ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. BENKIRANE

# Approximations de type Hedberg dans les espaces $W^m L \log L(\Omega)$ et applications

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série*, tome 11, nº 2 (1990), p. 67-78

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_67_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 1990

# Approximations de type Hedberg dans les espaces $W^m L \log L(\Omega)$ et applications

A. BENKIRANE[1]

**RÉSUMÉ.** — Nous démontrons deux théorèmes d'approximation de type Hedberg dans l'espace de Sobolev-Orlicz $W^m L \log L(\Omega)$ où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Les résultats sont appliqués à certains problèmes aux limites elliptiques fortement non linéaires ainsi qu'au problème de Brézis-Browder sur l'action de certaines distributions du dual.

**ABSTRACT.** — Two approximation results of the Hedberg type are proved in the Orlicz-Sobolev Space $W^m L \log L(\Omega)$. When $\Omega$ is an open subset of $\mathbb{R}^2$.

Applications to the description of the action of some distributions in the dual as well as to some strongly non linear elliptic boundary value problems are mentioned.

**KEY-WORDS** : Orlicz and Orlicz-Sobolev Spaces – Strongly Non Linear Boundary Value Problem – Distributions

## 1. Introduction

Soient $m$ un entier $> 0$, $1 < p < +\infty$ et $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, $\Omega$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L. Hedberg a montré que l'on peut approcher $u$ dans $W_0^{m,p}(\Omega)$ par une suite $u_k \in W_0^{m,p} \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $|u_k| \leq |u|$, $u_k \cdot u \geq 0$ p.p. et $\operatorname{supp} u_k \Subset \Omega$ (voir [10] et [11]).

Ce type d'approximation s'est révélé particulièrement utile dans l'étude de certains problèmes aux limites elliptiques fortement non linéaires (voir

[1] Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Fes, B.P. 1796 Fes – Atlas, Maroc

[5] et [14]) et dans la caractérisation de l'action de certaines distributions du dual $W^{-m,p'}(\Omega)$ (voir [5]).

Récemment, J.P. Gossez et l'auteur ont étudié l'approximation de Hedberg et certaines de ses applications dans le cadre des espaces d'Orlicz-Sobolev $W^m L_A(\mathbb{R}^n)$ (voir [4]). Les résultats de [4] ont été obtenus en supposant la condition $\Delta_2$ à l'infini pour la $N$-fonction $A$ et sa conjuguée $\overline{A}$ (voir aussi [3]).

Cette restriction sur le type de croissance de $A$ à l'infini apparaît essentiellement lors de l'utilisation, dans la construction de l'approximation, du potentiel de Riesz et des intégrales singulières dans le cadre des espaces d'Orlicz.

Dans ce travail, nous nous proposons de montrer deux théorèmes d'approximation du type précédent dans $W^m L_A(\Omega)$ et $W_0^m L_A(\Omega)$ respectivement, lorsque $A$ est une $N$-fonction équivalente à $t \log t$ à l'infini et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Il est clair que $A$ (resp. $\overline{A}$) vérifie (resp. ne vérifie pas) la condition $\Delta_2$ à l'infini, de plus, dans la construction de cette approximation nous ne faisons aucunement appel au potentiel de Riesz ni aux intégrales singulières.

Nous mentionnerons aussi d'autres cas de $N$-fonctions pour lesquelles la présente construction peut être adaptée.

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Monsieur le Professeur J.P. Gossez pour son soutien et ses encouragements, ainsi qu'au referee pour ses suggestions concernant le théorème 2.

## 2. Préliminaires

*2.a.* — On appelle $N$-fonction toute fonction $A$ définie sur $\mathbb{R}$ paire continue convexe, vérifiant : $A(0) = 0$, $A(t) > 0$ si $t > 0$ et $A(t)/t \to 0$ (resp. $\to +\infty$) lorsque $t \to 0$ (resp. $t \to +\infty$).

Une $N$-fonction $A$ vérifie la condition $\Delta_2$ (resp. $\Delta_2$ à l'infini) s'il existe $k > 0$ (resp. $k > 0$ et $t_0 > 0$) tel que $A(2t) \leq kA(t)$ $\forall\, t \geq 0$ (resp. $\forall\, t \geq t_0$).

Nous dirons qu'une $N$-fonction $A$ domine une $N$-fonction $B$ (resp. à l'infini) s'il existe $K > 0$ (resp. $K > 0$ et $t_0 > 0$) tel que $B(t) \leq A(Kt)$ $\forall\, t \geq 0$ (resp. $\forall\, t \geq t_0$). $A$ et $B$ sont dites équivalentes (resp. équivalentes à l'infini) si $A$ domine $B$ et $B$ domine $A$ (resp. à l'infini).

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A$ une $N$-fonction. L'espace de Orlicz $L_A(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles $u$ mesurables sur $\Omega$ telles que :

$$\int_\Omega A\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) \mathrm{d}x < +\infty \quad \text{pour un certain } \lambda = \lambda(u) > 0\,.$$

On munit $L_A(\Omega)$ de la norme (de Luxembourg [12]) :

$$\|u\|_{A,\Omega} = \|u\|_A = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega A\Big(\frac{u(x)}{\lambda}\Big)\,\mathrm{d}x \leq 1\right\}.$$

Rappelons que deux $N$-fonctions équivalentes (resp. équivalentes à l'infini) définissent le même espace d'Orlicz pour tout ouvert $\Omega$ (resp. ouvert de mesure finie) de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $E_A(\Omega)$ la fermeture dans $L_A(\Omega)$ de l'espace des fonctions mesurables bornées à supports bornés dans $\overline{\Omega}$.

$E_A(\Omega)$ coïncide avec $L_A(\Omega)$ si et seulement si $A$ vérifie la condition $\Delta_2$ (au voisinage de l'infini seulement, si $\Omega$ est de mesure finie).

Le dual de $E_A(\Omega)$ s'identifie à $L_{\overline{A}}(\Omega)$ où $\overline{A}$ est la $N$-fonction conjuguée de $A$ définie par $\overline{A}(t) = \sup\{st - A(s) \mid s \geq 0\}$ pour $t \geq 0$ (voir [12]).

Le lemme suivant constitue une généralisation de l'inégalité de Hölder (voir [13]).

LEMME 1. [13].— *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $A$, $B$, $C$ trois $N$-fonctions.*

*Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ et $k_0 > 0$ tel que :*

$$A^{-1}(t)B^{-1}(t) \leq k_0 C^{-1}(t) \quad (\forall\, t \geq t_0)\,.$$

*Alors, pour tout $f \in L_A(\Omega)$ et $g \in L_B(\Omega)$, $fg \in L_C(\Omega)$*

*et* $$\|fg\|_C \leq K\|f\|_A\|g\|_B\,, \quad K = K(A,B,C,\Omega)\,.$$

*2.b.*— Soit $m$ un entier $\geq 1$, l'espace d'Orlicz-Sobolev $W^m L_A(\Omega)$ (resp. $W^m E_A(\Omega)$) est l'espace des fonctions $u \in L_A(\Omega)$ (resp. $E_A(\Omega)$) dont les dérivées au sens des distributions d'ordre $\leq m$ sont dans $L_A(\Omega)$ (resp. $E_A(\Omega)$). On munit $W^m L_A(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{m,A,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{A,\Omega}\,.$$

En identifiant $W^m L_A(\Omega)$ (resp. $W^m E_A(\Omega)$) à un sous-espace de $\prod L_A$ (resp. $\prod E_A$) (le nombre de copies dans ce produit est égale au nombre de dérivées d'ordre $\leq m$), on désigne par $W_0^m L_A(\Omega)$ (resp. $W_0^m E_A(\Omega)$) la fermeture pour la topologie faible $\sigma(\prod L_A\,, \prod E_{\overline{A}})$ (resp. de la norme de $W^m E_A(\Omega)$) de $D(\Omega)$ dans $W^m L_A(\Omega)$ (resp. $W^m E_A(\Omega)$).

Nous dirons qu'une suite $u_k$ de $W^m L_A(\Omega)$ converge au sens modulaire vers $u \in W^m L_A(\Omega)$ s'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall\, |\alpha| \leq m\,, \quad \int_\Omega A\left(\frac{D^\alpha u_k - D^\alpha u}{\lambda}\right) \mathrm{d}x \to 0 \quad (k \to +\infty)\,.$$

La convergence en norme implique la convergence modulaire et les deux types de convergence coïncide lorsque $A$ vérifie la condition $\Delta_2$ (à l'infini uniquement, si $\Omega$ est de mesure finie).

*2.c.* — Soit $A$ une $N$-fonction et supposons que

$$\int_1^{+\infty} \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}}\, \mathrm{d}\tau = +\infty\,.$$

On désigne par $\widehat{A}$ une $N$-fonction égale à $A$ au voisinage de l'infini et vérifiant (voir [2] lemme 4.4) :

$$\int_0^1 \frac{\widehat{A}^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}}\, \mathrm{d}\tau < +\infty\,.$$

Définissons maintenant une $N$-fonction $\widehat{A_1}$ par :

$$\widehat{A_1}^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\widehat{A}^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}}\, \mathrm{d}\tau$$

et désignons enfin par $A_1$ une $N$-fonction égale à $A$ au voisinage de 0 et à $\widehat{A_1}$ au voisinage de l'infini (voir [2] lemme 4.5 pour la construction d'une telle $N$-fonction).

Si

$$\int_1^{+\infty} A_1^{-1}(\tau)/\tau^{1+\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}\tau = +\infty\,,$$

on recommence la même construction, puis on pose $A_2 = (A_1)_1$, etc...

Soit $q(A, n)$ le plus petit entier $q \geq 0$ tel que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{A_q^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}}\, \mathrm{d}\tau < +\infty\,.$$

Le résultat d'immersion suivant est dû à Adams [2] (voir aussi [6] pour le cas d'un ouvert borné).

LEMME 2. [2]. — *Soient $A$ une $N$-fonction et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône.*

*Alors $W^m L_A(\Omega)$ s'injecte continuement dans $L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$ si $m > q(A,n)$, et dans $L_{A_m}(\Omega)$ si $m \leq q(A,n)$.*

## 3. Résultats principaux

Dans toute la suite $N(t)$ désigne une $N$-fonction vérifiant la condition $\Delta_2$ sur $\mathbb{R}^+$ et égale à $t\log t$ sur $[e, +\infty[$ ($N(t)$ est par exemple une puissance de $t$ au voisinage de 0). Nous avons le lemme fondamental suivant, pour toute $N$-fonction équivalente à $N$ à l'infini.

LEMME 3. — *Soit $A$ une $N$-fonction équivalente à $N$ à l'infini.*

*On a alors :*

*1) $q(A,2) = 2$ ;*

*2) pour tout ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$, si $u$ et $v$ sont à supports compacts dans $\overline{\Omega}$ et appartiennent à $L_{A_1}(\Omega)$ alors le produit $u \cdot v \in L_A(\Omega)$.*

*Démonstration.* — Il est clair qu'il suffit de raisonner dans cette démonstration avec $N$ à la place de $A$ et avec $N_1$ à la place de $A_1$.

**1)** Un calcul simple permet de voir que :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N^{-1}(t)}{t\,[\log t\,]^{-1}} \text{ exite et appartient à } ]0, +\infty[.$$

Ainsi, comme $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\log t}$ diverge, $q(N,2) = q(A,2) \geq 1$.

D'autre part, le comportement pour $t$ tendant vers $+\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_e^t \frac{N_1^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\tau$ est le même que celui de $\displaystyle\int_e^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{1+\frac{1}{2}}} \int_e^\tau \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\,\log u}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_e^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{1+\frac{1}{2}}} \int_e^\tau \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\,\log u} &= 2\int_e^t \frac{\mathrm{d}u}{u\log u} - \frac{2}{\sqrt{t}}\int_e^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\,\log u}\\ &= 2\log(\log t) - \lambda_t\end{aligned}$$

avec $\quad 0 \le \lambda_t = \dfrac{2}{\sqrt{t}} \displaystyle\int_e^t \frac{du}{\sqrt{u}\,\log u} \le \frac{2}{\sqrt{t}} \int_e^t \frac{du}{\sqrt{u}} \le 4\,.$

D'où :

$$\int_e^{+\infty} \frac{N_1^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{2}}}\, d\tau = +\infty \quad \text{et} \quad q(N,2) = q(A,2) = 2\,.$$

**2)** D'après le lemme 1 il suffit de montrer qu'il existe $t_0 > 0$ et $k > 0$ tels que :

$$\left[N_1^{-1}(t)\right]^2 \le \frac{kt}{\log t}, \quad \forall\, t \ge t_0$$

c'est-à-dire :

$$\int_e^t \frac{du}{\sqrt{u}\,\log u} = \int_1^{\log t} \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{\tau}\, d\tau \le k\left[\frac{t}{\log t}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } t \text{ grand}$$

ou encore :

$$\int_1^u \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{\tau}\, d\tau \le k \frac{e^{\frac{u}{2}}}{\sqrt{u}} \quad \text{pour } u \text{ grand.}$$

Or, nous avons :

$$\frac{1}{4}\, \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{\tau} \le \frac{e^{\frac{\tau}{2}}(1-\tau^{-1})}{2\tau} = \left[\frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{\tau}\right]' \quad \forall\, \tau \ge 2,$$

d'où :

$$\frac{1}{4} \int_2^u \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{\tau}\, d\tau \le \frac{e^{\frac{u}{2}}}{\sqrt{u}} \quad \forall\, u \ge 2\,. \square$$

Les théorèmes suivants constituent des résultats d'approximation de type "Hedberg" dans les espaces d'Orlicz-Sobolev construits à partir de $L\log L(\Omega)$ lorsque $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

THÉORÈME 1.— *Soient $m$ un entier $\ge 1$, $A$ une $N$-fonction équivalente à $N$ à l'infini, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété du cône et $u \in W^m L_A(\Omega)$.*

*Alors, il existe $u_k \in W^m L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ à supports compacts dans $\overline{\Omega}$ telle que :*

*(i) $|u_k| \le |u|$ et $u_k \cdot u \ge 0$ p.p.*

*(ii) $u_k$ converge vers $u$ au sens modulaire.*

*Démonstration.*— D'après le lemme 3, $q(A,2) = 2$. Nous sommes donc conduits à distinguer deux cas.

*Premier cas :* $m > 2$

Soit $\eta \in D(\mathbb{R}^2)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 0$ en dehors de la boule unité et $\eta = 1$ dans un voisinage de 0.

Posons $\eta_\ell(x) = \eta(x/\ell)$ et $u_\ell = u\eta_\ell$ ($x \in \mathbb{R}^2$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$).

D'après le lemme 2, $u_\ell \in L^\infty(\Omega)$. D'autre part, on vérifie sans difficulté que $u_\ell \in W^m L_A(\Omega)$ et que $u_\ell$ converge vers $u(\ell \to +\infty)$ au sens modulaire dans $W^m L_A(\Omega)$ (voir [4] et [8]).

$u_\ell$ satisfait clairement les autres conditions du théorème.

*Deuxième cas :* $m \leq 2$

Le cas $m = 1$ est traité dans [9], et peut être aisément tiré des calculs qui suivent.

Supposons donc $m = 2$ et considérons la suite $u_\ell$ construite ci-dessus.

Soit $H$ une fonction de $D(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de 0, telle que $\operatorname{supp} H \subset ]-1, +1[$ et $0 \leq H \leq 1$. Posons :

$$u_{k,\ell}(x) = H\left(\frac{u_\ell(x)}{k}\right) u_\ell(x)\,, \quad x \in \Omega \text{ et } k \in \mathbb{N}^*.$$

Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}\,, \quad i, j = 1, 2.$$

Il est clair que $|u_{k,\ell}| \leq k$, $|u_{k,\ell}| \leq |u|$ et que :

$$u_{k,\ell} \to u_\ell \quad (k \to +\infty) \quad \text{dans } L_N(\Omega).$$

De plus, comme $D_i u_{k,\ell} = \dfrac{1}{k} H'\left(\dfrac{u_\ell}{k}\right) D_i u_\ell \cdot u_\ell + H\left(\dfrac{u_\ell}{k}\right) D_i u_\ell$,

donc : $$D_i u_{k,\ell} \to D_i u_\ell \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (k \to +\infty)$$

et $$|D_i u_{k,\ell}| \leq C|D_i u_\ell|.$$

D'où :

$$D_i u_{k,\ell} \in L_N(\Omega) \quad \text{et} \quad D_i u_{k,\ell} \to D_i u_\ell \quad \text{dans } L_N(\Omega) \quad (k \to +\infty).$$

D'autre part nous avons :

$$D_{i,j}u_{k,\ell} = \frac{1}{k^2} H''\left(\frac{u_\ell}{k}\right) D_i u_\ell \cdot D_j u_\ell \cdot u_\ell + \frac{2}{k} H'\left(\frac{u_\ell}{k}\right) D_i u_\ell \cdot D_j u_\ell$$
$$+ \frac{1}{k} H'\left(\frac{u_\ell}{k}\right) D_{ij} u_\ell \cdot u_\ell + H\left(\frac{u_\ell}{k}\right) D_{ij} u_\ell .$$

Ce qui implique, d'une part que :

$$D_{ij}u_{k,\ell} \to D_{ij}u_\ell \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (k \to +\infty)$$

et d'autre part que :

$$\left|D_{ij}u_{k,\ell}\right| \leq C \quad \left(|D_i u_\ell \cdot D_j u_\ell| + |D_{ij} u_\ell|\right) \text{ p.p.}$$

ce qui montre, d'après les lemmes 2 et 3, que $D_{ij}u_{k,\ell} \in L_N(\Omega)$, et que :

$$D_{ij}u_{k,\ell} \to D_{ij}u_\ell \ \ (k \to +\infty) \ \text{ dans } L_N(\Omega) \quad (N \text{ étant } \Delta_2) .$$

D'où en définitive, $u_{k,\ell} \to u_\ell$ $(k \to +\infty)$ en norme dans $W^2 L_N(\Omega)$.

Cette dernière convergence, ainsi que la convergence de $u_\ell$ vers $u$ au sens modulaire impliquent l'existence d'une suite extraite de $u_{k,\ell}$ qui converge au sens modulaire vers $u$ dans $W^2 L_A(\Omega)$, (voir la démonstration du théorème 4.1 de [4]). □

THÉORÈME 2.— *Soient $m$ un entier $\geq 1$, $A$ une $N$-fonction équivalente à $N$ à infini, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété du segment et $u \in W_0^m L_A(\Omega)$. Alors, il existe $u_k \in W_0^m L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ à support compact dans $\overline{\Omega}$ telle que :*

*(i)* $|u_k| \leq |u|$ *et* $u_k \cdot u \geq 0$ p.p.

*(ii) $u_k$ converge vers $u$ au sens modulaire.*

*Démonstration.*— $\eta$, $\eta_\ell$ et $H$ sont définis comme dans la démonstration du théorème 1.

On distingue là encore deux cas.

*Premier cas : $m > 2 = q(A, 2)$*

On voit de même que la suite $u_\ell = u \cdot \eta_\ell$ vérifiant les conditions du théorème 2.

*Deuxième cas :* $m \le 2 = q(A, 2)$

Nous considérons uniquement le cas $m = 2$ (pour $m = 1$ voir [9]). Posons :

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \complement\Omega \end{cases},$$

$$u_\ell = \widetilde{u} \cdot \eta_\ell \quad \text{et} \quad u_{k,\ell}(x) = H\left(\frac{u_\ell(x)}{k}\right) \cdot u_\ell(x).$$

Puisque $u \in W_0^2 L_A(\Omega)$, donc $\widetilde{u} \in W^2 L_A(\mathbb{R}^2)$.

De plus des calculs identiques à ceux de la démonstration du théorème 1, montrent que $u_{k,\ell} \in W^2 L_A(\mathbb{R}^2)$ et qu'il existe une suite extraite de $u_{k,\ell}$ qui converge au sens modulaire vers $\widetilde{u}$ dans $W^2 L_A(\mathbb{R}^2)$.

Il est clair qu'il suffit pour conclure de vérifier que $u_{k,\ell} \in W_0^2 L_A(\Omega)$, pour tout $k, \ell$ dans $\mathbb{N}$. Les autres conditions du théorème 2 étant évidemment toutes vérifiées.

En effet, on pose pour simplifier $v = u_{k,\ell}$.

Par définition de la propriété du segment, il existe un recouvrement ouvert localement fini $\{\mathcal{O}_i\}$ de $\partial\Omega$ et une suite correspondante de vecteurs, $\{y_i\}$ tels que pour tout $x \in \overline{\Omega} \cap \mathcal{O}_i$ et tout $t \in \, ]0, 1[$, $x + t y_i \in \Omega$.

Si le support $K$ de $v$, qui est compact, est inclus dans $\Omega$, alors une simple régularisation de $v$ permet d'obtenir le résultat (voir [7] lemme 1.6).

Sinon, $K$ rencontre $\partial\Omega$ et en utilisant une partition de l'unité on est ramené au cas où $K \subset \mathcal{O}_i$ pour un certain $i$.

Posons alors dans ce cas $v_t(x) = v(x - t y_i)$, $t \in \, ]0, 1[$.

D'après la propriété du segment le support de $v_t$ est inclus dans $\Omega$.

Ainsi, comme $v_t \in W^2 L_A(\mathbb{R}^2)$, alors en régularisant, on voit que $v_t \in W_0^2 L_A(\Omega)$. Il suffit maintenant pour conclure d'utiliser le fait que $v_t \to v$ ($t \to 0$) dans $W^2 L_A(\Omega)$ pour la topologie faible $\sigma(\prod L_A, \prod L_{\overline{A}})$ (d'ailleurs $v_t \to v$ pour une convergence plus forte : la convergence modulaire [8]). □

## 4. Remarques

*Remarque* 4.1. — On peut voir sans difficultés que la même méthode de démonstration permet d'obtenir des théorèmes analogues pour toute $N$-fonction équivalente à l'infini à $t \log^\gamma t$ ($\gamma > 0$), $t \log(\log t)$...

*Remarque* 4.2. — Notre construction de l'approximation de type Hedberg s'applique aussi au cas limite $u \in W^{m,p}(\Omega)$ avec :

$n = mp$, $p \geq 1$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône.

En effet, soient $\eta_\ell$ et $H$ les fonctions définies dans la démonstration du théorème 1. Posons

$$u_\ell = u \cdot \eta_\ell \quad (\ell \in \mathbb{N}^*)$$

et

$$u_{k,\ell}(x) = H\left(\frac{u_\ell(x)}{k}\right) u_\ell(x), \quad x \in \Omega, \ k \in \mathbb{N}^*$$

Nous avons pour tout $|\alpha| \leq m$ :

$$D^\alpha u_{k,\ell} = \sum_{0<\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \cdot D^\beta \left[H\Big(\frac{1}{k}\, u_\ell\Big)\right] D^{\alpha-\beta} u_\ell + H\Big(\frac{1}{k}\, u_\ell\Big) D^\alpha u_\ell \tag{1}$$

et

$$D^\beta \left[H\Big(\frac{1}{k}\, u_\ell\Big)\right] = \sum_\lambda \frac{1}{k^\lambda} H^{(\lambda)}\Big(\frac{1}{k}\, u_\ell\Big) D^{\gamma_1} u_\ell \cdots D^{\gamma_\lambda} u_\ell \tag{2}$$

où la somme dans (2) porte sur des indices $\lambda \in \mathbb{N}$ tels que :

$$1 \leq \lambda \leq |\beta| \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\lambda} |\gamma_i| = |\beta|$$

(voir [3] pour une démonstration par récurrence de (2)).

Ce qui montre en particulier que $D^\alpha u_{k,\ell} \to D^\alpha u_\ell$ p.p. dans $\Omega$.

$$D^{\alpha-\beta} u_\ell \in W^{m-|\alpha|+|\beta|,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad D^{\gamma_i} u_\ell \in W^{m-|\gamma_i|,p}(\Omega).$$

D'où : $D^{\alpha-\beta} u_\ell \in L^q(\Omega)$ et $D^{\gamma_i} u_\ell \in L^{p_i}$ avec :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m-|\alpha|+|\beta|}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p} - \frac{m-|\gamma_i|}{n}.$$

Ce qui implique d'après (1), (2), l'inégalité de Holder et le fait que

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{p} - \frac{m-|\alpha|}{n} = \frac{1}{q} + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{1}{p_i},$$

$$D^\alpha u_{k,\ell} \in L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad u_{k,\ell} \to u_\ell \quad (k \to +\infty) \quad \text{dans } W^{m,p}(\Omega). \ \square$$

## 5. Applications

Les approximations décrites dans les théorèmes 1 et 2 permettent de résoudre des problèmes aux limites associées aux équations fortement non-linéaires de la forme :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(u, \nabla u, \ldots, \nabla^m u) + g(x,u) = f \quad (x \in \Omega) \tag{3}$$

$\Omega$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, avec des coefficients $A_\alpha$ ayant une croissance logarithmique en $u$ et ses dérivées, et une fonction $g$ sur laquelle on ne suppose aucune hypothèse de croissance, mais seulement une condition de signe (voir [4] et [5]).

Les théorèmes permettent aussi de résoudre le problème (étroitement lié à (3)) de Brézis-Browder sur l'action de certaines distributions de $W^{-m}L_{\overline{A}}(\Omega)$, $A$ étant une $N$-fonction équivalente à $t \log t$ à l'infini et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (voir [4] et [5]).

## Références


[1] ADAMS (R.) .— *Sobolev spaces*, Acad. Press (1975)

[2] ADAMS (R.) .— *On the Orlicz-Sobolev Imbedding theorem*, J. Func. Analysis, **24** (1977) pp. 241-257

[3] BENKIRANE (A.) .— *Potentiel de Riesz et problèmes elliptiques dans les espaces d'Orlicz*, Thèse de Doctorat, Université libre de Bruxelles (1988)

[4] BENKIRANE (A.) and GOSSEZ (J.P.) .— *An approximation theorem in higher order Orlicz-Sobolev spaces and applications*, Studia Math., **92** (1989) pp. 231-255

[5] BRÉZIS (H.) et BROWDER (F.) .— *Some properties of higher-order Sobolev spaces*, J. Math. Pures Appl., **61** (1982) pp. 245-259

[6] DONALDSON (T.) and TRUDINGER (N.) .— *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Funct. Anal., **8** (1971) pp. 52-75

[7] GOSSEZ (J.P.) .— *Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients*, Trans. Amer. Soc., **190** (1974) pp. 163-2??

[8] GOSSEZ (J.P.) .— *Some approximation properties in Orlicz-Sobolev spaces*, Studia Math., **74** (1982) pp. 17-24

[9] GOSSEZ (J.P.) .— *A strongly non linear elliptic boundary value problem, in Orlicz-Sobolev spaces*
Proc. Sympos. Pure. Math., **45**, Amer. Math. Soc. (1986) pp. 455-462

[10] HEBDERG (L.) .— *Two approximation properties in functions spaces,*
Ark. Math., **16** (1978) pp. 51-81

[11] HEBDERG (L.) .— *Approximation in Sobolev spaces and non linear potential theory,*
Proc. symp. Pur. Math. Amer. Math. Soc., **45** (1986) pp. 473-480

[12] KRASNOLEK'SKII (M.) and RUTICKII (YA.) .— *Convex fonctions and Orlicz spaces,*
Noordhoff (1961)

[13] O'NEIL (R.) .— *Fractional integration in Orlicz spaces,*
Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965) pp. 300-328

[14] WEBB (J.) .— *Boundary value problems for strongly non linear elliptic equations,*
J. London Math. Soc. **21** (1980) pp. 123-132