

EL HAJ LAAMRI

Étude de l'existence de solutions globales d'un système de réaction-diffusion parabolique fortement non linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 12, n° 3 (1991), p. 373-390

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_3_373_0

© Université Paul Sabatier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Étude de l'existence de solutions globales d'un système de réaction-diffusion parabolique fortement non linéaire

EL HAJ LAAMRI⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, nous étudions l'existence de solutions globales en temps du système :

$$(S) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta(u_i)^{\sigma_i+1} = \sum_{j=1}^d c_{ij} \cdot u_j^{\alpha_{ij}} + c_i & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ u = 0 & \text{sur }]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u_i(0, x) = u_{0,i}(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N , $\sigma_i > 0$; α_{ij} , c_{ij} , c_i et $u_{0,i} \geq 0$.

Ainsi, nous montrons que :

- 1) (S) admet une solution globale positive pour $u_{0,i} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega)$ et $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1 \forall 1 \leq i, j \leq d$.
- 2) L'existence globale de solutions de (S) dépend de la structure spatiale de Ω s'il existe j_0 tel que $\alpha_{ij_0} = \sigma_{j_0} + 1$ et $\alpha_{ij} \leq \sigma_j + 1 \forall j \neq j_0$, avec $1 \leq i, j, j_0 \leq d$.

ABSTRACT. — In this paper, we study the existence of global solutions of the following system:

$$(S) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta(u_i)^{\sigma_i+1} = \sum_{j=1}^d c_{ij} \cdot u_j^{\alpha_{ij}} + c_i & \text{in }]0, \infty[\times \Omega \\ u = 0 & \text{on }]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u_i(0, x) = u_{0,i}(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

⁽¹⁾ Université de Nancy I, Département de Mathématiques, BP 239,
54506 Vandoeuvre Les Nancy.
Université de Reims, I.U.T. de Reims, Département de G.E.A., BP : 257,
51059 Reims Cedex.

where Ω is a bounded open subset of \mathbb{R}^N with a regular boundary; $\sigma_i > 0$; α_{ij}, c_{ij}, c_i et $u_{0,i} \geq 0$.

We establish that:

- 1) (S) has nonnegative global solution for $u_{0,i} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega)$ when $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1 \forall 1 \leq i, j \leq d$.
 - 2) Global existence of solutions of (S) depends on the spatial structure of Ω if there exists j_0 such that $\alpha_{ij_0} = \sigma_{j_0} + 1$ and $\alpha_{ij} \leq \sigma_j + 1 \forall j \neq j_0$, where $1 \leq i, j, j_0 \leq d$.
-

Introduction

Dans tout ce qui suit, Ω sera un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière régulière. Galaktinov a étudié dans [G] l'existence globale en temps des solutions du problème :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^{\sigma+1}) = u^\beta & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{dans }]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où σ et β sont des réels strictement positifs.

Il a prouvé que l'existence globale et la "non existence" globale dépendent essentiellement de la relation entre σ et β , de la dimension N et de la donnée initiale u_0 .

Nakao [N] a étudié le même problème avec une méthode différente et a établi les mêmes résultats.

Puis, Galaktinov, Kurdyumov et Samarskii [GKS] ont étudié l'existence globale du système :

$$(S1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^{\sigma_1+1}) = v^p & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta(v^{\sigma_2+1}) = u^q & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ u(t, x) = v(t, x) = 0 & \text{dans }]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x); v(0, x) = v_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $\sigma_1, \sigma_2 > 0$; $1 < p \leq \sigma_2 + 1$ et $1 < q \leq \sigma_1 + 1$.

Ensuite, Maddalena [M] a établi l'existence globale en temps des solutions positives du système :

$$(S2) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta(u_i)^{\sigma_i+1} = f_i(u_1, u_2, \dots, u_d) & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ u_i(t, x) = 0 & \text{dans }]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u_i(0, x) = u_{0,i}(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où

- $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$; $f_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \dots, r_d) \geq 0$,
 $\forall r_j \in \mathbb{R}_+$.
- $f_i(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq \sum_{j=1}^d c_{ij} \cdot u_j^{\alpha_{ij}} + c_i$, avec $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$; $c_i, c_{ij} \geq 0$,
 pour $1 \leq i, j \leq d$.
- $u_{0,i} \in L^\infty(\Omega)$ et $u_{0,i} \geq 0$ pour $1 \leq i \leq d$.

Dans ce papier, on va étudier l'existence et la non existence des solutions globales en temps du système suivant :

$$(S3) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta(u_i)^{\sigma_i+1} = \sum_{j=1}^d c_{ij} \cdot u_j^{\alpha_{ij}} + c_i & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ u_i^{\sigma_i+1}(t, x) \in H_0^1(\Omega) & t > 0 \\ u_i(0, x) = u_{0,i}(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où

- $\alpha_{ij} \leq \sigma_j + 1$, $c_i, c_{ij} \geq 0$, pour $1 \leq i, j \leq d$;
- les données initiales ne sont pas nécessairement bornées.

Dans la section 1, on donne une démonstration simple du résultat dû à Maddalena sous l'hypothèse plus faible $u_{0,i} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq d$.

Dans la section 2, on étudie le cas où il existe j_0 tel que $\alpha_{ij_0} = \sigma_{j_0} + 1$ et $\alpha_{ij} \leq \sigma_j + 1 \forall j \neq j_0$, avec $1 \leq i, j, j_0 \leq d$. Ainsi, on montre que l'existence globale en temps et l'explosion en temps fini des solutions du système (S3) dépendent de la structure spatiale de Ω .

1. Existence globale dans le cas où $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$

THÉORÈME 1. — *On suppose :*

- $u_{0,i} \in L^{\sigma_i+2}$ et $u_{0,i} \geq 0, \forall 1 \leq i \leq d$;
- $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1, \forall 1 \leq i, j \leq d$.

Alors :

- 1) le système (S3) admet une solution globale positive et on a pour tout $T > 0$:

$$u_i \in L^\infty(0, T; L^{\sigma_i+2}(\Omega)), \quad \forall 1 \leq i \leq d, \quad (1.1)$$

$$(u_i)^{\sigma_i+1} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \forall 1 \leq i \leq d; \quad (1.2)$$

- 2) si de plus, $u_{0,i}$ est telle que $(u_{0,i})^{\sigma_i+1} \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\alpha_{ij} \leq \frac{(\sigma_j + 1)(\sigma_i + 2)}{2(\sigma_i + 2)}$$

chaque fois que $c_{ij} > 0$ pour $i \neq j$, on a pour tout $T > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (u_i)^{1+\frac{\sigma_i}{2}} \right\} \in L^2((0, T) \times \Omega) \quad (1.3)$$

$$(u_i)^{\sigma_i+1} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (1.4)$$

Démonstration. — L'existence d'une solution locale du système (S3) est classique (voir par exemple [H]) ou [L]). De plus, puisque $u_{0,i} \geq 0$ alors $u_i(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$.

- 1) Pour montrer l'existence globale, on considère la fonction numérique $f_{i,n}$ définie sur \mathbb{R}^d par :

$$f_{i,n}(r) := \min \left(c_i + \sum_{j=1}^d c_{ij} r_j^{\sigma_j+1} ; n \right)$$

et le système approché suivant :

$$(S_0) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ \frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} - \Delta(u_{i,n}^{1+\sigma_i}) = f_{i,n}(u_{1,n}, \dots, u_{d,n}) & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ u_{i,n}(t, x) = 0 & \text{sur }]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u_{i,n}(0, x) = u_{i,0}(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le système (S0) admet une solution globale positive ou nulle (voir par exemple [L]).

Soit $T > 0$ arbitraire. Multiplions la i -ème équation de (S0) par $u_{i,n}^{1+\sigma_i}$ et intégrons le résultat sur Q_T où $Q_T :=]0, T[\times \Omega$. On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,n}(T)\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & \leq c \iint_{Q_T} u_{i,n}^{\sigma_i+1} dt dx + c \sum_{j=1}^d \iint_{Q_T} u_{j,n}^{\sigma_{ij}} u_{i,n}^{\sigma_i+1} dt dx + \quad (1) \\ & \quad + \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,0}\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i}, \end{aligned}$$

où $c := \max\{c_{ij}, c_i, 1 \leq i, j \leq d\}$.

D'après l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} c \cdot u_{i,n}^{\sigma_i+1} dt dx & \leq C(T, \Omega, \epsilon, \lambda_1, c) + \epsilon \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{\sigma_i+1}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \\ \iint_{Q_T} c \cdot u_{i,n}^{\sigma_i+\alpha_{ii}+1} dt dx & \leq C(T, \Omega, \epsilon, \sigma_i, \alpha_{ii}, \lambda_1, c) + \\ & \quad + \epsilon \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d c \cdot \iint_{Q_T} u_{j,n}^{\alpha_{ij}} \cdot u_{i,n}^{\sigma_i+1} dt dx \leq \\ & \leq (d-1)\epsilon \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \int_0^T \|\nabla u_{j,n}^{1+\sigma_j}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & \quad + C(\sigma_1, \dots, \sigma_d, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{dd}, T, c, \Omega, \epsilon, \lambda_1), \end{aligned}$$

où λ_1 désigne la première valeur propre de

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda \cdot w & \text{dans } \Omega \\ w \in H_0^1(\Omega) \\ w \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, d'après les inégalités précédentes, (1) entraîne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,n}(T)\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + (1 - (d+1)\epsilon) \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,0}\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \int_0^T \|\nabla u_{j,n}^{1+\sigma_j}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + C(\sigma_1, \dots, \sigma_d, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{dd}, T, c, \Omega, \epsilon, \lambda_1). \end{aligned} \quad (2)$$

En faisant la somme sur i des inégalités (2), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,n}(T)\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + (1 - 2d\epsilon) \sum_{i=1}^d \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,0}\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + \\ & + C(\sigma_1, \dots, \sigma_d, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{dd}, T, c, \Omega, \epsilon, \lambda_1). \end{aligned} \quad (3)$$

En choisissant ϵ tel que $0 < \epsilon < 1/2d$ dans (3), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ et indépendante de n telle que : $\forall 1 \leq i \leq d$

$$\|u_{i,n}(T)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)}^{\sigma_i+2} \leq C, \quad (4)$$

et

$$\int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C. \quad (5)$$

D'après (4), pour presque tout $s \in [0, T]$ la suite $\{u_{i,n}(s)\}$ est bornée dans $L^{\sigma_i+2}(\Omega)$, donc on peut en extraire une sous-suite, qu'on note aussi $u_{i,n}(s)$, qui converge faiblement vers $u_i(s)$ dans $L^{\sigma_i+2}(\Omega)$. De plus, en vertu de (5) et la compacité de l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut re-extraire de la sous-suite précédente une sous-suite, encore notée $u_{i,n}$, telle que $u_{i,n}^{1+\sigma_i}$ converge vers $u_i^{1+\sigma_i}$ fortement dans $L^2(Q_T)$ presque partout, et $\nabla(u_{i,n}^{1+\sigma_i})$ converge faiblement vers $\nabla(u_i^{1+\sigma_i})$ dans $(L^2(Q_T))^d$.

Par ailleurs, $L^2(Q_T) \subset L^1(Q_T)$ et $\alpha_{ij} < 1 + \sigma_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$, donc pour n assez grand $f_{i,n}(u_{1,n}, \dots, u_{d,n}) = \sum_{j=1}^d c_{ij} u_{j,n}^{\alpha_{ij}} + c_i$ converge vers $\sum_{j=1}^d c_{ij} u_j^{\alpha_{ij}} + c_i$ dans $L^1(Q_T)$. De plus, on a :

$$\|u_i(s)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)} \leq \liminf_n \|u_{i,n}(s)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)} \leq C \quad \text{p.p., } s \in [0, T]$$

et

$$\|\nabla u_i^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(Q_T)} \leq \liminf_n \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(Q_T)} \leq C.$$

D'où (1.1) et (1.2). \square

On conclut que $u = (u_1, \dots, u_d)$ est solution de (S3) grâce au résultat suivant [B].

THÉORÈME . — Soient $T > 0$ et $\sigma > 0$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : L^1(\Omega) \times L^1(Q_T) & \longrightarrow & L^1(Q_T) \\ (v_0, g) & \longrightarrow & v \end{array}$$

où v est la bonne solution de :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} - \Delta(v^{\sigma+1}) = g & \text{sur }]0, T[\\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

est compacte et est continue de $L^1(\Omega) \times L^1(Q_T)$ dans $\mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega))$.

2) Maintenant, on va démontrer (1.3) et (1.4). Soient $T > 0$ arbitraire et $t \in [0, T]$. Multiplions la i -ème équation du système (S0) par $\partial/\partial t(u_{i,n}^{1+\sigma_i})$ et intégrons le résultat sur $]0, t[\times \Omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{4(\sigma_i + 1)}{(\sigma_i + 2)^2} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} \{u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s)\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{0,i}^{1+\sigma_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\sigma_i + 1}{\alpha_{ii} + \sigma_i + 1} c_{ii} \int_{\Omega} u_{i,n}^{\alpha_{ii} + \sigma_i + 1}(t, x) dx + \\ & + c_i \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i + 1}) ds dx + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d c_{ij} \int_0^t \int_{\Omega} c_{ij} u_{j,n}^{\alpha_{ij}} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i + 1}) ds dx. \end{aligned} \tag{6}$$

D'après l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_i + 1}{\alpha_{ii} + \sigma_i + 1} c_{ii} \int_{\Omega} u_{i,n}^{\alpha_{ii} + \sigma_i + 1}(t) \, dx &\leq \\ &\leq C(\epsilon, \lambda_1, \sigma_i, \alpha_{ii}, c_{ii}, \Omega) + \epsilon \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$c_i \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i + 1}) \, ds \, dx \leq \frac{c_i^2 \text{mes}(\Omega)}{\epsilon \lambda_1} + \epsilon \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} c_{ij} u_{j,n}^{\alpha_{ij}} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i + 1}) \, ds \, dx &\leq \\ &\leq \frac{4\sigma_i}{(\sigma_i + 2)^2} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1 + \frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds + \\ &+ \frac{(\sigma_i + 1)^2 c_{ij}^2}{\sigma_i} \int_0^t \int_{\Omega} u_{j,n}^{2\alpha_{ij}} u_{i,n}^{\sigma_i} \, ds \, dx, \end{aligned} \quad (9)$$

or,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} u_{j,n}^{2\alpha_{ij}} u_{i,n}^{\sigma_i} \, ds \, dx &\leq \frac{\sigma_i}{2(\sigma_i + 1)} \int_0^t \int_{\Omega} u_{i,n}^{2(\sigma_i + 1)} \, ds \, dx + \\ &+ \frac{2 + \sigma_i}{2(\sigma_i + 1)} \int_0^t \int_{\Omega} u_{j,n}^{\frac{4\alpha_{ij}(\sigma_i + 1)}{\sigma_i + 2}} \, ds \, dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Comme $\alpha_{ij} \leq ((\sigma_i + 2)(\sigma_j + 1))/2(\sigma_i + 1)$, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{j,n}^{\frac{4\alpha_{ij}(\sigma_i + 1)}{\sigma_i + 2}} \, ds \, dx \leq C_1 \cdot T + C_2 \int_0^t \|\nabla u_{j,n}^{1+\sigma_j}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds. \quad (11)$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{i,n}^{2(\sigma_i + 1)} \, ds \, dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds. \quad (12)$$

Ainsi, en vertu de (7), (8), (9), (10), (11) et (12), l'inégalité (6) entraîne

$$\begin{aligned} \frac{4}{(\sigma_i + 2)^2} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1 + \frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds + \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon \right) \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{0,i}^{1+\sigma_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3 + C_4 \int_0^t \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds + \\ &+ C_5 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \int_0^t \|\nabla u_{j,n}^{1+\sigma_j}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds. \end{aligned} \quad (13)$$

En faisant la somme sur i des inégalités (13), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{4}{(\sigma_i + 2)^2} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon \right) \sum_{i=1}^d \left\| \nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \quad (14) \\ & \leq C_6 + C_7 \int_0^t \sum_{i=1}^d \left\| \nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ et C_7 désignent des constantes strictement positives et indépendantes de n .

En choisissant ϵ tel que $0 < \epsilon < 1/4$ dans (14) et en y appliquant l'inégalité de Gronwall, on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ et indépendante de n telle que :

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C, \quad (15)$$

et

$$\left\| \nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \quad (16)$$

Par ailleurs, on sait d'après (4) qu'il existe une sous-suite $\{u_{i,n}\}$ telle que :

$$u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}} \rightharpoonup u_i^{1+\frac{\sigma_i}{2}} \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad (17)$$

et d'après (15), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}} \right\} \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t} \left\{ u_i^{1+\frac{\sigma_i}{2}} \right\} \quad \text{dans } L^2(Q_T). \quad (18)$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & \leq \liminf_n \int_0^T \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C. \end{aligned} \quad (19)$$

D'autre part, on a d'après (5) et (16) :

$$\|\nabla u_i^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_n \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{p.p., } t \in [0, T]. \quad (20)$$

L'inégalité (19) (resp. (20)) n'est autre que (1.3) (resp. (1.4)). Ce qui achève la démonstration du théorème 1. \square

2. Existence et non existence de solutions globales dans le "cas limite"

THÉORÈME 2. — *On suppose que $\alpha_{ij} = \sigma_j + 1$, $u_{0,i} \geq 0$ et $c_{ij} > 0$, $\forall 1 < i, j \leq d$. Alors :*

1) *si $\lambda_1 > d \max_{1 \leq i, j \leq d} (c_{ij})$ et $u_{0,i} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq d$, le système (S3) admet une solution globale positive et on a pour tout $T > 0$ (1.1) et (1.2); si de plus, $u_{0,i}$ est elle que $(u_{0,i})^{\sigma_i+1} \in H_0^1(\Omega)$, on a pour tout $T > 0$ (1.3) et (1.4);*

2) *si $\lambda_1 < \min \left\{ \sum_{i=1}^d c_{ij}; 1 \leq j \leq d \right\}$, il existe $T^* > 0$ fini tel que :*

$$\lim_{t \nearrow T^*} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d u_i(t, x) \cdot w_1(x) dx = +\infty, \quad (2.1)$$

où w_1 désigne la première fonction propre associée à λ_1 .

Démonstration. — L'existence d'une solution locale du système (S3) est classique (voir par exemple [H] ou [L]). De plus, puisque $u_{0,i} \geq 0$ alors $u_i(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$.

1) $\lambda_1 > d \max_{1 \leq i, j \leq d} (c_{ij})$

Pour montrer l'existence globale, on considère la fonction numérique $f_{i,n}$ définie sur \mathbb{R}^d par :

$$f_{i,n}(r) := \min \left(c_i + \sum_{j=1}^d c_{ij} r_j^{\sigma_j+1}; n \right)$$

et le système approché suivant :

$$(Sa) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ \frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} - \Delta(u_{i,n}^{1+\sigma_i}) = f_{i,n}(u_{1,n}, \dots, u_{d,n}) & \text{dans }]0, \infty[\times \Omega \\ u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t) \in H_0^1(\Omega) & t > 0 \\ u_{i,n}(0, x) = u_{i,0}(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le système (Sa) admet une solution globale positive ou nulle (voir par exemple [L]).

Soit $T > 0$ arbitraire. Multiplions la i -ème équation de (Sa) par $u_{i,n}^{1+\sigma_i}$, intégrons sur Q_T et faisons la somme. On obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,n}(T)\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + \sum_{i=1}^d \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^d c_i \iint_{Q_T} u_{i,n}^{\sigma_i+1} ds dx + \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^d c_{ij} \iint_{Q_T} u_{j,n}^{\sigma_j+1} u_{i,n}^{\sigma_i+1} ds dx + \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,0}\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i}. \end{aligned} \tag{21}$$

D'après l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d c_i \iint_{Q_T} u_{i,n}^{\sigma_i+1} ds dx \leq \\ & \leq C(T, \Omega, \epsilon, \lambda_1) \sum_{i=1}^d c_i^2 + \epsilon \sum_{i=1}^d \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \tag{22}$$

et

$$\sum_{i,j=1}^d c_{ij} \iint_{Q_T} u_{j,n}^{\sigma_j+1} u_{i,n}^{\sigma_i+1} ds dx \leq \frac{d \cdot M_1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^d \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \tag{23}$$

où l'on pose

$$M_1 := \max_{1 \leq i, j \leq d} (c_{ij}).$$

En vertu de (22) et (23), l'inégalité (21) entraîne :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,n}(T)\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + \\ & + \left(\frac{\lambda_1 - d \cdot M_1}{\lambda_1} - \epsilon \right) \sum_{i=1}^d \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \quad (24) \\ & \leq \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,0}\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + C(T, \Omega, \epsilon, \lambda_1) \sum_{i=1}^d c_i^2. \end{aligned}$$

En choisissant ϵ tel que $0 < \epsilon < (\lambda_1 - d \cdot M_1)/\lambda_1$ dans (24), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ et indépendante de n telle que (4) et (5) et on conclut comme dans le théorème 1.

Maintenant, montrons que si de plus $u_{0,i}$ est telle que $(u_{0,i})^{\sigma_i+1} \in H_0^1(\Omega)$, on a pour tout $T > 0$ (1.3) et (1.4). Pour cela, on commence par faire exactement la même chose que dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 1 en remplaçant dans (6) α_{ij} par $\sigma_j + 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$. Puis en faisant la somme sur i , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{4}{(\sigma_i + 2)^2} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} \{u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s)\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \quad (25) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \|\nabla u_{0,i}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d c_i \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i+1}) ds dx + \\ & + \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \int_{\Omega} c_{ij} u_{j,n}^{\alpha_{ij}} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i+1}) ds dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, on a :

$$\sum_{i=1}^d c_i \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i+1}) ds dx \leq \sum_{i=1}^d \frac{c_i^2 \text{mes}(\Omega)}{\epsilon \lambda_1} + \sum_{i=1}^d \epsilon \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (26)$$

D'après l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \int_{\Omega} c_{ij} u_{j,n}^{\alpha_{ij}} \frac{\partial}{\partial s} (u_{i,n}^{\sigma_i+1}) ds dx \leq \frac{d \cdot M_1}{2\lambda_1} \sum_{i=1}^d \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (27)$$

D'où, en vertu de (26) et (27), (25) entraîne :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{4}{(\sigma_i + 2)^2} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + \left(\frac{\lambda_1 - d \cdot M_1}{2\lambda_1} - \epsilon \right) \sum_{i=1}^d \left\| \nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \quad (28) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \left\| \nabla u_{0,i}^{1+\sigma_i}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \frac{c_i^2 \text{mes}(\Omega)}{\epsilon \lambda_1}. \end{aligned}$$

En choisissant ϵ tel que $0 < \epsilon < (\lambda_1 - d \cdot M_1)/2\lambda_1$ dans (28), on en déduit qu'il existe une constante C strictement positive et indépendante de n telle que :

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s) \right\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C, \quad (29)$$

et

$$\left\| \nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{p.p.}, t \in [0, T]. \quad (30)$$

Or, (29) et (30) ne sont autres que (15) et (16). Donc, on conclut comme dans le théorème 1.

$$2) \quad \lambda_1 < \min \left\{ \sum_{i=1}^d c_{ij}; 1 \leq j \leq d \right\}$$

Montrons (2.1). Pour cela, multiplions chaque équation de (S3) par w_1 et intégrons le résultat sur $]0, t[\times \Omega$ où t est un réel strictement positif quelconque, puis faisons la somme sur i . On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d u_i(t) \cdot w_1 dx + \lambda_1 \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} w_1 \cdot u^{\sigma_i+1} dx = \\ & = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d u_{0,i} \cdot w_1 dx + t \|w_1\|_{L^1(\Omega)} \sum_{i=1}^d c_i + \quad (31) \\ & + \sum_{i=1}^d \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{k=1}^d c_{ik} \cdot w_1 \cdot u_k^{\sigma_k+1} ds dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\sum_{i,k=1}^d c_{ik} \cdot w_1 \cdot u_k^{\sigma_k+1} \geq M_2 \cdot \sum_{k=1}^d w_1 \cdot u_k^{\sigma_k+1}, \quad (32)$$

où l'on pose

$$M_2 := \min \left\{ \sum_{i=1}^d c_{ij}; 1 \leq j \leq d \right\},$$

et d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\int_{\Omega} w_1 \cdot u_i^{\sigma_i+1}(s) \, dx \geq \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma_i} \left(\int_{\Omega} w_1 \cdot u_i(s) \, dx \right)^{\sigma_i+1},$$

d'où

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_1 \cdot u_i^{\sigma_i+1}(s) \, ds \, dx \geq \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma_i} \int_0^t \left(\int_{\Omega} w_1 \cdot u_i(s) \, dx \right)^{\sigma_i+1} \, ds. \quad (33)$$

Posons

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \min_{1 \leq i \leq d} \left(\|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma_i} \right) \\ \gamma &:= \min_{1 \leq i \leq d} (\sigma_i + 1) \\ A_i &:= \left\{ s \in \mathbb{R}_+^* \mid \left(\int_{\Omega} w_1 \cdot u_i(s, x) \, dx \right) > 1 \right\} \end{aligned}$$

et

$$g(s) := \sum_{i=1}^d \left(\int_{\Omega} w_1 \cdot u_i(s, x) \, dx \right) \mathbf{1}_{A_i}.$$

En vertu de (32) et (33), (31) entraîne :

$$g(t) \geq \frac{M_2 - \lambda_1}{d^{\gamma-1}} \beta_1 \int_0^t (g(s))^{\gamma} \, ds + C. \quad (34)$$

Comme $\gamma > 1$, (34) entraîne qu'il existe $T^* > 0$ fini tel que :

$$\lim_{t \nearrow T^*} g(t) = +\infty,$$

d'où (2.1). \square

Remarque. — Lorsque $\alpha_{ij} = \sigma_j + 1$, $c_{ij} = 1$ pour $1 \leq i, j \leq d$ et $\lambda_1 = d$, on n'a qu'une seule estimation a priori qui ne nous permet pas de passer à la limite.

THÉORÈME 3. — *On suppose que :*

- $\alpha_{ii} = \sigma_i + 1$, $c_{ii} > 0$ et $u_{0,i} \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$;
- $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$ et $i \neq j$.

Alors :

- 1) si $\lambda_1 > \max_{1 \leq i \leq d} (c_{ii})$ et $u_{0,i} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega)$, le système (S3) admet une solution globale positive et on a (1.1) et (1.2); si de plus, $u_{0,i}$ est telle que

$$(u_{0,i})^{\sigma_i+1} \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \alpha_{ij} \leq \frac{(\sigma_j + 1)(\sigma_i + 2)}{2(\sigma_i + 2)}$$

chaque fois que $c_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$ et $i \neq j$, on a pour tout $T > 0$ (1.3) et (1.4);

- 2) si $\lambda_1 < \min_{1 \leq i \leq d} (c_{ii})$ et (pour tout $1 \leq i, j \leq d$ et $i \neq j$, $c_{ij} > 0$ entraîne que $\alpha_{ij} > 1$), il existe $T^* > 0$ fini tel que (2.1).

Démonstration

- 1) $\lambda_1 > \max_{1 \leq i \leq d} (c_{ii})$

Pour montrer l'existence globale, on fait exactement la même chose que dans la première partie de la démonstration du théorème 1 en remplaçant α_{ii} par $(\sigma_i + 1)$. Ainsi, on a d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\iint_{Q_T} c_{ii} \cdot u_{i,n}^{2(\sigma_i+1)} dt dx \leq \frac{c_{ii}}{\lambda_1} \int_0^T \|\nabla u_{i,n}^{\sigma_i+1}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

et donc (3) devient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,n}(T)\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + \\ & + \left(\frac{\lambda_1 - M_3}{\lambda_1} - (2d - 1)\epsilon \right) \sum_{i=1}^d \int_0^T \|u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \quad (35) \\ & \leq \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i + 2} \|u_{i,0}\|_{L^{2+\sigma_i}(\Omega)}^{2+\sigma_i} + \\ & + C(\sigma_1, \dots, \sigma_d, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{dd}, T, \Omega, \epsilon, \lambda_1), \end{aligned}$$

où l'on pose :

$$M_3 := \max_{1 \leq i \leq d} (c_{ii}).$$

En choisissant ϵ tel que $0 < \epsilon < (\lambda_1 - M_3)/(2d - 1)\lambda_1$ dans (35), on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ et indépendante de n telle que (4) et (5) et on conclut comme dans le théorème 1.

Maintenant, montrons que si de plus $u_{0,i}$ est telle que $(u_{0,i})^{\sigma_i+1} \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq d$ et $\alpha_{ij} \leq ((\sigma_j + 1)(\sigma_j + 2))/2(\sigma_i + 2)$ chaque fois que $c_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$ et $i \neq j$, on a pour tout $T > 0$ (1.3) et (1.4). Pour cela, on commence par faire exactement la même chose que dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 1 en remplaçant dans (6) α_{ii} par $\sigma_i + 1$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Ainsi, (7) devient

$$\frac{c_{ii}}{2} \int_{\Omega} u_{i,n}^{2(\sigma_i+1)}(t) \, dx \leq \frac{c_{ii}}{2\lambda_1} \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (36)$$

et donc (14) devient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \frac{4}{(\sigma_i + 2)^2} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} \{u_{i,n}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}(s)\} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds + \\ & + \left(\frac{\lambda_1 - M_3}{2\lambda_1} - \epsilon \right) \sum_{i=1}^d \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \quad (37) \\ & \leq C_8 + C_9 \int_0^t \sum_{i=1}^d \|\nabla u_{i,n}^{1+\sigma_i}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds, \end{aligned}$$

où C_8 et C_9 désignent des constantes strictement positives et indépendantes de n .

En choisissant ϵ tel que $0 < \epsilon < (\lambda_1 - M_3)/2\lambda_1$ dans (37), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ et indépendante de n telle que (15) et (16) et on conclut comme dans le théorème 1.

$$2) \quad \lambda_1 < \min_{1 \leq i \leq d} (c_{ii})$$

Montrons (2.1). Pour cela, multiplions chaque équation de (S3) par w_1 et intégrons le résultat sur $]0, t[\times \Omega$ où t est un réel strictement positif quelconque, puis faisons la somme sur i . On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d u_i(t) \cdot w_1 \, dx &= \sum_{i=1}^d (c_{ii} - \lambda_1) \int_{\Omega} w_1 \cdot u_i^{\sigma_i+1} \, dx + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d u_{0,i} \cdot w_1 \, dx + t \|w_1\|_{L^1(\Omega)} \sum_{i=1}^d c_i + \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d c_{ij} \cdot w_1 \cdot u_j^{\alpha_{ij}} \, ds \, dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Par ailleurs, on a d'après l'inégalité de Hölder :

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_1 \cdot u_j^{\alpha_{ij}}(s) \, ds \, dx \geq \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{1-\alpha_{ij}} \int_0^t \left(\int_{\Omega} w_1 \cdot u_j(s) \, dx \right)^{\alpha_{ij}} \, ds. \quad (39)$$

Ainsi, en posant :

$$\begin{aligned} \beta_2 &:= \min_{\substack{1 \leq i, j \leq d \\ i \neq j}} \left(\|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{1-\alpha_{ij}} \right), \\ \alpha &:= \min_{\substack{1 \leq i, j \leq d \\ i \neq j}} (\alpha_{ij}), \\ A_i &:= \left\{ s \in \mathbb{R}_+^* \mid \left(\int_{\Omega} w_1 \cdot u_i(s, x) \, dx \right) > 1 \right\}, \end{aligned}$$

et

$$h(s) := \sum_{i=1}^d \left(\int_{\Omega} w_1 \cdot u_i(s, x) \, dx \right) \mathbf{1}_{A_i},$$

(38) entraîne en vertu de (39) et du fait que $\lambda_1 < \min_{1 \leq i \leq d} (c_{ii})$:

$$h(t) \geq \frac{c \cdot \beta_2}{d^{\alpha-1}} \int_0^t (h(s))^{\alpha} \, ds + C, \quad (40)$$

où C est une constante > 0 ne dépendant que des c_{ij} .

Comme $\alpha > 1$, (40) entraîne qu'il existe $T^* > 0$ fini tel que :

$$\lim_{t \nearrow T^*} h(t) = +\infty,$$

d'où (2.1). \square

Remerciements

Je voudrais remercier le rapporteur pour les modifications et les améliorations qu'il m'a proposées.

Références

- [B] BARAS (P.) .— *Compacité de l'opérateur $f \rightarrow u$ solution d'une équation non linéaire $(du/dt) + Au \ni f$* ,
C.R.A.S., A, **286** (1978) pp. 1113-1116.
- [G] GALAKTINOV (V.A.) .— *Boundary value problem for the non-linear parabolic equation $(\partial u/\partial t) - \Delta(u^{\sigma+1}) = u^{\beta}$* ,
Diff. Uravn. **17**, n° 5 (May 1981) pp. 836-842.
- [GKS] GALAKTINOV (V.A.), KURDYMOV (S.P.) and SAMARSKII (A.A.) .— *A parabolic system of quasilinear equations I*,
Diff. Uravn. **19**, n° 12 (December 1983) pp. 2123-2140.
- [H] HENRY (D.) .— *Geometric theory of semilinear parabolic equations*,
Lecture notes in Math., Springer Verlag, New-York, **840** (1981).
- [L] LAAMRI (E.) .— *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion dans L^1* ,
Thèse, Université de Nancy I, Juillet 1988.
- [M] MADDALENA (L.) .— *Existence of global solution for reaction-diffusion systems with density dependant diffusion*,
Non-linear Analysis, **8**, n° 11 (1984) pp. 1383-1394.
- [N] NAKAO (M.) .— *Existence, nonexistence and some asymptotic behaviour of global solutions of a non-linear degenerate parabolic equations*,
Math. Rep., College Gen. Ed. Kyushu Univ., 1983.