)}{\varphi(m)} = \frac{3\beta m h^2\,\Omega_1(\beta m b)\varphi(d)}{\pi^2 d\varphi(m)} + \mathrm{O}(h\log h),$$

où $d = (\beta m, b) = (\beta, b)$ car $(b,m) = 1$,

$$b\beta = nm+1 \Rightarrow (b\beta, m) = 1 \Rightarrow \Omega_1(\beta mb) = \Omega_1(m)\Omega_1(nm+1)$$

$$\begin{cases} h = N/a \text{ ou } N/(m+a) \\ 1\le a\le m \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{O}(h\log h) = \mathrm{O}(N\log N)\,.$$

D'où l'expression du degré de $M(N,T,\mathbf{P})$:

$$\text{degré } M(N,T,\mathbf{P}) = \frac{nmN^2 Z(n,m)}{2} + \mathrm{O}(N\log N)$$

avec

$$Z(n,m) = \frac{6\Omega_1(m)\Omega_1(nm+1)}{n\varphi(m)\pi^2} \sum_{a=1}^{m} \sum_{\substack{\beta\ge 2\\ \beta|(nm+1)}} \frac{\beta\varphi(d)}{k^2 d},$$

où

$$\begin{cases} b\beta = nm+1 & d = (b,\beta) \\ k = a & \text{si } \beta\nmid a \\ k = a+m & \text{si } \beta\mid a. \end{cases}$$

La condition résulte de cette estimation de degré $M(N, T, \mathbf{P})$ et de

$$\text{degré } \Pi(N, T, \mathbf{P}) = \sum_{1 \leq k \leq N} knm = \frac{nmN^2}{2} + O(N).$$

12. Démonstration du corollaire 3

Le corollaire est le théorème 3 pour $m = 1$, avec le changement de paramètre $n \to n - 1$. On note que le paramètre a prend uniquement la valeur $a = 1$, que β est diviseur de n et qu'il ne divise pas $a = 1$, qu'en conséquence h est alors égal à N, que le paramètre b est défini par $b\beta = n$, que $s = r = 1$, et enfin que $\phi(k, 1, 1, T) = \phi_k(T)$ pour tout entier k. D'où l'expression (11) du PPCM.

Quant à la relation (12), elle n'est que l'application de la relation (10) au cas $m \to 1$ et $n \to n - 1$. On note que le paramètre a ne prend que la valeur $a = 1$. D'où :

$$r(\mathbf{P}) = \frac{6\Omega_1(1)\Omega_1(n)}{(n-1)\pi^2} \sum_{a=1} \sum_{\beta \geq 2} \frac{\beta\varphi(d)}{k^2 d}, \tag{10}$$

où

$$b\beta = n, \quad d = (b, \beta), \quad \beta \nmid a \Rightarrow k = 1.$$

On fait le changement d'indice $\beta \to k = m/\beta$ pour obtenir la relation (12). Enfin, pour établir l'identité avec la relation obtenue par J.-P. Bezivin dans [5], il suffit de noter que si d est le PGCD des entiers x et y, alors $\varphi(d)\varphi(xy) = d\varphi(x)\varphi(y)$.

13. Remarques et questions ouvertes

Dans cette partie, on se propose de présenter le lien entre l'étude faite et le problème du PPCM de suites récurrentes binaires.

Soient a et b deux entiers relatifs, premiers entre eux, et les racines α et β de l'équation $t^2 = at + b$. On suppose que $\alpha\beta$ n'est pas nul, et que α/β n'est pas racine de l'unité. Soit $\mathbf{U}$ une suite d'éléments $u(n)$ de $\mathbb{Z}^*$ telle que $u(n+2) = au(n+1) + bu(n)$.

Ces entiers s'écrivent $u(n) = c(\alpha^n - w\beta^n) = cQ(\alpha^n, \beta^n)$ où $Q(X,Y) = X - wY$ est le polynôme homogène associé à $P(T) = T - w$.

Notons que si w est une racine imaginaire de l'unité, alors w est égal à $\pm i$, $\pm j$ ou $\pm j^2$ et α et β appartiennent à $\mathbb{Z}[w]$.

La connaissance du PPCM des polynômes $P(T), \ldots, P(T^n)$ renseigne en partie sur le PPCM des nombres $u(1), \ldots, u(n)$. On peut penser que la spécialisation $T \to \alpha/\beta$ modifie peu la situation et donc que le rapport entre les degrés du PPCM et du produit des n premiers polynômes d'une part, et le rapport entre les logarithmes du PPCM et du produit des n premiers éléments de $\mathbf{U}$ d'autre part, convergeront en même temps et vers la même limite (si elle existe) lorsque n tend vers l'infini.

Notons qu'une modification finie de $\mathbf{U}$ est sans incidence pour ce problème, et qu'on peut donc décaler les indices. Le terme w est donc défini à un facteur α^k/β^k près. Avec cette convention quant à la définition de w, et compte tenu de l'étude ici faite et de l'hypothèse avancée quant au parallèle entre les suites de polynômes et les suites arithmétiques, les questions suivantes se posent immédiatement.

1) Si w n'est pas racine de l'unité, a-t-on $r(\mathbf{U}) = 1$?

   Cette question est, à la connaissance de l'auteur, ouverte.

2) Si $w = +1$, a-t-on $r(\mathbf{U}) = 6/\pi^2$?

   Réponse : oui (voir [1], [2], [3])

   $\mathbf{U}$ est la suite de Fibonacci définie par :

$$u(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

3) Si $w = -1$, a-t-on $r(\mathbf{U}) = 8/\pi^2$?

   Réponse : oui (voir [5])

   $\mathbf{U}$ est la suite de Lucas définie par :

$$u(n) = \alpha^n + \beta^n.$$

4) Si $w = \pm i$, $\pm j$, $\pm j^2$, a-t-on pour $r(\mathbf{U})$ les valeurs obtenues dans le corollaire 1?

$$\frac{80}{9\pi^2}, \quad \frac{135}{16\pi^2}, \quad \frac{234}{25\pi^2}.$$

Dans un article en cours de rédaction, l'auteur a pu montrer que, pour ces valeurs de w, pour α et β premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[w]$

et, pour les suites **P** étudiées dans cette note, la suite **U** définie par $u(k) = cP(\alpha, \beta)$ (où c est un facteur tel que $u(k) \in \mathbb{Z}^*$) vérifie $r(\mathbf{U}) = r(\mathbf{P})$.

Ceci est en particulier vrai pour la suite **U** définie par $u(n) = c(\alpha^n - w\beta^n)$. Sous réserve d'une étude plus approfondie, il semble que ceci puisse être étendu à d'autres valeurs de w.

Notons que des suites **P** et **U** associées par $u(n) = P_n(x)$ peuvent être telles que $r(\mathbf{U}) = r(\mathbf{P})$ sans que le logarithme de $M(N, \mathbf{U})$ soit équivalent au degré de $M(N, T, \mathbf{P})$. Un exemple est donné par $u(n) = \phi_n(\pm 1)$. L'étude de la suite $\phi_n(x)$, pour $x \in \mathbb{Z}^*$ et différent de ± 1, se heurte aux mêmes difficultés que celle de la suite $\alpha^n - w\beta^n$ lorsque w n'est pas racine de l'unité.

Enfin, on peut signaler qu'il ne semble pas qu'il existe une étude du problème polynomial général et, en particulier, des suites définies par $p_k(T) = P(T^k)$. De même, l'étude de ce problème dans le cas de plusieurs variables permettrait d'aborder l'étude du PPCM de suites récurrentes de longueur supérieure à 2.

14. Bibliographie

[1] MATIYASEVICH (Y. V.) et RICHARD (K. G.) .— *A new formula for π*, American Mathematic Monthly **93** (1986), pp. 631-635.

[2] DAVIS (M.) .— *Hilbert's tenth problem is unsolvable*, American Mathematic Monthly **80** (1973), pp. 233-269.

[3] KISS (P.) et MATYAS (F.) .— *An asymptotic formula for π*, Journal of Number Theory **31** (1989), pp. 255-259.

[4] AKIYAMA (S.) .— *Lehmer numbers and as asymptotic formula for π*, Journal of Number Theory **36** (1990), pp. 328-331.

[5] BÉZIVIN (J.-P.) .— *Plus petit commun multiple des termes consécutifs d'une suite récurrente linéaire*, Collectanea Mathematica **40**, n° 1 (1989), pp. 1-11.

[6] JONES (J. P.) et KISS (P.) .— *An asymptotic formula concerning Lehmer numbers*, à paraître.

[7] APOSTOL (T. M.) .— *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag (1976).